GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — Images directes de modules différentiels. Note de **Christian Houzel** et **Pierre Schapira**, présentée par Henri Cartan.

Remise le 16 janvier 1984.

Soient $f: Y \to X$ un morphisme lisse de variétés analytiques complexes et $\mathcal{N}$ un Module cohérent sur l'Anneau $\mathcal{D}_Y$ des opérateurs différentiels sur Y. On suppose $\mathcal{N}$ engendré par un sous-Module « différentiel relatif » $\mathcal{N}_0$; soit (Y_s) une famille d'ouverts de Y telle que $f|_{Y_s}$ soit propre et ∂Y_s non caractéristique pour $\mathcal{N}_0$ quel que soit $s \in \mathbf{R}_+$. Alors les « images directes » de $\mathcal{N}$ (au sens de M. Kashiwara) sont des $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents filtrés, dont les variétés caractéristiques sont contenues dans l'image de celle de $\mathcal{N}$.

ANALYTIC GEOMETRY. — Direct Images of Differential Modules.

Let $f: Y \to X$ be a smooth morphism of complex analytic manifolds and $\mathcal{N}$ be a coherent Module over the Ring $\mathcal{D}_Y$ of differential operators on Y. One assumes $\mathcal{N}$ generated by a "relative differential" sub-Module $\mathcal{N}_0$ of $\mathcal{N}$; let (Y_s) be a family of open subsets of Y, such that $f|_{Y_s}$ is proper and ∂Y_s is non characteristic for $\mathcal{N}_0$ for all $s \in \mathbf{R}_+$. Then the "direct images" of $\mathcal{N}$ (in the sense of M. Kashiwara) are filtered coherent $\mathcal{D}_X$-Modules, and their characteristic varieties are contained in the natural image of that of $\mathcal{N}$.

I. Préliminaires. — Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété analytique complexe, on note $\pi: T^*X \to X$ son fibré cotangent, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes (d'ordre fini) sur X, muni de sa structure d'Anneau (non commutatif) et de sa filtration par l'ordre. Le gradué gr $\mathcal{D}_X$ s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X})$ dont les sections sont les fonctions polynomiales dans chaque fibre de T^*X. On note $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels (d'ordre fini) sur T^*X (*cf.* [14]), et $\operatorname{Car}(\mathcal{M})$ la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-Module cohérent $\mathcal{M}$, c'est-à-dire le support de $\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \pi^{-1}(\mathcal{M})$ dans T^*X; c'est aussi le support de $\pi^{-1}(\operatorname{gr}\mathcal{M})$ si $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ est le gradué associé à $\mathcal{M}$ pour une « bonne filtration » de $\mathcal{M}$.

Si $f: Y \to X$ est une application holomorphe, on note encore $\rho: Y \times_X T^*X \to T^*Y$ le morphisme cotangent à f et $\varpi: Y \times_X T^*X \to T^*X$ la projection sur le second facteur. On utilisera le $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}(\mathcal{D}_X))$-Bimodule $\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_X)} f^{-1}(\mathcal{D}_X)$ et le $(\rho^{-1}(\mathcal{E}_Y), \varpi^{-1}(\mathcal{E}_X))$-Bimodule $\mathcal{E}_{Y\to X} = \rho^{-1}\pi^{-1}(\mathcal{O}_Y)\,\hat{\otimes}_{\varpi^{-1}\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)}\,\varpi^{-1}(\mathcal{E}_X)$, où $\hat{\otimes}$ est le produit tensoriel complété (*cf.* [4]); les structures à droite de ces Bimodules proviennent naturellement de leurs seconds facteurs, mais les structures à gauche ne s'obtiennent pas simplement en faisant opérer $\mathcal{D}_Y$ sur $\mathcal{O}_Y$ (*cf.* [14]).

Selon M. Kashiwara [5] dont nous suivons les notations, on associe à tout $\mathcal{D}_Y$-Module à droite cohérent $\mathcal{N}$ les objets :

$$\int_f \mathcal{N} = \mathbf{R} f_*(\mathcal{N} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}), \tag{1}$$

$$\int_f^c \mathcal{N} = \mathbf{R} f_!(\mathcal{N} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}), \tag{2}$$

de la catégorie dérivée $D(\mathrm{Mod}-\mathcal{D}_X)$.

