ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

G. BENGEL
PIERRE SCHAPIRA

Décomposition microlocale analytique des distributions

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 3 (1979), p. 101-124
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_101_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 101-124

DÉCOMPOSITION MICROLOCALE ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

par G. BENGEL et P. SCHAPIRA

En souvenir de André Martineau

TABLE DES MATIERES

Introduction.

Soit M une variété différentiable, F un fermé de M union de fermés F_1 et F_2. Il est maintenant classique que les distributions de M à support dans F ne sont décomposables suivant F_1 et F_2 (i.e. sont somme d'une distribution à support dans F_1 et d'une distribution à support dans F_2) que si F_1 et F_2 sont "régulièrement situés" (cf. S. Lojasiewicz [12], B. Malgrange [13]). Nous montrons dans cet article que si M est une variété analytique réelle et que si au lieu de décomposer les distributions suivant leur support on les décompose suivant leur support singulier analytique, cette décomposition est toujours possible, sans restrictions sur F_1 et F_2.

En fait nous démontrons un théorème plus précis, version microlocale du précédent. Soit $\mathcal{C}$ le faisceau des microfonctions de M. Sato sur S^*M, le fibré cotangent en sphères à M (cf. [17]) et soit $\mathcal{C}^f$ (resp. $\mathcal{C}^d$) le sous faisceau de $\mathcal{C}$ correspondant aux distributions (resp. aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$) : on montre que l'on peut décomposer les sections des faisceaux $\mathcal{C}^f$ ou $\mathcal{C}^d$. En particulier si on note $SS(u)$ le support singulier analytique dans S^*M d'une distribution u de M, ($WFA(u)$ dans la terminologie de L. Hörmander [8]), et si $SS(u)$ est la réunion de deux fermés F_1 et F_2, on peut trouver des distributions (des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ si u est $\mathcal{C}^\infty$) u_1 et u_2 telles que $u = u_1 + u_2$ et $SS(u_i) \subset F_i$ $(i = 1, 2)$. Cela permet en particulier de préciser les énoncés du théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau [15]. Signalons que le théorème de décomposition du support singulier analytique des distributions avait été conjecturé par J. Bros et D. Iagolnitzer [4].

Pour démontrer ces résultats on utilise une technique de J.M. Bony [1] (adaptation d'une méthode dûe à M. Kashiwara [10] cf. aussi [17], [11]) qui permet, grâce à un "noyau de Radon non linéaire" de représenter les sections des faisceaux $\mathcal{C}^f$ ou $\mathcal{C}^d$ comme des intégrales de distributions ou de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur S^*M dont le support singulier analytique est contenu dans le fermé canonique de $S^*(S^*M)$. On est alors ramené à un problème de Cousin à croissance lente dans un tuboïde que l'on résoud grâce aux techniques de L. Hörmander [7] et à un théorème de J. Bros et D. Iagolnitzer [3], version "tuboïdale" du théorème de Cartan-Grauert sur les voisinages d'holomorphie de $\mathbf{R}^n$.

Nous démontrons aussi, par les mêmes techniques, que si Ω est un ouvert strictement pseudo-convexe dans une variété analytique complexe, de bord $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$, le faisceau sur $\partial\Omega$ des valeurs au bord de fonctions holomorphes de Ω, à croissance lente sur $\partial\Omega$ (modulo les fonctions holomorphes au voisinage de $\partial\Omega$) a la propriété de décomposition du support.

Cet article a été en partie réalisé alors que le premier auteur était invité par l'Université Paris-Nord.

1. Enoncé des résultats.

Soit M une variété analytique réelle dénombrable à l'infini. Nous noterons respectivement $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{B}$, les faisceaux sur M d'espaces vectoriels complexes, des germes de fonctions analytiques, de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, de distributions, d'hyperfonctions.

Soit S^*M le fibré cotangent en sphères à M. Le faisceau $\mathcal{C}$ des microfonctions de M. Sato sur S^*M (en fait sur iS^*M mais nous n'écrirons pas "i") est construit dans [17]. Rappelons que c'est un faisceau flasque et que si on note π la projection de S^*M sur M, $\pi_*\mathcal{C} \simeq \mathcal{B}/\mathcal{A}$. Nous noterons SS( ) le support dans le faisceau $\mathcal{C}$. Si u est une hyperfonction sur M, nous l'identifierons parfois à son image dans $\mathcal{B}(M)/\mathcal{A}(M) \simeq \mathcal{B}/\mathcal{A}(M) \simeq \mathcal{C}(S^*M)$ et nous appellerons support singulier analytique le fermé $SS(u)$ de S^*M. En particulier u est analytique en dehors de $\pi(SS(u))$.

Si u est une distribution, J.M. Bony [1] a démontré que $SS(u)$ coïncide avec $WFA(u)$, le front d'onde analytique de L. Hörmander [8] ainsi qu'avec le support essentiel de J. Bros et D. Iagolnitzer [4]. Nous désignerons par $\mathcal{C}^f$ (resp. $\mathcal{C}^d$) le sous faisceau du faisceau $\mathcal{C}$ des microfonctions d'ordre fini (resp. des microfonctions différentiables). Si Ω est un ouvert de S^*M,

$$u \in \Gamma(\Omega, \mathcal{C}^f) \text{ (resp. } \Gamma(\Omega, \mathcal{C}^d)) \iff \forall (x, \eta) \in S^*(\Omega), \exists \widetilde{u} \in \mathcal{D}'(M)$$

$$\text{(resp. } \mathcal{C}^\infty(M)) \text{ tel que } (x, \eta) \notin SS(u - \widetilde{u}).$$

Les faisceaux $\mathcal{C}^f$ et $\mathcal{C}^d$ ont déjà été introduits (sous un autre nom) par J.M. Bony [1].

Nous allons démontrer que les faisceaux $\mathcal{C}^f$ et $\mathcal{C}^d$ ont la propriété de décomposition du support annoncée dans l'introduction. Pour cela il nous semble utile de donner un nom à une telle propriété.

Nous renvoyons au livre de M. Godement pour ce qui concerne la théorie des faisceaux [5].

En particulier nous notons $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ l'ensemble des sections sur X à support dans Z d'un faisceau de groupes $\mathcal{F}$. Si u est une section de $\mathcal{F}$ nous notons $\mathrm{supp}(u)$ son support.

DEFINITION 1.1. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique* X. *Nous dirons que* $\mathcal{F}$ *est souple si pour tout ouvert* Ω *de* X, *tous fermés* Z, Z_1, Z_2 *de* Ω *avec* $Z = Z_1 \cup Z_2$, *toute section* $u \in \Gamma_Z(\Omega, \mathcal{F})$, *il existe* $u_i \in \Gamma_{Z_i}(\Omega, \mathcal{F})$ $(i = 1, 2)$ *avec* $u = u_1 + u_2$.

Les faisceaux flasques sont souples et les faisceaux souples sur un espace paracompact sont mous.

THEOREME 1.2. – *Les faisceaux* $\mathcal{C}^f$ *et* $\mathcal{C}^d$ *sont souples. De plus :* $\pi_* \mathcal{C}^f \simeq \mathcal{D}'/\mathcal{A}$, $\pi_* \mathcal{C}^d \simeq \mathcal{C}^\infty/\mathcal{A}$.

COROLLAIRE 1.3. – *Soit* $u \in \mathcal{D}'(M)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M)$), *avec* $F = SS(u)$. *Soit* $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ *un recouvrement fermé de* F *dans* S^*M. *Alors il existe* $u_i \in \mathcal{D}'(M)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M)$), *avec* $SS(u_i) \subset F_i$ *et* $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$.

