CONNEXITÉ, ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I Connexité

I.1 Assimilation du cours

Exercice 1.—

1. Montrer que l'image d'un espace métrique connexe par arcs par une application continue est un espace métrique connexe par arcs *(indication : on commencera par introduire des notations et préciser les hypothèses)*.

2. En déduire que la connexité par arcs est une propriété invariante par homéomorphisme *(même indication)*.

Exercice 2.— Montrer que la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est connexe par arcs.

Exercice 3.— (critère pratique de connexité) La caractérisation suivante de la connexité est très utile : *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante*. Démontrer cette caractérisation.

I.2 Exercices de niveau standard

Exercice 4.— Montrer que le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I est une partie connexe par arcs du plan.

Exercice 5.— Soit X le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que X n'est pas connexe.

Exercice 6.—

1. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe au cercle unité du plan. *(Aide : enlever un point, et utiliser la connexité...)*

2. Montrer, avec la même méthode, que la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 7.— (Version en dimension un du théorème de Borsuk-Ulam). On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de centre 0 dans le plan ; on le voit comme un sous-espace métrique du plan. Soit f une application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points du cercle, diamétralement opposés, qui ont la même image par f. *Aide : utiliser la connexité du cercle et la fonction auxiliaire définie par* $g(v) = f(v) - f(-v)$ *(noter que* v *et* $-v$ *sont diamétralement opposés).*

Exercice 8.—(Examen deuxième session 2014-2015, extrait) La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

Exercice 9.— Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe *(indication : utiliser le bon critère... Voir le poly !)*

Exercice 10.—(Examen 2018)

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $C \subset X$ un sous-ensemble. On suppose que C n'est pas connexe.

1. Justifier l'existence de deux sous-ensembles, C_1 et C_2, de C, qui sont disjoints, non vides, qui sont tous les deux des ouverts de C et tel que $C = C_1 \cup C_2$.

2. Si $x \in X$ et $A \subset X$ est non vide on définit $d(x, A) := \inf\{d(x, y), \quad y \in A\}$. Montrer que pour tout $x \in C_1$, $d(x, C_2) > 0$.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, C_2)$ définie de X dans $\mathbb{R}$ est continue.

4. Montrer qu'il existe deux ouverts, O_1 et O_2 de X, qui sont disjoints, tels que $O_1 \cap C$ et $O_2 \cap C$ sont non vides et tels que $C \subset O_1 \cup O_2$.

<u>*Indication*</u> *: On pourra considérer la fonction* $x \mapsto d(x, C_1) - d(x, C_2)$.

5. Donner un exemple d'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas connexe et pour lequel il n'existe pas deux fermés de $\mathbb{R}$, F_1 et F_2 qui sont disjoints, tels que $F_1 \cap D$ et $F_2 \cap D$ sont non vides et tels que $D \subset F_1 \cup F_2$.

I.3 Compléments et challenges

Exercice 11.— Montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Exercice 12.— On note A le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle du type $]0, \pi]$.

1. Montrer que sur n'importe quel intervalle du type $[1/(a + 2\pi), 1/a]$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1. Dessiner le graphe au-dessus d'un intervalle de ce type lorsque x est très proche de 0.

2. Montrer que $\bar{A} = A \cup \{(0, 0)\} \times [-1, 1]$.

3. Montrer que A est connexe par arcs. En déduire que $\bar{A}$ est connexe.

4. Pour montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs, on raisonne par l'absurde, en considérant un chemin $\gamma : [0, 1] \to \bar{A}$ allant du point du graphe d'absisse π à un point $(0, 0)$ du segment vertical ; on note $\gamma_x(t), \gamma_y(t)$ les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans le plan.

a. Montrer qu'il existe $\tau \geq 0$ tel que le point $\gamma(t) = (0, y_0)$ est sur le segment vertical mais tous les points $\gamma(t)$ avec $t < \tau$ sont sur le graphe.

b. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, et $x = \gamma_x(\tau - \varepsilon)$. Montrer qu'il existe $t \in [\tau - \varepsilon, t_0]$ tel que

$$\frac{1}{\gamma_x(t)} = \frac{1}{x} + 2\pi.$$

c. En déduire que pour tout point $(0, \alpha)$ du segment, il existe une suite (t_n) décroissante et convergeant vers τ telle que la suite $(\gamma_y(t_n))$ converge vers $(0, \alpha)$.

d. Conclure en montrant que γ ne satisfait pas le critère de continuité séquentiel en τ.

