Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

P. Schapira

Front d'onde analytique au bord II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 13, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

FRONT D'ONDE ANALYTIQUE AU BORD II *

par P. SCHAPIRA

* Ce texte développe et améliore, avec des notations légèrement différentes, les résultats de la Note [20]

Exposé n° XIII

18 Mars 1986

Abstract : Let M be a real analytic manifold, X a complexification of M, Ω an open subset of M. Using the functor μhom of [10] we construct a sheaf $C_{\Omega|X}$ on T^*X, which extends the sheaf C_M of Sato's microfunctions above Ω, and permits us to define a new analytic wave front set $SS_\Omega(u)$, when $u \in B_M(\Omega)$ is a hyperfunction on Ω. If $\mathcal{M}$ is a system of microdifferencial equations and $u \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},C_M)$ we also introduce $SS_\Omega^{\mathcal{M},j}(u)$, a closed subset of T^*X.

Let now N be a submanifold of M of codimension d, Y the complexification of N in X, and let ω be an open subset of N with $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$. Under a topological assumption on ω and Ω we show how to define for any sheaf F on M a morphism (in the derived category of sheaves on M) of "boundary values", $b : R\Gamma_\Omega(F)_{|N} \to R\Gamma_\omega(F) \otimes \omega_{N|M}[d]$, and we apply this construction to the case where $F = R\,\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{M},B_M)$. If Y is non characteristic for $\mathcal{M}$, and $\mathcal{M}_Y$ denotes the induced system by $\mathcal{M}$ on Y, we obtain a morphism $R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\Gamma_\Omega(B_M))_{|N} \to R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\Gamma_\omega(B_N))$ and we prove that if ρ and ϖ denote the natural maps from $Y \times_X T^*X$ to T^*Y and T^*X respectively, one has the inclusion $SS_\omega^{\mathcal{M}_Y,j}(b(u)) \subset \rho\,\varpi^{-1}\, SS_\Omega^{\mathcal{M},j}(u)$, with equality when $d = 1$, $\omega = N$. Finally we define the boundary value morphism is case Y is characteristic, but $\mathcal{M}$ is "regular" along Y.

§ I. MICROLOCALISATION.

Nous suivrons les notations de [10]. Soit X une variété réelle, $\pi : T^*X \to X$ son fibré cotangent, ω_X le faisceau d'orientation sur X. Si M est une sous-variété de X on note T^*_MX le fibré conormal à M dans X et $\omega_{M|X}$ le faisceau d'orientation relative.

On note $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X, $D^+(X)$ (resp. $D^b(X)$) la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie bornée inférieurement (resp. bornée). On utilisera le bifoncteur μhom, de $D^b(X)^o \times D^+(X)$ dans $D^+(T^*X)$, défini dans [10].

Si A est une partie localement fermé de X, on note $\mathbb{Z}_A$ le faisceau sur X porté par A dont la restriction à A est le faisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$, et si $F \in Ob(D^+(X))$, on pose $F_A = \mathbb{Z}_A \overset{L}{\otimes} F$. On posera aussi :

$$\mu_A(F) = \mu\, hom(\mathbb{Z}_A,F) \quad . \tag{1.1}$$

Rappelons que, X étant identifié à la section nulle de T^*X, on a $\mu_A(F)|_X \cong R\Gamma_A(F)$ et si A est une sous-variété fermée de X, $\mu_A(F)$ coïncide avec le microlocalisé de Sato de F le long de A (cf. [15]).
Soit $SS(F)$ le micro-support de F (cf. [10]). On a :

$$SS(\mu_A(F)) \subset SS(\mathbb{Z}_A) \cap SS(F) \tag{1.2}$$

et plus généralement :

$$SS(\mu_A(F)) \subset C(SS(F), SS(\mathbb{Z}_A)) \tag{1.3}$$

où $C(.,.)$ désigne le "cône normal" (cf. [10 ch1]).

Soit M une sous-variété fermée de X, Ω un ouvert de M, j l'inclusion $\Omega \hookrightarrow X$, $\tilde{j}$ l'inclusion $\pi^{-1}(\Omega) \hookrightarrow T^*X$. On a un diagramme commutatif dans $D^+(T^*X)$:

$$\text{(1. .)}\quad \begin{array}{ccccccc}
\pi^{-1}R\Gamma_M(F) = \pi^{-1}R\pi_*\,\mu_M(F) & \longrightarrow & \mu_M(F) & \longrightarrow & R\tilde{j}_*\tilde{j}^{-1}\mu_M(F) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
\pi^{-1}Rj_*j^{-1}R\Gamma_M(F) = \pi^{-1}R\pi_*\,\mu_\Omega(F) & \longrightarrow & \mu_\Omega(F) & \longrightarrow & R\tilde{j}_*\tilde{j}^{-1}\mu_\Omega(F)
\end{array}$$

§ II. PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES FAISCEAUX.

