Théorie des jeux
Algorithmes et complexité

Richard Lassaigne

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
Equipe de Logique mathématique
CNRS-Université Paris Diderot

L'une des motivations de cet article est la présentation du principal résultat de la théorie des jeux, l'existence d'équilibres pour les jeux non coopératifs. Ce résultat est dû à John Forbes Nash dont les travaux dans les années 50 ont été déterminants pour la théorie des jeux. Ces travaux ont été rendus vraiment populaires en 1994 à l'occasion de l'attribution du prix Nobel d'économie. Cependant, beaucoup de mathématiciens considèrent comme plus profondes les autres contributions de John F. Nash concernant le plongement isométrique des variétés riemanniennes en géométrie ou la continuité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles. Pour ces derniers sujets, que cet article ne traite pas, l'une des références est la conférence de Cédric Villani en 2010 (vidéo sur le site de l'institut Henri Poincaré) : *Les fabuleux théorèmes de Mr Nash*. La motivation principale de l'article présent est l'intérêt suscité par les rapports entre théorie des jeux, algorithmique et complexité depuis les années 90 à la suite de plusieurs articles et conférences de Christos Papadimitriou. Ceci a conduit au développement récent d'une nouvelle direction de recherche : la théorie algorithmique des jeux qui a donné lieu à une floraison de résultats sur le calcul et l'approximation des équilibres, ainsi que sur la complexité des algorithmes, dans les quinze dernières années.

L'importance de la théorie des jeux s'est révélée d'abord en économie. Le résultat de Nash en 1951 a fourni par exemple l'inspiration du théorème d'Arrow-Debreu en 1954 établissant l'existence d'un équilibre des prix dans une économie avec compétition parfaite, puis celle de l'étude des mécanismes d'enchères. En biologie, la théorie des jeux permet d'étudier la dynamique des populations ; en politique, l'effet des règles électorales sur les stratégies, par constitution de coalitions. Plus récemment, les jeux de congestion s'intéressent aux problèmes de contrôle du trafic dans les réseaux, routiers ou de communication.

D'après Roger Myerson, la théorie des jeux peut être définie comme l'étude des modèles mathématiques de conflit et de coopération entre preneurs de décisions rationnels. Un preneur de décision est *rationnel* s'il agit de manière cohérente par rapport à son propre objectif. Sous des hypothèses assez faibles, dues à von Neunann et Morgenstern, pour tout agent rationnel, il existe une façon d'attribuer une fonction d'*utilité* définie sur toutes les actions possibles de telle manière qu'il choisisse toujours l'option maximisant l'espérance de cette utilité. La théorie des jeux s'occupe de l'optimisation simultanée de plusieurs fonctions d'utilité en compétition. Chaque agent a une seule fonction d'utilité dont la valeur dépend non seulement de son propre choix mais aussi de ceux des autres agents.

La première partie de l'article présente d'abord, à l'aide d'exemples très simples, le cadre général de la théorie des jeux : la forme normale d'un jeu et les notions de *stratégie* pure et d'*équilibre*. Le hasard est ensuite introduit par l'intermédiaire des stratégies mixtes qui permettent d'obtenir le résultat général de John Nash concernant l'existence d'équilibre en stratégies mixtes pour les jeux non coopératifs. La preuve repose sur un théorème de point fixe, sans construction explicite. D'un point de algorithmique, se pose alors deux questions : celle du calcul d'un équilibre de Nash et celle d'un algorithme *efficace*. Dans le cas d'une réponse négative, est-il possible d'utiliser une méthode d'*approximation* plus efficace ? La deuxième partie s'intéresse à une classe importante de jeux pour les systèmes informatiques distribués : les jeux de *congestion* présentés dans le cas particulier des réseaux. On montre que sous certaines hypothèses raisonnables, il existe des *dynamiques* efficaces d'approximation. La troisième partie pose le problème de la recherche d'un équilibre de Nash exact dans un jeu. En général, ce problème peut être extrêmement difficile : il a été montré complet pour la classe des problèmes de recherche locale. La dernière partie étudie le *prix de l'anarchie* qui est une mesure de la relative inefficacité des équilibres de Nash par rapport à une optimisation de l'intérêt général.