COROLLAIRE 1.4. – *Soit* $u \in \mathcal{D}'(M)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M)$), u *étant analytique hors d'un fermé* F *de* M. *Soit* $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ *un recouvrement fermé de* F *dans* M. *Alors il existe* $u_i \in \mathcal{D}'(M)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(M)$), u_i *étant analytique hors de* F_i, *tels que* $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$.

COROLLAIRE 1.5. ("Edge of the Wedge theorem"). – *Soit* u_i $(i = 1 \dots p)$ *des distributions* (resp. *des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$) *sur* M *avec* $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0$. *Soit* $F_i = SS(u_i) \subset S^*M$. *Alors il existe des distributions* (resp. *des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$) $u_{i,j}$ $(i, j = 1 \dots p)$ *telles que :*

$$\forall i \quad u_i = \sum_{j \neq i} u_{i,j}$$

$$\forall i, j \quad SS(u_{i,j}) \subset F_i \cap F_j .$$

Quand les fermés F_i sont de la forme $M \times I$, où M est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et I une partie convexe fermée propre de $\mathbf{S}^{n-1}$, et que l'on interprète les distributions en terme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, on améliore ainsi le théorème du "Edge of the Wedge" de A. Martineau [14], [15], ainsi que la version de J. Bros et D. Iagolnitzer [4] de ce théorème.

Remarque 1.6. – Identifions M à la diagonale de $M \times M$ et S^*M au fibré conormal à cette diagonale dans $S^*(M \times M)$. Soit $\Omega^{(0,n)}$ le faisceau des formes différentielles analytiques sur $M \times M$ de type $(0, n)$, n désignant la dimension de M. On peut représenter l'opérateur pseudo-différentiel 1_M par un noyau K appartenant à $\Gamma(M \times M, \mathcal{D}'/\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{Q}_{M\times M}} \Omega^{(0,n)})$ et on aura

$$SS(K) = S^*_M(M \times M) \cong S^*M$$

$$\forall u \in \Gamma(M, \mathcal{D}'/\mathcal{Q})$$

on a $$u(x) = \int K(x, y)\, u(y)\, dy.$$

Si $S^*M = F_1 \cup F_2$ on peut donc trouver d'après le théorème 1.2 des éléments $K_i \in \Gamma(M \times M, \mathcal{D}'/\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{Q}_{M\times M}} \Omega^{(0,n)})$ avec $K = K_1 + K_2$ et $SS(K_i) \subset F_i$. On en déduit une décomposition correspondante de u. En particulier les faisceaux $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^f$, $\mathcal{C}^d$ sont fins [5].

Remarque 1.7. – Le corollaire 1.3 avait été annoncé par Bros et Iagolnitzer dans [4] (au moins quand les fibres de F_i sont convexes) et deux esquisses de démonstration ébauchées. Cependant comme aucune démonstration complète n'est parue depuis et que les méthodes proposées nous semblaient techniquement difficiles, il ne nous a pas paru inutile de publier notre démonstration. Il n'en reste pas moins que l'un des outils essentiels est le théorème des tuboïdes d'holomorphie de Bros et Iagolnitzer [3].

Le faisceau $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}^f$) a des liens étroits avec le faisceau des valeurs au bord des fonctions holomorphes (resp. des fonctions holomorphes à croissance lente) sur le bord d'un ouvert pseudo-convexe : quand ce bord est analytique réel ces faisceaux sont en fait localement isomorphes, par transformation canonique complexe (M. Kashiwara, non publié). Aussi le théorème 1.8 ci-dessous est-il équivalent(1) (du moins quand le bord de Ω est analytique réel) au théorème 1.2, mais nous en donnerons une démonstration directe au paragraphe 6.

(1) Depuis de la rédaction de cet article la Note de L. Boutet de Monvel (C.R. Acad. Sci. Paris, 287 (1978), 855-856) est parue. Celle-ci établit l'isomorphisme pour les distributions.

Soit X une variété analytique complexe, dénombrable à l'infini, Ω un ouvert de X strictement pseudo-convexe de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit j l'injection de Ω dans X. On définit le faisceau $\mathcal{O}_+$ par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}|\overline{\Omega} \longrightarrow j_*(\mathcal{O}|\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}_+ \longrightarrow 0 .$$

C'est un faisceau concentré sur $\partial\Omega$, que l'on identifiera à son image inverse sur $\partial\Omega$.

On note b l'application "valeur au bord" de $j_*(\mathcal{O}|\Omega)$ dans $\mathcal{O}_+$. On définit le sous-faisceau $\mathcal{O}_+^f$ de $\mathcal{O}_+$ par :

$u \in (\mathcal{O}_+^f)_x \iff$ il existe un voisinage ω de x dans X, φ holomorphe dans $\Omega \cap \omega$, φ à croissance lente au bord de $\Omega \cap \omega$ avec $b(\varphi) = u$. (Rappelons que l'on dit que φ est à croissance lente au bord de $\Omega \cap \omega$ si il existe des constantes $C > 0$, $k \in \mathbf{N}$, avec $|\varphi(z)| \leqslant C\, d(z, \complement\, \Omega \cap \omega)^{-k})$.

THEOREME 1.8. – *Le faisceau* $\mathcal{O}_+^f$ *est souple.*

Remarque 1.9. – Il ne serait pas difficile de démontrer que le faisceau $\mathcal{O}_+$ est flasque. De même on pourrait, en modifiant légèrement la démonstration du théorème 1.2, donner une nouvelle démonstration de ce que le faisceau $\mathcal{C}$ est flasque.

2. Faisceaux souples.

Nous avons donné la définition des faisceaux souples au paragraphe 1.

THEOREME 2.1. – *Soit* X *un espace topologique localement compact et paracompact et* $\mathcal{F}$ *un faisceau de groupes abéliens sur* X. *Soit* A *un sous groupe de* $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ *l'espace des sections à support compact de* F. *On suppose* A *stable par décomposition du support, i.e. pour tout* u *appartenant à* A, *pour tout fermé de* X, Z, Z_1, Z_2, *avec* $Z = Z_1 \cup Z_2$, $\operatorname{supp}(u) \subset Z$, *il existe* u_i *appartenant à* A $(i = 1, 2)$ *avec* $\operatorname{supp}(u_i) \subset Z_i$, $u = u_1 + u_2$. *Alors il existe un unique sous faisceau* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{F}$ *tel que* :

a) $\Gamma_c(X, \mathcal{G}) = A$,

b) $\mathcal{G}$ *est souple.*

De plus pour tout $x \in X$, $\mathcal{G}_x = A_x$ (*tout germe de* $\mathcal{G}$ *est le germe d'un élément de* A).

Démonstration. – L'unicité de $\mathcal{G}$ résulte immédiatement de ce que X est localement compact.

Soit Ω un ouvert de X. Pour définir $\mathcal{G}(\Omega)$ considérons une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1} \subset\subset \Omega, \bigcup_n \Omega_n = \Omega$ (une telle suite existe d'après les hypothèses faites sur X).

Nous dirons par abus de langage que $(\Omega_n)_n$ est un recouvrement ouvert croissant relativement compact de Ω.

