Systèmes de déduction

Richard Lassaigne
IMJ/Logique mathématique
CNRS-Université Paris Diderot

Historiquement, la notion de système formel est due à G.Frege (1879) et les premiers systèmes de déduction pour la logique classique, dus à D. Hilbert (1927), étaient basés sur des schémas d'**axiomes** et sur des **règles** de déduction.
G.Gentzen (1935) eut l'idée de les remplacer par un système ne comportant que des règles et correspondant à une forme de **déduction naturelle** : dans une démonstration mathématique, la déduction s'effectue à partir d'hypothèses admises en cours de raisonnement, plutôt qu'à partir d'hypothèses générales, fixées une fois pour toutes.
La **méthode des tableaux** permet de déterminer si une formule du calcul propositionnel est une **tautologie**, ou si une formule est **conséquence** d'un ensemble de formules donné. Le **théorème de complétude** justifie l'utilisation de cette méthode en montrant qu'elle est correcte et complète. Elle fournit également un **algorithme** de démonstration automatique.

Calcul propositionnel construit à l'aide des connecteurs : $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\perp$ (connecteur d'arité 0 représentant le faux) Γ et Δ désignent des ensembles finis de formules

L'expression $\Gamma \vdash A$ exprime que la formule A peut être **déduite** à l'aide des formules de Γ en appliquant un nombre fini de fois les règles suivantes :

- axiome

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

- introduction de $\rightarrow$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \rightarrow B)}$$

- élimination de $\rightarrow$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash (A \rightarrow B)}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

- introduction de $\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash (A \wedge B)}$$

- élimination de $\wedge_1$

$$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A}$$

- élimination de $\wedge_2$

$$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash B}$$

- introduction de $\vee_1$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$$

- introduction de $\vee_2$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$$

- élimination de $\vee$

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}$$

- élimination de $\perp$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}$$

Les dix règles précédentes constituent un système de déduction pour la **logique intuitionniste**.

- $\vdash (A \to (B \to A))$:

$$\dfrac{\dfrac{B, A \vdash A}{A \vdash (B \to A)}}{\vdash (A \to (B \to A))}$$

- $\vdash ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \to B) \vdash (A \to B) \qquad A \vdash A}{(A \to B), A \vdash B} \qquad (B \to C) \vdash (B \to C)}{(A \to B), (B \to C), A \vdash C}}{(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)}}{(A \to B) \vdash ((B \to C) \to (A \to C))}}{\vdash ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))}$$

- En particulier : $\vdash ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$

La **négation** d'une formule peut être introduite comme une abréviation de la formule $(A \to \bot)$.

- $\vdash A \to \neg\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad\qquad (A \to \bot) \vdash (A \to \bot)}{A, (A \to \bot) \vdash \bot}}{A \vdash ((A \to \bot) \to \bot)}}{\vdash A \to \neg\neg A}$$

Le système de règles pour la logique **classique** comporte une règle de plus que le système intuitionniste. Cette règle correspond à l'utilisation classique de la **double négation** :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

- $\vdash ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg B \to \neg A) \vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \qquad A \vdash \neg\neg A}{(\neg B \to \neg A), A \vdash \neg\neg B}}{(\neg B \to \neg A), A \vdash B}}{(\neg B \to \neg A) \vdash (A \to B)}}{\vdash ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))}$$

Les propriétés usuelles des connecteurs vis-à-vis de la déduction peuvent être prouvées dans le cadre de la déduction naturelle et sont laissées en exercice. Par exemple :

- $\vdash \neg(A \wedge B)$ si et seulement si $\vdash (\neg A \vee \neg B)$
- $\vdash \neg(A \vee B)$ si et seulement si $\vdash (\neg A \wedge \neg B)$

Il semble naturel de se demander si les connecteurs ont un *sens logique* suivant lequel, par exemple : l'énoncé $(p \wedge q)$ permet de *déduire* **à la fois** les énoncés p et q, et l'énoncé $(p \to q)$ l'**alternative** $\neg p$ ou q. Ce sens logique ne doit résider que dans la forme des formules, et non dans leur interprétation dans un ensemble de valeurs.

La méthode des tableaux a pour objet d'élaborer deux types de règles qui prennent en compte la forme des formules et qui permettent de déterminer :

- si une formule est une **tautologie**
- ou si une formule est **conséquence** d'un ensemble de formules donné.