II. Opérateurs différentiels relatifs. — On suppose désormais *f lisse* et on identifie $Y \times_X T^*X$ à son image par ρ. Le conoyau de ρ n'est autre que le fibré cotangent relatif :

$$0 \to Y \times_X T^*X \xrightarrow{\rho} T^*Y \xrightarrow{\varphi} T^*(Y/X) \to 0. \tag{3}$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{Y/X}$ des opérateurs différentiels relatifs a pour sections les opérateurs P sur Y qui commutent à $f^{-1}(\mathcal{O}_X)$, et la structure de $\mathcal{D}_{Y/X}$-Module à gauche sur $\mathcal{D}_{Y\to X}$

provient des opérations de $\mathscr{D}_{Y/X}$ sur $\mathscr{O}_Y$; par récurrence sur k, on définit une *filtration relative sur* $\mathscr{D}_Y$, dont le terme d'ordre k est le sous-faisceau $\mathscr{D}_f(k)$ de $\mathscr{D}_Y$ formé des opérateurs P tels que le crochet $[P, s]$ soit une section de $\mathscr{D}_f(k-1)$ quelle que soit la section s de $f^{-1}(\mathscr{O}_X)$. Si $\mathscr{D}_{Y/X}$ est muni de la filtration induite par $\mathscr{D}_Y$, $\operatorname{gr}\mathscr{D}_{Y/X}$ s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathscr{O}_{T^*(Y/X)})$ dont les sections sont polynomiales dans chaque fibre de $T^*(Y/X)$.

Les propriétés suivantes se vérifient par les méthodes, désormais classiques, de [14], [6], [11] et [2] :

(i) $\mathscr{D}_{Y/X}$ est un faisceau d'anneaux cohérent et « noethérien » ;

(ii) $\mathscr{D}_Y$ est plat sur $\mathscr{D}_{Y/X}$;

(iii) soient $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_Y$-Module cohérent et $\mathscr{N}_0 \subset \mathscr{N}$ un sous-$\mathscr{D}_{Y/X}$-Module de type fini; alors $\mathscr{N}_0$ est cohérent sur $\mathscr{D}_{Y/X}$;

(iv) soient $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_Y$-Module cohérent et $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{N}_0$) un sous-$\mathscr{D}_Y$-Module (resp. un sous-$\mathscr{D}_{Y/X}$-Module) cohérent de $\mathscr{N}$; alors $\mathscr{L} \cap \mathscr{N}_0$ est un $\mathscr{D}_{Y/X}$-Module cohérent;

(v) soit $\mathscr{N}_0$ un $\mathscr{D}_{Y/X}$-Module à droite cohérent; localement, $\mathscr{N}_0$ admet une « bonne filtration ». Le support de $\operatorname{gr}\mathscr{N}_0$ pour une telle filtration est un sous-ensemble analytique conique de $T^*(Y/X)$ qui ne dépend pas du choix de cette filtration; on le note $\operatorname{Car}(\mathscr{N}_0)$ et on a :

$$\varphi^{-1}(\operatorname{Car}(\mathscr{N}_0)) = \operatorname{Car}(\mathscr{N}_0 \otimes_{\mathscr{D}_{Y/X}} \mathscr{D}_Y)$$

[où φ est le morphisme introduit dans la suite exacte (3)];

(vi) soient $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_Y$-Module cohérent, $\mathscr{N}_0$ un sous-$\mathscr{D}_{Y/X}$-Module cohérent engendrant $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{D}_Y$; alors $\operatorname{Car}(\mathscr{N}_0)$ ne dépend que de $\mathscr{N}$.