Pour simplifier les notations posons pour Z fermé de X :

$$A_Z = \Gamma_Z(X, F) \cap A .$$

On a un système projectif d'applications :

$$A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} \longrightarrow A_{\bar{\Omega}_{n-1}}/A_{\partial\Omega_{n-1}}$$

construite grâce à l'application naturelle

$$A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} \longrightarrow A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\bar{\Omega}_n \setminus \Omega_{n-1}}$$

et à l'isomorphisme

$$A_{\bar{\Omega}_{n-1}}/A_{\partial\Omega_{n-1}} \xrightarrow{\sim} A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\bar{\Omega}_n \setminus \Omega_{n-1}}$$

ce dernier isomorphisme résultant de la propriété de décomposition du support de A.

On pose :
$$\mathcal{G}(\Omega) = \varprojlim_n A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} .$$

Il est clair que $\mathcal{G}(\Omega)$ ne dépend pas de la suite Ω_n choisie, et que $\Omega \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ définit un préfaisceau, les flèches de restriction $\mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}(\omega)$ provenant des flèches (pour $\omega \subset \Omega$, $\omega_n \subset \Omega_n$) :

$$\begin{tikzcd}
A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & A_{\bar{\omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} \arrow[dl, "\sim"'] \\
& A_{\bar{\Omega}_n}/A_{\bar{\Omega}_n - \omega_n} &
\end{tikzcd}$$

Le préfaisceau $\mathcal{G}$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{F}$ car la flèche $A_{\overline{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n} \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega_n)$ est injective, et par passage à la limite projective il en sera de même de la flèche $\mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega)$.

Pour démontrer que $\mathcal{G}$ est un faisceau il suffit donc de vérifier le deuxième axiome des faisceaux. Considérons d'abord le cas où l'ouvert Ω de X est union de deux ouverts Ω_1 et Ω_2. Soit $u_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$, $u_1 = u_2$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Soit $(\Omega_i^n)_n$ des recouvrements croissants relativement compacts de Ω_i, et $u_i^n \in A_{\overline{\Omega}_i^n}$ des représentants du système projectif $u_i^n \in A_{\overline{\Omega}_i^n}/A_{\partial\Omega_i^n}$ définissant u_i.

$u_1^n - u_2^n = 0$ dans $\mathcal{G}(\Omega_1^n \cap \Omega_2^n)$ et donc

$$\operatorname{supp}(u_1^n - u_2^n) \cap \Omega_1^n \cap \Omega_2^n = \emptyset .$$

Comme A possède la propriété de décomposition du support on peut écrire :

$$u_1^n - u_2^n = v_1^n - v_2^n$$
$$v_i^n \in A_{\overline{\Omega}_i^n \setminus \Omega_j^n} \quad i \neq j .$$

Alors

$$u_1^n - v_1^n = u_2^n - v_2^n = w^n$$
$$\operatorname{supp}(w^n) \subset \overline{\Omega_1^n \cap \Omega_2^n} .$$

Posons

$$u_n = v_1^n + v_2^n + w^n .$$

Alors $u_n = u_i^n$ dans Ω_i^n et la famille $(u_n)_n$ définit un élément de $\varprojlim_n A_{\overline{\Omega_1^n \cup \Omega_2^n}}/A_{\partial(\Omega_1^n \cup \Omega_2^n)}$ qui prolongera u_1 et u_2.

Soit maintenant $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de Ω, et soit $u_i \in \mathcal{G}(\Omega_i)$ avec $u_i | \Omega_i \cap \Omega_j = u_j | \Omega_i \cap \Omega_j$.

On peut extraire de ce recouvrement un recouvrement dénombrable, que l'on peut supposer croissant d'après ce qui précède. Soit donc $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ un recouvrement croissant de Ω, et choisissons pour tout n un recouvrement croissant et relativement compact de Ω_n : $\Omega_n = \bigcup_p \Omega_n^p$. On peut construire les Ω_n^p de telle sorte que $\forall p$ $\Omega_n^p \subset \Omega_{n+1}^p$. Alors $(\Omega_n^n)_n$ est un recouvrement croissant et relativement compact de Ω et le système $u_n^n \in A_{\overline{\Omega}_n^n}/A_{\partial\Omega_n^n}$ définit un élément $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ dont la restriction à chaque Ω_i sera u_i.

Démontrons que le faisceau $\mathcal{G}$ est souple.

Soit Ω un ouvert de X, F, F_1, F_2 des fermés de Ω avec $F = F_1 \cup F_2$.

Soit $(\Omega_n)_n$ un recouvrement ouvert croissant relativement compact de Ω. Posons, pour Z fermé de Ω :

$$A^n_Z = A_{Z \cap \overline{\Omega}_n}\,,\quad B^n_Z = A_{Z \cap \partial\Omega_n}$$
$$C^n_Z = A_{Z \cap \overline{\Omega}_n} / A_{Z \cap \partial\Omega_n}$$

et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^n_{F_1 \cap F_2} \arrow[r] \arrow[d] & A^n_{F_1} \oplus A^n_{F_2} \arrow[r] \arrow[d] & A^n_{F_1 \cup F_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^n_{F_1 \cap F_2} \arrow[r] \arrow[d] & B^n_{F_1} \oplus B^n_{F_2} \arrow[r] \arrow[d] & B^n_{F_1 \cup F_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^n_{F_1 \cap F_2} \arrow[r] \arrow[d] & C^n_{F_1} \oplus C^n_{F_2} \arrow[r] \arrow[d] & C^n_{F_1 \cup F_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les colonnes sont exactes et les deux premières lignes sont exactes d'après la propriété de A. On en conclut que la suite

$$(*)_n \quad 0 \longrightarrow C^n_{F_1 \cap F_2} \longrightarrow C^n_{F_1} \oplus C^n_{F_2} \longrightarrow C^n_{F_1 \cup F_2} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les suites C^n_Z vérifient la condition de Mittag-Leffler [6] i.e. : $\forall n$ la suite indexée par ν : $\operatorname{Im}(C^{n+\nu}_Z \longrightarrow C^n_Z)$ est stationnaire.

En effet les flèches

$$\begin{tikzcd}
A_{\overline{\Omega}_{n+1} \cap Z} / A_{\partial\Omega_{n+1} \cap Z} \arrow[dr] & \\
 & A_{\overline{\Omega}_n \cap Z} / A_{\partial\Omega_n \cap Z} \\
A_{\overline{\Omega}_{n+2} \cap Z} / A_{\partial\Omega_{n+2} \cap Z} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ont mêmes images puisque si u appartient à $A_{\overline{\Omega}_{n+2} \cap Z}$ on peut trouver $v \in A_{\overline{\Omega}_{n+1} \cap Z}$ tel que $u - v \in A_{(\overline{\Omega}_{n+2} \setminus \Omega_{n+1}) \cap Z}$.

On peut donc passer à la limite projective dans les suites exactes $(*)_n$ et on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma_{F_1 \cap F_2}(\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma_{F_1}(\Omega, \mathcal{G}) \oplus \Gamma_{F_2}(\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma_{F_1 \cup F_2}(\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

car $\varprojlim_n C_Z^n = \Gamma_Z(\Omega, \mathcal{G})$.

Vérifions que $\Gamma_c(X, \mathcal{G}) = A$. Soit $u \in \varprojlim_n A_{\overline{\Omega}_n}/A_{\partial\Omega_n}$, avec $u = 0$ dans $X \backslash \overline{\Omega}_{n_0}$. Alors il existe $u_{n_0} \in A_{\overline{\Omega}_{n_0}}$ tel que $\forall n > n_0 + 1$ $u_n = u_{n_0} + v_n$, $v_n \in A_{\overline{\Omega}_n \backslash \Omega_{n_0}}$.