1 Théorie des jeux et équilibres de Nash

La première contribution importante à la théorie des jeux est due à John von Neumann (1928) qui proposa de représenter tout jeu compétitif par un jeu mathématique avec une structure assez simple que lui-même et Morgenstern appelèrent plus tard *forme normale*. Dans ce même article, von Neumann s'est intéressé aux jeux à deux joueurs à somme nulle pour lesquels il a prouvé le *théorème minimax* qui affirme l'existence d'un équilibre en stratégies probabilistes. Cette preuve est obtenue par un argument de point fixe, non constructif. Il a fourni une seconde preuve constructive (1940) qui repose sur une notion équivalente à la dualité forte en programmation linéaire. En 1944, von Neumann et Morgenstern formulèrent les fondements de la théorie des jeux, qu'ils complétèrent dans les éditions ultérieures du livre *Theory of Games and Economic Behavior.*

Définition 1 *Un jeu sous forme normale est défini par :*
- *un ensemble fini de n joueurs,*
- *un ensemble fini d'actions S_i pour chaque joueur ($i = 1, 2, \ldots, n$),*
- *une fonction d'utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles, pour chaque joueur.*

Chaque joueur joue une fois, indépendamment des autres, en choisissant une stratégie dans son ensemble d'actions. Il cherche à maximiser son utilité qui ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui des autres.
Dans le cas de deux joueurs, on peut représenter le jeu sous forme matricielle : le premier joueur joue suivant les lignes et le second suivant les colonnes. Un premier exemple est celui du *dilemme du prisonnier.* Deux joueurs ont fait un braquage qui a mal tourné et attendent leur jugement. Ils doivent choisir simultanémént soit de se taire, soit de collaborer. S'ils se taisent tous les deux, les juges ne peuvent rien prouver et ils prennent chacun juste une peine de 6 mois de prison (utilité de 2). Si chacun dénonce l'autre, ils prennent tous les deux 5 ans de prison (utilité de 1). Si un seul dénonce l'autre, il est libéré sur le champ (utilité de 3) et son complice prend une peine de 8 ans de prison (utilité de 0).

Prisonnier B / Prisonnier A	B collabore	B se tait
A collabore	(1,1)	(3,0)
A se tait	(0,3)	(2,2)

Un *équilibre de Nash pur* est un profil d'actions dans lequel aucun joueur n'a intérêt à modifier unilatéralement sa stratégie. Dans l'exemple, la situation où les deux joueurs collaborent (utilité : $(1, 1)$) est un équilibre unique. On remarque que dans cet exemple, l'équilibre n'est pas un point optimal.
Formellement, un profil d'actions $s^* = (s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ est un équilibre de Nash en stratégies pures si pour tout joueur i, l'action s_i^* et une meilleure réponse au profil s_{-i}^* (profil s^* privé de s_i^*), c'est-à-dire $\forall i \forall s_i \;\; u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$.
Un deuxième exemple est celui de la *bataille des sexes* : Paul et Virginie doivent décider de manière indépendante s'ils vont à l'opéra ou assister à un match de foot. L'intérêt principal est de retrouver l'autre : s'ils ne font pas le même choix, leur utilité est de 0. Virginie préfère le foot à l'opéra : son utilité est de 2 si elle va au foot avec Paul et de 1 s'ils vont à l'opéra. Paul a des préférences inverses.

Paul \ Virginie	Opéra	Foot
Opéra	(2,1)	(0,0)
Foot	(0,0)	(1,2)

Il existe deux équilibres correspondant aux couples d'actions (opéra, opéra) et (foot, foot). Le dernier exemple est un jeu bien connu à deux joueurs et à somme nulle : le jeu *Pierre/Papier/Ciseaux*.

Joueur 1 \ Joueur 2	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
Papier	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
Ciseaux	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

On peut vérifier facilement que dans cet exemple, il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. La question naturelle est alors : que se passe-t-il pour l'existence d'équilibre si l'on utilise des stratégies probabilistes, dites mixtes ? La réponse est que le hasard fait bien les choses.

