Espaces Métriques

I Espaces métriques

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Écrire à l'aide de quantificateurs : (1) O est un ouvert de X ;
(2) la caractérisation métrique de l'intérieur d'une partie E de X ;
(3) la caractérisation métrique de l'adhérence d'une partie E ;
(4) la définition de la frontière ;
(5) E est dense dans X ;
(6) E est d'intérieur vide dans X ;
(7) la définition d'une suite convergente.

Exercice 2.— Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X.

Exercice 3.— Dessiner les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances d_1, d_2 et d_∞.

Exercice 4.— Donner un exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'une famille de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas ouverte.

Exercice 5.— **1.** Montrer que toute application lipschitzienne est uniformément continue.

2. Montrer que toute application uniformément continue est continue.

Exercice 6.— Montrer que l'union d'un nombre fini de parties fermées et une partie fermée. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.

Exercice 7.—(caractérisation métrique de l'adhérence) Montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de E si et seulement si toute boule ouverte centrée en x rencontre E.

Exercice 8.— Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de Y est une partie fermée de X.

Exercice 9.—

1. Donner une caractérisation métrique de la frontière de E.

2. Montrer que $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X \setminus E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$. En déduire une autre expression pour la frontière de E.

Exercice 10.— Montrer qu'un ensemble A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$.

Exercice 11.— (unicité de la limite) Montrer que si une suite (x_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 12.— Donner une preuve séquentielle de la continuité de la composée de deux applications continues.

Exercice 13.— Dans le plan $X = \mathbb{R}^2$, on considère le sous-espace métrique $Y = (]0,1]^2, d_2)$.

1. Donner un exemple de boule de Y qui n'est pas une boule de X.

2. Donner un exemple de partie ouverte de Y qui n'est pas une partie ouverte de X.

3. On considère la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$. Est-elle convergente ? justifier votre réponse par une preuve.

Exercice 14.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert,

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé,

3. l'intérieur de l'image par Φ d'un ensemble E est égal à l'image de l'intérieur de E,

4. l'adhérence de l'image est égale à l'image de l'adhérence,

5. l'image d'une suite convergeant vers x est une suite convergeant vers $\Phi(x)$,

Exercice 15.— Soit X un ensemble. On définit pour $x, y \in X$, $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et 1 sinon.

1. Montrer que d est une distance.

2. Déterminer les boules ouvertes pour d.

3. Déterminer leurs adhérences.

4. Déterminer les boules fermées, qu'en déduit-on ?

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 16.—

1. Soit O un ouvert du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(\mathrm{Adhe}(O)) = O$?

2. Soient E, F deux parties du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(E \cup F) = \mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F)$?

3. Donner un exemple de partie A du plan qui est contenue strictement dans sa frontière.

4. Une partie du plan est-elle toujours ouverte ou fermée ?

5. Donner un exemple de partie X du plan contenant un point x avec la propriété suivante : l'adhérence de la boule ouverte $B_1(x)$ n'est pas la boule fermée $B_1^f(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\}$.

Exercice 17.— Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18.— Soit X un espace métrique. Montrer que $A \subset X$ est dense dans X si et seulement si A intersecte tout ouvert non vide.

Exercice 19.—(Partiel 2017)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Pourt tout x et y dans $\mathbb{R}^2$ on définit $D(x, y) = \|x - y\|$ si la famille (x, y) est liée et $D(x, y) = \|x\| + \|y\|$ sinon.

1. Montrer que D est une distance.

2. Décrire géométriquement les boules ouvertes pour D et faire un dessin.

Exercice 20.— Trouver une fonction continue et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert. Même question avec un fermé.

Exercice 21.—

1. Montrer que les solutions du système d'inéquations $x + 2y > 0$ et $y^2 > x$ forment un ouvert du plan.

2. Montrer que tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^N$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$. Que pensez-vous de l'intérieur de F ?

Exercice 22.— Montrer que si Y est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux éléments a, b **dans** Y tels que $Y \subset [a, b]$.

Exercice 23.— (Continuité par morceaux) Soient (X, d) un espace métrique, et F_1, F_2 deux fermés de X qui recouvrent X (c'est-à-dire que $F_1 \cup F_2 = X$). Soient Y un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ une application.

1. On suppose que les restrictions $f_{|F_1} : F_1 \to Y$ et $f_{|F_2} : F_2 \to Y$ sont continues. Montrer que f est continue.

2. Montrer que cette propriété devient fausse si l'on ne suppose pas que F_1 et F_2 sont fermés.

Exercice 24.—(Espaces produits)

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On veut munir d'une distance le produit

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Pour cela, on considère les applications d_1, d_2, d_∞ définies par

$$d_1((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

$$d_2((x, y), (x', y')) := \left((d_X(x, x')^2 + (d_Y(y, y')^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\left(d_X(x, x'), d_Y(y, y')\right).$$

1. Montrer que chacune de ces formules définie bien une distance sur $X \times Y$.

2. On veut montrer qu'une partie O de $X \times Y$ est ouverte pour la distance d_1 si et seulement si elle est ouverte pour la distance d_∞.

a. Montrer les inégalités

$$d_1(P_0, P) \leq 2d_\infty(P_0, P) \text{ et } d_\infty(P_0, P) \leq d_1(P_0, P).$$

b. En déduire que toute d_1-boule ouverte centrée en un point P_0 de $X \times Y$ contient une d_∞-boule ouverte, et réciproquement.

c. En déduire le résultat.