L'élément $u_{n_0} \in A$ est égal à u dans $\Gamma(X, \mathcal{F})$ et donc $\Gamma_c(X, \mathcal{G})$ est contenu dans A. L'inclusion inverse est non moins évidente.

L'égalité $\mathcal{G}_x = A_x$ pour tout $x \in A$ résulte alors de ce que $\mathcal{G}$ est souple et X localement compact.

THEOREME 2.2. – *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X, espace topologique localement compact et paracompact. Soit $X = \bigcup_i \Omega_i$ un recouvrement ouvert de X. On suppose que pour tout i le faisceau $\mathcal{F} | \Omega_i$ sur Ω_i est souple. Alors $\mathcal{F}$ est souple.*

Démonstration. – D'après le théorème 2.1 il suffit de vérifier que $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ a la propriété de décomposition du support. On est donc ramené au cas où $X = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Soit $Z'_i = X \backslash \Omega_j$ $(i = 1, 2, i \neq j)$. Alors Z'_i est fermé et contenu dans Ω_i, et $Z' \cap Z'_2 = \phi$. Soient $\widetilde{\Omega}_1$ et $\widetilde{\Omega}_2$ deux ouverts disjoints tels que $\widetilde{\Omega}_i \supset Z'_i$, $\widetilde{\Omega}_i \subset \Omega_i$. Posons $Z_i = X \backslash \widetilde{\Omega}_j$. Alors Z_i est fermé dans X, $Z_i \subset \Omega_i$, $Z \cup Z_2 = X$.

Soit maintenant F un fermé de X, $u \in \Gamma_F(X, \mathcal{F})$. Soit F_1 et F_2 deux fermés de X avec $F = F_1 \cup F_2$.

Dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$ on peut écrire $u = u_1 + u_2$ avec

$$\operatorname{supp}(u_i) \subset F \cap Z_i \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 .$$

Comme $Z_j \cap \partial\Omega_j = \phi$, u_i coïncide avec u au voisinage de $\partial\Omega_j$ et se prolonge donc à Ω_i. On a alors : $u = u_1 + u_2$ dans X et $\operatorname{supp}(u_i) + Z_i = F$.

Il reste à décomposer, dans Ω_i, u_i en $u_i^1 + u_i^2$, avec : $\operatorname{supp}(u_i^k) \subset Z_i \cap F_k$.

Alors

$$\begin{aligned} u &= (u_1^1 + u_1^2) + (u_2^1 + u_2^2) \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

avec $\operatorname{supp}(v_i) \subset F_i$.

3. Problèmes de Cousin à croissance.

DEFINITION 3.1. – *Soit* D *un ouvert borné de* $\mathbf{C}^n$. *On désigne par* $\mathcal{O}_\gamma(D)$ *l'espace des fonctions holomorphes sur* D, $f \in \mathcal{O}(D)$, *telles qu'il existe un entier* k *avec* :

$$\int_D |f(z)|^2 \, d(z, \complement D)^k \, d\lambda < \infty \tag{3.1}$$

où $d(z, \complement D)$ *désigne la distance de* z *au complémentaire de* D, *et* $d\lambda$ *désigne la mesure de Lebesgue de* $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$.

L'espace $\mathcal{O}_\gamma(D)$ peut aussi être décrit comme l'espace des fonctions holomorphes sur D à croissance lente au bord de D.

THEOREME 3.2. – *Soit* $f \in \mathcal{O}(D)$. *Alors* $f \in \mathcal{O}_\gamma(D)$ *si et seulement si il existe des constantes* C *et* $k \geqslant 0$ *telles que* :

$$|f(z)| \leqslant C \, d(z, \complement D)^{-k}. \tag{3.2}$$

Démonstration. – L'inégalité (3.2) implique trivialement l'appartenance de f à $\mathcal{O}_\gamma(D)$. Il faut donc démontrer la réciproque. Pour $z \in D$ posons $r = \frac{1}{2} d(z, \complement D)$. Soit K le polydisque de centre z de rayon r. Pour $w \in K$ on a $d(w, \complement D) > r$. Par le théorème de la moyenne on a [18] :

$$f(z) = \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_K f(w) \, d\lambda .$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient :

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \left(\int_K |f(w)|^2 \, d(w, \complement D)^k \, d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_K d(w, \complement D)^{-k} \, d\lambda \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \left(\int_D |f(w)|^2 \, d(w, \complement D)^k \, d\lambda \right)^{1/2} (\pi r^2)^{n/2} / r^{k/2} \end{aligned}$$

et par suite

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r^{n+k/2}} \left(\int_D |f(w)|^2 \, d(w, \complement D)^k \, d\lambda\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C \, d(z, \complement D)^{-n-k/2} .$$

On se propose maintenant de résoudre un problème de Cousin dans $\mathcal{O}_\gamma(D)$.

Soit D_0, D_1, D_2 des ouverts bornés de $\mathbf{C}^n$ avec $D_0 = D_1 \cap D_2$, $D = D_1 \cup D_2$. Posons $d_j(z) = d(z, \complement D_j)$, $j = 0, 1, 2$ et $d(z) = d(z, \complement D)$. On a $d_0(z) = \min(d_1(z), d_2(z))$.

DEFINITION 3.3. – *On dit que* (D_1, D_2) *sont bien situés s'il existe des constantes* $M > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que*

$$(d(z))^\alpha \leqslant M(\max(d_1(z), d_2(z)))$$

pour tout $z \in D_0$.

THEOREME 3.4. – *Soit* D_0, D_1, D_2, D *des ouverts bornés de* $\mathbf{C}^n$ *avec* $D_0 = D_1 \cap D_2$, $D = D_1 \cup D_2$. *On suppose que* D *est un ouvert d'holomorphie et que* (D_1, D_2) *sont bien situés. Alors pour tout* $f \in \mathcal{O}_\gamma(D_0)$ *il existe* $f_j \in \mathcal{O}_\gamma(D_j)$ $(j = 1, 2)$ *telles que* $f = f_1 - f_2$ *dans* D_0.

Démonstration. – Soit (U_1, U_2) le recouvrement ouvert de D défini par : $U_j = \{z \in D \,;\, d_i(z) < d_j(z),\ i \neq j,\ i, j \in \{1, 2\}\}$, et soit $U_0 = U_1 \cap U_2$. Dans U_0 on a $d_2(z) < 2d_1(z)$ et $d_1(z) < 2d_2(z)$ et par suite

$$\max(d_1(z), d_2(z)) < 2 \min(d_1(z), d_2(z)) = 2d_0(z).$$

L'ouvert U_j est contenu dans D_j. Soit (ϕ_1, ϕ_2) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_1, U_2) telle que $|d\phi_j(z)| \leqslant C(d_0(z))^{-\beta}$ pour des constantes C et $\beta > 0$ $(j = 1, 2)$, ($d\phi$ désigne la différentielle de ϕ).

Nous allons montrer qu'une telle partition existe. Soit K un cube compact de D, on va montrer que

$$d(\complement U_1 \cap K, \complement U_2 \cap K) \geqslant (2M)^{-1} d(K, \complement D)^\alpha .$$

Si $U_j \cap K = \emptyset$ l'inégalité est triviale, soit donc $x_j \in \partial U_j \cap K$.

