3M360 : Topologie et Calcul Différentiel
Livret d'exercices — Jussieu, 2018

Avec corrigés

Table des matières

I Espaces métriques

I.1 Assimilation du cours

Certains de ces exercices sont en fait des démonstrations de cours qui sont laissées en exercice dans le poly. Il est conseillé de lire le poly, et de faire les exercices correspondants au fur et à mesure de la lecture.

Exercice 1.— Écrire à l'aide de quantificateurs : (1) O est un ouvert de X ; (2) la caractérisation métrique de l'intérieur d'une partie E de X ; (3) la caractérisation métrique de l'adhérence d'une partie E ; (4) la définition de la frontière ; (5) E est dense dans X ; (6) E est d'intérieur vide dans X ; (7) la définition d'une suite convergente.

Corrigé de l'exercice 1.—

1. O est un ouvert de X : $\forall x \in O \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; B(x, \varepsilon) \subset O$.[1]

2. la caractérisation métrique de l'intérieur d'une partie E de X : soit x un point de X, alors
$$x \in \mathrm{Inte}(E) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 \;\; B(x, \varepsilon) \subset E).$$

3. la caractérisation métrique de l'adhérence d'une partie E : soit x un point de X, alors
$$x \in \mathrm{Adhe}(E) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \;\; B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset).$$

4. la définition de la frontière : $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(X \setminus E)$. On a aussi, si x est un point de X, alors
$$x \in \mathrm{Fr}(E) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \;\; (\; B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset \;)).$$

5. E est dense dans X : par définition, ceci signifie que l'adhérence de E égale X, autrement dit que tout point de X est dans l'adhérence de E. En quantificateurs, ceci s'écrit :
$$\forall x \in X \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset.$$
(Noter qu'après le "$\forall x \in X$", on a juste recopié la caractérisation de l'adhérence).

Noter que l'autre inclusion est toujours vérifiée, l'adhérence étant par définition une partie de X.

6. E est d'intérieur vide dans X : on écrit qu'aucun point n'est dans l'intérieur de E ; autrement dit que tout point doit vérifier la négation de la caractérisation de l'intérieur :
$$\forall x \in X \;\; \mathrm{NON}(\exists \varepsilon > 0 \;\; B(x, \varepsilon) \subset E)$$
où on écrit NON(...) pour la négation de la propriété qui suit le NON. On doit bien sûr simplifier ceci (sous cette forme, on aura du mal à l'utiliser dans un raisonnement !) Nous devons nier l'existence d'un ε strictement positif vérifiant une certaine propriété. Si un tel ε n'existe pas, c'est que tout ε strictement positif vérifie la propriété contraire ; en symboles :
$$(\; \mathrm{NON}(\exists \varepsilon > 0 \;\; ...) \;) \Leftrightarrow (\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \mathrm{NON}(...) \;)$$

1. Remarquer qu'on pourrait encore expliciter l'inclusion en utilisant sa définition : $A \subset B$ signifie que tout point de A est dans B. On obtient alors que l'ensemble O est ouvert si et seulement si $\forall x \in O \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall y \in B(x, \varepsilon), y \in O$.

En reprenant la ligne du dessus, on obtient donc

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ B(x, \varepsilon) \not\subset E)$$

On peut encore simplifier : ne pas être inclus dans E, c'est contenir au moins un point qui n'est pas dans E, autrement dit c'est rencontrer le complémentaire de E. On obtient finalement que E est d'intérieur vide si et seulement si

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset.)$$

7. La suite (u_n) converge vers le point ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

Exercice 2.— Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X. *(Indication : voir le poly).*

Corrigé de l'exercice 2.— Soit $B = B(x, r)$ une boule ouverte, et y un point de B. Posons

$$r' = r - d(x, y).$$

C'est en faisant un dessin qu'on voit que ce choix de rayon va marcher.

Puisque y appartient à la boule $B(x, r)$, on a $d(x, y) < r$, ce qui montre que r' est un nombre strictement positif. Il reste à voir que la boule $B' = B(y, r')$ est incluse dans B. Pour voir ceci, prenons un point z de B' : on a donc $d(y, z) < r'$. On évalue alors

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r' = r,$$

ce qui montre bien que z appartient à la boule $B = B(x, r)$.

Exercice 3.— Dans un espace métrique, montrer que l'intersection d'un nombre fini de parties ouvertes est une partie ouverte.

Corrigé de l'exercice 3.— Soient $O_1, \ldots O_k$ des ouverts, montrons que l'intersection

$$\bigcap_{i=1,\ldots,k} O_i$$

est un ouvert. Soit x un point de l'intersection. Soit $i \in \{1, ..., k\}$; par définition de l'intersection, x appartient à O_i ; puisque O_i est ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset O_i$.

Soit

$$\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,k} (\varepsilon_i).$$

Qu'est-ce qui ne marche pas si on essaie de faire la même preuve pour une intersection infinie d'ouverts ?

C'est un nombre strictement positif, vérifions que la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans l'intersection. Pour chaque i entre 1 et k, on a $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ et par conséquent

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset O_i.$$

Finalement

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1,\dots,k} O_i$$

comme voulu.

Exercice 4.— (caractérisation métrique de l'intérieur)

Soit E une partie d'un espace métrique X, montrer l'équivalence :

$$x \in \mathrm{Inte}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \; B(x, \varepsilon) \subset E.$$

Corrigé de l'exercice 4.— Par définition, $\mathrm{Inte}(E)$ est un ouvert inclus dans E : par définition d'un ouvert, si x est un point de $\mathrm{Inte}(E)$, il existe un boule $B(x, r)$ qui est incluse dans $\mathrm{Inte}(E)$, donc dans E. Ceci montre l'implication directe.

Réciproquement, soit x un point de X tel qu'il existe une boule $B(x, r)$ incluse dans E. Puisque la boule $B(x, r)$ est un ouvert inclus dans E, elle est incluse dans $\mathrm{Inte}(E)$, qui est la réunion de tous les ouverts inclus dans E. En particulier x est dans $\mathrm{Inte}(E)$.

Exercice 5.— Donner un exemple, dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'une famille de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas ouverte.

Corrigé de l'exercice 5.— Soit x un point du plan, et considérons toute les boules ouvertes centrées au point x. L'intersection de toutes ces boules est réduite au singleton $\{x\}$. Ce singleton n'est pas un ouvert, puisqu'il ne contient aucune boule ouverte centrée en x.

Exercice 6.— Montrer que toute application lipschitzienne est continue.

Corrigé de l'exercice 6.— Réponse succinte : il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de la continuité.

Réponse détaillée. Soit $f : X \to Y$ une application k-lipschitzienne entre deux espaces métriques. Il s'agit de montrer que f est continue. Considérons donc un point quelconque x de X en lequel nous voulons vérifier que f est continue, et prenons donc un $\varepsilon > 0$. Nous posons alors [2]

$$\delta = \frac{\varepsilon}{k}.$$

2. Lorsqu'on cherche l'exercice, on peut dans un premier temps laisser cette définition en suspens (au brouillon, on écrit par exemple $\delta =??$), et essayer d'écrire la suite de la preuve ; on continue sans ennui jusqu'à la majoration de $d(f(x), f(x'))$ par $k\delta$; comme on aimerait pouvoir majorer encore ceci par ε, on voit alors quelle valeur de δ nous permet de conclure.

Vérifions que ce δ convient. Pour ceci, nous considérons un point x' de X tel que

$$d(x, x') < \delta.$$

On a alors

$$d(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') < k\delta = \varepsilon,$$

ce que l'on voulait.

Exercice 7.— Montrer que l'union d'un nombre fini de parties fermées et une partie fermée. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.

