

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. PALLU DE LA BARRIÈRE

P. SCHAPIRA

Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 23,
p. 1-14*

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A24_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>)
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 f

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

APPLICATION DE LA THEORIE DES MICROFONCTIONS

HOLOMORPHES AU PROBLEME DE CAUCHY

A DONNEES SINGULIERES

par P. PALLU DE LA BARRIERE
et
P. SCHAPIRA

Exposé n° XXIII

11 Mai 1976

INTRODUCTION

Depuis l'article fondamental de Y. Hamada [1] l'étude du problème de Cauchy dont les données sont des fonctions holomorphes singulières sur une hypersurface a donné lieu à plusieurs publications. Citons seulement la thèse de C. Wagschal [6] et l'article récent de Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal [3] auquel nous renvoyons pour une bibliographie complète (cf. aussi [4]).

Il y a déjà plusieurs années que M. Sato a expliqué au second d'entre nous que l'on pouvait démontrer facilement le théorème de Hamada, pour des données présentant des singularités essentielles ou logarithmiques à l'aide des outils élaborés dans [S.K.K.] (faisceaux $\mathcal{O}_{Y|X}$, opérateurs pseudo-différentiels, transformations canoniques complexes), sous la seule hypothèse que l'opérateur P était de "multiplicité constante".

C'est ce que nous faisons ici, où nous montrons en même temps que l'utilisation des faisceaux $\mathcal{O}_{Y|X}^{\mathbf{R}}$ permet d'obtenir le théorème dans différentes classes de fonctions holomorphes ramifiées autour des hypersurfaces caractéristiques, et que l'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels donne immédiatement un théorème de "réflexion des singularités" analogue (dans le domaine complexe) au théorème de Lax et Nirenberg (cf. [5]).

§ 1. NOTATIONS, RAPPELS, PRELIMINAIRES

- Faisceaux $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbf{R}}$: Nous désignerons par X une variété analytique complexe, T^*X son fibré cotangent, $P^*X = (T^*X \setminus X)/\mathbb{C}^*$ son fibré projectif cotangent. Il nous arrivera souvent d'identifier un point de $T^*X - X$ et son image dans P^*X . Nous désignerons par \mathcal{O}_X (ou \mathcal{O}) le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et par \mathcal{D} le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels sur P^*X (cf. [S.K.K.]).

Soit K une hypersurface analytique complexe de X, S_K^*X le fibré en sphères conormal à K dans X. Rappelons [S.K.K. chapitre 2] la construction du faisceau $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbf{R}}$ sur S_K^*X .

$$\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}} \quad \mathcal{K}^1 \quad (\pi_{K|X}^{-1} \mathcal{O}_X)^a$$

$$S_K^* X$$

où $\pi_{K|X}$ désigne la projection

$$X - K \cup S_K^* X \rightarrow X$$

le premier espace étant muni de la topologie dite de "co-éclaté" ([S.K.K. chapitre 1]) et a désigne l'application antipodale. Nous décrirons bientôt les sections de ce faisceau. Rappelons d'abord ses principales propriétés.

Soit Y une hypersurface complexe de X transverse à K et $Z = K \cap Y$. Désignons par ρ la projection canonique :

$$S_K^* X \times_X Y \rightarrow S_Z^* Y$$

on peut alors définir naturellement un morphisme de restriction :

$$\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}} | S_K^* X \times_X Y \rightarrow \rho^{-1} \mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbf{R}}$$

autrement dit si $x^* \in S_K^* X \times_X Y$ si $y^* = \rho(x^*) \in S_Z^* Y$, et si f appartient à $(\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}$ on définit la restriction de f à Y , $\gamma_o(f) \in (\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbf{R}})_{y^*}$.

- Soit j la surjection canonique de $S_K^* X$ sur $P_K^* X \subset P^* X$. Le faisceau $\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}}$ est un $j^{-1}(\mathcal{O}_{P_K^* X})$ -module. Cela signifie, entre autre, que si $x^* \in P_K^* X$ et si P est un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage de $j(x^*)$, P opère sur $(\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}$.