Soit Ω un ouvert de X, $\bar{\Omega}$ son adhérence, $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

<u>Définition</u> 2.1 : Nous dirons que Ω est localement cohomologiquement trivial (en abrégé : lct) dans X si pour tout $x \in \partial\Omega$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} (R\Gamma_{\bar{\Omega}}(\mathbb{Z}_X))_x = 0 \quad , \\ (R\Gamma_\Omega(\mathbb{Z}_X))_x = \mathbb{Z} \quad . \end{array}\right. \tag{2.1}$$

<u>Exemple</u> 2.2 : Supposons que, localement sur X, Ω soit homéomorphe à un ouvert convexe d'un espace vectoriel. Alors Ω est lct dans X.

Soit $F \in Ob(D^b(X))$. On désigne par F^* son dual au sens des faisceaux, i.e :

$$F^* = R\,\mathcal{H}om(F, \mathbb{Z}_X) \tag{2.2}$$

Si Ω est un ouvert lct dans X, on montre facilement que :

(2.3)
$$\begin{cases} \mathbb{Z}_{\Omega}^{*} \simeq \mathbb{Z}_{\overline{\Omega}} \\ \mathbb{Z}_{\overline{\Omega}}^{*} \simeq \mathbb{Z}_{\Omega} \end{cases}$$

Soit maintenant M une sous-variété fermée de X de codimension n , N une sous-variété fermée de M de codimension d . Nous aurons à considérer la situation suivante :

(2.4)
$$\begin{cases} \Omega \text{ est ouvert et lct dans } M \\ \omega \text{ est ouvert et lct dans } N \text{ avec } \overline{\omega} \subset \overline{\Omega} . \end{cases}$$

Le morphisme de faisceaux sur X , $\mathbb{Z}_{\overline{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\overline{\omega}}$ définit alors par dualité un morphisme dans $D^b(X)$:

(2.5)
$$b : \mathbb{Z}_{\omega} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\Omega} \otimes \omega_{N|M}[d] .$$

Si $F \in Ob(D^+(X))$ on en déduit le morphisme dans $D^+(T^*X)$:

(2.6)
$$\mu_{\Omega}(F) \to \mu_{\omega}(F) \otimes \omega_{N|M} [d]$$

qui induit sur la section nulle le morphisme :

(2.7)
$$R\Gamma_{\Omega}(F) \to R\Gamma_{\omega}(F) \otimes \omega_{N|M} [d] .$$

§ III. FAISCEAU $C_{\Omega|X}$ ET FRONTS D'ONDES ANALYTIQUES.

Soit maintenant M une variété analytique réelle de dimension n , X un complexifié de M , $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Si A est une partie localement fermée de M nous poserons :

(3.1)
$$C_{A|X} = \mu_A(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X} [n]$$

si $A = M$, $C_{M|X} = C_M$ est le faisceau des microfonctions de Sato (cf.[15]). Si $A = N$ est une sous-variété analytique fermée de M , $C_{N|X}$ coïncide, à un facteur $\omega_{N|M}$ près, avec le faisceau du même nom de [15] . Si $A = \overline{M}^+$ est un demi-espace fermé à frontière analytique, le faisceau $C_{\overline{M}^+|X}$ a déjà été introduit, par une méthode différente, par Kataoka [11] .
Supposons $M = \mathbb{R}^n$ et A est convexe et fermé. On a alors ([10 Cor.559]) :

(3.2)
$$H^j(C_{A|X})_{(x_o,\zeta_o)} = \varinjlim_{U,G} H^{j+n}_{U\cap(A+G)}(U ; \mathcal{O}_X)$$

où U parcourt la famille des voisinages ouverts de x_o dans $X = \mathbb{C}^n$, et G parcourt la famille des cônes convexes fermés de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ dont le polaire est un voisinage de ζ_o . Il résulte alors d'un théorème de Kashiwara (cf. [15 p.276]) que $C_{A|X}$ est concentré en degré 0 . Nous allons retrouver et préciser ce résultat.