Exercice 13.— Montrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est connexe *(indication : voir la recette de preuve dans le poly)*.

II Espaces vectoriels normés

II.1 Assimilation du cours

Exercice 14.— Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé E sont convexes : si C est un point de E, r un réel strictement positif, et P, Q deux points de la boule $B(C, r)$, alors tout point M du segment $[P, Q]$ est encore dans $B(C, r)$. *Indication : on pourra commencer par le cas où* $C = 0$ *et* $r = 1$.

Exercice 15.— On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver par un calcul direct un nombre m tel que, pour tout vecteur x, $\|Ax\|_\infty \leq m \|x\|_\infty$.
2. Trouver un vecteur x, de norme 1, pour lequel l'inégalité précédente est une égalité.
3. En déduire la norme matricielle de A.

Exercice 16.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

II.2 Exercices de niveau standard

Exercice 17.— **1.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. En considèrant le produit cartèsien $E \times F$ comme un espace vectoriel, montrer que $\max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$ est une norme sur $E \times F$.
2. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes dans $E, \|.\|$. **a.** Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est convergente. **b.** Si (λ_n) est une suite convergente de réels, montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge. **c.** Ces deux résultats s'interprètent en disant que deux application sont continues, de quelles applications s'agit-il ?
3. **a.** Montrer, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

b. Ici encore, interpréter cette inégalité en termes d'application lipschitzienne.

Exercice 18.—(Transport de norme) Soit $f : E \to F$ une application linèaire et N une norme sur F. A quelle condition l'application $N \circ f$ est-elle une norme sur E ?

Exercice 19.—Soit E un espace vectoriel normé, $P \in E$ et $r > 0$. Démontrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(P, r)$ est la boule fermèe $B_f(P, r)$.

Exercice 20.—

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Dèterminer la norme associée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. *Indication : il s'agit de généraliser l'exercice* **??**, *en reprendre la démarche.*

2. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$. Dèmontrer que la norme d'une matrice A symètrique (${}^{\mathrm{t}}A = A$) est ègale à son *rayon spectral* $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda|$ où $\mathrm{Spec}(A)$ dèsigne le *spectre* de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

Exercice 21.— Soit $L : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

1. On suppose que L est bornée sur une boule $B(0, r)$ de centre 0. Montrer que L est bornée sur la boule $B(0, 1)$.

2. Sous les mêmes hypothèses, en déduire que L est lipschitzienne.

3. Réciproquement, montrer que si L est continue, alors elle est bornée sur une certaine boule centrée en 0.

Exercice 22.—(Examen 2018)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $F \neq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E et $r \in]0, 1[$ et $x \in E \setminus F$.

a. Montrer que $d(x, F) > 0$. On pose $\delta = d(x, F)$.

b. Montrer qu'il existe $u \in F$ tel que $\|x - u\| < \frac{\delta}{r}$.

c. En déduire l'existence de $v \in E$ tel que $\|v\| = 1$ et tel que $d(v, F) \geqslant r$.
Indication : On cherchera v colinéaire à $x - u$.

2. Supposons maintenant que E est de dimension infinie.

a. Construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$ et telle que dès que $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$.

b. En déduire que si la dimension de E est infinie, alors la boule fermée $B_f(0_E, 1)$ n'est pas compacte.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 23.—

1. Rappeler pourquoi la boule unité fermée est compacte dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

2. En utilisant l'équivalence des normes, en déduire que c'est encore le cas lorsqu'on muni $\mathbb{R}^N$ d'une norme quelconque.

3. Montrer le théorème de Riesz : si E est un espace vectoriel normé dans lequel la boule unité fermée $B^f(0, 1)$ est compacte, alors il est de dimension finie. *Aide : voir le poly.*

Exercice 24.— (Hyperplans et formes linèaires) Soit E un espace vectoriel normé et H un *hyperplan* de E, c'est-à-dire le noyau $\ker \varphi$ d'une forme linèaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ non nulle. Montrer l'alternative suivante :

— soit φ est continue et H fermè dans E,

— soit φ n'est pas continue et H dense dans E.

Indication : si φ n'est pas continue, construire une suite (y_n) d'èlèments de E qui converge vers 0 *et vèrifiant $\varphi(y_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
