

## INVERSION LOCALE, FONCTIONS IMPLICITES

---

**Exercice 1.**— Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = y^2/x$  si  $x \neq 0$  et  $f(0, y) = 0$ . Montrer que  $f$  admet des dérivées dans toutes les directions en 0 mais  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

---

**Exercice 2.**— Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en 0. On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  et  $t > 0$ ,  $f(tx) = tf(x)$ . Montrer que  $f$  est linéaire.

---

**Exercice 3.**— Étudier la différentiabilité des applications matricielles suivantes :

$$M^k, M^{-1}, \exp(M).$$


---

## I Théorème d'inversion locale

---

**Exercice 4.**— (Examen 2014) Montrer que l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (y, x + \cos(y))$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.

---

**Exercice 5.**— Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(x, y) = (2x + y, x^2 - y^2)$ . Montrer qu'il existe un ouvert  $U$  contenant le point  $(2, 1)$  tel que la restriction  $g|_U : U \rightarrow g(U)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme. L'application  $g$  est-elle un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  ?

---

**Exercice 6.**— (adapté de l'examen deuxième session 2013) Montrer que pour tout  $a$  assez proche de 0 et tout  $b$  assez proche de 1, le système d'équations

$$\begin{cases} xe^y + 2y = a \\ 1 + \sin(3x + 4y) = b \end{cases}$$

a une unique solution  $(x, y)$  proche de  $(0, 0)$ . On pourra introduire la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (xe^y + 2y, 1 + \sin(3x + 4y))$  et remarquer que  $f(0, 0) = (0, 1)$ .

---

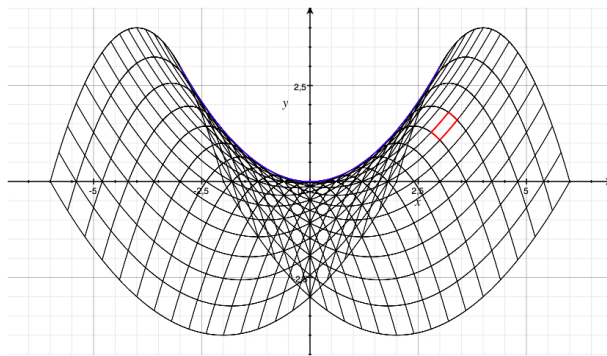
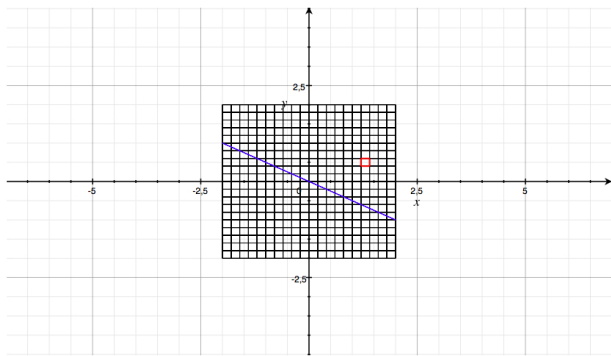
**Exercice 7.**—

1. On considère l'application  $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $F_1(x, y) = (2x + y, x^2 - y^2)$ . Le dessin suivant représente une grille et son image par l'application  $F$ .

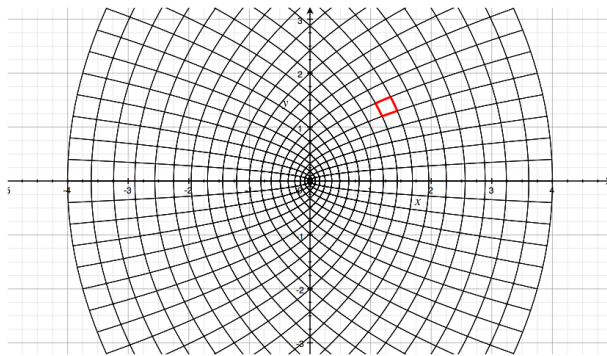
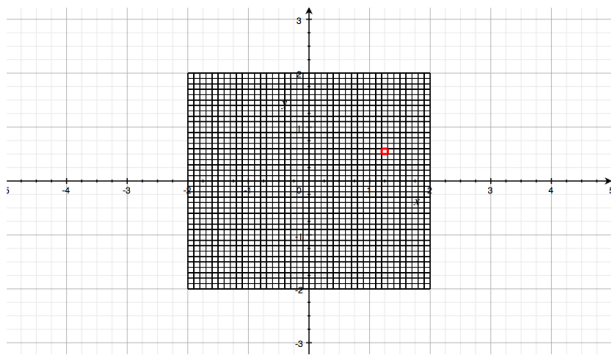
a. L'application  $F_1$  est-elle un  $C^1$ -difféomorphisme ?

b. Déterminer les points  $a$  en lesquels l'hypothèse du théorème d'inversion locale est vérifiée.

c. Soit  $a$  un “mauvais” point. L’application  $F_1$  est-elle localement injective en  $a$ ? Localement surjective en  $F_1(a)$ ? On pourra s’aider du dessin.