Définition 2 *Une stratégie mixte σ_i pour un joueur i est une distribution de probabilités sur l'ensemble S_i des stratégie pures de i.*

Une stratégie mixte σ_i est ainsi notée :

$$\sigma_i = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i).s_i$$

où $\sigma_i(s_i)$ est la probabilité de choisir l'action s_i.
Les fonctions d'utilité sont étendues de manière multilinéaire par rapport aux stratégies mixtes. En notant $s = (s_1, \ldots, s_n)$ les actions simultanées des n joueurs, on obtient : pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{s \in \prod_{i=1}^n S_i} \sigma_1(s_1) \ldots \sigma_n(s_n).u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

Définition 3 *Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*)$ tel que pour tout joueur i, pour toute stratégie σ_i,*

$$u_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*)$$

Le résultat fondamental [6] dû à Nash en 1950 est le théorème suivant.

Théorème 1 *Tout jeu fini à n personnes, non coopératif, possède au moins un équilibre en stratégies mixtes.*

Dans un jeu non coopératif, chaque joueur prend ses décisions de manière à ne maximiser que sa propre utilité. On pourrait penser que l'intérêt des équilibres de Nash est limité aux jeux non coopératifs. Mais l'année suivante, Nash développa une approche dynamique [7] pour l'étude des jeux coopératifs, basée sur une réduction à une forme non coopérative. Ainsi cette nouvelle contribution fournit une méthodologie générale et complète pour l'analyse des jeux.
Une conséquence immédiate de la linéarité des fonctions d'utilité par rapport à chaque stratégie est que pour tout joueur i et tout profil de stratégies mixtes σ :

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i).u_i(s_i, \sigma_{-i})$$

On rappelle que le profil σ_{-i} est le profil σ privé de σ_i et qu'il permet une notation plus compacte : $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma_1, \ldots, s_i, \ldots, \sigma_n)$.

Proposition 1 *Un profil de stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*)$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout joueur i, pour toute action s_i : $u_i(\sigma^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$.*

La condition nécessaire est une conséquence de la linéarité de u_i par rapport à σ_i et la condition suffisante du fait qu'une stratégie pure est une stratégie mixte particulière.

Corollaire 1 *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Un profil de stratégies mixtes σ^* est donc un équilibre de Nash si aucun joueur n'a de déviation profitable en stratégie pure, c'est-à-dire si pour tout i : $u_i(\sigma^*) \geq max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$.
Si l'on utilise la linéarité, on obtient l'égalité :

$$u_i(\sigma^*) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i^*(s_i).u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i^*(s_i).max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$$

Il y a égalité si et seulement si $u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$ pour toute action s_i telle que $\sigma_i^*(s_i) > 0$. Une conséquence immédiate est qu'à l'équilibre chaque joueur est indifférent entre les actions qu'il joue avec probabilité strictement positive. Cette propriété est très pratique pour trouver les équilibres en stratégies mixtes dans les jeux avec peu de joueurs et peu de stratégies. Il suffit de raisonner suivant le support de la stratégie, c'est-à-dire l'ensemble des actions joués par le joueur avec probabilité strictement positive.

Dans l'exemple du jeu Pierre/Papier/Ciseaux, il est facile de vérifier que l'on obtient un équilibre de Nash avec le profil de stratégies mixtes $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ avec $\sigma_i^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ pour $i = 1, 2$.

D'après le résultat de Nash, déterminer les équilibres est l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des jeux. L'argument de Nash reposant sur les théorèmes de *point fixe* ne donne pas de construction effective d'un équilibre. La question se pose alors du calcul de ces équilibres et plus précisément de la possibilité d'un calcul efficace. Le premier article concernant un algorithme pour ce problème est dû à H. W. Kuhn en 1954. Cependant l'algorithme proposé est en temps *exponentiel*. La question de l'existence d'un algorithme fonctionnant en temps polynomial, relativement à la représentation du jeu, est resté ouverte pendant de nombreuses années. Malheureusement, dans le cas général, le problème du calcul d'un équilibre peut être considéré comme difficile depuis un résultat [2] de Daskalakis, Goldberg et Papadimitriou. La classe de complexité PPAD, pour *Polynomial Parity Arguments for Directed Graphs* a été définie en 1994 par Christos Papadimitriou pour des besoins de classification de problèmes de parité sur les graphes orientés, sans relation à priori avec la théorie des jeux. Ce sont des problèmes pour lesquels on connaît l'existence d'une solution grâce à un argument non constructif, par exemple un argument combinatoire simple sur un objet de taille exponentielle comme un graphe. Le résultat de 2009 affirme que le problème de trouver un équilibre de Nash pour un jeu en général est *complet* pour la classe PPAD : c'est-à-dire qu'il fait partie des problèmes les plus difficiles de cette classe qui par ailleurs est conjecturée comme distincte de la classe des problèmes pour lesquels il existe un algorithme en temps polynomial. Pour tenter de casser cette barrière de complexité, on va se restreindre à étudier certaines classes particulières de jeux, et si possible des classes intéressantes du point de vue informatique.

