Extrema, différentielles secondes

I Extrema : conditions d'ordre 1

Exercice 1.— Dessiner l'allure du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet exactement deux minimum locaux dont l'un est un minimum, et un maximum local qui n'est pas un maximum.

Exercice 2.— Démontrer le théorème sur la condition d'ordre 1 pour les extrema libres. On pourra appliquer le théorème de Fermat en une variable, pour une fonction bien choisie.

Exercice 3.— On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + 3y + 4z$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^3$?

On note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$, et S la sphère unité.

2. La restriction de la fonction f à la boule B admet-elle un maximum ? Même question sur S.

3. *(extrema liés)* Déterminer s'ils existent, le ou les points en le(s)quel(s) f atteint son maximum sur S, et la valeur de ce maximum.

4. Déterminer s'ils existent, le ou les points en le(s)quel(s) f atteint son maximum sur B, et la valeur de ce maximum.

Exercice 4.— La volume d'une boite rectangulaire de côtés x, y, z est $f(x, y, z) = xyz$, la surface extérieure est $g(x, y, z) = 2yz + 2xz + 2xy$. On veut fabriquer une boite de volume 1 avec le moins de matériau possible, autrement dit on cherche à minimiser $g(x, y, z)$ avec la contrainte $f(x, y, z) = 1$.

1. a. Utiliser l'équation $f(x, y, z) = 1$ pour exprimer z en fonction de x et y. En déduire une fonction φ des deux variables x et y dont on cherche le minimum.

b. Trouver les points critiques de φ. En admettant provisoirement que φ possède un minimum, conclure à l'aide de la condition d'ordre 1 sur les extrema libres.

c. Démontrer que φ possède un minimum. *On pourra commencer par montrer que φ est propre, c'est-à-dire que pour tout M, il existe une partie K compacte du domaine de définition de φ telle que $|\varphi(x, y)| \geq M$ pour tout $(x, y) \notin K$: on pourra chercher K sous la forme d'un carré.*

2. *(extrema liés)* On peut aussi utiliser le théorème des extrema liés. Exprimer les gradients de f et de g, écrire la condition donnée par le théorème. Résoudre le problème en faisant les différences des équations deux à deux.

Exercice 5.—[Examen 2019] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniforémément vers une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ un point de maximum local strict de f et soit $r > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $0 < \|y - x\| \leqslant r$ alors $f(x) > f(y)$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, f_n admet un point de maximum local dans $B(x,r)$.

b. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ tel que $x_n \to x$ et tel que pour tout $n \geqslant n_0$, x_n est un point de maximum local de f_n.

2. Supposons maintenant que toutes les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ et f sont C^1.

a. Soit x un point de maximum local strict pour f. Montrer l'existence d'une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to x$ et $D_{x_n} f_n \to D_x f$.

b. Soint $y \in \mathbb{R}^N$. Montrer l'existence d'une suite de points $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}}$ tel que $y_n \to y$ et $D_{y_n} f_n \to D_y f$.

II Différentielle seconde

II.1 Formule de Taylor

Exercice 6.—(Examen 2014) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy} - 2e^2 xy$.

1. Calculer, pour tout vecteur $v = (h,k)$, le nombre $Df(2,1)\ v$.

2. **a.** Calculer, pour tout vecteur $v = (h,k)$, le nombre $D^2 f(2,1)\ (v,v)$. **b.** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(2,1)$.

3. Montrer que, pour tout vecteur $v \neq (0,0)$, $D^2 f(2,1)\ (v,v) > 0$.

4. Déduire de la question précédente l'existence d'un nombre $c > 0$ tel que, pour tout vecteur $v \neq (0,0)$,

$$D^2 f(2,1)\ (v,v) \geq c\|v\|^2$$

où $\|v\|$ est la norme euclidienne du vecteur v.

5. En déduire que pour tout point (x,y) assez proche du point $(2,1)$,

$$f(x,y) > -3e^2 + Df(2,1)\ (x-2, y-1).$$

6. Interpréter géométriquement l'inégalité obtenue.

II.2 Extrema : conditions d'ordre 2

Exercice 7.— (Question de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème donnant la condition d'ordre 1 sur les extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $Df(0) = 0$, $D^2 f(0)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, $D^2 f(0)((1,0),(1,0)) > 0$ et f n'a pas de minimum local en 0.

3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admet un minimum local strict en 0, et pour laquelle il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \neq 0$ tel que $D^2 f(0)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$.

4. Enoncer les deux théorèmes donnant des conditions d'ordre 2 sur les extrema locaux.

Exercice 8.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f n'a pas d'extremum local en un point (x,y) tel que x ou y soit positif ou nul.

2. Trouver un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, dont les deux coordonnées sont égales, et tel que $Df(x_0,y_0) = 0$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en ce point.

4. En déduire un développement limité de $f(x_0+h, y_0+h)$, et un développement limité de $f(x_0+h, y_0-h)$.

5. Conclure quant à la nature de ce point critique.

6. Montrer que la différentielle de f ne s'annule en aucun autre point du plan. Finalement, quels sont les extrema locaux de f ?

Exercice 9.— Etudier la nature des extréma des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ données par **1.** $f(x,y) = x^4 + y^2$, **2.** $g(x,y) = xy$, **3.** $h(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Exercice 10.— Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2 - 2y^2$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction f.

2. Sachant que $f(x,y,z)$ tend vers $+\infty$ quand $\|(x,y,z)\|$ tend vers $+\infty$, montrer que l'ensemble $\Gamma = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \leq 0\}$ est compact.

3. Préciser la nature des points critiques de f (minimum/maximum/point selle/local/global).

Exercice 11.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Montrer que :

- **a.** $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| + |y|$ tend vers $+\infty$.
- **b.** L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$ est compact.
- **c.** f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer ce minimum.