Alors $d_i(x_j) = 2d_j(x_j)$ et $d_j(x_i) \leqslant d(x_1, x_2) + d_j(x_j)$ $i \neq j$, d'où

$$d_2(x_1) + d_1(x_2) = 2(d_1(x_1) + d_2(x_2)) \leqslant 2d(x_1, x_2) + d_1(x_1) + d_2(x_2).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\geqslant 2^{-1}(d_1(x_1) + d_2(x_2)) \geqslant 2^{-1}(d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \complement \mathrm{D}_1) \\ &+ d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \complement \mathrm{D}_2)) \geqslant \min(d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \mathrm{D}_1), d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \mathrm{D}_2)) \\ &\geqslant 2^{-1} \max(d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \complement \mathrm{D}_1), d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \complement \mathrm{D}_2)) \\ &\geqslant (2\mathrm{M})^{-1}(d(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{U}}_0, \complement \mathrm{D}))^\alpha \geqslant (2\mathrm{M})^{-1} d(\mathrm{K}, \complement \mathrm{D})^\alpha, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée.

Par le lemme (3.1) de [13] il existe une famille de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (ψ_j), $j \in \mathrm{J}$, $0 \leqslant \psi_j$, les supports formant une famille localement finie de cubes compacts dans D, 4^n au plus d'entre eux rencontrant chaque point de D et telle que $\Sigma\, \psi_i(z) = 1$ pour $z \in \mathrm{D}$ et $|d\psi_i(z)| \leqslant \mathrm{C}(1 + d^{-1}(z))$. Soit $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_2 \cup \mathrm{J}_3$ tel que si $k \in \mathrm{J}_r$ $\operatorname{supp} \psi_k \subset \mathrm{U}_r$, $r = 1, 2$ et si $k \in \mathrm{J}_3$ $\operatorname{supp} \psi_k \cap \mathrm{U}_r \neq \phi$ pour $r = 1$ et $r = 2$. Soit $k \in \mathrm{J}_3$ et K le support de ψ_k. Grâce à l'inégalité démontrée plus haut et au lemme (4.2) de [13] on peut trouver des fonctions θ_1, θ_2 ; $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de K avec $\theta_1 + \theta_2 \equiv 1$, $\operatorname{supp} \theta_r \subset \mathrm{U}_r$ et $|d\theta_r(z)| \leqslant \mathrm{C}(1 + d^{-m}(z))$, C et m indépendants de k. On pose $\psi_k' = \theta_1 \psi_k$, $\psi_k'' = \theta_2 \psi_k$ et

$$\phi_1 = \sum_{k \in \mathrm{J}_1} \psi_k + \sum_{k \in \mathrm{J}_3} \psi_k', \quad \phi_2 = \sum_{k \in \mathrm{J}_2} \psi_k + \sum_{k \in \mathrm{J}_3} \psi_k''.$$

Nous posons maintenant $g_1 = -\phi_2 f$, $g_2 = \phi_1 f$ en prolongeant g_j à D_j par zéro. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{D}_j} |g_j(z)|^2 d_j(z)|^2 d_j(z)^k d\lambda &\leqslant 2^k \int_{\mathrm{D}_0} |g_j(z)|^2 d_0(z)^k d\lambda \\ &\leqslant \mathrm{C}\, 2^k \int_{\mathrm{D}_0} |f(z)|^2 d_0(z)^k d\lambda, \end{aligned}$$

où C, k etc. sont des constantes qui peuvent varier d'une inégalité à l'autre. Avec $h_j = \bar\partial g_j$ on a :

$$f = g_2 - g_1, \quad h_2 - h_1 = \bar\partial(g_2 - g_1) = 0.$$

Les 1-formes h_1 et h_2 définissent donc une 1-forme h sur D dont la restriction à chaque D_j est h_j et dont le support est contenu dans U_0 et donc dans D_0. Vu les inégalités démontrées plus haut on a

$$\int_D |h(z)|^2 d^k(z)\, d\lambda \leqslant C \int_{D_0} |h(z)|^2 \max(d_1(z), d_2(z))\, d\lambda$$
$$\leqslant 2^k C \int_{D_0} |h(z)|^2 d_0^k(z)\, d\lambda \leqslant C' \int_{D_0} |f(z)|^2 d_0^r(z)\, d\lambda .$$

D'autre part l'ouvert D est d'holomorphie. La fonction $-k \log d$ est donc pluri-sous-harmonique et on peut appliquer les techniques de L. Hörmander [7]. Le théorème 2.2.3 de [7] prouve l'existence d'une fonction $g \in L^2_{loc}(D)$ avec $\overline{\partial} g = h$ et

$$\int_D |g(z)|^2 d^k(z)\, d\lambda \leqslant C \int_D |h(z)|^2 d^k(z)\, d\lambda$$
$$\leqslant C' \int_{D_0} |f(z)|^2 d_0^r(z)\, d\lambda$$

Posons $f_j = g_j - g$, $j = 1, 2$. Alors $\overline{\partial} f_j = 0$ et

$$\int_{D_j} |f_j(z)|^2 d_j^k(z)\, d\lambda \leqslant C \int_{D_0} |f(z)|^2 d_0^r(z)\, d\lambda$$

autrement dit $f_j \in \mathcal{O}_\gamma(D_j)$.

Remarque 3.5. – a) Soit D un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit ω_1 et ω_2 deux ouverts disjoints de ∂D. Il est clair que l'on peut trouver des ouverts Ω_j $(j = 1, 2)$ de $\mathbf{R}^n$, Ω_j contenant $D \cup \omega_j$, tels que si D_j $(j = 1, 2)$ sont deux ouverts avec $D \subset D_j \subset \Omega_j$, alors (D_1, D_2) sont bien situés (on peut même prendre $\alpha = 1$ dans la définition 3.3).

b) On a un résultat similaire en prenant pour D un tuboïde (cf. § 4) de $\mathbf{C}^n$ et pour ω_1, ω_2 deux ouverts de sa base dans $\mathbf{R}^n$.

4. Fonctions à croissance lente dans un tuboïde.

Rappellons les résultats de J. Bros et D. Iagolnitzer [3] dont nous aurons besoin. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et pour tout $x \in \Omega$ soit Λ_x un cône ouvert convexe non vide de sommet l'origine dans $i\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$. Posons :

$$\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x) \subset \mathbf{R}^n \times i\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$$

$\dot{\Lambda}$ = l'intersection de Λ avec $\mathbf{R}^n \times i\mathbf{S}^{n-1}$ où $\mathbf{S}^{n-1}$ désigne la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On appelle tuboïde D de base Ω de profil Λ un ouvert D de $\mathbf{C}^n$ tel que $D = \bigcup_{x\in\Omega} (x, D_x)$, avec :

a) $D\backslash\Omega \subset \Lambda$

b) pour tout $(x_0, \dot{y}_0) \in \dot{\Lambda}$ il existe un voisinage U de (x_0, y_0) et un $r > 0$ tel que $\{(x, y) ; y = \rho\dot{y}, (x, y) \in U, 0 < \rho < r\} \subset D$

c) $\Lambda_x = \mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ si et seulement si $0 \in D_x$.

Remarque. – Si Ω_1 est une composante connexe de Ω on pourra toujours supposer que $D_1 = \bigcup_{x\in\Omega_1} (x, D_x)$ est connexe.

Remarque. – On considère $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ comme un profil convexe.

THEOREME 4.1 (Bros-Iagolnitzer [3]). – *Soit* D *un tuboïde de base* Ω, *de profil* Λ, *où* Λ_x *est convexe pour tout* $x \in \Omega$. *Il existe un tuboïde* D' *contenu dans* D, *de même profil et de même base, qui est un ouvert d'holomorphie.*

Nous aurons aussi besoin des lemmes suivants.