2 Jeux de congestion et dynamiques d'approximation

La classe choisie ici est celle des *jeux de congestion*, dont un cas particulier permet l'étude des problèmes de congestion sur les réseaux. Dans ce dernier cas, le jeu peut être représenté par la donnée de n joueurs et celle d'un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une origine a et une destination b. Une stratégie s_i pour le joueur i est un *chemin* dans le graphe allant de l'origine à la destination. La figure 1 présente un exemple de réseau avec trois stratégies. Chaque arête $e \in E$ est muni d'une fonction de délai $d_e : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Le *coût* du joueur i dans un état $s = (s_1, \dots, s_n)$, représentant une combinaison de stratégies de tous les joueurs, est :

$$c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d_e(f_s(e))$$

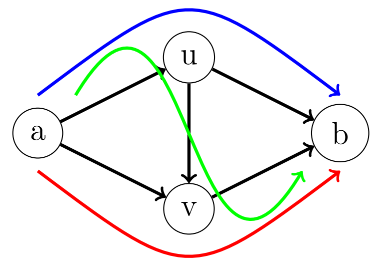

FIGURE 1 – Un réseau avec trois stratégies

où $f_s(e) = \mid \{j/e \in s_j\} \mid$ est le nombre de joueurs j utilisant l'arête e dans la stratégie s_j. La forme générale d'un jeu de congestion est la suivante.

Définition 4 *Un jeu de congestion est défini par :*

- *un ensemble fini de n joueurs,*
- *un ensemble fini de stratégies S_i pour chaque joueur ($i = 1, 2, \ldots, n$),*
- *une fonction de coût $c_i : S_1 \times \cdots \times S_n \longrightarrow \mathbb{N}$ pour chaque joueur..*

Un *état* s est une combinaison de stratégies $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$. Les coûts des joueurs sont basés sur l'utilisation d'un ensemble E de *ressources*, ou arêtes dans le cas des réseaux, communes. Une stratégie s_i pour le joueur i est un sous-ensemble de E. L'ensemble des stratégies S_i est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Chaque ressource $e \in E$ est munie d'une fonction de *délai* $d_e : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Dans un état $s = (s_1, \ldots, s_n)$, le coût du joueur i est $c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d_e(f_s(e))$ où $f_s(e)$ est le nombre de joueurs utilisant la ressource e dans l'état s. Un jeu est *symétrique* si tous les joueurs ont le même ensemble de stratégies.
La propriété fondamentale d'un jeu de congestion est de posséder une *fonction potentiel* [8] :

$$\Phi(s) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{f_s(e)} d_e(j)$$

La fonction potentiel permet de montrer la propriété suivante : si le joueur i passe de la stratégie s_i à la stratégie s'_i, le changement dans la fonction potentiel Φ reflète exactement le changement dans le coût du joueur c'est-à-dire $\Phi(s) - \Phi(s') = c_i(s) - c_i(s')$. Une *dynamique de Nash* est un processus itératif où, à chaque étape, un joueur change de stratégie pour diminuer son coût. La fonction de potentiel Φ va ainsi décroître jusqu'à un *minimum local*, qui sera un équilibre de Nash pur, c'est-à-dire un état s tel que :.

$$\forall i \forall s_i' \quad c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \leq c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n)$$

Malheureusement, dans un article de 2004 [3], A. Fabrikant, C. Papadimitriou et K. Talwar ont montré qu'il existe des jeux de congestion symétriques dans lesquels le nombre de mouvements de joueurs nécessaire pour passer d'un état quelconque à un équilibre de Nash pur est exponentiellement grand.
La question naturelle est alors celle de l'existence d'une méthode d'*approximation* d'un équilibre de Nash pur (PNE) en *temps polynomial* ? Une notion d'approximation possible est la suivante.