III. Le théorème des images directes. — Soient $f: Y \to X$ un morphisme lisse, $\mathscr{N}$ un $\mathscr{D}_Y$-Module à droite cohérent, $(Y_s)_{s \in \mathbf{R}_+}$ une famille croissante d'ouverts de Y. On note i_s l'injection $Y_s \hookrightarrow Y$ et $f_s = f \circ i_s$ la restriction de f à Y_s; pour simplifier, on écrit $\int_{f_s} \mathscr{N}$ et $\int_{f_s}^c \mathscr{N}$ au lieu de $\int_{f_s} \mathscr{N}|_{Y_s}$ et $\int_{f_s}^c \mathscr{N}|_{Y_s}$. On suppose aussi, toujours pour simplifier, que le bord ∂Y_s de Y_s est de classe C^1, et que Y_s est localement d'un seul côté de ∂Y_s; on note $T^*_{\partial Y_s} Y$ le fibré conormal à ∂Y_s (pour la structure réelle). Sans l'hypothèse simplificatrice, il faudrait remplacer $T^*_{\partial Y_s} Y$ par le fibré $N^*(Y_s)$ de [7].

Théorème 1. — *On fait les hypothèses suivantes :*

(i) $Y = \bigcup_{s>0} Y_s$, *et* $Y_s = \bigcup_{s'<s} Y_{s'}$, $Y\Delta_s \supset \bigcap_{s'>s} Y_{s'}$, *quel que soit* $s > 0$;

(ii) *pour tout* s, f *est propre sur* $Y\Delta_s \cap \operatorname{supp}(\mathscr{N})$;

(iii) *il existe un sous-*$\mathscr{D}_{Y/X}$*-Module de type fini* $\mathscr{N}_0$ *de* $\mathscr{N}$ *engendrant* $\mathscr{N}$ *sur* $\mathscr{D}_Y$;

(iv) *pour tout* s, $T^*_{\partial Y_s} Y \cap \varphi^{-1}(\operatorname{Car}(\mathscr{N}_0)) \subset T^*_Y Y$.

Alors :

(*a*) *pour tout* s, $\int_f \mathscr{N} \xrightarrow{\sim} \int_{f_s} \mathscr{N}$;

(*b*) *les Modules de cohomologie de* $\int_f \mathscr{N}$ *sont cohérents sur* $\mathscr{D}_X$, *filtrés et nuls en dehors d'un intervalle fini de degrés;*

(*c*) $\left(\int_f \mathcal{N}\right) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathbf{R}\, f_* (\mathcal{N} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{O}_Y)$;

(*d*) $\operatorname{Car}\left(\int_f \mathcal{N}\right) \subset \varpi\rho^{-1}(\operatorname{Car}(\mathcal{N}))$;

(*e*) $\mathbf{R}\,\varpi_*\, \rho^{-1}(\pi^{-1}(\mathcal{N}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_Y)} \mathcal{E}_{Y\to X}) \simeq \pi^{-1}\left(\int_f \mathcal{N}\right) \otimes^{\mathbf{L}}_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} \mathcal{E}_X$.

Enfin, on a des résultats analogues en remplaçant partout $\int_f \mathcal{N}$ *par* $\int_f^c \mathcal{N}$ *et* $\mathbf{R}\, f_*$, $\mathbf{R}\,\varpi_*$ *par* $\mathbf{R}\, f_!$, $\mathbf{R}\,\varpi_!$.

IV. Esquisse de démonstration du théorème. — Soient ω un ouvert relativement compact de X et $s>0$ fixés; on montre d'abord qu'il existe un complexe $\mathcal{M}_.$ sur Y, quasi-isomorphe à $\mathcal{N}$ sur $f^{-1}(\omega) \cap Y\Delta_s$, et, en chaque degré, de la forme $\mathcal{M}_i = \mathcal{N}_i \otimes_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{D}_Y$, où $\mathcal{N}_i$ est un $\mathcal{D}_{Y/X}$-Module cohérent ($i \in \mathbf{N}$). On construit les $\mathcal{M}_i$ par récurrence sur i, en partant de $\mathcal{N}_0$ donné dans l'énoncé; si $i \geqq 1$ et si $\mathcal{M}_.$ est construit jusqu'en degré $i-1$, on considère $\mathcal{K}_i = \operatorname{Ker}(\mathcal{M}_{i-1} \to \mathcal{M}_{i-2})$ (en prenant, pour $i=1$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}$) et le $\mathcal{D}_{Y/X}$-Module cohérent $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{i-1}\mathcal{D}_f(k) \cap \mathcal{K}_i$ [*cf.* propriété II (iv)] avec k assez grand pour qu'il engendre $\mathcal{K}_i$ comme $\mathcal{D}_Y$-Module sur $f^{-1}(\omega) \cap Y\Delta_s$. On a donc $\mathbf{R}\, f_{s*}(\mathcal{M}_. \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}) \simeq \mathbf{R}\, f_{s*}(\mathcal{N} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X})$ et une formule analogue pour $\mathbf{R}\,\varpi_*$.