- Soit X et \tilde{X} deux variétés analytiques complexes de même dimension, K et \tilde{K} deux hypersurfaces complexes de X et de \tilde{X} , Φ une transformation canonique holomorphe homogène définie au voisinage de $x^* \in S_K^* X$, telle que $\Phi(T_K^* X) = T_{\tilde{K}}^* \tilde{X}$.

Alors une fois quantifiée, Φ définit un isomorphisme $\hat{\Phi}$:

$$(1.1) \quad \hat{\Phi} : \mathcal{O}_{j(x^*)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{j(\Phi(x^*))}$$

$$(1.2) \quad \hat{\Phi} : (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_{\tilde{K}|\tilde{X}}^{\mathbf{R}})_{\Phi(x^*)} \text{ tel que } \forall P \in \mathcal{O}_{j(x^*)}, \forall f \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}$$

$$(1.3) \quad \widehat{\Phi}(Pf) = \widehat{\Phi}(P)\widehat{\Phi}(f)$$

En fait l'isomorphisme (1.2) n'est pas explicitement démontré dans [S.K.K.]. Il faut adapter la démonstration du théorème 1.3.1 du chapitre 3, la situation étant analogue.

-Faisceaux $\mathcal{O}_{K|X}^p$: Pour $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ nous allons définir différents faisceaux sur K de fonctions holomorphes ramifiées autour de K .

Pour ne pas alourdir l'exposé plaçons-nous dans la situation où X est un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} muni des coordonnées (x_0, \dots, x_n) et K désigne l'intersection de X et de l'hyperplan d'équation $\{x_n = 0\}$, et laissons au lecteur le soin de vérifier le caractère intrinsèque de nos définitions.

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} . Nous appellerons fonctions holomorphes dans le secteur $\mathbb{C}^n \times I$ la donnée, pour tout intervalle ouvert $J \subset I$ de longueur $< 2\pi$ d'une fonction f_J holomorphe dans $\mathbb{C}^n \times \Gamma_J$, où Γ_J désigne l'image de $J \times i\mathbf{R}$ dans \mathbb{C} par l'application $x_n \mapsto \exp(ix_n)$, telles que si $J \cap J' \neq \emptyset$, $f_J = f_{J'}$ sur $\Gamma_J \cap \Gamma_{J'}$.

On désigne alors par $\mathcal{O}_{K|X}^\infty$ l'espace des fonctions f telles que pour tout intervalle borné I de \mathbf{R} , il existe V_I voisinage de K dans X , tel que f soit holomorphe dans le secteur $(\mathbb{C}^n \times I) \cap V_I$, et on définit ainsi un faisceau sur K .

Intuitivement, $\mathcal{O}_{K|X}^\infty$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur le revêtement universel de $X-K$ dont le domaine d'existence tend vers K quand le nombre de tours que l'on fait autour de K augmente.

Nous désignerons par $\mathcal{O}_{K|X}^p$ ($p \in \mathbf{N}$), le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{K|X}^\infty$ des fonctions f telles que la différence entre f et la fonction obtenue à partir de f en tournant p fois autour de K , soit holomorphe au voisinage de K . Il est facile de voir que si $\{k(x) = 0\}$ est une équation réduite de K et si l'on choisit une détermination de $\text{Log } k$ on a :

$$\mathcal{O}_{K|X}^p = \mathcal{O}_{X-K} + \mathcal{O}_{X-K} k^{1/p} + \dots + \mathcal{O}_{X-K} k^{p-1/p} + \mathcal{O}_X \text{Log } k$$

où \mathcal{O}_{X-K} désigne le faisceau sur K des fonctions holomorphes sur $X-K$ au voisinage de K . Si k est premier $\mathcal{O}_{K|X}^p$ est somme directe des faisceaux ci-dessus.