L'utilisation de ces règles peut être représentée par la construction d'un **arbre** à partir de la négation de la formule considérée.

La formule $(((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r)))$ est une tautologie

$$\neg(((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r)))$$

$$((p \wedge q) \to r) \;,\; \neg((p \to r) \vee (q \to r))$$

$$\neg(p \to r) \;,\; \neg(q \to r)$$

$$p \;,\; \neg r$$

$$q \;,\; \neg r$$

$$\neg(p \wedge q) \qquad\qquad r$$

$$\neg p \qquad\qquad \neg q$$

Méthode des tableaux : exemple (suite)

La formule $((p \vee q) \to (r \to (\neg q \to \neg p)))$ n'est pas une tautologie

$$\neg((p \vee q) \to (r \to (\neg q \to \neg p)))$$

$$|$$

$$(p \vee q)\ ,\ \neg(r \to (\neg q \to \neg p))$$

$$|$$

$$r\ ,\ \neg(\neg q \to \neg p)$$

$$|$$

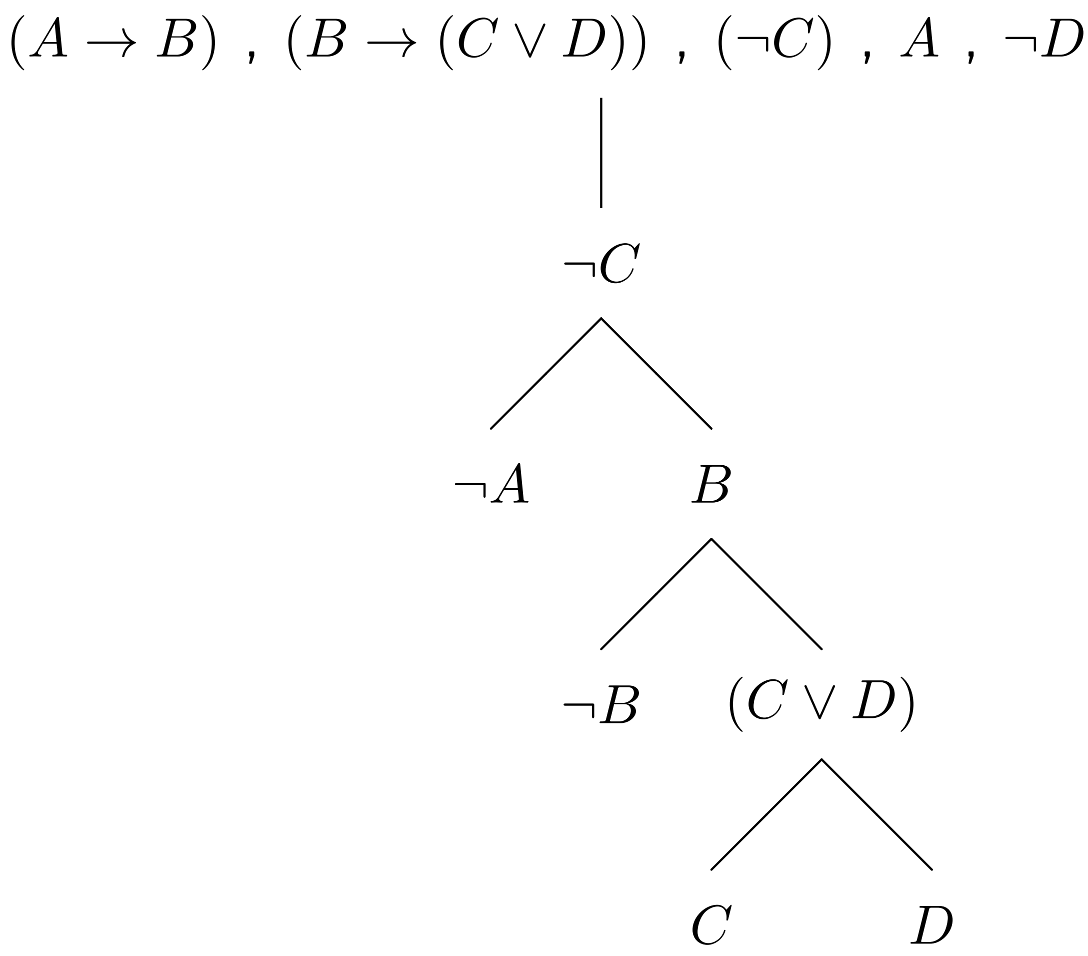
$$\neg q\ ,\ \neg\neg p$$

$$|$$

$$p$$

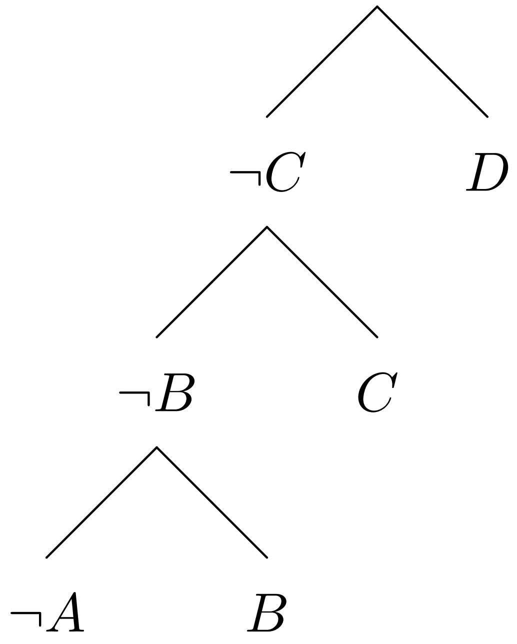
$$\begin{array}{ccc} & p & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

La formule D est **conséquence** des formules :
$(A \to B)$, $(B \to (C \vee D))$, $\neg C$ et A



Question : la formule D est-elle conséquence des formules : $(A \to B)$, $(B \to C)$ et $(C \to D)$?

$$(A \to B)\ ,\ (B \to C)\ ,\ (C \to D)\ ,\ \neg D$$



Toute valuation v satisfaisant $v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = 0$ permet de répondre **non**

Tableau :

- arbre binaire dont les éléments sont des ensembles de formules
- construit à partir d'une racine quelconque
- par application répétée de l'une ou l'autre des deux règles

Type α			Type β		
Formule	Formules associées		Formule	Formules associées	
$\alpha = (A \wedge B)$	$\alpha_1 = A$	$\alpha_2 = B$	$\beta = \neg(A \wedge B)$	$\beta_1 = \neg A$	$\beta_2 = \neg B$