Corrigé de l'exercice 7.— On peut traiter cet exercice par "passage au complémentaire", qui transforme les propriétés portant sur des fermés en propriétés portant sur des ouverts. Par définition, un point x est dans le complémentaire d'un ensemble F s'il n'est pas dans F. Le passage au complémentaire transforme union en intersection et réciproquement : en effet, par exemple,

$$\begin{array}{rcl} x \in X \setminus \bigcup_{i \in I} F_i & \Leftrightarrow & x \notin \bigcup_{i \in I} F_i \\ & \Leftrightarrow & NON(x \in \bigcup_{i \in I} F_i) \\ & \Leftrightarrow & NON(\exists i \in I, x \in F_i) \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in I, x \notin F_i \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in I, x \in X \setminus F_i \\ & \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{i \in I} X \setminus F_i. \end{array}$$

Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille finie de fermée d'un espace métrique X, on a donc

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus F_i$$

Par définition des fermés, les ensembles $X \setminus F_i$ sont des ouverts. On a vu en cours que l'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert, donc l'ensemble ci-dessus est ouvert, par conséquent son complémentaire est fermé, c'est-à-dire que l'union des F_i est un fermé.

Le raisonnement pour une intersection quelconque de fermés est tout à fait analogue.

Exercice 8.— (caractérisation métrique de l'adhérence) Montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de E si et seulement si toute boule ouverte centrée en x rencontre E.

Corrigé de l'exercice 8.— Montrons d'abord le sens réciproque. Par contraposition, il s'agit de prendre un point qui n'est pas dans l'adhérence, et de montrer qu'il existe une boule ouverte centrée en x qui ne rencontre pas E. Supposons qu'un point x n'est pas dans Adhe(E). L'adhérence de E étant un fermé, son complémentaire est un ouvert : il existe donc une boule $B(x, r)$ incluse dans le complémentaire, ce qui signifie qu'elle est disjointe de $\mathrm{Adhe}(E)$, donc aussi de E puisque $\mathrm{Adhe}(E)$ contient E.

Montrons le sens direct. On raisonne encore par contraposition : on suppose qu'il existe une boule ouverte $B(x,r)$ qui est disjointe de E, et on veut montrer que x n'est pas dans $\mathrm{Adhe}(E)$. L'ensemble $X \setminus B(x,r)$ est un fermé qui contient E. Or $\mathrm{Adhe}(E)$ est inclus dans tous les fermés contenant E, donc $\mathrm{Adhe}(E)$ est inclus dans $X \setminus B(x,r)$. En particulier $\mathrm{Adhe}(E)$ ne contient pas x.

Exercice 9.— (cours) Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de Y est une partie fermée de X.

Corrigé de l'exercice 9.— Ici encore, on peut se ramener aux propriétés des ouverts par passage au complémentaire (voir l'appendice du poly si vous n'êtes pas familier avec l'image réciproque d'un ensemble par une application).

Supposons que f est continue. Alors l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Considérons alors un fermé F de Y. L'ensemble $Y \setminus F$ est un ouvert de Y, donc $f^{-1}(Y \setminus F)$ est un ouvert de X, or

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

et son complémentaire, qui est donc $f^{-1}(F)$, est un fermé de X. Ceci montre le sens directe de l'équivalence. Le sens réciproque se montre de la même manière : en partant de la propriété sur les fermés, en déduire la propriété sur les ouverts qui caractérise la continuité de f.

Exercice 10.—

1. Donner une caractérisation métrique de la frontière de E.

2. Montrer que $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X \setminus E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$.

4. En déduire une autre expression pour la frontière de E.

Corrigé de l'exercice 10.— On rappelle que la frontière est définie par

$$\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(X \setminus E).$$

1. On utilise simplement la caractérisation métrique de l'adhérence, qu'on applique à E et à son complémentaire : un point x de X est dans $\mathrm{Fr}(E)$ si et seulement si toute boule $B(x,r)$ centrée en x rencontre à la fois E et son complémentaire.

2. On a, par définition,

$$\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = \mathrm{Adhe}(X \setminus E) \cap \mathrm{Adhe}(X \setminus (X \setminus E)).$$

Sachant que le complémentaire du complémentaire de E est E, cette formule redonne bien l'adhérence de E.

3. L'égalité $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$ est encore un aspect de a dualité ouverts/fermés. L'adhérence d'un ensemble est l'intersection des fermés le contenant, l'intérieur d'un ensemble est l'union des ouverts qu'il contient. Si F est un fermé contenant $X \setminus E$, alors $X \setminus F$ est un ouvert contenu dans E, et réciproquement : le complémentaire de tout ouvert contenu dans E est un fermé contenant le complémentaire de E. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Adhe}(X \setminus E) &= \bigcap\{F \ \mid F \text{ fermé contenant } E\} \\ &= \bigcap\{X \setminus O \ \mid O \text{ ouvert contenu dans } E\} \\ &= X \setminus \bigcup\{O \ \mid O \text{ ouvert contenu dans } E\} \\ &= X \setminus \mathrm{Inte}(E).\end{aligned}$$

On a utilisé que le complémentaire de l'union est égal à l'intersection des complémentaires, ce qui est prouvé dans l'exercice 7.

4. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(E) &= \mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(X \setminus E) \\ &= \mathrm{Adhe}(E) \cap (X \setminus \mathrm{Inte}(E)) \\ &= \mathrm{Adhe}(E) \setminus \mathrm{Inte}(E).\end{aligned}$$

La frontière d'un ensemble est donc égal à son adhérence privée de son intérieur.

Exercice 11.— (unicité de la limite) Montrer que si une suite (x_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Corrigé de l'exercice 11.— Considérons une suite (x_n) qui converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 dans un espace métrique X. On raisonne par l'absurde, en supposant que $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons alors

Ici, la propriété de convergence est *en hypothèse* ; pour l'utiliser efficacement, il faut choisir une valeur de ε, toute la difficulté est de décider pour quel ε on l'applique.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} d(\ell_1, \ell_2).$$

L'hypothèse de convergence vers ℓ_1 nous fournit un entier n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1 \quad d(x_n, \ell_1) < \varepsilon.$$

De même, on obtient un entier n_2 tel que

$$\forall n \geq n_2 \quad d(x_n, \ell_2) < \varepsilon.$$

Considérons un entier n plus grand que n_1 et n_2, de façon à ce qu'on ait à la fois

$$d(x_n, \ell_1) < \varepsilon \text{ et } d(x_n, \ell_2) < \varepsilon.$$

Par inégalité traingulaire, on en déduit que

$$d(\ell_1, \ell_2) < 2\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2)$$

ce qui est absurde.

Exercice 12.— Donner une preuve séquentielle de la continuité de la composée de deux applications continues.

Corrigé de l'exercice 12.— Fixons les notations : on considère une application $f : X \to Y$ et une application $g : Y \to Z$, où X, Y, Z sont trois espaces métriques ; on prend un point x de X, le point $y = f(x)$ de Y, et on suppose que l'application f est continue au point x, et que l'application g est continue au point y.

On veut montrer que la composée $g \circ f : X \to Z$ est continue au point x. Pour ceci, on va utiliser le critère séquentiel de continuité : on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergeant vers le point x, et il s'agit de montrer que la suite image $(g(f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $z = g(f(x))$.

D'après le critère séquentiel de continuité appliquée à l'application f, la suite image $f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans Y vers $y = f(x)$. On applique à nouveau ce crière, cette fois-ci à l'application g et à la suite $f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, et on obtient que la suite $(g(f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $z = g(y)$, comme voulu.

On utilise ici le sens directe du critère...

... Et on utilise le sens réciproque du critère pour conclure à la continuité de $g \circ f$.

Exercice 13.— Dans le plan $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, on considère le sous-espace métrique $Y = (]0,1]^2, d_2)$.

1. Donner un exemple de boule de Y qui n'est pas une boule de X.

2. Donner un exemple de partie ouverte de Y qui n'est pas une partie ouverte de X.

3. On considère la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$. Est-elle convergente ? justifier votre réponse par une preuve.