Relations entre $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{P}}$: Plaçons nous à nouveau dans la situation où X est un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} , K étant défini par l'équation $\{x_n = 0\}$. On pose :

$$S^{\mathbb{P}} = [0, 2\pi] \text{ avec } \{0\} \text{ identifié à } \{2\pi\}$$

$$S^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}$$

$$\sigma_p : S^{\mathbb{P}} \rightarrow S^1, \theta \rightarrow \theta \bmod 2\pi.$$

On peut identifier $S_K^* X$ à $K \times S^1$. Le faisceau $\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}$ sur $K \times S^{\mathbb{P}}$ a les mêmes germes que le faisceau $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}$. Plus exactement si $(x, \theta) \in K \times S^{\mathbb{P}}$:

$$(\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}})_{(x, \theta)} = (\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}})_{(x, \sigma_p(\theta))}$$

Désignons par γ la projection de $S_K^* X$ sur K . Alors $\gamma_* \sigma_{p*} (\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}})$ désigne l'ensemble des sections du faisceau $\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}$ sur $S^{\mathbb{P}}$: c'est un faisceau sur K .

Lemme 1.1 : $\gamma_* \sigma_{p*} (\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}) = \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{P}} / \mathcal{O}$

Démonstration : Il suffit de remarquer qu'une section globale de $\sigma_p^{-1} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}$ est définie par :

- un recouvrement de $S^{\mathbb{P}}$ par des intervalles ouverts I_ℓ de longueur $< \pi$
- les fonctions f_ℓ holomorphes dans $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \setminus \Gamma_\ell) \cap V_\ell$, où V_ℓ est un voisinage de K dans X et Γ_ℓ désigne le cône convexe fermé de \mathbb{C} polaire de I_ℓ , telles que si $I_\ell \cap I_{\ell'} \neq \emptyset$, $f_\ell = f_{\ell'}$, se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de K .

§ 2. ENONCE DES RESULTATS

Soit X une variété analytique complexe, Y une hypersurface analytique complexe de X , Z une hypersurface analytique complexe de Y , P un opérateur différentiel holomorphe sur X , d'ordre m . On désigne par ρ la projection

$$\rho : P_X^* X \times_Y \setminus P_Y^* X \rightarrow P^* Y$$

On fera les hypothèses suivantes.

H1. L'hypersurface Y est non caractéristique pour P .

H2. Au voisinage de $\rho^{-1}(P_Z^*Y)$, $\text{Car}(P)$, la variété caractéristique de P est une variété régulière de P^*X , et $\text{Car}(P) \cap (P^*X \times Y)$ est une sous-variété symplectique de P^*X muni de sa structure de contact X .

Sous ces hypothèses, on sait (cf. [6]) qu'il existe au voisinage de Y , d hypersurfaces complexes, K_1, \dots, K_d caractéristiques pour P , passant par Z , et transverse entre elles et à Y . Indiquons comment les construire.

Soit F_1, \dots, F_d les composantes connexes de $\rho^{-1}(P_Z^*Y) \cap \text{Car}(P)$. Chaque hypersurface K_j ($j = 1, \dots, d$) est la projection sur X de la variété lagrangienne réunion des bicaractéristiques de $\text{Car}(P)$ issues de F_j .

On notera m_j ($j = 1, \dots, d$) l'ordre d'annulation du symbole principal de P sur $\text{Car}(P)$ au voisinage de $P_{K_j}^*(X)$.

Si on se place en coordonnées (ce qui signifiera dans toute la suite que X est un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} , l'espace T^*X est muni des coordonnées $(x_0, \dots, x_n; \xi_0, \dots, \xi_n)$, $Y = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_0 = 0\} \cap X$ et $Z = Y \cap \{x_n = 0\}$) l'hypothèse H2 est équivalente à la suivante :

- soit $y \in Z$, $y^* = (y; 0, \dots, 1) \in P_Z^*Y$ le point correspondant, et τ_1, \dots, τ_d les racines de l'équation $P_m(y; \tau, 0, \dots, 0, 1) = 0$, où P_m désigne le symbole principal de P (la multiplicité de τ_k est égale à m_k). Alors si $q_k(x^*) = 0$ est une équation réduite de la variété $\text{Car}(P)$ au voisinage du point $x_k^* = (y; \tau_k, 0, \dots, 0, 1)$ on a

$$\frac{\partial q_k(x_k^*)}{\partial \xi_0} \neq 0 \quad .$$

Si $f \in \mathcal{O}(X)$ on désignera par $\gamma_0(f)$ la restriction de f à Y . On supposera donné au voisinage de Y un champ de vecteurs holomorphes dont la restriction à Y est normale à Y . On définit alors $\gamma_k(f)$ comme la restriction à Y de la dérivée k -ième de f le long de ce champ de vecteurs. Quand on travaillera en coordonnées, on prendra $\frac{\partial}{\partial x_0}$ comme champ de vecteurs.

