Exercice 1

1. Justifier que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x,y)) = (3e^{x+y}, \cos(2y))$ est différentiable et calculer sa différentielle en $(5, \pi)$.

> **Solution:** Les dérivées partielles de f existent et sont continues, donc f est $\mathcal{C}^1$ (et en particulier différentiable). La différentielle de f est en $(x,y) = (5,\pi)$:
>
> $$df_{(x,y)}(h,k) = \begin{pmatrix} 3e^{x+y} & 3e^{x+y} \\ 0 & -2\sin(2y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{5+\pi}(h+k) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto {}^tAA$ est différentiable et calculer sa différentielle en un point $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Solution:** Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
>
> $$f(X+H) = {}^t(X+H)(X+H) = {}^tXX + {}^tHX + {}^tXH + {}^tHH.$$
>
> Prenons $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$.
> On vérifie que la fonction $L : H \mapsto {}^tHX + {}^tXH$ est linéaire. Elle est continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. De plus, ${}^tHH$ est un $o(H)$. En effet, $\frac{\|{}^tHH\|}{\|H\|} \leqslant \frac{\|{}^tH\|\|H\|}{\|H\|} \leqslant \|{}^tH\|$. Et $\|{}^tH\|$ tend vers 0 quand $\|H\| \to 0$ ($H \mapsto {}^tH$ est continue car linéaire). On a bien $f(X+H) = f(X) + L(H) + o(H)$, donc L est la différentielle de f en X.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit un autre élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

> **Solution:** Choisissons une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$. L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ est complet, car de dimension finie. La série de terme général $\|(-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\|$ converge car $\|(-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}\| \leqslant \frac{\|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Dans un espace complet, la convergence absolue d'une série implique qu'elle converge. Donc $\sin(A)$ est bien définie.

2. Montrer que $\mathbb{C}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et qu'il est fermé.

> **Solution:** Soient $x, y \in \mathbb{C}[A]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $x = P(A)$ et $y = Q(A)$. Ainsi $x + \lambda y = P(A) + \lambda Q(A) = (P + \lambda Q)(A)$ est bien dans $\mathbb{C}[A]$. L'espace $\mathbb{C}[A]$ est de dimension finie car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il est fermé.

3. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\sin(A) = P_A(A)$.
Indication : Montrer que $\sin(A) \in \mathbb{C}[A]$.

Solution: Posons pour tout $n \geqslant 0$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Nous avons par définition $P_n(A) \in \mathbb{C}[A]$ et $P_n(A) \to \sin(A)$. Comme $\mathbb{C}[A]$ est fermé, $\sin(A) \in \mathbb{C}[A]$. Ainsi, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_A(A) = \sin(A)$.

4. *(À faire à la fin)* Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = \sin(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Solution: Supposons qu'il existe un tel polynôme P. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)I_n = P(xI_n)$. De plus, on voit facilement que $\sin(xI_n) = \sin(x)I_n$, donc $P(x) = \sin(x)$ pour tout x. C'est absurde car P a alors une infinité de racines.

Exercice 3

1. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\|P\| = \sup_{x \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]} |P(x)|.$$

Solution: Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. L'application $x \mapsto |P(x)|$ est continue, donc l'image du compact $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ par celle-ci est compacte. Ce sup est donc bien défini et est dans $\mathbb{R}_+$.