Définition 5 *Un équilibre ε-Nash est un état dans lequel aucun joueur ne peut diminuer relativement son coût de plus de ε, c'est-à-dire pour tout joueur i, pour toute stratégie $s_i' \in S_i$ $c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) \geq (1-\varepsilon)c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$.*

La dynamique ε-Nash associée est un processus itératif dans lequel un joueur ne peut faire que des ε-mouvements, cest-à-dire un changement de stratégie s_i à une stratégie s_i' tel que $c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) < (1-\varepsilon)c_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$. Lorsque plus aucun ε-mouvement n'est possible, les joueurs ont atteint un équilibre ε-Nash. Pour préciser la dynamique ε-Nash, si plusieurs joueurs ont la possibilité de faire un ε-mouvement, on choisit un mouvement fait par un joueur qui *maximise* la quantité $(c_i(s) - c_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n))/c_i(s)$. On peut montrer que le résultat d'approximation suivant n'est pas sensible aux diverses variations possibles de la dynamique.
En 2007, Chien et Sinclair [1] ont montré que la dynamique ε-Nash *converge rapidement* pour une classe intéressante de jeux de congestion, celle où les fonctions de délai satisfont une condition de saut borné.

Définition 6 *Une ressource satisfait la condition de saut borné pour $\alpha > 1$ si sa fonction de délai d_e satisfait : $(\forall t \geq 1)$ $d_e(t+1) \leq \alpha d_e(t)$.*

Cette condition autorise des fonctions comme $d_e(t) = \alpha^t$ avec, par exemple, $\alpha = 2$.

Théorème 2 *Pour tout jeu de congestion symétrique à n joueurs dans lequel les ressources satisfont la condition de saut borné pour α, la dynamique ε-Nash converge à partir de tout état initial en un nombre d'étapes $\lceil n\alpha\frac{1}{\varepsilon}log(nC)\rceil$ où C est une borne supérieure sur le coût de tout joueur.*

On remarque que la convergence est linéaire dans le nombre de joueurs et logarithmique dans le coût maximum.
La preuve de ce résultat repose sur le lemme suivant.

Lemme 1 *Dans un tel jeu, si dans la dynamique ε-Nash à partir de l'état s, le mouvement suivant est fait par le joueur i, alors $c_j(s) \leq \alpha c_i(s)$ pour tout joueur j.*

La preuve du théorème est alors basée sur le fait que pour tout état s, la fonction potentiel satisfait $\Phi(s) \leq \sum_j c_j(s)$. A chaque mouvement d'un joueur i, le coût satisfait alors $c_i(s) \geq \frac{1}{\alpha n}\Phi(s)$. Suivant le mouvement du joueur i de l'état s à l'état s', la décroissance de la fonction potentiel est :

$$\Phi(s) - \Phi(s') = c_i(s) - c_i(s') > \varepsilon c_i(s) \geq \frac{\varepsilon}{\alpha n}\Phi(s)$$

A chaque mouvement, la fonction poptentiel doit décroître d'un facteur de plus de $\frac{\varepsilon}{\alpha n}$. Comme Φ est une fonction positive, il y a au plus $\lceil n\alpha\frac{1}{\varepsilon}\log(\Phi_{\max})\rceil$ étapes où $\Phi_{\max}$ est la valeur initiale de la fonction potentiel.
En résumé, dans les jeux de congestion symétriques à délai avec saut α borné, on peut atteindre un ε-équilibre en un nombre polynomial d'étapes. L'intérêt de cette méthode d'approximation est d'autant plus grand que la classe des jeux de congestion avec saut borné sur les ressources inclut des exemples pour lesquels il est difficile de trouver un équilibre exact : pour ces jeux, le chemin le plus court jusqu'à un équilibre exact dans la dynamique de Nash peut être de longueur exponentielle. Le problème de trouver un équilibre de Nash exact dans les jeux de congestion symétriques satisfaisant la condition de saut borné avec $\alpha = 2$ a été montré *complet* [1] pour la classe de complexité PLS des problèmes de *recherche locale*, classe que l'on définira de manière plus précise dans la section suivante.