Théorème 1 : Soit $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Pour tout $g \in \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{K_i}^p|_X$ et tout $(h) \in (\mathcal{O}_{Z|Y}^p)^m$ il existe un unique $f \in \mathcal{O}_{K_i}^p|_X$ défini au voisinage de Y , solution du problème de Cauchy

$$Pf = g, \quad \gamma_k(f) = h_k \quad (k = 0, \dots, m-1)$$

Pour $p = 1$, on retrouve le "théorème de Hamada" [2]. Pour $p = \infty$, ce théorème est à rapprocher de [3].

Théorème 2 : Soit $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, et soit $r \leq d$. Soit $f \in \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{K_i}^p|_X$, et supposons que :

$$Pf \in \mathcal{O}_X, \quad \gamma_k(f) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{pour } k = 0, \dots, m_1 + \dots + m_r.$$

Alors $f \in \mathcal{O}_X$.

Ce théorème est l'analogie complexe du théorème de réflexion de Lax et Nirenberg (cf. [5]).

§ 3. THEOREME DE CAUCHY-KOWALEVSKI DANS $\mathcal{O}_{K|X}^{\mathbf{R}}$

- On travaille en coordonnées.

- Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m "de type Weierstrass" défini au voisinage de $\rho^{-1}(P^*Y)$, c'est à dire s'écrivant :

$$P = D_0^m + A_1(x, D') D_0^{m-1} + \dots + A_m(x, D')$$

les $A_j(x, D')$ étant d'ordre $\leq j$ et ne dépendant pas de D_0 (c'est à dire commutant avec x_0). On suppose que :

- l'équation $P_m(0; 1, 0, \dots, 0, \tau) = 0$ a une seule racine τ_0 (de multiplicité m) et si $q(x, \xi)$ est une équation réduite de la variété caractéristique de P au voisinage $(0; 1, 0, \dots, 0, \tau_0)$ alors :

$$\frac{\partial q}{\partial \xi_0} (0; 1, 0, \dots, 0, \tau_0) \neq 0.$$

Sous ces hypothèses, il existe une et une seule hypersurface K caractéristique pour P passant par Z .

Soit $x^* \in S_K^* X$ et $y^* \in S_Z^* Y$ son image par l'application ρ .

Lemme 3.1 : Dans la situation précédente :

$$\forall g \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}, \quad \forall (h) \in (\mathcal{C}_{Z|Y}^{\mathbf{R}})_{y^*}^m$$

il existe un unique $f \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}$ solution du problème de Cauchy

$$(3.1) \quad Pf = g, \quad \gamma_k(f) = h_k, (k = 0, \dots, m-1)$$

Démonstration : On peut se ramener de manière standard à des données de Cauchy nulles et écrire le problème (3.1) sous la forme :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall g \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*}, \quad \exists! f \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*} \\ \text{avec } Pf = g \text{ et } \exists h \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})_{x^*} \text{ tel que } f = x_0^m h \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse H2, $\text{Car}(P) \cap (P^* X \times Y)$ est symplectique. On peut donc

faire une transformation canonique holomorphe homogène dans $T^* X$ au voisinage de x^* , qui transforme $Y \times P^* X$ et $\text{Car}(P)$ en les variétés d'équations :

$$(3.3) \quad Y \times P^* X \xleftrightarrow{X} \{ (\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in P^* \tilde{X} \mid \tilde{x}_0 = 0 \}$$

$$(3.4) \quad \text{Car}(P) \xleftrightarrow{X} \{ (\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in P^* \tilde{X} \mid \tilde{\xi}_0 = 0 \}$$