Proposition 3.1. Soit A une partie fermée de M , et $\Omega = M \setminus A$. Supposons A localement difféomorphe à un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors :

i) $C_{A|X}$ est concentré en degré 0 .

ii) Le morphisme $C_{A|X}\big|_{T^*_M X} \to C_M\big|_{T^*_M X}$ est injectif.

iii) $C_{\Omega|X}\big|_{T^*_M X}$ est concentré en degré 0 .

Esquisse de démonstration. Par l'astuce de l' "adjonction d'une variable muette" , on se ramène au cas où $A = A' \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, et l'on travaille au voisinage de $p = (x_o ; i\eta'_o, i\eta_n)$ avec $\eta_n > 0$.
Soit T^*X et T^*Y deux exemplaires de $T^*\mathbb{C}^n$ munis respectivement des coordonnées symplectiques (z,ζ) et (w,θ). On posera $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $w = u + iv$ et aussi $z = (z', z_n)$, $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$, $w = (w', w_n)$.

On utilise la transformation canonique complexe $\Phi : (z,\zeta) \mapsto (w,\theta)$ définie pour $\zeta_n \neq 0$ par :

$$(3.3) \qquad \begin{cases} w_j = \zeta_j/\zeta_n - 2\sqrt{-1}\, z_j , \ j < n \\ w_n = \langle z, \zeta/\zeta_n \rangle - \sqrt{-1}\, z'^2 \\ \theta_j = - z_j \zeta_n , \ j < n \\ \theta_n = \zeta_n \end{cases}$$

où on a posé $z'^2 = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^2$, $\langle z,\zeta \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \zeta_j$.

Soit $S = \mathbb{R}^{n-1}$ muni des coordonnées (s), et soit q_1 et q_2 les projections de $X \times S$ et $Y \times S$ sur X et Y respectivement. On peut considérer Φ comme une transformation canonique entre $T^*(X \times S)$ et $T^*(Y \times S)$. Soit :

$$\tilde{M} = \{(z,s) \in X \times S \ ; \ y = 0 \ , \ x' = s\}$$

$$\tilde{N} = \{(w,s) \in Y \times S \ ; \ \mathrm{Re} \langle w - w(s), \sqrt{-1}(-s,1) \rangle \leq 0\}$$

avec $w(s) = (-2\sqrt{-1}\, s \ , \ -\sqrt{-1}\, s^2)$.

La transformation Φ échange $T^*_{\tilde{M}}(X \times S)$ et $T^*_{\tilde{N}}(Y \times S)$ sur l'ouvert $\{\eta_n > 0\}$.

Posons :

$$G = \{w \in Y \; ; \; v_n \geqslant -(\frac{v'}{2})^2\}$$

$$G_s = \{w \in Y \; ; \; v_n \geqslant \; < v', s > + \; s^2\}$$

$$G_A = \bigcup_{s \in A'} G_s \; .$$

Comme $Rq_{1*}\mathbb{Z}_{\tilde{M} \cap (X \times A)} = \mathbb{Z}_A$ et $Rq_{2*}\mathbb{Z}_{\tilde{N} \cap (Y \times A)} = \mathbb{Z}_{G_A}$ (sous l'hypothèse que A est fermé et convexe), on obtient que si l'on quantifie Φ en Φ_K comme dans [10Ch.11] alors Φ_K induit un isomorphisme dans $D^+(Y; \{\eta_n > 0\})$:

$$\Phi_K(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y \; ,$$

$$\Phi_K(\mathbb{Z}_M) \simeq \mathbb{Z}_G[n-1],$$

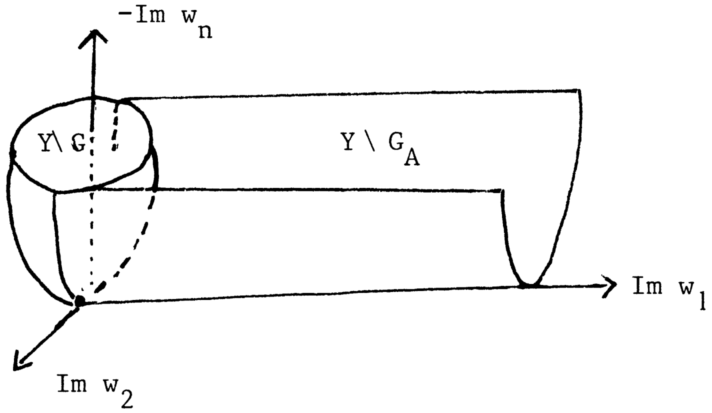
$$\Phi_K(\mathbb{Z}_A) \simeq \mathbb{Z}_{G_A}[n-1] \; .$$