$\alpha = \neg(A \vee B)$	$\alpha_1 = \neg A$	$\alpha_2 = \neg B$	$\beta = (A \vee B)$	$\beta_1 = A$	$\beta_2 = B$
$\alpha = \neg(A \rightarrow B)$	$\alpha_1 = A$	$\alpha_2 = \neg B$	$\beta = (A \rightarrow B)$	$\beta_1 = \neg A$	$\beta_2 = B$
$\alpha = \neg\neg A$	$\alpha_1 = A$	$\alpha_2 = A$			

A chaque application d'une règle à un tableau T, on obtient un nouvel arbre T' qui est une **extension** de l'arbre T.

Soit T un tableau.

- Une branche B de T est **close** s'il existe une formule A telle que A et $\neg A$ apparaissent dans B. Dans le cas contraire, B est dite **ouverte**.
- Une branche B est **développée** si pour toute formule de type α ou β, les deux formules associées apparaissent plus bas dans la branche.
- Un tableau est **développé** si toutes ses branches sont soit closes, soit développées.
- Un tableau est **clos** si toutes ses branches sont closes.
- Un tableau est **ouvert** s'il possède une branche ouverte.
- Un tableau **pour** une formule A (ou pour un ensemble de formules Σ) est un tableau de racine $\{A\}$ (ou $\{A : A \in \Sigma\}$).

Définition 1 *Une formule A est* **prouvable** *(par tableau) s'il existe un tableau clos de racine $\{\neg A\}$.*

Un système de déduction sera considéré comme bien adapté à la sémantique si il est **cohérent** et **complet**, c'est-à-dire si :

- toute formule prouvable (par tableau) est une tautologie
- et toute tautologie est prouvable (par tableau).

Proposition 1 *Toute formule prouvable par tableau est une tautologie.*

Proposition 2 *S'il existe un tableau clos de racine* $\{\neg A\}$*, alors tout tableau développé de racine* $\{\neg A\}$ *est clos.*

Proposition 3 *Toute tautologie est une formule prouvable par tableau.*