De plus $L = \rho^{-1}(P_Z^* Y) \cap \text{Car}(P)$ étant une variété lagrangienne de la variété symplectique $(P^* X \times Y) \cap \text{Car}(P)$ on peut effectuer une nouvelle

transformation canonique, indépendante de \tilde{x}_0 et de $\tilde{\xi}_0$ telle que L soit transformée en la variété

$$(3.5) \quad L \xleftrightarrow{X} \{ (\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in P^* \tilde{X} \mid \tilde{x}_0 = \tilde{x}_n = \tilde{\xi}_0 = \dots = \tilde{\xi}_{n-1} = 0 \}$$

Comme $P_K^* X$ était la réunion des bicaractéristiques de $\text{Car}(P)$ issues de L ,

$P_K^* X$ sera transformé en la variété

$$(3.6) \quad P_K^* X \longleftarrow \{ (\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in P^* \tilde{X} \mid \tilde{x}_n = \tilde{\xi}_0 = \dots = \tilde{\xi}_{n-1} = 0 \}$$

autrement dit en le fibré conormal à l'hypersurface d'équation $\{\tilde{x}_n = 0\}$.

Notons $\phi : T^* X \longleftarrow T^* \tilde{X}$ la transformation canonique que l'on a effectuée. Elle est définie par des relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\xi}_j - q_j(x, \xi) = 0 & j = 0, \dots, n \\ \tilde{x}_j - r_j(x, \xi) = 0 & j = 1, \dots, n \\ \tilde{x}_0 = x_0 \end{array} \right.$$

qui définissent une variété lagrangienne Λ de $T^*(X \times \tilde{X})$. Pour la quantifier (i.e. : pour qu'elle opère sur \mathcal{P} et $\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}}$) il suffit de choisir une section non dégénérée d'un système holonome porté par Λ ([S.K.K.], Ch.2, théorème 4.3.1). Il est facile de voir qu'il existe des opérateurs pseudo-différentiels $Q_j(x, \tilde{x}, D_x, D_{\tilde{x}})$, $j = 0, \dots, n$ et $R_j(x, \tilde{x}, D_x, D_{\tilde{x}})$, $j = 1, \dots, n$, dont les symboles principaux sont $q_j(x, \xi)$ et $r_j(x, \xi)$ et tels que si $\tilde{\mathcal{J}}$ désigne l'idéal à gauche de $\mathcal{P}_{X \times \tilde{X}}$ engendré par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_{\tilde{x}_j} - Q_j(x, \tilde{x}, D_x, D_{\tilde{x}}) & j = 0, \dots, n \\ \tilde{x}_j - R_j(x, \tilde{x}, D_x, D_{\tilde{x}}) & j = 1, \dots, n \\ \tilde{x}_0 - x_0 \end{array} \right.$$

le système $\mathcal{M}_{\Lambda} = \mathcal{P}_{X \times \tilde{X}} / \tilde{\mathcal{J}}$ soit un système holonome porté par Λ . Choissant la classe de $1_{X \times \tilde{X}}$ comme section de \mathcal{M}_{Λ} , il est aisé de montrer, en suivant la construction de [S.K.K. Ch.2 démonstration du théorème 3.3.3], que l'opérateur x_0 est transformé en l'opérateur \tilde{x}_0 .

En écrivant (x, ξ) pour $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$, on a ramené le problème (3.2) au cas où $\text{Car}(P) = \{(x, \xi) \in P^* X \mid \xi_0 = 0\}$, ce qui permet, après avoir divisé à gauche P par un opérateur elliptique afin qu'il soit de type Weierstrass de supposer que :

$$P(x, D_x) = D_0^m + A_1(x, D') D_0^{m-1} + \dots + A_m(x, D')$$

où $\text{ord}(A_j) < j$.