Les ouverts $Y \setminus G$ et $Y \setminus G_A$ étant pseudo-convexes on obtient :

$$(C_M)_p \simeq H^1_G(\mathcal{O}_Y)_{y_o}$$

$$(C_{A|X})_p \simeq H^1_{G_A}(\mathcal{O}_Y)_{y_o}$$

où $y_o = \pi(\Phi(p))$. Ceci achève la démonstration.



Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1 \geqslant 0\}$.

<u>Remarque</u> 3.2. Soit A_1 et A_2 deux fermés convexes de $\mathbb{R}^n$. On a un triangle distingué :

$$C_{A_1 \cap A_2 | X} \to C_{A_1 | X} \oplus C_{A_2 | X} \to C_{A_1 \cup A_2 | X} \underset{+1}{\to}$$

En utilisant la transformation canonique précédente et le fait que l'enveloppe d'holomorphie de $\mathbb{C}^n \setminus (G_{A_1} \cup G_{A_2})$ est $\mathbb{C}^n \setminus G_{A_1 \cap A_2}$, on en conclut que la Proposition 3.1 iii) est encore valide avec $\Omega = M \setminus (A_1 \cup A_2)$. Il semble très vraisemblable qu'il en soit de même pour le complémentaire d'une réunion finie de convexes fermés de $\mathbb{R}^n$.

<u>Conjecture</u> 3.3. Pour toute partie localement fermée A de M , $C_{A|X}\big|_{T_M^*X}$ est concentré en degré 0 .

Soit Ω un ouvert de M , B_M le faisceau des hyperfonctions de Sato sur M (i.e. : $B_M = R\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[n]$) . Soit j l'injection $\Omega \hookrightarrow M$, $\tilde{j}$ l'injection $\pi^{-1}(\Omega) \hookrightarrow T^*X$. Du diagramme (1.4) on déduit le diagramme commutatif :

(3.3)
$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1} j_* j^{-1} B_M \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\pi^{-1} B_M \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & H^0(C_{\Omega|X}) \arrow[r] & \tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} C_M \\
 & C_M \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que le faisceau $H^0(C_{\Omega|X})$ est porté par T_M^*X . Du diagramme précédent on déduit les flèches :

$$\alpha : j_* j^{-1} B_M \to \pi_* H^0(C_{\Omega|X})$$

$$\beta : C_M \to H^0(C_{\Omega|X})$$

<u>Définition</u> 3.4. Si $u \in j_* j^{-1} B_M$ (resp. $u \in C_M$) on pose :

$$SS_\Omega(u) = \operatorname{supp}(\alpha(u))$$

(resp : supp $(\beta(u))$).

L'ensemble $SS_\Omega(u)$ est donc un fermé conique de T_M^*X . On a :

(3.4)
$$SS_\Omega(u) \supset \overline{SS(u|_\Omega)}$$

où $\overline{SS(u_{|\Omega})}$ désigne l'adhérence du front d'onde analytique de u au-dessus de Ω .

Proposition 3.5. Supposons que Ω soit à frontière analytique réelle. Soit $u \in B_M(\Omega)$. Alors $SS_\Omega(u)$ est contenu dans la section nulle si et seulement si u est analytique dans Ω et se prolonge holomorphiquement à un ouvert $\tilde{\Omega}$ de X tel que le cône normal (cf.[10]) $C_{\partial\Omega}(\tilde{\Omega})$ soit un voisinage de $C_{\partial\Omega}(\Omega)$.