En chaque degré :

$$\mathcal{M}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X} \simeq \mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{D}_{Y\to X} \simeq (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y) \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}(\mathcal{O}_X)} f^{-1}(\mathcal{D}_X),$$

puisque $\mathcal{D}_{Y/X}$ opère sur $\mathcal{D}_{Y\to X}$ par l'intermédiaire du facteur $\mathcal{O}_Y$; de même :

$$\rho^{-1}\pi^{-1}(\mathcal{N}_i) \otimes^{\mathbf{L}}_{\rho^{-1}\pi^{-1}(\mathcal{D}_{Y/X})} \mathcal{E}_{Y\to X} \simeq \rho^{-1}\pi^{-1}(\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y)\, \hat{\otimes}_{\varpi^{-1} f^{-1}(\mathcal{O}_X)} \varpi^{-1}(\mathcal{E}_X).$$

On a ensuite :

$$(\mathcal{M}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}) \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}(\mathcal{D}_X)} f^{-1}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y.$$

D'après [7] (corollary 10.1.5), le micro-support du complexe $\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y$ est égal à la variété caractéristique du $\mathcal{D}_Y$-Module $\mathcal{N}_i \otimes_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{D}_Y$, c'est-à-dire à $\varphi^{-1}(\operatorname{Car}(\mathcal{N}_i))$; on est dans les conditions d'application du théorème 4.4.1 de [7], qui donne, pour tout s, un isomorphisme $\mathbf{R}\, f_*(\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y) \simeq \mathbf{R}\, f_{s*}(\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y|_{Y_s})$. Pour calculer ces images directes, on recouvre Y par des ouverts isomorphes au produit d'un ouvert de X par un polydisque de $\mathbf{C}^n$ et assez petits pour que $\mathcal{N}_i$ y admette une résolution libre sur $\mathcal{D}_{Y/X}$; sur un tel ouvert, $\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y$ est quasi-isomorphe à un complexe de $\mathcal{O}_Y$-Modules libres (de type fini), avec des différentielles données par des matrices d'opérateurs de $\mathcal{D}_{Y/X}$: ces différentielles sont donc $\mathcal{O}_X$-linéaires. Comme, sur le produit d'un ouvert de X par un polydisque, $\mathcal{O}_Y$ est f_*-acyclique, $\mathbf{R}\, f_*(\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y)$ est l'image par f_* du complexe de CΦech construit au moyen du recouvrement précédent et des complexes de $\mathcal{O}_Y$-Modules libres associés; de même pour les f_{s*}. On réalise ainsi $\mathbf{R}\, f_{s*}(\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y|_{Y_s})$ comme un complexe $\mathcal{F}^{\cdot}_s$ sur X, en chaque degré de la forme $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^m \hat{\otimes} \mathcal{O}_X$, où U est un polydisque et m un entier (on peut supposer qu'un nombre fini d'ouverts recouvrent $Y\Delta_s$ à cause de la propreté). Les restrictions $F_s^\bullet \to F_{s'}^\bullet$ $(s' < s)$ sont des quasi-isomorphismes, et on montre facilement qu'elles sont $\mathcal{O}_X$-nucléaires, ce qui permet d'appliquer le théorème de finitude de [4], et d'obtenir la pseudo-cohérence de $\mathbf{R}\, f_* (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y)$.