Avec les notations matricielles :

$$\vec{D}_0 = \begin{pmatrix} D_0 & & & \circ \\ & \ddots & & \vdots \\ & & D_0 & \\ \circ & & & \end{pmatrix}, \quad \vec{M}(x, D') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \circ \\ \circ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 1 \\ A_m(x, D') & \dots & A_1(x, D') & \end{pmatrix}$$

on se pose le problème

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall G \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})^m_{x^*}, \quad \exists! F \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})^m_{x^*} \\ \text{tel que } (\vec{D}_0 - \vec{M}(x, D'))F = G \text{ et } \exists! H \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})^m_{x^*} \\ \text{avec } F = x_0 H. \end{array} \right.$$

Une solution unique $F = (f_1, \dots, f_m)$ du problème (3.7) avec $G = (0, \dots, 0, g)$ donne une solution unique au problème (3.2) en posant $f = f_1$.

D'après le théorème 5.2.1 du chapitre II de [S.K.K.], il existe une matrice inversible d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini $\vec{A}(x, D')$ définie au voisinage de x^* telle que

$$(\vec{D}_0 - \vec{M}(x, D'))\vec{A}(x, D') = \vec{A}(x, D')\vec{D}_0.$$

Le problème de Cauchy

$$(3.8) \quad \vec{D}_0 F' = G', \quad \vec{A} H' \text{ avec } F' = x_0 H'$$

admet de manière évidente une solution unique $F' \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})^m_{x^*}$ pour toute donnée $G' \in (\mathcal{C}_{K|X}^{\mathbf{R}})^m_{x^*}$. On obtient alors la solution unique du problème (3.7) en posant

$$G = \vec{A}^{-1} G', \quad F = \vec{A} F'$$

et en remarquant que $[\vec{A}, x_0] = 0$. ■

§ 4. DEMONSTRATION DES THEOREMES

Si K est une hypersurface complexe de X , on a un isomorphisme $\mathbb{P}_K^* X = K$. Les faisceaux $\mathcal{O}_K^P|_X/\mathcal{O}$ peuvent alors être considérés comme des faisceaux sur $\mathbb{P}_K^* X$ à support dans $\mathbb{P}_K^* X$, et il résulte du lemme 1.1 que ce sont alors des \mathcal{O}_X^P -modules.

Lemme 4.1 : Sous les hypothèses du lemme 3.1 et pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on a :

$\forall g \in \mathcal{O}_K^P|_X/\mathcal{O}$, $\forall (h) \in [\mathcal{O}_Z^P|_Y/\mathcal{O}_Y]^m$, il existe une unique $f \in \mathcal{O}_K^P|_X/\mathcal{O}$ définie au voisinage de Y solution du problème de Cauchy :

$$(4.1) \quad Pf = g, \quad \gamma_k(f) = h_k \quad (k = 0, \dots, m-1)$$

Démonstration : Il suffit de démontrer le lemme localement : on peut donc se placer en coordonnées. Considérons alors le morphisme de faisceaux sur $(K \times S^1) \cap Y = Z \cap S^1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}|_{S_K^* X \times Y} &\rightarrow \mathcal{O}_{K|X}^{\mathbb{R}}|_{S_K^* X \times Y} \times (\mathcal{O}^{-1} \mathcal{O}_{Z|Y}^{\mathbb{R}})^m \\ f &\longmapsto (Pf, \gamma(f)) \end{aligned}$$

où $\gamma(f) = (\gamma_0(f), \dots, \gamma_{m-1}(f))$.

D'après le lemme 3.1, c'est un isomorphisme. Le lemme 4.1 résulte alors du lemme 1.1. ■

Comme dans [S.K.K[^] (démonstration du lemme 3.5.2. Ch.3), nous allons décomposer P en produit d'opérateurs pseudo-différentiels vérifiant les hypothèses du lemme 3.1 et nous "recollerons" ensuite les solutions (le même raisonnement a déjà été fait dans [5]).

Il suffit de démontrer les théorèmes au voisinage de chaque point de Z . On se placera donc en coordonnées. Soit $y \in Z$; l'hypersurface Y étant non-caractéristique pour P , on peut supposer que P est de type Weierstrass au voisinage de y . Soit $y^* \in \mathbb{P}_Z^* Y$ le point associé à y et soit $x_j^* \in \mathbb{P}_{K_j}^* X$, $j = 1, \dots, d$ les éléments de $\rho^{-1}(y^*) \cap \text{Car}(P)$.