LEMME 4.2 – *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$, D *un tuboïde borné de base* Ω *de profil convexe. Soit* $f \in \mathcal{O}_\gamma(D)$. *Alors* $b(f)$, *la valeur au bord de* f, *est une distribution sur* Ω.

Démonstration. – Appliquons le théorème 3.1 à la fonction f. On obtient : $|f(z)| \leqslant C\, d(z, \complement D)^{-k}$.

Le problème étant de nature locale, on se ramène, par un changement linéaire de coordonnées, au cas où D est l'intersection avec une boule de centre l'origine, du quadrant $\prod_{j=1}^{n} \{\operatorname{Im} z_j > 0\}$. Les résultats de A. Martineau [14] montrent alors que $b(f)$ est une distribution.

LEMME 4.3. – *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$, $\widetilde{D}_0$ *un tuboïde de base* Ω *de profil convexe* $\widetilde{\Lambda}_0$. *Soit,* F_1, F_2 *des fermés de* Ω *avec* $\Omega = F_1 \cup F_2$. *Il existe alors les tuboïdes bornés* $D, D_j (j = 0, 1, 2)$ *de profil respectif* Λ, Λ_j, *de base* Ω *tels que :*

a) D *est un ouvert d'holomorphie*

b) $\widetilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, $D_0 \subset \widetilde{D}_0$

c) $D_0 = D_1 \cap D_2$, $D = D_1 \cup D_2$

d) $(\Lambda_j)_x = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ si $x \notin F_j$ $(j = 1, 2)$

e) (D_1, D_2) sont bien situés.

Démonstration. – On peut supposer $\widetilde{D}_0$ borné. Il en sera alors de même des tuboïdes que nous allons construire.

Soit $\omega_j (j = 1, 2)$ des ouverts bornés de $\mathbf{C}^n$ tels que

– ω_j contient $\Omega - F_j$

– $\omega_j \cap F_j = \phi$

– $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$

(pour construire ω_1 et ω_2 il suffit de séparer $\Omega - F_1$ et $\Omega - F_2$ dans $\mathbf{C}^n \setminus F_1 \cap F_2$).

Posons $\widetilde{D}_j = \widetilde{D}_0 \cup \omega_j$. Alors : $\widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 = \widetilde{D}_0 \cup (\omega_1 \cap \omega_2) = \widetilde{D}_0$ et les $\widetilde{D}_j$ sont des tuboïdes de profil Λ_j qui satisfont à la condition d). Comme le profil $\widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2$ est convexe il existe D, tuboïde d'holomorphie contenu dans $\widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2$ et de même profil que $\widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2$.

Posons $D_j = \widetilde{D}_j \cap D$ $(j = 1, 2)$ et $D_0 = D_1 \cap D_2$. Alors D_j a même profil que $\widetilde{D}_j$ et $D_0 \subset \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 \subset \widetilde{D}_0$. Enfin le profil Λ_0 de D_0 est évidemment $\widetilde{\Lambda}_0$.

La propriété e) résulte de la remarque 3.5.

COROLLAIRE 4.4. – *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, D_0 un tuboïde de base Ω de profil Λ_0 convexe. Soit, F_1, F_2 des fermés de Ω avec $\Omega = F_1 \cup F_2$ et tels que $(\Lambda_0)_x = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ pour $x \notin F$. Alors il existe un tuboïde D'_0 sur Ω, de même profil que D_0, contenu dans D_0, tel que toute fonction $f \in \mathcal{O}_\gamma(D'_0)$ s'écrive dans D'_0, $f = f_1 - f_2$ où f_i appartient à $\mathcal{O}_\gamma(D'_0)$ et f_i se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de $\Omega \setminus F_i (i = 1, 2)$.*

5. Démonstration du théorème 1.2.

LEMME 5.1. – *Soit* I *une partie ouverte convexe propre de la sphère* $\mathbf{S}^{n-1}$ (i.e. *le cône engendré par* I *est convexe et ne contient aucune droite). Soit* u *un élément de* $\mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathcal{E}^\infty/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$)

dont le support singulier $SS(u)$ *est un compact* K *de* $\mathbf{R}^n \times I$. *Soit* K_1 *et* K_2 *deux compacts de* $\mathbf{R}^n \times I$ *de réunion* K. *Alors il existe* $u_i \in \mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$), $(i = 1, 2)$ *avec* $u = u_1 + u_2$ $SS(u_i) \subset K_i$ $(i = 1, 2)$.

Démonstration. – Supposons d'abord que u appartienne à $\mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$.

Nous allons utiliser un noyau introduit par J.M. Bony [1] (cf. [10] [17] [11] pour des noyaux analogues).

Soit $\Phi(x, \eta)$ la distribution sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$ définie par

$$\Phi(x, \eta) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \frac{1 + (x \cdot \eta)}{((x + io)(\eta + io) + i(x + io)^2)^n} .$$

Il est clair que

$$SS\,\Phi \subset \{(x, \eta ; \xi, \theta) ;\ \xi = \eta ,\ \theta = 0\} .$$

Si u est une distribution à support compact sur $\mathbf{R}^n$, on peut définir $A(u) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1})$ par :

$$Au(x, \eta) = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x - y, \eta)\, u(y) dy .$$

On démontre alors [1], en désignant par $\omega(\eta)$ l'élément de volume de $\mathbf{S}^{n-1}$:

$$u(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} Au(x, \eta)\, \omega(\eta)$$

et de plus $SS(u) =$ support de Au dans $\mathcal{D}'/\mathcal{A}\,(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1})$.

On peut donc prolonger A en une application linéaire de $\mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1})$ vérifiant :

$$u(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} Au(x, \eta)\, \omega(\eta)$$

$$SS(u) = \mathrm{supp}(Au).$$

La distribution $\Phi(x - y, \eta)$ est valeur au bord d'une fonction φ holomorphe dans un tuboïde D du complexifié de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$ dont le profil est le polaire de $SS(\Phi)$.

Soit $\widetilde{K}$ (resp. $\widetilde{K}_i$) l'image réciproque de K (resp. K_i) dans la "diagonale" $\Delta = \{(x, y, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1} ; x = y\}$ par la première projection sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$, et soit $\widetilde{\Omega}$ un voisinage de $\widetilde{K}$ dans le complexifié de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$. On peut supposer $\widetilde{\Omega}$ relativement compact et contenu dans une carte de cette variété puisque l'on a supposé K contenu dans une partie convexe propre de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$. Alors φ appartient à $\mathcal{O}_\gamma(D \cap \widetilde{\Omega})$.

Soit Z_1 et Z_2 des fermés de la diagonale Δ, avec $Z_1 \cup Z_2 = \Delta$, $Z_i \cap \widetilde{K} = \widetilde{K}_i$.

Appliquons le corollaire 4.4 : en prenant deux fermés F_1, F_2 tels que $F_j \cap \Delta = Z_j$ et $F_1 \cup F_2 = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n$ il existe des fonctions

$$\varphi_i \in \mathcal{O}_\gamma(D_0 \cap \widetilde{\Omega}) \quad (i = 1, 2)$$

telles que :
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

φ_i est analytique réelle en dehors de Z_i dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$.

