Complétude, compacité

I Complétude

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.— Écrire la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2.— On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \log(n)$.
1. Calculer la limite de la suite $d(u_{n+1}, u_n)$.
2. La suite (u_n) est-elle de Cauchy ?

Exercice 3.— Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet. On donnera trois arguments différents :
1. à l'aide de la proposition sur les sous-espaces métriques,
2. à l'aide de la propriété disant qu'une suite convergente est de Cauchy,
3. en utilisant juste la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 4.— Parmi les ensembles suivants, lesquels sont complets :
— $[0,1], [0,1[,]0,1[$;
— $[0,1] \times [0,1], [0,1] \times]0,1[,]0,1[\times]0,1[$;
— $C_b(]0,1[,]0,1[), C_b([0,1],]0,1[), C_b(]0,1[, [0,1])$,.

Exercice 5.— Écrire la version duale du théorème de Baire, concernant les fermés de X.

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 6.—
1. Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.
2. Plus généralement, montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n.$$

Exercice 7.— Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique X, (y_n) une autre suite dans X, on suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite (y_n) est aussi une suite de Cauchy.

Exercice 8.— Soit (X, d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.
2. Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.
3. Montrer que E est complet ssi toute suite ayant $(*)$ converge.

Exercice 9.— Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.

Exercice 10.— Soit Φ un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]0, 1[$; on peut par exemple prendre

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}$ en "transportant la distance de $]0, 1[$ par Φ^{-1}", c'est-à-dire définie par

$$d(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|\,.$$

1. Rappeler pourquoi $]0, 1[$, muni de la distance usuelle, n'est pas complet. En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

2. La distance d définit-elle les mêmes ouverts que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11.— On considère une application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui est de la forme $x \mapsto x + \Phi(x)$ où $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application qui est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne.

1. Montrer que T est bijective. *Indication : transformer le problème en une recherche de point fixe... En cas de panne on pourra comparer à l'exercice 21 du poly de calcul différentiel.*

2. Montrer que T est un homéomorphisme (on pourra montrer que l'inverse de T est lipschitzienne).

Exercice 12.— Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p, la composée p fois de f, soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 13.—(Examen deuxième session 2014-2015)

1. L'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|\,,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.
2. Soit $\Phi : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1,1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1,1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction $f : [-1,1] \to [-1,1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n\geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

I.3 Compléments et challenges

Exercice 14.—(Théorème de prolongement) Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. On suppose que (Y,δ) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f\colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g\colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Exercice 15.— Rédiger une démonstration complète du théorème de Baire (voir le poly).

Exercice 16.— On munit $X = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ de la distance

$$d_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|dt.$$

1. Montrer que d_1 est effectivement une distance sur X.
2. On définit la fonction $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = -1$ si $x \leq -\frac{1}{n}$, et $f_n(x) = nx$ si $x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_1).
3. Montrer que (X, d_1) n'est pas complet.

II Compacité

II.1 Assimilation du cours

Exercice 17.—

1. Donner un exemple de suite réelle ayant deux valeurs d'adhérence. Représenter cette suite sur un dessin.

2. Donner un exemple de suite réelle ayant une seule valeur d'adhérence, mais admettant une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Faire un dessin. Cette suite est-elle convergente ?

Exercice 18.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

1. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

2. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

3. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

Exercice 19.— Montrer que l'application $x \mapsto x^2$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas uniformément continue.

Exercice 20.— Montrer que les espaces $[0, 1]$ et $]0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 21.— Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

II.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 22.— Dans un espace métrique compact, montrer que toute suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 23.— Montrer que dans tout espace métrique, une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. En déduire que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 24.— Montrer qu'un espace métrique compact contient une partie dénombrable dense.

Exercice 25.— Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si K et K' sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x, x') \in K \times K'$ vérifiant

$$d(x, x') = d(K, K') := \inf_{(y,y')\in K\times K'} d(y, y').$$

Exercice 26.— Dans un espace métrique (X, d), on considère un fermé non vide F vérifiant $F \neq X$ et un compact K non vide tel que $K \cap F = \emptyset$.

1. a. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. **b.** Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?

2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, \quad d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 27.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$; ceci revient à dire que pour toute suite (x_n) dans $\mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, 0) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) = +\infty.$$

1. Donner des exemples d'applications vérifiant cette hypothèse, et d'applications qui ne la vérifient pas.

2. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

3. Application I. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.

4. Application II. Soit ABC un triangle dans le plan. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que la somme des distances de M à A, B et C est minimale.

Exercice 28.— On se place dans $C_b([0, 1], \mathbb{R})$. Deux variantes au choix :

1) Soit n un entier, dessiner une fonction continue $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$$

et qui prend la valeur 1 au milieu de cet intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ pour $n \neq m$? En déduire que la suite (f_n) n'a pas de valeur d'adhérence.