Lemme 4.2 : Il existe des opérateurs pseudo-différentiels de type Weierstrass $P_1, \dots, P_d, S_1, \dots, S_d$ définis au voisinage de $\rho^{-1}(y^*)$ tels que :

- . $P = S_1 \dots S_d \doteq P_d \dots P_1$
- . P_j et S_j sont d'ordre m_j ,
- . P_j et S_j sont elliptiques au voisinage de x_k^* , $\forall k \neq j$ et leurs symboles principaux s'annulent à l'ordre m_j sur x_j^* .

Démonstration : Suivant les notations du paragraphe 2, le symbole principal de P s'annule à l'ordre m_1 au point x_1^* . D'après le théorème de division de Weierstrass ([S.K.K.] théorème 2.2.2 Ch.II), il existe des opérateurs pseudo-différentiels P_1 et P' définis au voisinage de x_1^* et tels que :

- . P' est elliptique au voisinage de x_1^*
- . P_1 est de type Weierstrass d'ordre m_1 et son symbole principal s'annule à l'ordre m_1 en x_1^* .
- . $P = P'P_1$ au voisinage de x_1^* .

De plus, P et P_1 étant de type Weierstrass, P' l'est aussi donc P_1 et P' sont définis au voisinage de $\rho^{-1}(y^*)$ et le symbole principal de P' s'annule à l'ordre m_k au point x_k^* , $\forall k \neq 1$. On obtient les décompositions cherchés en appliquant ce procédé au voisinage de chaque point x_k^* . ■

- Démonstration du théorème 1 : Remarquons que P_j et S_j , $j = 1, \dots, d$ satisfont aux hypothèses du lemme 3.1. Nous allons démontrer le théorème 1 par récurrence sur d , le cas $d = 1$ étant traité par le lemme 4.1. Posons $P' = P_d \dots P_2$, $S' = S_2 \dots S_d$ et $\mathcal{O}_{K_1}^P | X / \mathcal{O} = \bigoplus_{i=2}^d \mathcal{O}_{K_i}^P | X / \mathcal{O}$.

a) Unicité : Soit $f = f_1 + f' \in (\mathcal{O}_{K_1}^P | X \oplus \mathcal{O}_{K_1}^P | X) / \mathcal{O}$ tel que

$$Pf = 0 ; \quad \forall_k (f) = 0, (k = 0, \dots, m-1)$$

Comme $\bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{K_i}^P | X / \mathcal{O}$ est somme directe de $\mathcal{O}_{K_1}^P | X / \mathcal{O}$ et de $\mathcal{O}_{K_i}^P | X / \mathcal{O}$, $Pf = 0$ implique $Pf_1 = 0$ et $Pf' = 0$. De plus l'ellipticité de P' au voisinage de x_1^* et celle de S_1 au voisinage de x_k^* , $\forall k \neq 1$ impliquent :

$$P_1 f_1 = 0 \quad \text{et} \quad S' f' = 0$$

Posons : $g' = P_1 f$, $g_1 = S' f$.

On a alors : $g' \in \mathcal{O}_{K'}^p | X / \mathcal{O}$ et $g_1 \in \mathcal{O}_{K_1}^p | X / \mathcal{O}$

$$P'g' = 0 \quad , \quad S_1g_1 = 0$$

et (P_1 et S' étant de type Weierstrass d'ordre m_1 et $m' = m - m_1$) :

$$\gamma_k(g') = 0 \quad , \quad k = 0, \dots, m' - 1$$

$$\gamma_k(g_1) = 0 \quad . \quad k = 0, \dots, m_1 - 1$$

On déduit alors des hypothèses de récurrence que :