3. Montrer que la distance d_2 définit également les mêmes ouverts que d_1 et d_∞.

Exercice 25.—

1. Dans un espace métrique X, on considère une suite (x_n) qui converge vers un élément x et une suite (y_n) qui converge vers un élément y. Montrer que la suite des distances $(d(x_n, y_n))$ converge vers le nombre $d(x, y)$.

2. Interpréter le résultat comme une propriété de l'application distance.

Exercice 26.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Déterminer explicitement un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue.

Exercice 27.— Dans l'espace métrique $X = C_b([0, 1], \mathbb{R})$ on considère la partie

$$X_0 = \{f \in C_b([0, 1], \mathbb{R}) \ \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée de X.

2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

3. En déduire qu'il est d'intérieur vide.

4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé. (**) Déterminer son intérieur.

Exercice 28.—(espace de suites) Soit X l'espace des suites réelles qui tendent vers 0, muni de la distance suivante : si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux éléments de X,

$$d_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

1. Vérifier que d_∞ est bien définie et que c'est une distance sur X.
2. On considère la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad x_k^n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans X.

Exercice 29.—(distance à un sous-ensemble)

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X, d) \to (X', d')$ est k-lipschitzienne si $\forall (x, y) \in X^2, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.
2. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On pose $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Montrer que cela a toujours un sens. Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.
3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).
4. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 tels que $F_i \subseteq U_i$. (On pourra considérer $\frac{d_{F_1}}{d_{F_1} + d_{F_2}}$.)
6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que $\inf\{d(x, y) : (x, y) \in F_1 \times F_2\} = 0$.

Exercice 30.—

1. Montrer que tous les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$, non réduits à un singleton, sont homéomorphes.

2. Montrer que $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

3. Montrer que $[0, 1]$ et $[0, 1] \cup [2, 3]$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 31.—[Partiel 2018]

Soit E l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres complexes telles que la suite $(|x_n|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. On pose $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n - y_n|^{\frac{1}{n}}$ pour x et y dans E.

1. Montrer que d est une distance sur E.

2. Soit A la partie de E formée des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

- **a.** Montrer que A n'est pas fermée dans (E, d).
- **b.** Montrer que $\overline{A}$ est la partie de E formée par les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $|x_n|^{\frac{1}{n}} \to 0$.

3. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $ty = (ty_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $ty \in E$ et que l'application $t \mapsto ty$ est continue de $\mathbb{R}$ dans E si et seulement si $y \in \overline{A}$.

I.3 Compléments et challenges

Espaces de matrices Soit n un entier positif. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$, ce qui en fait un espace métrique lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{n^2}$ de l'une des métriques habituelles. Par exemple, l'application

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$, et la métrique d_1 s'écrit

$$d_1(M, M') = \max\{|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|\}.$$

Exercice 32.— On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. On rappelle aussi que l'application déterminant $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, par exemple $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'autre part une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M_0 une matrice particulière. Rappeler pourquoi il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $t \in \mathbb{R}$ qui annulent l'expression $\det(M_0 + t\mathrm{Id})$. En déduire qu'on peut trouver une suite (t_n) de réels tendant vers 0 tels que, pour tout n, la matrice $M_0 + t_n\mathrm{Id}$ est inversible. Comment s'interprète ce résultat, en termes de propriété topologique de la partie $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Une application. On veut montrer l'identité $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ concernant la trace (somme des termes diagonaux) d'une matrice.

a. Il est assez facile de voir que la trace d'une matrice est invariante par conjugaison : autrement dit, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ (ceci vient par exemple du fait que le polynôme caractéristique d'une matrice est invariant par conjugaison ; mais admettons ce fait). En déduire que l'identité recherchée est vraie lorsque la matrice M est inversible.

b. Utiliser la question 2 pour en déduire que l'identité est encore vraie lorsque N n'est pas inversible.

Exercice 33.— **1.** Soit $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer que c'est un ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Même question pour l'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que $MM^t = \mathrm{Id}$.

Exercice 34.—(La distance de Hausdorff est une distance !) Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff définie par la formule

$$d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2, r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1, r)\}$$

où

$$V(E, r) = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < r\}$$

est le r-voisinage de E (voir le poly, section c des commentaires sur la complétude). On voudrait montrer que les axiomes de distances sont bien vérifiés. La symétrie est évidente...

1. Soient E_1, E_2 des fermés bornés non vides tels que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = 0$. Supposons qu'il existe un point x de E_1 qui n'est pas dans E_2. Construire une suite de points de E_2 qui converge vers x. Qu'en déduit-on ? Montrer que la distance de Hausdorff vérifie l'axiome de séparation.

2. On voudrait maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. On considère trois ensemble fermés bornés non vides E_1, E_2, E_3. On note $d_{12} = d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2)$, $d_{23} = d_{\text{Hausdorff}}(E_2, E_3)$, on se donne un $\varepsilon > 0$.

Soit x un point de E_1. Trouver un point z de E_3 tel que $d(x, z) < d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$. Qu'a-t-on montré, en termes de r-voisinages où $r = d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$? En déduire que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_3) \leq r$. Conclure.