Corrigé de l'exercice 13.—

1. Par définition, pour tout point P de Yet tout nombre $r > 0$, la boule $B_Y(P, r)$ de Y est

$$B_X(P, r) \cap Y.$$

Par exemple pour le coin supérieur droit du carré, $P = (1, 1)$, et $r = \frac{1}{2}$, la boule $B_X(P, r)$ est un disque usuel, mais la boule $B_Y(P, r)$ est son intersection avec Y, c'est-à-dire le quart de disque

$$\{(x, y) | d((x, y), (1, 1)) < \frac{1}{2} \text{ et } x \leq 1 \text{ et } y \leq 1\}.$$

2. On peut reprendre l'exemple précédent : la boule $B_Y(P, r)$ est ouverte dans Y (puisque c'est une boule ouverte de Y), mais elle n'est pas ouverte dans X : en effet, le point $P = (1, 1)$, par exemple, contredit le critère d'ouverture, puisque tout boule centrée en ce point "déborde" du qart de disque $B_Y(P, r)$.

3. Considérons la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$. Vue comme une suite de $X = \mathbb{R}^2$, cette suite est bien sûr convergente, elle tend vers le point $(0, 0)$. Mais ce point n'appartient pas à Y : vue comme une suite de points de Y, elle n'est donc pas convergente. Détaillons ce point, en raisonnant par l'absurde. Supposons que cette suite admette une limite ℓ dans Y. On a alors la suite des distances dans Y,

$$d_Y((1/n, 1/n), \ell),$$

qui tend vers 0. Mais par définition, la distance dans Y coincide avec la distance dans X : donc cette suite, vue comme une suite de X, converge également vers le point ℓ. Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell = (0,0)$. On aboutit donc à ce que le point $(0,0)$ appartient à Y, ce qui est absurde.

Exercice 14.— Soit Y une partie d'un espace métrique X. Soit A une partie de Y.

1. On suppose que Y est ouverte dans X. Montrer que A est ouverte dans le sous espace métrique Y si et seulement si A est ouverte dans X.

2. On suppose que Y est fermée dans X. Montrer que A est fermée dans Y si et seulement si A est fermée dans X.

Corrigé de l'exercice 14.— Rappelons que d'après le cours, les ouverts de Y sont les intersections des ouverts de X avec Y. Notons (*) cette propriété.

1. Supposons que Y est ouverte dans X.

Si A est ouverte dans Y, d'après la propriété (*) il existe O ouvert de X tel que $A = O \cap Y$. L'ensemble A est un ouvert de X, puisque c'est l'intersection de deux ouverts de X.

Réciproquement, si A est ouverte dans X, alors $A = A \cap Y$ est l'intersection d'un ouvert de X avec Y, c'est donc un ouvert de Y d'après la propriété (*).

Avant de faire l'hypothèse que Y est fermé dans X, commençons par montrer la propriété générale analogue de (*), valable pour toute partie Yde X : (**) les fermés de Y sont les intersections des fermés de X avec Y. Pour ceci, on utilise la formule ensembliste :

Faire un dessin, puis démontrer cette formule.

$$(X \setminus P) \cap Y = Y \setminus (Y \cap P) \qquad (***).$$

Si F est un fermé de X, alors (par définition des fermés de X) $X \setminus F$ est un ouvert de X ; d'après (*) $(X \setminus F) \cap Y$ est un ouvert de Y ; son complémentaire dans Y est donc un fermé de Y (par définition des fermés de Y) ; or d'après la formule ci-dessus appliquée à $P = F$, ce complémentaire est $Y \cap F$, qui est donc fermé.

Réciproquement, si F' est une partie fermé de Y, alors $Y \setminus F'$ est un ouvert de Y, donc il existe un ouvert O de X tel que $Y \setminus F' = Y \cap O$. L'ensemble $F = X \setminus O$ est un fermé de X, et on a

$$Y \cap F = Y \cap (X \setminus O) = Y \setminus (Y \cap O) = Y \setminus (Y \setminus F') = F'$$

où la deuxième égalité est (***) appliquée à $P = O$. Ceci montre que F' est l'intersection d'un fermé de X avec Y, comme voulu.

2. La réponse à la deuxième question est maintenant entière analogue à la première, en remplaçant partout le mot "ouvert" par "fermé", et la propriété (*) par (**).

Exercice 15.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert,

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé,

3. l'intérieur de l'image par Φ d'un ensemble E est égal à l'image de l'intérieur de E,

4. l'adhérence de l'image est égale à l'image de l'adhérence,

---

Corrigé de l'exercice 15.— Soit O une partie de X. Puisque Φ est une bijection, toutes les opérations ensemblistes "marchent bien". En particulier, on a $\Phi^{-1}(\Phi(O)) = O$. L'image de l'union est égale à l'union des images, *etc.*.

Noter que cette égalité est fausse en général (voir l'appendice du poly, exercice 114).

1. Puisque Φ est continu, si $\Phi(O)$ est un ouvert de Y, alors le critère topologique de continuité dit que $\Phi^{-1}(\Phi(O)) = O$ est un ouvert de X. Réciproquement, si O est un ouvert de Y, alors on peut appliquer le critère de continuité à l'application continue Φ^{-1} : on obtient que l'image réciproque de O par cette application est un ouvert de Y, et il s'agit de l'ensemble

$$\left(\phi^{-1}\right)^{-1}(O) = \Phi(O).$$

L'image réciproque d'un ensemble, par l'application réciproque, est égale à l'image directe.

2. On applique exactement le même le raisonnement pour les fermés, en utilisant le résultat de l'exercice 9.

3. Puisque Φ établit une correspondance entre les ouverts de X et ceux de Y, les ouverts inclus dans $\Phi(E)$ sont exactement les images par Φ des ouverts inclus dans E. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inte}(\Phi(E)) &= \bigcup\{O' | O' \text{ ouvert inclus dans } \Phi(E)\} \\
&= \bigcup\{\Phi(O) | O \text{ ouvert inclus dans } E\} \\
&= \Phi\left(\bigcup\{O | O \text{ ouvert inclus dans } E\}\right) \\
&= \Phi\left(\mathrm{Inte}(E)\right).
\end{aligned}$$

4. Le raisonnement est tout à fait analogue pour l'adhérence : **rédigez-le** !

I.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 16.—

1. Soit O un ouvert du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(\mathrm{Adhe}(O)) = O$?

2. Soient E, F deux parties du plan. A-t-on nécessairement $\mathrm{Inte}(E \cup F) = \mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F)$?

3. **a.** Donner un exemple de partie A du plan qui est égale à sa frontière. **b.** Donner un exemple de partie A du plan qui est contenue strictement dans sa frontière.

4. Une partie du plan est-elle toujours ouverte ou fermée ?

5. Donner un exemple de partie X du plan contenant un point x avec la propriété suivante : dans le sous-espace métrique X, l'adhérence de la boule ouverte $B_1(x)$ n'est pas la boule fermée $B_1^f(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq 1\}$. *Indication : attention,* *se placer dans le sous-espace métrique revient à "oublier" tous les autres points du plan ; ceci change considérablement la forme des boules !*

Corrigé de l'exercice 16.—

1. Prendre l'adhérence revient à ajouter la frontière, prendre l'intérieur revient à enlever la frontière. Imaginons que O est un disque ouvert, par exemple le disque unité. Alors son adhérence est le disque fermé, et l'intérieur de ce dernier est le disque ouvert, soit à nouveau O. Par contre, prenons pour ouvert O' le disque O privé d'un rayon D, par exemple

$$O' = \{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(t, 0)|t \in [0, 1]\}.$$

La frontière de O' est constituée du cercle unité et du rayon D, et l'adhérence de O' est donc à nouveau le disque unité fermé. Son intérieur est le disque ouvert O, qui est plus grand que O' : les points du rayon D se retrouve à l'intérieur de l'adhérence. La réponse est donc "NON".

Pouvez vous trouver un exemple plus simple, avec un ouvert O "le plus gros possible" ?

2. Ici, c'est un peu le même problème : un point qui est à la fois sur la frontière de E et sur celle de F peut se retrouver à l'intérieur de leur réunion, bien qu'il ne soit ni dans l'intérieur de E ni dans celle de F.

Prenons par exemple pour E le demi-plan fermé supérieur,

$$E = \{(x, y)|y \geq 0\}.$$

A ce stade, quel est l'intérieur de E ? Pouvez vous trouver un ensemble F tel que $E \cup F$ est le plan entier, mais $\mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F)$ n'est pas la plan entier ? Conclusion ?