$$g' = g_1 = 0 \quad ,$$

ce qui implique

$$f' = f_1 = 0 \quad .$$

b) Existence : On cherche la solution du problème

$$(4.1) \quad \begin{cases} P(f_1 + f') = g_1 + g' \quad , \quad \gamma_k(f_1 + f') = h_k \quad , \quad k = 0, \dots, m-1 \\ g_1, f_1 \in \mathcal{O}_{K_1}^p | X / \mathcal{O} \quad , \quad g', f' \in \mathcal{O}_{K'}^p | X / \mathcal{O} \quad , \quad h_k \in \mathcal{O}_{Z|Y}^p / \mathcal{O}_Y \end{cases}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $g' = 0$; d'autre part, S' étant de type Weierstrass d'ordre m' , on peut l'écrire :

$$S'(x, D) = D_0^{m'} + B_1(x, D')D_0^{m'-1} + \dots + B_{m'}(x, D')$$

On définit alors $\tilde{S}'(h)_k \in \mathcal{O}_{Z|Y}^p / \mathcal{O}_Y$, $k = 0, \dots, m_1 - 1$, par

$$\tilde{S}'(h)_k = h_{m'+k} + B_1(x, D')h_{m'+k-1} + \dots + B_{m'}(x, D')h_k$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut résoudre le problème :

$$S_1f_1 = g_1, \quad \gamma_k(f_1) = \tilde{S}'(h)_k \quad , \quad k = 0, \dots, m_1 - 1, \quad f_1 \in \mathcal{O}_{K_1}^p | X / \mathcal{O} \quad .$$

puis le problème :

$$S'f' = 0, \quad \gamma_k(f') = h_k - \gamma_k(S'^{-1}f_1), \quad k = 0, \dots, m' - 1, \quad f' \in \mathcal{O}_{K'}^p | X / \mathcal{O} \quad .$$

et on pose :

$$f = S'^{-1} f_1 = f'$$

On a alors immédiatement :

$$Pf = g_1, \quad \gamma_k(f) = h_k, \quad k = 0, \dots, m' - 1.$$

De plus :

$$\gamma_k(S'f) = \gamma_k(f_1) = \tilde{S}'(h)_k, \quad k = 0, \dots, m_1 - 1$$

$$\gamma_k(S'f) = \tilde{S}'(\gamma(f))_k, \quad k = 0, \dots, m_1 - 1$$

Donc :

$$\tilde{S}(\gamma(f) - h)_k = 0, \quad k = 0, \dots, m_1 - 1 \quad \text{et} \quad \gamma_k(f) - h_k = 0, \quad k = 0, \dots, m' - 1.$$

Ces deux égalités impliquent aisément, d'après la construction de \tilde{S} :

$$\gamma_k(f) - h_k = 0, \quad k = 0, \dots, m - 1,$$

ce qui achève de prouver que f est solution du problème (4.1).

On a travaillé modulo les fonctions holomorphes au voisinage de Y , mais le théorème 1 se déduit de a) et de b) et du théorème de Cauchy-Kowalevski usuel.

- Démonstration du théorème 2 : Posons $Q_1 = P_d \dots P_{r+1}$ et $Q_2 = P_r \dots P_1$.

Soit $f \in \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{K_i}^p | X$ tel que $Pf \in \mathcal{O}$. Puisque Q_1 est elliptique au voisinage de x_j^* , $j = 1, \dots, r$, on a :

$$Q_2 f \in \mathcal{O}$$

Si de plus $\gamma_k(f) \in \mathcal{O}$, $k = 0, \dots, m_1 + \dots + m_r$, on a $f \in \mathcal{O}$ d'après le résultat d'unicité de b). ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Hamada : The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Pub. RIMS, Kyoto University, 5, (1969) p.20-40.
- [2] Y. Hamada : Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires. C. R. A. S., Série A, t.276. (1973), p.1681-1684.
- [3] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. A paraître au J. Math. Pures et Appl.
- [4] J. Persson : On the Cauchy problem in \mathbb{C}^n with singular data. The Auroral observatory. Report n° 24-76 (February 1976).
- [S.K.K.] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo differential equations. Lecture notes in Math. n° 287, p.264-524.
- [5] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles. Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-1976, exp. n° 6.
- [6] C. Wagschal : Sur le problème de Cauchy ramifié. J. de Math. Pures et Appl. T. 53 (1974) p.147-164.
-