1. Si $\|P\| = 0$, alors $P(x) = 0$ pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Ainsi P a une infinité de racines et $P = 0$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\| = \sup |\lambda P(x)| = \sup |\lambda||P(x)| = |\lambda| \sup |P(x)| = |\lambda|\|P\|$.
3. Pour $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, nous avons $|P(x) + Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant \|P\| + \|Q\|$. Ainsi $\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

2. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers le polynôme 0. En déduire que l'application Ψ de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P(1)$ est linéaire mais n'est pas continue.[1]

Solution:

1. Pour tout $n \geqslant 0$ et $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $|x^n| \leqslant |x|^n \leqslant (\frac{1}{2})^n$. Donc $\|X^n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\|X^n\| \to 0$ et $X^n \to 0$.
2. $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1)$ et $(\lambda P)(1) = \lambda P(1)$. Donc Ψ est linéaire.
3. $X^n \to 0$, mais $\Psi(X^n) = 1$. Or si Ψ était continue, d'après le critère séquentiel de la continuité, on aurait $\lim \Psi(X^n) = \Psi(\lim X^n) = \Psi(0) = 0$.

[1] $\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle $|\cdot|$

3. Montrer que l'on définit une autre norme sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$N(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Solution: Soient $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$.

1. Si $N(P) = 0$, alors $\sum_{i=0}^{n} |a_i| = 0$ donc $a_i = 0$ pour tout i et $P = 0$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $N(\lambda P) = N(\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} |\lambda a_i| = |\lambda| \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
3. Quitte prendre des b_j ou des a_i nuls, on peut supposer que $n = m$. On a $N(P+Q) = N(\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)X^i = \sum_{i=0}^{n} |a_i + b_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n}(|a_i| + |b_i|) = \sum |a_i| + \sum |b_i| = N(P) + N(Q)$.

4. Montrer que Ψ est Lipschitzienne avec cette nouvelle norme.

Solution:
Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

$$|\Psi(P)| = |P(1)| = |\sum_{i=0}^{n} a_i| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i| = N(P)$$

Comme Ψ est linéaire, $|\Psi(P) - \Psi(Q)| = |\Psi(P-Q)| \leqslant N(P-Q)$, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ et Ψ est bien 1-Lipschitzienne.

5. La norme N est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[X]$? Sont-elles équivalentes sur $\mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à 5 ?

Solution: Elles ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$. En effet sinon on aurait un $k > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $N(X^n) \leq k\|X^n\|$. Ainsi on aurait $N(X^n) \to 0$. Mais ce n'est pas le cas : $N(X^n) = 1$. On peut aussi le voir comme une conséquence des questions 4 et 2.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_5[X]$ est de dimension finie, donc toutes les normes sur $\mathbb{R}_5[X]$ sont équivalentes. En particulier N et $\|\cdot\|$ y sont équivalentes.

6. (*Plus difficile*). Prenons une norme $\|\cdot\|'$ quelconque sur $\mathbb{R}[X]$. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes tels que $\|P_n\|' \to 0$. Montrer que soit $\deg(P_n) \to \infty$, soit on peut extraire une suite $(Q_k)_k$ de $(P_n)_n$ vérifiant pour tout $k \geqslant 1$,

$$\sup_{x \in [-k,k]} |Q_k(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Solution: Supposons que $(\deg(P_n))_n$ ne tende pas vers l'infini. Par définition, il existe un $M > 0$ tel que pour tout $n_0 \geqslant 0$, il existe un $n \geqslant n_0$ tel que $\deg P_n \leqslant M$. On construit alors par récurrence une suite $(L_n)_n$ extraite de (P_n) dont le degré est majoré par M. Mais si $N \geqslant M$ est entier, pour tout $n \geqslant 0$, on a $L_n \in \mathbb{R}_N[X]$. Fixons $k \geqslant 1$. La norme $\|\cdot\|'$ est équivalente à la norme

$N_k(P) = \sup_{x\in[-k,k]} |P(x)|$ sur $\mathbb{R}_N[X]$, qui est bien une norme pour les mêmes raisons qu'en question 1. Ainsi $\lim_n N_k(L_n) = 0$. On peut donc trouver un rang arbitrairement grand $n_k \geqslant 1$ tel que $N_k(L_{n_k}) \leqslant \frac{1}{k}$. On construit ainsi par récurrence la suite $Q_k = L_{n_k}$, en prenant à chaque étape $n_k > n_{k-1}$.