On prend pour F le complémentaire de E, c'est-à-dire le demi-plan inférieur ouvert,

$$E = \{(x, y)|y < 0\}.$$

L'intérieur de E est le demi-plan supérieur ouvert, et donc

$$\mathrm{Inte}(E) \cup \mathrm{Inte}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)|y = 0$$

est le plan privé de l'axe des x. Par contre

$$\mathrm{Inte}(E \cup F) = \mathrm{Inte}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2.$$

On n'a donc pas égalité.

3. a. La propriété $A = \mathrm{Fr}(A)$ équivaut à dire que A est un fermé d'interieur vide. (Rapidement : (1) $\mathrm{Fr}(A)$ est défini comme l'intersection de deux adhérences, c'est donc un fermé ; (2) la frontière est disjointe de l'intérieur ; (3) si A est un fermé d'intérieur vide, toute boule centrée en un point de A rencontre le complémentaire de A, ce qui montre que A est inclus dans sa frontière). On peut prendre par exemple un singleton, ou bien un segment fermé comme $\{(t, 0)|t \in [0, 1]\}$, ou bien le cercle unité, ou une droite. **b.** Cette question n'est pas très compatible avec l'idée intuitive de frontière comme bord d'un pays ! Déjà, un tel ensemble doit être d'intérieur vide . Cette fois-ci, l'ensemble A doit encore être d'intérieur vide (sans quoi il ne serait pas inclus dans sa frontière, qui, elle, est d'intérieur vide). Mais il ne doit pas être fermé. En fait, c'est exactement ça : on cherche un ensemble d'intérieur vide qui ne soit pas fermé. On peut prendre par exemple l'un des exemple précédent privé d'un nombre fini de points. Par exemple, si A est l'axe des abscisses privé de l'origine,

Pourquoi un tel ensemble doit-il être d'intérieur vide ?

$$A = \{(x, y) | y = 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

alors $\mathrm{Fr}(A) = \{(x, y)|y = 0\}$ contient strictement A.

4. Non, pas du tout ! L'ensemble A de la question précédente donne un contre-exemple. Ou bien le disque unité auquel on ajoute un nombre fini de points.

5. Prenons pour X un ensemble constitué de deux points à distance exactement 1, par exemple

$$X = \{A, B\} \text{ avec } A = (0, 0), B = (1, 0).$$

On se place dans le sous-espace métrique X : ceci revient à dire **Que vaut la boule ouverte $B_1(A)$? Que vaut la boule ouverte $B_1(B)$? En déduire que la boule $B_1(A)$ est un ensemble fermé dans X, et en particulier qu'elle est égale à son adhérence. Mais que vaut la boule fermée $B_1^f(A)$?**

Exercice 17 (à rédiger pour le devoir numéro 1).— (Examen 2017 deuxième session) Soient (E, d) un espace métrique et A, B deux parties denses disjointes dans E. Montrer que $\mathrm{Inte}(A) = \mathrm{Inte}(B) = \emptyset$.

Corrigé de l'exercice 17.— On démontre la propriété pour A, la preuve pour B est bien sûr identique.

Supposons par l'absurde que l'intérieur de A n'est pas vide, et considérons alors l'un de ses éléments, que nous notons x. Par caractérisation métrique de l'intérieur, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon) \subset A.$$

Puisque A et B sont disjointes, on a notamment que

$$B(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset.$$

D'après la caractérisation métrique de l'adhérence, on en déduit que le point x n'appartient pas à l'adhérence de B, ce qui contredit la densité de B dans E.

Exercice 18 (à rédiger pour le devoir numéro 1).— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}.$$

1. Montrer que A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, et que B est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

2. Comparer, au sens de l'inclusion, les ensembles A et $\mathrm{Inte}(B)$ (autrement dit, montrer que l'un des deux est inclus dans l'autre). Donner un contre-exemple pour l'inclusion qui est fausse.

3. Mêmes questions pour les ensembles B et $\mathrm{Adhe}(A)$.

Corrigé de l'exercice 18.—

1. Un réel x est dans A si et seulement son image par f est dans l'ensemble $]0, +\infty[$: par définition de l'image réciproque, A peut aussi s'écrire

$$A = f^{-1}(]0, +\infty[).$$

Or l'intervalle $]0, +\infty[$ est unouvert de $\mathbb{R}$, et puisque f est continue, on en déduit que A est un ouvert de $\mathbb{R}$ (image réciproque d'un ouvert par une application continue). La même démarche, utilisant la caractérisation des applications continues à l'aide des fermés, permet de voir que B est fermé (si on veut se ramener aux ouverts on peut alternativement commencer par montrer que le complémentaire de B est $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$).

2. On a clairement $A \subset B$; or A est un ouvert, et $\mathrm{Inte}(B)$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans B : par conséquent il contient A.

La fonction nulle donne un contre-exemple à l'autre inclusion (**vérifiez !**).

3. On a $A \subset B$, or B est un fermé et $\mathrm{Adhe}(A)$ est l'intersection de tous les fermés contenant A : donc $\mathrm{Adhe}(A) \subset B$. La fonction nulle donne encore un contre-exemple à l'autre inclusion.

Exercice 19.— **1.** Trouver une fonction continue $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques X et Y et un ouvert $O \subseteq X$ tels que $f(O) \subseteq Y$ ne soit pas ouvert. **2.** Même question avec un fermé.

Corrigé de l'exercice 19.—

1. Il suffit de prendre par exemple $X = Y = \mathbb{R}$, et pour f une fonction constante. Soit O n'importe quel ouvert non vide de $\mathbb{R}$, par exemple $\mathbb{R}$ tout entier. **Que vaut $f(O)$? Est-ce un ouvert de $\mathbb{R}$?** **2.** Prenons à nouveau $X = Y = \mathbb{R}$, mais cette fois-ci prenons par exemple pour f la fonction exponentielle. L'ensemble $F = \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, **que vaut son image $f(F)$? Pourquoi n'est-elle pas fermée dans $\mathbb{R}$?**

Cet exercice montre que l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est en général pas un ouvert, contrairement à l'image réciproque.

Exercice 20.—

1. Montrer que les solutions du système d'inéquations $x + 2y > 0$ et $y^2 > x$ forment un ouvert du plan.

2. Montrer que tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^N$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$. Que pensez-vous de l'intérieur de F ?

Corrigé de l'exercice 20.—

1. On admet que les fonctions

$$f_{1:}(x,y) \mapsto x+2y, \qquad \text{et } f_2 : (x,y) \mapsto y^2 - x$$

définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, sont continues (ce sont des fonctions polynômes, et c'est certainement un résultat du cours de L2 sur les fonctions de plusieurs variables !). L'ensemble des points (x,y) vérifiant l'inéquation $x+2y > 0$ est alors l'image réciproque de $]0,+\infty[$ par f_1 :

$$E_1 \stackrel{def}{=} \{(x,y) | x+2y > 0\} = f_1^{-1}(]0,+\infty[).$$

L'intervalle $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc E_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Montrer, en utilisant la même méthode, que l'ensemble $E_2 \stackrel{def}{=} \{(x,y)|y^2 > x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

L'ensemble des points (x,y) satisfaisant simultanément les deux inéquations s'écrit alors $E_1 \cap E_2$, c'est l'intersection de deux ouverts du plan, c'est donc un ouvert du plan.

2. Sois d la dimension de F. Alors F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues et $n-d$ équations. [3] Chaque équation est du type

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

et l'ensemble de ses solutions s'écrit donc $f_1^{-1}(0)$, où f_1 est la forme linéaire définie par $f_1(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Cette forme linéaire est continue, donc l'ensemble H_1 des solutions de cette équations est fermé (c'est ce qu'on appelle un hyperplan). En faisant de même avec chacun des $n-d$ équations, on écrit F comme l'intersection de $n-d$ ensembles fermés $F_1,\dots,F_{n-d}$, et on voit que F est fermé dans $\mathbb{R}^N$.