3 A la recherche des équilibres de Nash

Calculer un équilibre de Nash pur dans un jeu de congestion est équivalent à calculer un minimum local pour la fonction potentiel d'après un résultat de W.R. Rosenthal [8]. La classe des problèmes de *recherche locale* (PLS) a été définie par Johnson, Papadimitriou et Yannakakis en 1988 [4]. Un des exemples caractéristiques est celui de la recherche d'une *coupure maximum* dans un graphe. Ce problème de recherche locale, noté Maxcut, est défini par :

- Entrée : un graphe non orienté $G = (V, E)$ avec un poids $w_e \geq 0$ sur chaque arête ;
- Sortie : une *coupure* $(S, \bar{S})$ où $(S, \bar{S})$ qui est une partition de V maximisant le poids total des arêtes de coupure.

La figure 2 représente une instance du problème Maxcut avec un optimum local, qui n'est pas un optimum global.

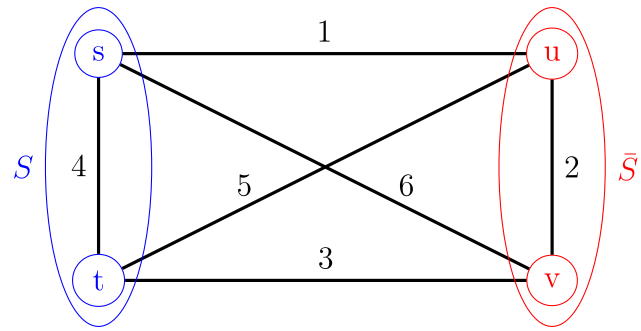

FIGURE 2 – Une instance du problème Maxcut avec un optimum local

Un problème de *recherche locale* est défini par trois algorithmes fonctionnant chacun en temps polynomial :

- le premier prend une instance du problème et fournit une solution possible, dans l'exemple une coupure arbitraire ;
- le deuxième prend une instance du problème et une solution possible et fournit la valeur de la solution, par exemple le poids total des arêtes traversant la coupure ;
- le troisième prend une instance du problème et une solution possible et retourne "localement optimal" ou fournit une meilleure solution ; dans l'exemple il vérifie tous les mouvements locaux pour éventuellement fournir une meilleure solution.

Comme il peut y avoir un nombre exponentiel de solutions possibles, le processus de recherche d'un optimum global ne termine pas forcément en temps polynomial.
Le concept central pour l'étude d'une classe de complexité, qui est dû à Richard Karp, est celui de *réduction* d'un problème à un autre.

Définition 7 *Une réduction d'un problème $L_1 \in PLS$ à un problème $L_2 \in PLS$ est la donnée de deux algorithmes A et B fonctionnant en temps polynomial tels que*

- *toute instance $x \in L_1$ correspond à une instance $A(x) \in L_2$,*
- *l'algorithme B fait correspondre à tout optimum local de $A(x)$ un optimum local de l'instance x.*

Un problème $L \in PLS$ est dit PLS-complet si tout problème de PLS se réduit à L.

Il n'existe pas d'algorithme en temps polynomial pour calculer un optimum local d'un problème PLS-complet, à moins que $PLS \subseteq P$, la classe des problèmes décidables en temps polynomial, conjecture considérée comme fort peu probable par de nombreux chercheurs en complexité. Le problème de recherche locale d'une coupure maximum dans un graphe est PLS-complet [4]. Le problème de calcul d'un équilibre de Nash pur dans un jeu de congestion est un problème de recherche locale : il y a correspondance entre les dynamiques de meilleure réponse et la recherche d'un minimum local relativement à la fonction potentiel. Le problème de calcul d'un équilibre de Nash pur dans un jeu de congestion symétrique est PLS-complet [3]. L'idée de la preuve consiste à montrer qu'il existe une bijection entre la recherche locale pour le problème Maxcut et celle des dynamiques de meilleure réponse dans les jeux. En résumé, trouver un équilibre de Nash pur exact dans les jeux est très difficile : les dynamiques peuvent nécessiter un nombre *exponentiel* d'itérations.