Dans un système de coordonnées locales tel que $\Omega = \{x;\ x_1 > 0\}$, cela signifie que u se prolonge (localement sur $\partial\Omega$) à un ouvert $\tilde{\Omega} = \{z;\ x_1 > c|\mathrm{Im}\, z|\}$, $c > 0$. La démonstration de cette Proposition utilise [10,Prop.2.3.2].Utilisant le morphisme (2.6), avec $F = \mathcal{O}_X$, on obtient aussi :

Proposition 3.7. Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert de X avec $\overline{\Omega} \subset \overline{\tilde{\Omega}}$. On suppose $\tilde{\Omega}$ (resp.Ω) lct dans X (resp.M). Soit $f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, $b(f) \in \Gamma(\Omega;B_M)$ sa valeur au bord. Alors :

$$SS_\Omega(b(f)) \subset T^*_M X \cap SS(\mathbb{Z}_{\tilde{\Omega}})$$

Remarquons que Delort et Lebeau [2] ont obtenu un résultat de ce type (avec $\Omega = M$) dans la situation évidemment plus difficile où Ω n'est pas nécessairement lct , mais f est C^1 sur $\overline{\Omega}$.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un module cohérent sur l'anneau $\mathcal{D}_X$ (resp.$\mathcal{E}_X$) des opérateurs différentiels (resp. microdifférentiels) d'ordre fini (cf.[15] ou [1], [19] pour une introduction à cette théorie). On a des flèches naturelles :

$$\alpha : \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},j_*j^{-1}B_M) \to \pi_* H^j(R\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}\ ,\ C_{\Omega|X}))$$

$$\beta : \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\ C_M) \to H^j(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},C_{\Omega|X}))$$

Définition 3.8. Si $u \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},j_*j^{-1}B_M)$ (resp.$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},C_M)$) on pose :

$$SS^{\mathcal{M},j}_\Omega(u) = \mathrm{supp}\ (\alpha(u)) \qquad (\text{resp: } \mathrm{supp}(\beta(u)).$$

Remarque 3.9. a) Si $u \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{M},j_*j^{-1}B_M)$, alors $SS^{\mathcal{M},j}_\Omega(u)$ n'est pas nécessairement porté par $T^*_M X$. Par exemple si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X.P$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1 > 0\}$ et si $u \in B_M(\Omega)$ vérifie $Pu = 0$, un point $p = (0,x';\zeta_1,i\eta')$ avec $\mathrm{Re}\zeta_1 < 0$ appartient à $SS^{\mathcal{M},0}_\Omega(u)$ si et seulement si, $\overline{u}$ désignant un prolongement de u à support dans $\{x_1 \geqslant 0\}$, l'équation $Pv = P\overline{u}$ n'a pas de solutions

$v \in (C_{N|X})_p$.

b) Si $C_{\Omega|X} \Big| T^*_M X$ est concentré en degré 0 , alors :

(3.5) $$SS^{M,\rho}_{\Omega}(u) \cap T^*_M X = SS_{\Omega}(u)$$

c) On a :

(3.6) $$SS^{M,j}_{\Omega}(u) \subset SS(\mathbb{Z}_{\Omega}) \cap \mathrm{char}(M),$$

$\mathrm{char}(M)$ désignant la variété caractéristique de M , et $SS(\mathbb{Z}_{\Omega})$ le micro-support de $\mathbb{Z}_{\Omega}$ dans T^*X .

§ IV PROBLEMES AUX LIMITES.

Soit N une sous-variété analytique de codimension d de M , Y le complexifié de N dans X . On note ρ et ϖ les applications canoniques :

$$T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X .$$

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. On suppose :

(4.1) Y est non caractéristique pour M .
On désigne alors par M_Y le système induit par M sur Y . Le théorème de Cauchy-Kowalevski-Kashiwara s'énonce (cf.[19] pour un exposé détaillé) :

(4.2) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{O}_X)|_Y \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(M_Y,\mathcal{O}_Y)$$

D'autre part Y étant non caractéristique pour le faisceau $F = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\mathcal{O}_X)$, on a :

(4.3) $$R\Gamma_Y(F) \otimes \omega_{Y|X}[2d] \simeq F|_Y$$

Soit maintenant Ω (resp. ω) un ouvert lct de M (resp. N) avec $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$.

Comme $R\Gamma_{\Omega}(F) = R\Gamma_{\Omega} \circ R\Gamma_M(F)$ et $R\Gamma_{\omega}(F) = R\Gamma_{\omega} \circ R\Gamma_N \circ R\Gamma_Y(F)$, le morphisme (2.7) composé avec (4.3) donne le morphisme :

(4.4) $$b : R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M,\Gamma_{\Omega}(B_M))|_N \to R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(M_Y,\Gamma_{\omega}(B_N))$$

Cette construction de la "valeur au bord" généralise celles de [16] et [12] .