Exercice 21 (à rédiger pour le devoir numéro 1).— Montrer que si Y est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux éléments a,b **dans** Y tels que $Y \subset [a,b]$. *Indication : on pourra utiliser l'axiome de la borne supérieure.*

3. Voir un cours d'algèbre linéaire. Rapidement : avec le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base $(e_1,\dots,e_d)$ de F, que l'on complète en une base $(e_1,\dots,e_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Notons p_i l'application qui associe à un point de $\mathbb{R}^N$ sa $i$ème coordonnée dans cette base. Alors p_i est une forme linéaire, on a

$$F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_d) = \{(x_1,\dots,x_n) | p_{d+1}((x_1,\dots,x_n) = 0,\dots,p_N((x_1,\dots,x_n)) = 0\}.$$

Ceci nous donne un système de $N-d$ équations dont F est l'ensemble des solutions.

Corrigé de l'exercice 21.— Nous allons montrer l'existence d'un nombre $b \in Y$ tel que $Y \subset]-\infty, b]$.Un argument symétrique montre l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y \subset [a, +\infty[$, et on en déduit la propriété.

La droite réelle vérifie l'axiome de la borne supérieure : toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Il s'agit ici de voir que, si la partie de plus est fermée, alors elle contient sa borne supérieure. La fermeture est bien sûr essentielle (penser à un intervalle ouvert).

Notons donc b la borne supérieure de Y dont l'existence est donnée par cet axiome, et montrons que b appartient à Y. Par définition, b a deux propriétés : (1) c'est un majorant, autrement dit

$$\forall y \in Y, y \leq b \ ;$$

et (2) c'est le plus petit des majorants : autrement dit, aucun nombre plus petit n'est un majorant, ce qui s'écrit de façon condensée

Chaque nombre strictement plus petit que b s'écrit $b - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$; “ne pas être un majorant” signifie qu'on peut trouver dans Y un nombre plus grand.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in Y \quad y > b - \varepsilon.$$

Soit n un entier positif, appliquons la propriété (2) à $\varepsilon = \frac{1}{n}$: on obtient un nombre y_n dans Y tel que $y_n > b - \frac{1}{n}$. Puisque b est un majorant de Y, on a aussi $y_n \leq b$. On a ainsi construit une suite $(y_n)_{n>0}$ dans Y telle que, pour tout $n > 0$

$$b - \frac{1}{n} < y_n \leq b$$

et cette suite converge donc vers b. Puisque Y est fermé, on en déduit que b appartient à Y.

Ceci est un exemple typique de l'utilisation d'une propriété commençant par “$\forall \varepsilon > 0$” pour construire une suite.

Une autre façon de rédiger, sans passer par les suites, serait d'utiliser les deux propriétés pour montrer que toute boule centrée en b rencontre Y. On en déduit que b est dans l'adhérence de Y, mais la partie Y est égale à son adhérence puisqu'elle est fermée, donc b est dans Y.

Exercice 22.— (Continuité par morceaux)

Soient (X, d) un espace métrique, et F_1, F_2 deux fermés de X qui recouvrent X (c'est-à-dire que $F_1 \cup F_2 = X$). Soient Y un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ une application.

1. On suppose que les restrictions $f_{|F_1} : F_1 \to Y$ et $f_{|F_2} : F_2 \to Y$ sont continues. Montrer que f est continue. *Aide : pour montrer la continuité en un point x de X, on pourra raisonner différemment selon que x appartient ou non à l'intersection des deux fermés.*

2. Montrer que cette propriété devient fausse si l'on ne suppose pas que F_1 et F_2 sont fermés.

3. Peut-on généraliser l'exercice lorsque X est réunion d'une famille dénombrable de parties fermés, la restriction de f à chacun de ces fermés étant continue ?

4. Dans le cadre de l'exercice, expliquer pourquoi ce qui suit n'a pas de sens :
Soit $x_0 \in F_1 \cap F_2$. Pour x appartenant à F_1, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Corrigé de l'exercice 22.—

1. Soit x un point de X.

Supposons d'abord que x appartient à $F_1 \cap F_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la restriction de f à F_1 est continue, par définition de la continuité, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

On va montrer une continuité en vérifiant la définition : le raisonnement commence donc par prendre un $\varepsilon > 0$.

$$(1) \forall y \in F_1, d(x, y) < \alpha_1 \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

De même, la continuité de la retsriction de f à F_2 nous fournit un $\alpha_2 > 0$ tel que

$$(2) \forall y \in F_2, d(x, y) < \alpha_2 \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

On pose maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. C'est un nombre strictement positif. Montrons qu'il satisfait la définition de la continuité de f en x. Soit y un point de X tel que $d(x, y) < \alpha$. Puisque F_1 et F_2 recouvrent X, et y doit être dans F_1 ou F_2. S'il est dans F_1, alors puisque $\alpha \leq \alpha_1$ on a aussi $d(x, y) < \alpha_1$, et on conclut grâce à (1) que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$. S'il est dans F_2, on conclut de même à l'aide de (2).

La définition de la continuité s'écrit "$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall y \in X$...". A ce stade, on a pris un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on a trouvé un $\alpha > 0$, il reste donc à prendre un y est à vérifier la fin de la définition.

Supposons maintenant que x est dans F_1, mais pas dans F_2. Comme le complémentaire de F_2 est un ouvert, par définition d'un ouvert il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ est disjointe de F_2. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de la restriction de f à F_1 nous fournit, comme dans le premier cas, un $\alpha_1 > 0$ tel que la propriété (1) ci-dessus est vérifiée. Soit alors $\alpha = \min(r, \alpha_1)$. Prenons un y dans X tel que $d(x, y) < \alpha$. Puisque $\alpha \leq r$, y appartient à la boule $B(x, r)$, qui est disjointe de F_2 : donc y appartient à F_1. Puisque $\alpha \leq \alpha_1$, on a $d(x, y) < \alpha_1$, et la propriété (1) nous dit que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, comme voulu. Nous avons montré que f est continue au point x.

Il reste à étudier le cas où x est dans F_2 mais pas dans F_1. Ce cas se déduit du cas précédent en échangeant les rôles de F_1 et F_2.

Tout ça est très bien et correspond à la démarche suggérée par l'énoncé... mais il y a un argument plus court (mais plus abstrait). Prenons le critère de continuité par image réciproque de fermé. On considère un fermé F de Y, il s'agit de voir que $f^{-1}(F)$ est un fermé de X. Or

$$f^{-1}(F) = f_{|F_1}^{-1}(F) \cup f_{|F_2}^{-1}(F).$$

(**vérifier**). Puisque $f_{|F_1}$ est continue, $f_{|F_1}^{-1}(F)$ est un fermé de F_1. Puisque F_1 est un fermé de X, les fermés de F_1 sont les fermés de X inclus dans F_1, et $f_{|F_1}^{-1}(F)$ est fermé dans X. De même, $f_{|F_2}^{-1}(F)$ est un fermé de X. La réunion de deux fermés de X est un fermé de X, donc $f^{-1}(F)$ est un fermé de X. Ceci montre que f est continue.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 pour les $x < 0$ et 1 pour les $x \geq 0$ n'est pas continue en 0. Pourtant, sa restriction à $F_1 =]-\infty, 0[$ est continue (c'est une fonction constante !) ; et il en est de même de sa restriction à $F_2 = [0, +\infty[$, et on a bien $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$. Bien sûr, F_1 n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 23.— Soient (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) trois espaces métriques ; on considère une application $f : Z \to X \times Y$, où l'espace d'érrivée est muni de la distance d_1 (ou d'une distance équivalente). On note $p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ les *projections*, c'est-à-dire les applications définies par $p_X(x,y) = x$ et $p_Y(x,y) = y$. **1.** Montrer que p_X et p_Y sont continues. **2.** Montrer que f est continue si et seulement si les deux applications $f_X := p_X \circ f$ et $f_Y := p_Y \circ f$ sont continues.