4 Le prix de l'anarchie

Dans cette section on considère le problème de routage du trafic dans un réseau. C'est un problème d'*optimisation* de performance : étant donné le taux de trafic entre chaque paire de noeuds, comment déterminer une répartition du trafic sur les chemins qui *minimise* la somme de tous les temps de trajet ? Il est souvent difficile ou même impossible d'imposer des stratégies de routage optimales ou presque optimales. Les utilisateurs sont libres d'agir selon leur propre intérêt. Le *prix de l'anarchie* [5] est une tentative de réponse à la question : comment quantifier la dégradation due à ce manque de régulation ?
Le modèle pour étudier ce problème est celui d'agents indépendants dans un jeu non coopératif. L'hypothèse est que chaque agent contrôle une fraction *négligeable* du trafic total. Par exemple, un agent peut être un véhicule sur un réseau routier ou un paquet dans un réseau de communication. La fonction de délai prend en argument la *proportion* de joueurs utilisant la ressource considérée. Une répartition du trafic sur les chemins du réseau peut être représentée comme un *flot* où la quantité de flot entre deux noeuds est égale au taux de trafic entre ces deux noeuds. Un *équilibre* correspond à un état *stable* du système, c'est-à-dire à un flot où tous les chemins entre la source et la destination ont un temps d'attente égal et le plus petit possible. Les chemins choisis par un équilibre de Nash ne correspondent pas forcément à un flot *optimal*. Une mesure de la dégradation causée par l'absence de régulation peut être le rapport, dans le pire des cas, entre l'intérêt obtenu par équilibre de Nash et celui d'un ensemble optimal de stratégies. La plupart des travaux sur ce modèle de trafic a été inspirée par un paradoxe découvert par D. Braess en 1968. Dans un tel réseau, chaque arête est étiquetée par sa fonction de délai qui prend en argument le taux de congestion x. La figure 3 présente le paradoxe de Braess à l'aide de deux réseaux. Dans le premier réseau l'équilibre de Nash coïncide avec le flot optimal : le

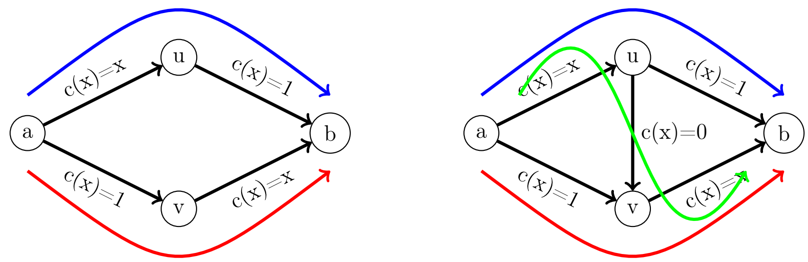

FIGURE 3 – Paradoxe de Braess

trafic se répartit à égalité sur chaque chemin et chaque agent utilise un chemin de coût 3/2. Dans le second réseau, on a ajouté une arête de délai 0. Le flot optimal n'est pas affecté par cet ajout. A l'équilibre de Nash, tout le trafic passe par la nouvelle arête et chaque agent utilise un chemin de coût 2 !
Une mesure possible de l'inefficacité des équilibres de Nash est le rapport entre le coût d'un agent à l'équilibre et le coût minimum possible en moyenne. Le *prix de l'anarchie*, ainsi défini, dans un réseau de Braess est de 4/3. L'objectif de cette section est de justifier le fait que les jeux de congestion sur réseaux avec des fonctions de coût linéaires ont un prix de l'anarchie proche de 1.
Le modèle considéré est donc un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une origine a et une destination b, r unités de trafic devant aller de a à b. Chaque arête e a une fonction de coût associée, décrivant le délai de trajet par unité de trafic comme fonction de la quantité de trafic sur l'arête.