Proposition 4.1. Soit $u \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B_M(\Omega))$ et soit $b(u) \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, B_N(\omega))$ sa valeur au bord. Alors :

i) $$SS_{\omega}^{\mathcal{M}_Y, j}(b(u)) \subset \rho\, \varpi^{-1}\, SS_{\Omega}^{\mathcal{M}, j}(u)$$

ii) Supposons $d = 1$, $\omega = N$, $j = 0$. Alors l'inclusion précédente est une égalité ,autrement dit :

$$SS(b(u)) = \rho\, \varpi^{-1}\, SS_{\Omega}^{\mathcal{M}, 0}(u)$$

La démonstration de i) utilise le caractère fonctoriel des constructions (i.e : le morphisme (2.6)). La démonstration de ii) utilise une version du "watermelon theorem" de Kashiwara [4] (cf.[18] , [7] , ou [3]).
Soit $q \in T^*Y$. Si Z_q est une partie de $\rho^{-1}(q) \cap \mathrm{char}(\mathcal{M})$ on posera :

$$(4.5) \qquad \mathcal{M}_{Y,Z_q} = \bigoplus_{p \in Z_q} (\mathcal{E}_{Y \to X} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M})_p$$

On posera aussi :

$$(4.6) \qquad \mathcal{M}_{Y,q} = (\mathcal{E}_Y \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_Y} \pi^{-1}\mathcal{M})_q \quad ,$$

autrement dit $\mathcal{M}_{Y,q} = \mathcal{M}_{Y,Z_q}$ avec $Z_q = \rho^{-1}(q) \cap \mathrm{char}(\mathcal{M})$. On notera j_{Z_q} et p_{Z_q} les morphismes naturels de $\mathcal{E}_{Y,q}$-modules :

$$(4.7) \qquad \mathcal{M}_{Y,q} \underset{p_{Z_q}}{\overset{j_{Z_q}}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}_{Y,Z_q}$$

Ces morphismes induisent des applications :

$$(4.8) \qquad R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y,q}}(\mathcal{M}_{Y,q}, C_{\omega|Y,q}) \underset{p_{Z_q}}{\overset{j_{Z_q}}{\rightleftarrows}} R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y,q}}(\mathcal{M}_{Z_q}\ ,\ C_{\omega|Y,q})$$

Proposition 4.2. Soit $u \in \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B_M(\Omega))$, et soit $b(u)_q$ l'image de $b(u)$ dans $H^j(R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y,q}}(\mathcal{M}_{Y,q}, C_{\omega|Y,q}))$. Alors :

$$b(u)_q = p_{Z_q} \circ j_{Z_q}(b(u)_q)$$

avec $Z_q = \rho^{-1}(q) \cap SS_{\Omega}^{\mathcal{M}, j}(u)$

La démonstration utilise un théorème de division dans $C_{\omega|X}$ qui résulte de [10, Cor.557].
La Proposition précédente signifie grossièrement que les traces de u sur N sont déterminées, au voisinage de q, par les $\#Zq$ premières d'entre elles, $\#Zq$ désignant le nombre de points, comptés avec leurs multiplicités, de Zq.
Les Propositions 4.1 et 4.2 généralisent le théorème 3 de [17].

Remarque 4.3. On a un morphisme canonique (obtenu en utilisant (2.6) et [10, Prop.2.3.5]) :

$$R\rho_! \, \varpi^{-1} \, C_{\Omega|X} \to C_{\omega|Y} \quad . \tag{4.9}$$

Si N est une hypersurface, et $\omega = N$, il semble (nous n'avons pas vérifié ce point en détail) que le faisceau $H^o(R\rho_! \, \varpi^{-1} \, C_{\Omega|X})$ ne soit autre que le faisceau $\hat{C}_{N|M^+}$ des "mild microfunctions" de Kataoka [11].

Remarque 4.4. Appelons Ω-réguliers en p les $\mathcal{E}_X$-modules $\mathcal{M}$ tels que l'application $H^o(R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{\Omega|X}))_p \to \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \tilde{j}_*\tilde{j}^{-1}\, C_M)_p$ soit injective (cf. [17], [11] pour des cas particuliers de cette définition). Nous donnons avec G. Zampieri [21] des critères de Ω-régularité.