2) Pour tout n, soit $f_n : x \mapsto x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ lorsque m est très grand ? Formaliser. En déduire que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 29.— Etant donnés deux polynômes $P(X), Q(X)$ à coefficients réels, on définit $d(P, Q)$ comme le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme $P(X) - Q(X)$. Il est facile de voir que ceci définit une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer, pour tout entiers positifs p, q, la distance de 0 au polynôme X^p, puis la distance entre les deux polynômes X^p et X^q.

2. En déduire que la suite $(X^p)_{p \geq 0}$ d'élements de $\mathbb{R}[X]$ est bornée mais n'admet pas de sous-suite convergente.

3. Montrer que, dans cet espace métrique, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 n'est pas compacte.

Exercice 30.—(partiel 2012) Soit X un espace métrique compact, et A une partie de X. On suppose que A est *localement finie* : pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A.

1. Montrer que A ne contient qu'un nombre fini de points.

2. (*) Montrer que le résultat ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

Exercice 31.— Trouver l'erreur dans la réponse suivante à la première question de l'exercice précédent. *Par hypothèse, pour tout x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $B(x, \varepsilon) \cap A$ ne contient qu'un nombre fini de points. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_k, \varepsilon)$. On a*

$$A \subset A \cap B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup A \cap B(x_k, \varepsilon)$$

et puisque A est une réunion finie d'ensembles finis, il ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 32.—(partiel 2017) Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ vérifiant $d\big(f(x), f(y)\big) \geqslant d(x, y)$ pour toute paire de points $(x, y) \in X \times X$.

1. **a.** Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout entiers naturels $n \leqslant m$,

$$d\big(f^m(x), f^n(x)\big) \geqslant d\big(f^{m-n}(x), x\big).$$

b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe $k \geqslant 1$ tel que $d(f^k(x), x) < \varepsilon$.

c. En déduire que $f(X)$ est dense dans X.

2. **a.** Soit a et b deux points distincts de X. On définit la suite $u_n = d\big(f^n(a), f^n(b)\big)$. Montrer que cette suite est monotone.

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geqslant 1$ tel que $d\big(f^k(a), a\big) < \varepsilon$ et $d\big(f^k(b), b\big) < \varepsilon$.

c. Montrer que $d\big(f(a), f(b)\big) = d(a, b)$.

d. Conclure que f est une isométrie.

Exercice 33.—(partiel 2018)

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe.

Indication : on pourra considérer $U = \{t, f(t) > t\}$ et $V = \{t, f(t) < t\}$ et raisonner par l'absurde.

2. Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne.

a. Donner explicitement une fonction g de S^1 dans S^1, continue et qui ne possède pas de point fixe.

b. En déduire que S^1 ne peut pas être homéomorphe à un segment non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

c. Le cercle S^1 est-il homéomorphe à un singleton ?

3. Si $N \geqslant 1$, on munit $\mathbb{R}^N$ de la distance euclidienne. Soit $C \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble compact tel que $0 \in C$ et

$$\forall (x, \lambda) \in C \times [0, 1], \quad \lambda x \in C.$$

Soit $f : C \to C$ une application 1-Lipschitzienne.

a. Soit $\lambda \in [0, 1[$. Montrer que l'application $f_\lambda : C \to C$ définie par

$$\forall x \in C, \quad f_\lambda(x) = f(\lambda x),$$

est bien définie.

b. Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1[$, l'application f_λ admet un unique point fixe $x_\lambda \in C$.
c. Montrer que f admet un point fixe.
d. Montrer par un exemple que f peut posséder plusieurs point fixes.
e. Donner un exemple de $D \subset \mathbb{R}^2$ compact et $f : D \to D$ application 1-Lipschitzienne qui n'admet pas de point fixe.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 34.— Montrer que l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux est dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$. *Aide : utiliser la continuité uniforme.*

Exercice 35.— (Une autre preuve du lemme de Lebesgue) On se place sous les hypothèses du lemme de Lebesgue, c'est-à-dire qu'on considère un recouvrement d'un espace métrique compact X par des ouverts $U_i \neq X$. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$R(x) = \sup\{r > 0, \exists i \in I, B(x,r) \subset U_i\}.$$

Faire un dessin. Montrer que cette formule définit une fonction de X dans $]0,+\infty[$, et que cette fonction est continue (elle est même 1-lipschiptzienne). En déduire une nouvelle preuve du lemme.

Exercice 36.—(produit infini d'espaces compacts) Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante :

$$\delta(u,v) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k)))$$

1. Vérifier que δ est effectivement une distance.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ et soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} d(u_n(k), u(k)) = 0.$$
3. Montrer que $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ est compact.
4. Montrer que U est un ouvert de $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ si et seulement si pour tout x dans U, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et un réel strictement positif α vérifiant :
$$\forall y \in X^{\mathbb{N}}, \forall j \in J, \quad d(y(j), x(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$