Soit Φ_1 et Φ_2 les valeurs au bord des fonctions φ_1 et φ_2. Ce sont des distributions d'après le lemme 4.2 et l'on a :

$$\mathrm{SS}(\Phi_i) \subset \{(x, y, \eta ; \xi_1, \xi_2, \theta) ; x = y, \xi_1 = -\xi_1 = \eta, \theta = 0, (x, \eta) \in Z_i\}.$$

Posons

$$A_i(u) = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_i(x, y, \eta)\, u(y)\, dy$$

$$u_i = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} A_i(u)(x, \eta)\, \omega(\eta).$$

Alors $u = u_1 + u_2$ et (cf. [17 chapitre 1]) :

$$\mathrm{SS}(u_i) \subset K \cap Z_i.$$

Si maintenant u est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, le raisonnement est le même. Il suffit de remarquer que $A_i(u)$ et u_i seront des fonctions $\mathcal{C}^\infty$: pour le voir on calcule le front d'onde différentiable de ces distributions en utilisant [9] à la place de [17].

Démonstration du théorème 1.2. – Nous n'écrirons la démonstration que pour le faisceau $\mathcal{C}^f$, le raisonnement étant le même pour $\mathcal{C}^d$.

Soit A l'ensemble des sections de $\mathcal{D}'/\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ dont le support singulier est un compact de $\mathbf{R}^n \times I$. D'après le lemme 5.1 et le théorème 2.1 il existe un unique sous faisceau $\mathcal{G}$ du faisceau $\mathcal{C} | \mathbf{R}^n \times I$ tel que :

– $\mathcal{G}$ est souple

– $\Gamma_c(\mathbf{R}^n \times I, \mathcal{G}) = A$.

L'inclusion $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}^f | \mathbf{R}^n \times \mathrm{I}$ résulte de ce que $\forall (x, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathrm{I}$, $\mathcal{G}_{(x,\eta)} = \mathrm{A}_{(x,\eta)}$. Pour montrer l'inclusion inverse il faut voir que (x, η) étant fixé dans $\mathbf{R}^n \times \mathrm{I}$, pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ il existe $v \in \mathrm{A}$ tel que $(x, \eta) \notin \mathrm{SS}(u - v)$. On peut évidemment supposer u à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Utilisons à nouveau le noyau de J.M. Bony :

$$u(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \Phi(x - y, \eta)\, u(y)\, dy \Big)\, \omega(\eta).$$

Soit J un voisinage de η dans $\mathbf{S}^{n-1}$, convexe fermé propre contenu dans I.

Soit $\mathbf{1}_{\mathrm{J}}$ la fonction caractéristique de J. La distribution

$$v(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{\mathrm{J}}(\eta)\, \Phi(x - y, \eta)\, u(y)\, dy\, \omega(\eta)$$

est bien définie et répond à la question.

On déduit alors du théorème 2.2 que si M est une variété analytique réelle dénombrable à l'infini, le faisceau $\mathcal{C}^f$ sur $\mathrm{S}^*\mathrm{M}$ est souple. On vient de voir l'inclusion $\Gamma_c(\mathbf{R}^n \times \mathrm{I}, \mathcal{C}^f) \subset \mathcal{D}'/\mathcal{Q}(\mathbf{R}^n)$ d'où l'on déduit l'inclusion sur M : $\pi_* \mathcal{C}^f \subset \mathcal{D}'/\mathcal{Q}$. L'inclusion inverse étant évidente par construction de $\mathcal{C}^f$, le théorème est démontré.

Remarque. – Comme nous l'a fait remarquer J. Sjöstrand, il semble qu'il soit possible de démontrer le théorème 1.2 en évitant l'utilisation des théorèmes 3.3 et 4.1. Pour cela il faudrait construire l'analogue, dans la théorie analytique, des noyaux $\mathrm{K}_\alpha (\alpha \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1})$ utilisés par Melin et Sjöstrand [16] : on obtiendrait la décomposition de $\delta(x - y)$ suivant des fermés F_1 et F_2 en écrivant simplement $\delta_i(x, y) = \int_{\mathrm{F}_i} \mathrm{K}_\alpha\, d\alpha$, ce qui n'est pas possible avec le noyau utilisé ici. Une telle démonstration serait évidemment plus satisfaisante.

6. Démonstration du théorème 1.8.

D'après le théorème 2.2 notre problème est de nature locale au bord de Ω. Après un changement de coordonnées holomorphes on peut supposer que Ω est un ouvert strictement convexe borné de $\mathbf{C}^n$, dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Comme $H^1(\overline{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \Gamma(\partial\Omega, \mathcal{O}_+) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, avec $b(g) \in \Gamma(\partial\Omega, \mathcal{O}_+^f)$. La fonction g sera à croissance lente au voisinage de chaque point de $\partial\Omega$ et par suite $g \in \mathcal{O}_\gamma(\Omega)$. On en conclut que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{O}_\gamma(\Omega) \longrightarrow \Gamma(\partial\Omega, \mathcal{O}_+^f) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Nous allons appliquer le théorème 2.1 avec $\mathcal{F} = \mathcal{O}_+$, $A = \mathcal{O}_\gamma(\Omega)/\mathcal{O}(\overline{\Omega})$.

a) Montrons que $\forall x \in \partial\Omega$, $A_x = (\mathcal{O}_+^f)_x$. Soit ω un voisinage ouvert de x dans $\mathbf{C}^n$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \omega)$, avec $b(f) = u \in (\mathcal{O}_+^f)_x$. En diminuant ω on peut supposer que $\Omega \cup \omega$ est un ouvert strictement convexe, et que $f \in \mathcal{O}_\gamma(\omega \cap \Omega)$. D'après le théorème 3.3 il existe des fonctions $f_1 \in \mathcal{O}_\gamma(\Omega)$ et $f_2 \in \mathcal{O}_\gamma(\omega)$ telles que $f = f_1 - f_2$.

b) Il reste à vérifier que A a la propriété de décomposition du support. Nous aurons besoin pour cela de quelques lemmes.

LEMME 6.1. – *Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, à frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit U une partie relativement compacte de $\partial\Omega$. Alors $\Omega \cup U$ admet dans $\mathbf{C}^n$ un système fondamental de voisinages strictement pseudo-convexes.*

Démonstration. – On peut supposer Ω défini par :

$$\Omega = \{x \in \mathbf{C}^n \ ; \ \phi(x) < 0\}$$

pour une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $d\phi \neq 0$ sur $\partial\Omega$, et $\phi > 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash \Omega$. Soit Ω' un ouvert contenant U. On peut trouver une fonction ψ, positive, à support compact dans $\overline{\Omega}'$, strictement positive sur U, et de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). Alors l'ouvert $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbf{C}^n \ ; \ \phi(x) < \epsilon\psi(x)\}$ contient $\Omega \cup U$ pour $\epsilon > 0$, et est contenu dans Ω'. Pour ϵ positif assez petit, Ω_ϵ sera strictement pseudo-convexe.

LEMME 6.2. – *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbf{C}^n$, f une fonction de $\mathcal{O}_\gamma(\Omega)$. On suppose la frontière $\partial\Omega$ non caractéris-*

tique pour l'opérateur différentiel $D_1 = \dfrac{\partial}{\partial z_1}$ *au voisinage d'un point* $z_0 \in \partial\Omega$. *Alors pour tout entier* $p \in \mathbf{N}$ *l'équation* $D_1^p g = f$ *admet une solution holomorphe dans* Ω *au voisinage de* z_0, *et pour* p *assez grand* g *sera bornée au voisinage de* $\partial\Omega$.

Démonstration. – On peut trouver un hyperplan complexe Σ d'équation $z_1 = \sigma$, une constante $\rho > 0$, et un voisinage ω de z_0 dans $\mathbf{C}^n$ tel que si z appartient à ω le cône ouvert de révolution, de sommet z, d'ouverture ρ, d'axe (z, z'), où z' est le point de Σ dont la i-ème coordonnée pour $i > 1$ est la i-ème coordonnée de z, coupe Σ dans Ω.