Corrigé de l'exercice 23.— Commençons pas remarquer qu'avec les notations de l'énoncé, si $M = (x,y)$ est un point de $X \times Y$, alors $P = (p_X(M), p_Y(M))$; en particulier, si z est un point de Z, alors $f(z) = (f_X(z), f_Y(z))$. D'autre part, pour toute partie A de X et tout point M de $X \times Y$, on a $p_X(M) \in A \Leftrightarrow M \in A \times Y$.

1. Soit O un ouvert de X, alors

$$p_X^{-1}(O) = \{(x,y) \mid x \in O\} = O \times Y.$$

Il s'agit d'un *pavé ouvert*. Or d'après le cours, les ouverts de $X \times Y$ sont les réunions de pavés ouverts, et en particulier les pavés ouverts sont des ouverts. On a vérifié que l'image réciproque par p_X de tout ouvert de X est un ouvert de $X \times Y$: d'après le critère topologique de continuité, on en déduit que la projection p_X est continue. L'argument est bien sûr analogue pour p_Y.

2. **a.** Le sens direct est facile : si f est continue, alors f_X et f_Y le sont aussi, comme composée d'applicqations continues (on utilise la question précédente). **b.** Montrons le sens réciproque : on suppose que f_X et f_Y sont continues, et on veut montrer que f est continue.

Premier argument (métrique) Soit z un point de Z, on note $(x,y) = f(z)$, on veut montrer que f est continue au point z. Soit $\varepsilon > 0$. Les continuités de f_X et de f_Y nous fournissent deux nombres strictement positifs α, β tels que

On cherche bien sûr un $\alpha > 0$ tel que blablabla...

$$\forall z' \in Z, d_Z(z,z') < \alpha \Rightarrow d_X(f_X(z), f_X(z')) < \varepsilon \text{ et } d(z,z') < \beta \Rightarrow d_Y(f_Y(z), f_Y(z')) < \varepsilon.$$

Choisissons $\delta = \min(\alpha, \beta)$, et vérifians que ce δ convient. On prend un point z' de z tel que $d_Z(z,z') < \delta$ (on a donc aussi $d_Z(z,z') < \alpha$ et $d_Z(z,z') < \beta$), et on veut montrer que $d_\infty(f(z), f(z')) < \varepsilon$. Or

$$\begin{aligned} d_\infty(f(z), f(z')) &= \max(d_X(p_X(f(z)), p_X(f(z'))), d_Y(p_Y(f(z)), p_Y(f(z')))) \\ &= \max(d_X(f_X(z), f_X(z')), d_Y(f_Y(z), f_Y(z'))) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

où la première égalité suit de la définition de la distance d_∞, la seconde des définitions de f_X et f_Y, et l'inégalité du choix de α et β.

Deuxième argument (topologique) On veut montrer que l'image réciproque d'un ouvert O de $X \times Y$ par f est un ouvert de Z. D'après le court, O est une réunion de pavés ouverts ; comme l'image réciproque de l'union est égale à l'union des images réciproques, on voit que $f^{-1}(O)$ est une réunion d'images réciproques de pavés ouverts ; comme une union d'ouvert est un ouvert, il suffit de montrer que *l'image réciproque par f de tout pavé ouvert de $X \times Y$ est un ouvert de Z.*

Montrons ceci. Soit $U \times V$ un pavé ouvert de $X \times Y$, ce qui signifie que U est un ouvert de X et V un ouvert de Y. On veut montrer que $f^{-1}(U \times V)$ est un ouvert de Z. Remarquons maintenant que

Dans ce qui suit, pour utiliser les hypothèses de continuité de f_X et f_Y, on cherche à exprimer $f^{-1}(U \times V)$ à l'aide d'images réciproques d'ouverts par ces deux applications. Attention, passage difficile!!

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V).$$

Or

$$z \in f_X^{-1}(U) \Leftrightarrow f_X(z) \in U \Leftrightarrow p_X(f(z)) \in U \Leftrightarrow f(z) \in U \times Y$$

donc $f^{-1}(U \times Y) = f_X^{-1}(U)$. De même, $f^{-1}(X \times V) = f_Y^{-1}(V)$. On peut alors écrire

$$f^{-1}(U\times V) = f^{-1}((U\times Y)\cap(X\times V)) = f^{-1}(U\times Y)\cap f^{-1}(X\times V) = f_X^{-1}(U)\cap f_Y^{-1}(V).$$

Puisque f_X et f_Y sont continues et que U, V sont des ouverts, les ensembles $f_X^{-1}(U)$ et $f_Y^{-1}(V)$ sont des ouverts de Z ; il en est donc de même de leur intersection. Ceci prouve que $f^{-1}(U \times V)$ est un ouvert de Z, ce qu'on voulait.

Exercice 24.—

1. Dans un espace métrique X, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément y. Montrer que la suite réelle des distances $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre $d(x, y)$.

2. Interpréter le résultat comme une propriété de l'application distance.

Corrigé de l'exercice 24.—

1. Pour un n fixé, on applique deux fois l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

et de même

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y, y_n)$$

d'où l'encadrement

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x, x_n) + d(y, y_n).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 0, donc c'est aussi le cas du terme de gauche, ce qui signifie que la suite $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre $d(x, y)$.

2. La question précédente revenait à vérifier la caractérisation séquentielle de la continuité pour l'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$, qui va de l'espace produit $X \times X$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. On se place maintenant dans l'espace plus gros, $\mathcal{F}$, des fonctions bornées de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, toujours muni de la distance uniforme. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = 1$ si $t > 0$. **a.** Déterminer explicitement un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue. **b.** Que montre l'existence d'un tel ε ? Répondre en utilisant le vocabulaire du cours sur les espaces métriques.

Corrigé de l'exercice 25.—

1. Notons 0 la fonction nulle. Pour une fonction $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ quelconque, l'inégalité $d_\infty(0,f) < 1$ s'explicite par : pour tout $t \in [-1,1]$, $f(t) \in [-1,1]$. La boule en question est donc constituée de l'ensemble de toutes les fonctions à valeurs dans $[-1,1]$, ou encore celles dont le graphe est inclus dans le carré $[-1,1]^2$.

Si $\varepsilon > 0$ et $f_0 \in C([-1,1],\mathbb{R})$ est une autre fonction quelconque, la boule $B(f_0,\varepsilon)$ est constituée de toutes les fonctions f dont le graphe est inclus dans un "tube" de hauteur 2ε autour du graphe de f_0 (voir le dessin dans le poly, I.2.(h) pour le cas de la fonction x^2).

2. a. Soit $\varepsilon > 0$, et f un élément de $B(f_0,\varepsilon)$. On a donc $d_\infty(f_0,f) < \varepsilon$, c'est-à-dire $|f_0(t) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [-1,1]$, soit en explicitant la valeur de f_0 :

— pour tout $t \leq 0$, $f(t) \in]-\varepsilon,\varepsilon[$;

— pour tout $t > 0$, $f(t) \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$.

Prenons maintenant $\varepsilon = \frac{1}{3}$. On a donc $f(0) < \frac{1}{3}$, mais $f(t) > \frac{2}{3}$ pour tout $t > 0$, et la fonction f ne peut pas être continue en 0.

b. On a montré que, dans l'espace $\mathcal{F}$, la boule $B(f_0,\frac{1}{3})$ est disjointe de l'ensemble $C([-1,1],\mathbb{R})$. Ceci montre que f_0 est dans l'intérieur du complémentaire de $C([-1,1],\mathbb{R})$. (Par ailleurs, nous savons que le sous-espace $C([-1,1],\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{F}$, donc que son compémentaire est un ouvert).

Exercice 26.— Dans l'espace métrique $X = C_b([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, munit de la distance d_∞, on considère la partie

$$X_0 = \{f \in C_b([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée de X. [4]

2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

3. En déduire qu'il est d'intérieur vide.

4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions f positives (c'est-à-dire telles que pour tout x, $f(x) \geq 0$) est fermé. Déterminer son intérieur.

---

4. Un "piège" à éviter : le complémentaire de X_0 n'est pas l'ensemble des fonctions qui ne s'annule pas ; le complémentaire de $X_{\geq 0}$ n'est pas l'ensemble des fonctions strictement négatives. Ces erreurs sont en fait des erreurs de négation de quantificateurs...