2. Mêmes question pour l’application  $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $F_2(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ , représentée ci-dessous.



**Exercice 8.**— 1. Montrer que toute matrice  $N$  assez proche de l’identité est le carré d’une unique matrice  $M$  proche de l’identité.

2. On note  $\sqrt{N}$  la matrice  $M$  de la première question. Donner un développement limité à l’ordre 1 de  $\sqrt{Id + H}$  lorsque  $H$  tend vers 0.

**Exercice 9.**— On se place dans l’espace vectoriel normé  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

1. Montrer que l’application  $f \mapsto f^2$  n’est pas un  $C^1$ -difféomorphisme sur son image.
2. Montrer qu’elle n’est pas un  $C^1$ -difféomorphisme sur aucun voisinage de la fonction nulle.
3. Montrer que, par contre, sa restriction à l’ouvert des fonctions strictement positives est un difféomorphisme (on pourra relire le paragraphe sur la différentielle de cette application).

## II Théorème des fonctions implicites

**Exercice 10.**—

1. Montrer que l’équation  $-\sin(y) + x + \cos(xy) = 0$  définit localement  $y$  comme une fonction de  $x$  au voisinage du point  $(-1, 0)$ .
2. Calculer la dérivée de cette fonction en  $x = -1$ .

---

**Exercice 11.**— On considère l'équation

$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions du type  $(0, 0, z)$ .
  2. Montrer que l'équation définit localement  $z$  comme une fonction  $z = \phi(x, y)$  au voisinage de la solution  $(0, 0, 1)$ .
  3. En dérivant la relation  $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$ , calculer les dérivées partielles de  $\phi$  au point  $(0, 0)$ .
  4. En déduire une valeur approchée d'une solution avec  $x = 0,03$  et  $y = -0,04$  (si elle existe...).
- 

**Exercice 12.**— On considère l'intersection de la sphère  $\mathbb{S}^2$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  avec le cylindre d'axe vertical passant par le point  $(1, 0, 0)$  et de rayon 1, qui a pour équation  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

1. Montrer que le système des deux équations détermine localement  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$ , sauf en quatre points à déterminer.
  2. Esquisser le dessin de cette intersection et interpréter graphiquement le résultat du calcul.
- 

**Exercice 13.**— 1. Montrer que l'équation matricielle  $M^3 + N^3 - 3MN = \text{Id}$  définit localement  $N$  en fonction de  $M$  au voisinage du couple solution  $(\text{Id}, 0)$ . Autrement dit, pour toute matrice  $M$  dont les coefficients assez proches de ceux de l'identité, il existe une unique matrice  $N = \Phi(M)$  dont les coefficients sont proches de 0, telle que  $M^3 + N^3 - 3MN = \text{Id}$ .

2. Calculer la différentielle de  $\Phi$  au point  $\text{Id}$ , et écrire le développement limité à l'ordre 1 en ce point.
- 

**Exercice 14.**— Pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

1. Etant donné  $(a_0, b_0, c_0, X_0) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $P_0(X_0) = 0$ , où  $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ , trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $(a_0, b_0, c_0)$  et une application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , tels que

$$X(a_0, b_0, c_0) = X_0 \quad \text{et} \quad P(X(a, b, c)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in U.$$

2. Soit  $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid P(X) \text{ a trois racines réelles distinctes}\}$ 
    - a. Montrer que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .
    - b. Montrer que  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(a, b, c) \mapsto (x, y, z)$  où  $x < y < z$  sont les racines (distinctes) de  $P$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .
- 

**Exercice 15.**— [Examen 2019]

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction définie par  $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  contenant  $x_0$  et une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$  et tel que pour tout  $x \in I$ , alors  $f(x, \varphi(x)) = 0$ .
  2. Déterminer la différentielle de  $\varphi$  au point  $x_0$ .
-