D'autre part, les résultats du paragraphe 3, n° 5 de [4] appliqués respectivement au-dessus de $(T^*X, \mathcal{E}_X)$ et de $(X, \mathcal{O}_X)$ donnent les isomorphismes :

$$\mathbf{R}\,\varpi_* (\pi^{-1} (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y) \mathbin{\hat{\otimes}}_{\varpi^{-1} f^{-1} (\mathcal{O}_X)} \varpi^{-1} (\mathcal{E}_X)) \simeq \pi^{-1} (\mathbf{R}\, f_* (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{O}_Y)) \mathbin{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_X,$$

$$\mathbf{R}\, f_* (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}(\mathcal{D}_X)} f^{-1} (\mathcal{O}_X)) \simeq \mathbf{R}\, f_* (\mathcal{N}_i \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_{Y/X}} \mathcal{D}_{Y\to X}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X.$$

Cela suffit à établir les assertions (*a*), (*b*), (*c*) et (*e*) du théorème. On peut ensuite établir (*d*) à partir de (*e*) ou bien de (*c*) (*cf.* [7], corollary 10.1.5). Les résultats concernant $\int_f^c \mathcal{N}$ s'obtiennent d'une manière analogue.

V. Remarques. — 1. L'hypothèse (iv) du théorème peut se traduire en « ∂Y_s est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{N}$ le long de $Y \times_X T^* X$ », (*cf.* [10], [12]).

2. Dans le cas absolu où X est réduit à un point, on obtient la finitude des espaces vectoriels $H^i(Y ; \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y))$ sous la seule hypothèse que les ∂Y_s sont non caractéristiques. Ceci généralise donc un résultat de J.-M. Bony et P. Schapira [3], qui considéraient le cas $\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y P$, résultat étendu ensuite par T. Kawai aux Modules $\mathcal{N}$ admettant une présentation libre globale [8] (*cf.* aussi [6]).

3. Les hypothèses (i), (ii) et (iv) du théorème sont satisfaites si f est propre sur Supp $\mathcal{N}$ (on prend $Y_s = Y$ pour tout s); on retrouve ainsi le théorème de M. Kashiwara [5] (qui supposait de plus f projective; *cf.* aussi G. Laumon [9] et F. Pham [13]).

4. Il existe des théorèmes de finitude relative dans le cas algébrique [1].

5. Un théorème d'images directes pour les Modules holonomes singuliers réguliers a été obtenu par une méthode différente (utilisant la correspondance de Riemann-Hilbert) par M. Kashiwara et P. Schapira [7], sous les hypothèses (i), (ii) et l'hypothèse (iv') : $T^*_{\partial Y_s} Y \cap \overline{(\mathrm{Car}(\mathcal{N}) + Y \times_X T^* X)} \subset T^*_Y Y$.

Références bibliographiques

[1] I. N. Bernstein, *Functional Analysis*, 6, n° 4, 1972, p. 26-40.
[2] J. E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North Holland, 1979.
[3] J.-M. Bony et P. Schapira, *Invent. Math.*, 17, 1972, p. 95-105.
[4] C. Houzel, *Math. Ann.*, 205, 1973, p. 13-54.
[5] M. Kashiwara, *Invent. Math.*, 38, 1976, p. 33-53.
[6] M. Kashiwara, *Cours Université Paris-Nord*, rédigé par T. Monteiro-Fernandès, Birkhäuser, 1983.
[7] M. Kashiwara et P. Schapira, Microlocal Study of Sheaves, présenté à *Astérisque*.
[8] T. Kawaï, *J. Math. Kyoto Univ.*, 13, n° 1, 1973, p. 75-95.
[9] G. Laumon, *Thèse*, Orsay, 1983.
[10] Y. Laurent, *Lecture Notes in Physics*, Springer, 126, 1980, p. 77-90.
[11] B. Malgrange, *Séminaire*, Grenoble, 1975.
[12] T. Monteiro-Fernandes, *Thèse*, Université Paris-Nord, 1982; *Astérisque* (à paraître).
[13] F. Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Birkhäuser, 1979.
[14] M. Sato, M. Kashiwara et T. Kawaï, *Lecture Notes in Math.*, Springer, 287, 1973, p. 265-529.

Mathématiques C.S.P., Université Paris-Nord, 93430 *Villetaneuse.*