Corrigé de l'exercice 26.—

1. Vérifions que le complémentaire O de X_0 est ouvert. On prend donc une fonction f_0 n'appartenant pas à X_0, c'est-à-dire telle que $f_0(0) \neq 0$. Posons $\varepsilon = |f(0)|$. C'est un nombre strictement positif. Vérifions que la boule $B(f_0, \varepsilon)$ est incluse dans O, c'est-à-dire disjointe de X_0. Pour ceci, prenons un élément f dans la boule $B(f_0, \varepsilon)$, il s'agit de montrer que $f(0) \neq 0$. Or on a $d_\infty(f, f_0) < \varepsilon$, et en particulier

Vu la définition d'un ouvert, on cherche bien sûr un $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(f_0, \varepsilon)$ est incluse dans O.

$$|f(0) - f_0(0)| < \varepsilon = |f_0(0)|$$

d'où on tire

$$|f(0)| \geq |f_0(0)| - |f(0) - f_0(0)| > |f_0(0)| - |f_0(0)| = 0$$

et donc $f(0) \neq 0$.

Alternativement, on aurait pu vérifier le critère séquentiel des fermés. Voici encore une troisième façon de répondre, plus concise. Considérons l'application Ψ définie par

Pour montrer qu'un ensemble est fermé dans X, il suffit de l'exprimer comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Ce critère est souvent diablement efficace.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

notons que $X_0 = \Psi^{-1}(\{0\})$. Nous allons montrer que Ψ est continue, ce qui entrainera que X_0 est fermé, en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par une application continue.

En fait, Ψ est même 1-lipschitzienne, puisque pour tous $f, g \in X$,

$$|f(0) - g(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g).$$

Elle est donc continue, ce qui termine la preuve.

2. Soit $f \in X_0$, on a donc $f(0) = 0$. Pour chaque entier $n > 0$, on peut définir la fonction $f_n := f + \frac{1}{n}$. On a $f_n(0) = \frac{1}{n}$. D'autre part la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ converge uniformément vers f. On a donc trouvé une suite d'éléments du complémentaire de X_0 qui converge vers f.

3. Continuons avec les notations de la question précédente. Soit $\varepsilon > 0$; puisque la suite (f_n) converge vers f, il existe un entier n tel que $f_n \in B(f, \varepsilon)$. Ceci montre que toute boule autour de f rencontre le complémentaire de X_0, et donc que f n'est pas dans l'intérieur de X_0. Finalement, on a montré qu'aucun élément de X_0 n'appartient à son intérieur : donc son intérieur est vide.

Rappelons que x est dans l'intérieur de X_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset X_0$.

4. **a.** On a

$$X_{\geq 0} = \{f \in X | \forall x \in [0,1], f(x) \geq 0\} = \bigcap_{x \in [0,1]} \{f \in X | f(x) \geq 0\}.$$

Généralisons l'argument alternatif de la réponse à la première question, en introduisant, pour chaque $x \in [0,1]$, la fonction $\Psi_x : f \mapsto f(x)$, qui va de X dans $\mathbb{R}$. Pour chaque x, l'ensemble $\{f \in X | f(x) \geq 0\}$ s'écrit alors $\Psi_x^{-1}([0, +\infty[)$. Exactement comme avant, on montre que cette fonction est 1-lipschitzienne, donc continue. Puisque l'intervalle $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que $\{f \in X | f(x) \geq 0\}$ est un fermé de X. L'ensemble $X_{\geq 0}$ est l'intersection d'une famille de fermés de X, c'est donc un fermé de X.

Donnons un autre argument, en vérifiant la caractérisation séquentielle de la fermeture. On prend une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $X_{\geq 0}$ qui converge vers une fonction $f \in C_b([0,1],\mathbb{R})$, et on veut montrer que f appartient aussi à $X_{\geq 0}$. Pour tout $t \in [0,1]$ fixé, la suite réelle $(f_n(t))_{n\geq 0}$ converge vers $f(t)$; or puisque f_n appartient à $X_{\geq 0}$, cette suite est à valeurs dans $[0,+\infty[$ qui est fermé dans $\mathbb{R}$; donc la limite $f(t)$ appartient aussi à $[0,+\infty[$. Ceci montre que f appartient aussi à $X_{\geq 0}$, ce qu'on voulait.

b. On va montrer que l'intérieur de $X_{\geq 0}$, toujours dans l'espace $C_b[0,1],\mathbb{R})$, est l'ensemble $X_{>0}$ des fonctions à valeurs strictement positives,

$$\mathrm{Inte}(X_{\geq 0}) = X_{>0}.$$

Tout d'abord, soit f un élément de $X_{\geq 0}$ qui n'est pas dans $X_{>0}$: ceci signifie qu'il existe un $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = 0$. Alors, comme plus haut, la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ définies par $f_n = f - \frac{1}{n}$ est dans le complémentaire de $X_{\geq 0}$: comme f est limite d'une suite d'élément du complémentaire, il n'est pas dans l'intérieur (voir l'argument plus haut). Ceci montre que l'intérieur de $X_{\geq 0}$ est inclus dans $X_{>0}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit f un élément de $X_{>0}$. Puisque f est continue elle atteint son minimum ε, et puisqu'elle ne prend que des valeurs strictement positives, on a $\varepsilon > 0$. La boule $B(f,\varepsilon)$ est incluse dans $X_{\geq 0}$. Ceci montre que f est dans l'intérieur de $X_{\geq 0}$.

Tout l'exercice se passe dans l'espace $X = C_b([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 27.— (distance à un sous-ensemble)

1. Rappelons qu'une fonction $f : (X,d) \to (X',d')$ est k-lipschitzienne si $\forall (x,y) \in X^2, d'(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$. Montrer qu'une fonction k-lipschitzienne est continue.

2. Soient (X,d) un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. Pour tout élément x de X, on pose $d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. **a.** Montrer que cela a toujours un sens. **b.** Donner un exemple où la borne inférieure n'est pas atteinte.

3. Montrer que d_A est une fonction 1-lipschitzienne (donc continue).

4. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Adhe}(A)$.

5. Soient F_1, F_2 fermés *disjoints*. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* U_1, U_2 qui contiennent respectivement F_1 et F_2. *Aide : utiliser les distances à F_1 et F_2 pour définir par exemple U_1 comme l'ensemble des points qui sont plus proches de F_1 que de F_2.*

6. Donner un exemple de fermés disjoints $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tels que

$$\inf\{d(x,y) : (x,y) \in F_1 \times F_2\} = 0.$$

Corrigé de l'exercice 27.—

1. Voir un exercice précédent.

2. a. Puisque l'ensemble A est non vide, l'ensemble $\{d(x,y)|y \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0. D'après l'axiome de la borne supérieure, elle admet une borne inférieure. **b.** Prenons $X = \mathbb{R}$, $A = [-1, 0[$, $x = 1$. Alors $d_A(x) = 1$, mais aucun élément de A n'est à distance 1 de x.

3. L'application d_A va de X vers $\mathbb{R}$. Nous devons montrer que pour tous x, x' de X,

$$|d_A(x) - d_A(x')| \leq d(x, x').$$

Pour savoir quelle inégalité il faut démontrer, on "déroule" tranquillement la définition d'application lipschitzienne...

Dans un premier temps, pour simplifier, supposons que les "inf" dans les définitions de $d_A(x)$ et de $d_A(x')$ soient atteint. Autrement dit, il existe $y, y' \in A$ tels que

$$d_A(x) = d(x, y) \text{ et } d_A(x') = d(x', y').$$

La question est difficile, on commence par étudier un cas plus simple.

On a alors

$$\begin{array}{rcl} d_A(x) - d_A(x') & = & d(x,y) - d(x',y') \\ & \leq & d(x,y') - d(x',y') \\ & \leq & d(x,x'). \end{array}$$

La deuxième ligne vient du fait que $d(x, y)$, qui réalise l'infimum des distances de x à un point de A, est plus petite que $d(x, y')$. La dernière est l'inégalité triangulaire $d(x, y') \leq d(x, x') + d(x', y')$. De façon totalement symétrique, on a aussi $d_A(x) - d_A(x') \leq d(x, x')$, on en déduit que $|d_A(x) - d_A(x')| \leq d(x, x')$, ce qu'on voulait.