On en conclut que si l'on note $d_1(z)$ la distance de z à $\complement\,\Omega$ dans la droite complexe passant par z et parallèle à la droite $z_2 = \ldots = z_n = 0$, on a pour $z \in \Omega \cap \omega$:

$$d_1(z) \leqslant \rho^{-1} d(z)$$

et par suite

$$|f(z)| \leqslant C\,\rho^{-k} d_1(z)^{-k}\,.$$

Si g est la solution de $D_1^k g = f$ qui s'annule à l'ordre $k-1$ sur Σ on aura $|g(z)| \leqslant C\,\rho^{-k}\,\dfrac{1}{(k-1)!}$ d'après les inégalités de Cauchy.

Remarque 6.3. – Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbf{C}^n$ contenant 0. Soit $\mathbf{P}$ l'opérateur $\sum_{i=1}^{n} z_i \dfrac{\partial}{\partial z_i}\cdot$ Alors $\partial\Omega$ est non caractéristique pour $\mathbf{P}$, et pour tout entier $p \in \mathbf{N}$ et tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ on peut trouver $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $h \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ solution de $\mathbf{P}^p g + h = f$ (cf. [2]).

Si f appartient à $\mathcal{O}_\gamma(\Omega)$, il résulte du lemme 6.2 que pour p assez grand g sera bornée sur Ω.

LEMME 6.4. – *Soit* Ω *un ouvert strictement pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$, *dont la frontière est de classe* $\mathcal{C}^2$. *Soit* U *une partie ouverte de* $\partial\Omega$, Ω' *un voisinage ouvert de* $\Omega \cup U$. *Soit* f *une fonction de* $\mathcal{O}_\gamma(\Omega)$ *se prolongeant en fonction holomorphe sur* Ω'. *Alors il existe un ouvert* Ω'' *contenant* $\Omega \cup U$ *tel que* f *se prolonge en fonction de* $\mathcal{O}_\gamma(\Omega'')$.

Démonstration. – Le problème est de nature locale au bord de U. On peut donc supposer que Ω est un ouvert convexe et que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour l'opérateur D_1 au voisinage d'un point z_0. Soit g une fonction holomorphe solution de $D_1^p g = f$, bornée dans Ω au voisinage de z_0. Comme $\partial\Omega$ est non caractéristique pour l'opérateur D_1^p, g se prolongera en fonction holomorphe au voisinage de $\Omega \cup U$ (dans un voisinage de z_0), et comme g est bornée, on peut choisir un ouvert Ω'' contenant $\Omega \cup U$ au voisinage de z_0, sur lequel g reste bornée. Il résulte alors des inégalités de Cauchy que $f = D_1^p g$ appartient à $\mathcal{O}_\gamma(\Omega'')$.

Fin de la démonstration du théorème. – Soit Z, Z_1, Z_2 des fermés de $\partial\Omega$ avec $Z = Z_1 \cup Z_2$. Soit $\widetilde{\Omega}_0$ un ouvert contenant Ω et tel que $\widetilde{\Omega}_0 \cap \partial\Omega = \partial\Omega \backslash Z$. Soit ω_1 et ω_2 des ouverts tels que : $\omega_j \supset Z\backslash Z_j$, $\omega_j \cap Z_j = \phi$, $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$.

Soit $\widetilde{\Omega}_i = \widetilde{\Omega}_0 \cup \omega_i$ $(i = 1, 2)$ et soit $\widetilde{\Omega}$ un ouvert strictement pseudo-convexe contenu dans $\widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2$, contenant Ω et tel que : $\widetilde{\Omega} \cap \partial\Omega = (\widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2) \cap \partial\Omega$.

L'existence d'un tel ouvert est assurée par le lemme 6.1. Soit :

$$\Omega_i = \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{\Omega}_i \ (i = 1, 2)$$
$$\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 .$$

Comme $\omega_1 \cap \omega_2$ est vide, Ω_0 est contenu dans $\widetilde{\Omega}_0$. De plus :

$$\Omega_i \cap \partial\Omega = (\widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2) \cap \widetilde{\Omega}_i \cap \partial\Omega = \widetilde{\Omega}_i \cap \partial\Omega = (\partial\Omega\backslash Z) \cup (Z - Z_j)$$
$$= \partial\Omega\backslash Z_j \ (i \neq j).$$

On peut supposer (Ω_1, Ω_2) bien situés d'après la remarque 3.5.

Soit maintenant f une fonction de $\mathcal{O}_\gamma(\Omega)$, holomorphe au voisinage de $\partial\Omega\backslash Z$, donc dans un ouvert $\widetilde{\Omega}'_0$ contenant $\Omega \cup (\partial\Omega\backslash Z)$. On peut supposer d'après le lemme 6.4 que f appartient à $\mathcal{O}_\gamma(\widetilde{\Omega}'_0)$. D'après le théorème 3.4 il existe $f_j \in \mathcal{O}_\gamma(\Omega_j)$ $(j = 1, 2)$ vérifiant $f|\Omega_0 = f_1 - f_2$.

Soit $b(f_j)$ la valeur au bord de f_j : alors $b(f_j)$ a son support dans Z_j.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. BONY, Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, *Astérisque,* 34-35 (1976), 43-91.

[2] J.M. BONY, P. SCHAPIRA, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *Inventiones Math.,* 17 (1972), 95-105.

[3] J. BROS, D. IAGOLNITZER, Tuboïdes dans $\mathbf{C}^n$ et généralisation d'un théorème de Grauert, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 26,3 (1976), 49-72.

[4] J. BROS, D. IAGOLNITZER, Support essentiel et structure analytique des distributions, Sém. Goulaouic-Schwartz 1974/75, exposé 18.

[5] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, Hermann, 1964.

[6] A. GROTHENDIECK, Eléments de géométrie algébrique III, *Publ. Math. IHES,* 11 (1961).

[7] L. HÖRMANDER, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.,* 113 (1965), 89-152.

[8] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.,* 24 (1971), 617-704.

[9] L. HÖRMANDER, Fourier integral operators, *Acta Math.,* 127 (1971), 79-183.

[10] M. KASHIWARA, On the flabbyness of the sheaf C, *R.I.M.S.* N° 114, Kyoto University (1970) (en japonais).

[11] K. KATAOKA, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, Preprint Tokyo University (1976).

[12] S. LOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, *Studia Math.,* 8 (1959), 87-136.

[13] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Tata Institut of Fundamental Research, Bombay (1966).

[14] A. MARTINEAU, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, *Proc. of the Intern. Summer Institute,* Lisboa, 1964.

[15] A. MARTINEAU, Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the wedge", Sém. Bourbaki, 20e année, 340, 1967/68.

[16] A. MELIN, J. SJOSTRAND, Fourier Integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem, *Comm. in Partial Diff. Eq.,* 1(14) (1976), 283-311.

[17] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo differential equations, In : *Lecture Notes in Mathematics* 287, 265-529, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1973.

[18] J. WLOKA, Grundräume und verallgemeinerte Funktionen, *Lecture Notes in Mathematics* 82, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1969.

Manuscrit reçu le 17 juillet 1978.

G. BENGEL
Mathematisches Institut
der Universität
Roxeler Str. 64
4400 Münster (RFA).

P. SCHAPIRA,
Département de Mathématiques
C.S.P.
Université Paris-Nord
Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse (France).