Remarque 4.5. Quand Y est caractéristique pour $\mathcal{M}$, mais $\mathcal{M}$ est "régulier le long de Y", on peut encore définir un morphisme de "valeurs au bord". Posons $\mathcal{M}^* = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)\,[\dim X]$ et supposons que $(\mathcal{M}^*)_Y = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}^*$ soit à cohomologie cohérente sur $\mathcal{D}_Y$. Supposons aussi que le morphisme $R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)) \to R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_Y(\mathcal{O}_Y))$ soit un isomorphisme. On construit alors facilement grâce à (2.7) un morphisme :

$$b : R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_\Omega(B_M))|_N \to R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y^{**}, \Gamma_\omega(B_N)) \tag{4.10}$$

où l'on a posé $\mathcal{M}_Y^{**} = ((\mathcal{M}^*)_Y)^*$. Remarquons que si Y est non caractéristique, ou encore si $\mathcal{M}$ est holonome régulier, $\mathcal{M}$ est régulier le long de Y. Malheureusement il semble que (4.10) ne coïncide pas avec le morphisme de valeurs au bord de Kashiwara-Oshima [8] (cf. aussi [14], [13]) défini quand Y est une hypersurface, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$, et P est "fuchsien" le long de Y.

Remarque 4.6. L'étude microlocale des problèmes aux limites a commencé avec les notes [5] de Kashiwara-Kawaï. Outre [17],[18] et [11] signalons le récent travail de Oaku [13] .

Remarque 4.7. Dans [2] Delort et Lebeau considère aussi des variétés Lagrangienne singulières et l'on pourrait quand Ω est un demi-espace définir $SS_{\Omega}(u)$ pour leurs méthodes.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Björk, J.E. : Rings of differential operators. North-Holland (1979).

[2] Delort J.M. , Lebeau G. : ce séminaire 1984-1985. Article à paraître.

[3] Hörmander, L. : The analysis of linear partial differential operators I . Grundlehren der Math. 256, Springer-Verlag (1983).

[4] Kashiwara, M. : Exposé à Nice, 1972.

[5] Kashiwara, M., Kawaï, T. : On boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations. Proc. Japan Acad. 48, 712-715 (1971) et 49, 164-168, (1972).

[6] Kashiwara, M., Kawaï, T. : Second microlocalization and asymptotic expansions in Lecture Notes in Physics 126, 21-76, Springer (1980).

[7] Kashiwara, M., Laurent, Y. : Théorèmes d'annulation et deuxième micro-localisation. Preprint Orsay (1983).

[8] Kashiwara, M. , Oshima, T. : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Annals of Math 106, 145-200, (1977).

[9] Kashiwara, M. , Schapira, P. : Microhyperbolic systems. Acta Mathematica 142, 1-55, (1979).

[10] Kashiwara, M., Schapira, P. : Microlocal study of sheaves. Asterisque Soc. Mat. de France 128, (1985).

[11] Kataoka, K. : Microlocal theory of boundary value problems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect A. I : 27, 355-399 (1980), II : 28, 31-56 (1981).

[12] Komatsu, H. : Boundary values for solutions of elliptic equations. Proc. Int. Conf. Func. Anal. Rel. Topics 107-121, Univ. Tokyo (1970).

[13] Ôaku, T. : A new formulation of local boundary value problem in the framework of hyperfunctions. Proc. Japan Acad. I : vol. 60, 283-286 (1984), II : vol 61, 129-132 (1985), III : 197-200 (1985).

[14] Oshima, T. : A definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities. Publ. RIMS Kyoto Univ. 19, 1203-1230 (1983).

[15] Sato, M. , Kashiwara, M. , Kawaï, T. : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math 287, 265- 529 Springer-Verlag (1973).

[16] Schapira, P. : Problème de Dirichlet et solutions hyperfonctions des équations elliptiques. Bull. U.M.I. 4, 367-372, (1969).

[17] Schapira, P. : Propagation at the boundary and reflexion of analytic singularities of solutions of linear partial differential equations I . Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12. Suppl. 441-453 (1977).

[18] Schapira, P. : Propagation at the boundary of analytic singularities. Nato adv. Study Inst. on Bound. value Problems. Reidel Publ Co , 185-212 (1981).

[19] Schapira, P. : Microdifferential systems in the complex domain. Grundlehren der Math. 269, Springer-Verlag (1985).

[20] Schapira, P. : Front d'onde analytique au bord I . C.R. Acad. Sci 302, n°10, 383-386 (1986).

[21] Schapira, P. , Zampieri, G. : Regularity at the boundary for systems of microdifferential equations. Coll. Intern. "Hyperbolic equations", Padova (1985). A paraître.

***