Un résultat de T. Roughgarden et E. Tardos en 2002 montre que le principal responsable de l'inefficacité n'est pas la complexité structurelle du réseau mais la *non linéarité* des fonctions de coût. Soit $\mathcal{C}$ une classe de fonctions de coût, par exemple la classe des fonctions affines, à coefficients positifs. On appelle réseau du type *Pigou* un réseau du type représenté dans la figure 4.

Théorème 3 *Parmi les réseaux avec fonctions de coût dans la classe $\mathcal{C}$ le plus grand prix de l'anarchie est atteint dans un réseau du type Pigou.*

Pour la classe $\mathcal{C}$ des *fonctions affines*, le réseau du type Pigou maximise le prix de l'anar-

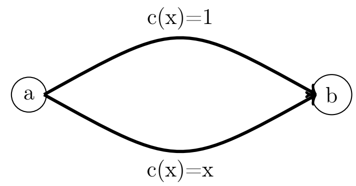

FIGURE 4 – Réseau du type Pigou

chie qui, dans ce cas, est toujours au plus 4/3. Pour la classe $\mathcal{C}$ des fonctions polynomiales de degré d, le cas le pire est un réseau du type Pigou non linéaire. Dans ce cas, le prix de l'anarchie est de l'ordre de $\frac{d}{\ln d}$.
Dans la conférence [9], Tim Roughgarden a montré en 2004 que le problème de *détection* du paradoxe de Braess, c'est-à-dire étant donné un réseau, quelles arêtes devraient être supprimées pour obtenir un flot optimal comme équilibre de Nash, est un problème *difficile* : sous l'hypothèse $P \neq NP$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour les réseaux à fonctions de coût linéaires, il n'existe pas d'algorithme d'approximation avec un rapport $(4/3 - \varepsilon)$ pour ce problème de détection. Ce résultat est en fait optimal puisqu'il existe dans ce cas un algorithme d'approximation avec un rapport 4/3.

5 Conclusion

Le résultat de John Nash [7] concernant l'existence d'équilibres pour tous les jeux a donné à l'équilibre mixte de Nash le statut de concept central en théorie des jeux et l'a établi comme *standard* par rapport auquel tous les raffinements successifs d'équilibre ont été jugés. Les premiers algorithmes de calcul d'équilibre n'étaient pas efficaces, car c'est un problème difficile pour les jeux en général : ce problème a été prouvé *complet* pour la classe de complexité PPAD, comme celui de la recherche d'un *point fixe* au sens de Brouwer.
Les jeux de congestion, en particulier sur réseau, ont suscité un intérêt croissant depuis las années 90. Ils possèdent toujours un *équilibre de Nash pur*, mais dont le calcul peut être extrêmement difficile. Cependant, sous des hypothèses raisonnables, à savoir si les fonctions de délai sont à saut borné, les dynamiques d'*approximation* convergent rapidement. Enfin, le *prix de l'anarchie* permet de mesurer la relative inefficacité des équilibres par rapport à un intérêt général optimal. Pour certains jeux de congestion assez usuels, à fonction de délai linéaires, il reste proche de 1.

Références

[1] Steve Chien and Alistair Sinclair. Convergence to Approximate Nash Equilibria in Congestion Games. *Games and Economic Behavior*, 71(2) :315–327, 2011.

[2] Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, and Christos H. Papadimitriou. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. *Communications of the ACM*, 52(2) :89–97, 2009.

[3] Alex Fabrikant, Christos H. Papadimitriou, and Kunal Talwar. The Complexity of Pure Nash Equilibria. In *36th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 604–612, 2004.

[4] D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, and M. Yannakakis. How easy is local search ? *Journal of Computer and System Science*, 37(1) :79–100, 1988.

[5] Elias Koutsoupias and Christos H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Lecture Notes on Computer Science*, volume 1563, pages 404–413, 1999.

[6] John F. Nash. Equilibrium points in N-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1) :48–49, 1950.

[7] John F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54 :286–295, 1951.

[8] R. W. Rosenthal. A class of games possessing pure Nash equilibriua. *International Journal of Game Theory*, 2(1) :65–67, 1973.

[9] Tim Roughgarden. Designing networks for selfish users is hard. In *42rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 472–481, 2001.