La valeur absolue d'un nombre m étant le plus grand des deux nombres m et $-m$, pour majorer $|m|$ par une quantité M il suffit de majorer séparément m et $-m$ par M.

Passons au cas général, en tenant compte du fait que l'inf n'est pas forcément atteint. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $d_A(x')$, il existe un point y' de A tel que

$$(1) \quad d(x', y') < d_A(x') + \varepsilon.$$

On utilise la définition de l'inf comme plus grand des minorants : le nombre $d_A(x) + \varepsilon$ n'est pas un minorant, ce qui donne l'existence du point y.

On a alors

$$\begin{array}{rcl} d_A(x) - d_A(x') & < & d_A(x) - d(x',y') + \varepsilon \\ & < & d(x,y') - d(x',y') + \varepsilon \\ & < & d(x,x') + \varepsilon. \end{array}$$

La première ligne vient de l'inégalité (1), la deuxième du fait du fait que $d_A(x)$ minore la distance de x au point y' de A, et la troisième est l'inégalité triangulaire. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on peut faire tendre ε vers 0 et on obtient $d_A(x) - d_A(x') \leq d(x, x')$. L'autre inégalité s'obtient de façon symétrique. On conclut comme avant.

4. a. Supposons $d_A(x) = 0$. On veut montrer que $x \in \mathrm{Adhe}(A)$. On va utiliser la définition de l'adhérence ; que doit-on montrer ? **Conclure** à l'aide de la définition de $d_A(x)$ comme un inf (comme plus haut).

b. Réciproquement, supposons que $x \in \mathrm{Adhe}(A)$. Soit $\varepsilon > 0$, **utiliser** la définition de l'adhérence pour trouver un point y de A. **Qu'en déduit-on** pour $d_A(x)$? Conclure que $d_A(x) = 0$.

5. Définissons

$$U_1 = \{x \in X | d_{F_1}(x) < d_{F_2}(x)\} \text{ et } U_2 = \{x \in X | d_{F_2}(x) < d_{F_1}(x)\}.$$

Il reste à vérifier toutes les propriétés : ce sont deux ouverts disjoints qui contiennent respectivement F_1 et F_2.

Il est clair que U_1 et U_2 sont disjoints. Montrer que U_1 est un ouvert en l'écrivant comme l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par une application continue. Le même argument marche bien sûr pour U_2. Il reste àvoir que U_1 contient F_1 (et le même argument montrera que U_2 contient F_2). On a vu dans une question précédente que $d_{F_1}(x) = 0$ si et seulement si $x \in \mathrm{Adhe}(F_1)$, mais comme ici F_1 est supposé fermé, ceci équivaut simplement à l'appartenance à F_1 ; et la même remarque vaut pour F_2. Soit x un point de F_1. Puisque F_1 et F_2 sont disjoint, le point x n'est pas dans F_2. D'après la remarque précédente, on a $d_{F_1}(x) = 0$ et $d_{F_2}(x) > 0$. Ceci prouve que x vérifie la définition de U_1.

6. On peut prendre pour F_1 l'axe des abscisses et pour F_2 le graphe de la fonction exponentielle.

Exercice 28.—

1. Montrer que tous les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

2. Montrer que $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

3. Montrer que $[0, 1]$ et $[0, 1] \cup [2, 3]$ ne sont pas homéomorphes.

Corrigé de l'exercice 28.—

1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (appelé aussi segment) quelconque. L'application $x \mapsto (b - a)x$ envoie le segment $[0, 1]$ sur le segment $[0, b - a]$, puis la translation $x \mapsto x + a$ envoie ce dernier sur $[a, b]$. La composée des deux applications envoie donc $[0, 1]$ sur $[a, b]$. Les deux applications utilisées sont continues, bijectives, leurs bijections sont respectivement $x \mapsto (b - a)^{-1}x$ et $x \mapsto x - a$, qui sont également continue : ce sont donc des homéomorphismes. Puisque la composée de deux homéomorphismes est encore un homéomorphisme, on a fabriqué un homéomorphisme qui envoie $[0, 1]$ sur $[a, b]$.

Ceci montre que tout segment est homéomorphe à $[0, 1]$. Par composition, on en déduit que tous les segments sont homéomorphes (la relation "être homéomorphe" est transitive).

2. L'application arctan est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ (dont la réciproque est la restriction de l'application tangente à cet intervalle). D'autre part, l'homéomorphisme construit dans la question précédente entre $[0, 1]$ et $[a, b]$ se restreint en un homéomorphisme entre $]0, 1[$ et $]a, b[$; on voit ainsi que $]0, 1[$ et $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sont également homéomorphes, ce qui conclut encore une fois par transitivité.

3. Supposons, par l'absurde, qu'on ait un homéomorphisme H entre $[0, 1]$ et $[0, 1] \cup [2, 3]$. H est continu sur $[0, 1]$ et prend les valeurs 1 et 2, puisqu'il est surjectif. Le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il prend aussi la valeur $1, 5$. Mais son image était censée être $[0, 1] \cup [2, 3]$: contradiction.

Le raisonnement montre même qu'il n'y a pas d'application continue surjective de $[0, 1]$ vers $[0, 1] \cup [2, 3]$.

II Complétude

II.1 Assimilation du cours

Exercice 29.— Écrire la définition d'une suite de Cauchy.

Corrigé de l'exercice 29.— Voir le cours. Indispensable pour faire la suite !

Exercice 30.— On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \log(n)$.

1. Calculer la limite de la suite $d(u_{n+1}, u_n)$.

2. La suite (u_n) est-elle de Cauchy ?

Corrigé de l'exercice 30.— **1.** En utilisant les propriétés $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ et $\log(-a) = (\log(a))^{-1}$, on trouve pour tout entier $n > 0$,

$$d(u_{n+1}, u_n) = \log(1 + \frac{1}{n})$$

qui tend donc, par continuité de la fonction log, vers $\log(1) = 0$.

2. Non, puisqu'elle tend vers $+\infty$ ($\mathbb{R}$ est complet : toute suite de Cauchy est convergente). Une autre façon de le voir est de calculer $d(u_{2n}, u_n) = \log(2)$: or si la suite était de Cauchy, la suite $d(u_{2n}, u_n)$ devrait converger vers 0 (POURQUOI ?)

Conclusion : cet exemple nous montre que le fait que la distance entre deux termes consécutifs tende vers 0 n'est pas un critère suffisant pour être une suite de Cauchy.

Exercice 31.—

Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet. On donnera trois arguments différents :

1. à l'aide de la proposition sur les sous-espaces métriques,

2. à l'aide de la propriété disant qu'une suite convergente est de Cauchy,

3. en utilisant juste la définition d'une suite de Cauchy.

Corrigé de l'exercice 31.— **1.** Dans $\mathbb{R}$ qui est complet, un sous-espace est complet si et seulement si c'est une partie fermée. Or $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ (savez-vous donner un argument pour ceci ?), il n'est donc pas complet.

2. Dans l'espace métrique $\mathbb{R}$, la suite $(\frac{1}{n})_{n>0}$ est convergente. Donc elle est de Cauchy. Elle est toujours de Cauchy lorsqu'on la considère comme une suite du sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (regardez la définition d'une suite de Cauchy pour la métrique de $\mathbb{R}$ et pour la métrique induite : les deux définitions coincident). Par contre, dans ce sous-espace, la suite n'est pas convergente (on lui a enlevé sa limite !). On a trouvé $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ une suite de Cauchy qui ne converge pas : donc cet espace n'est pas complet.

3. On reprend la même suite $(\frac{1}{n})_{n>0}$, et il s'agit de montrer que c'est une suite de Cauchy directement, c'est-à-dire en vérifiant la définition. On prend trois entiers

n_0, p, q avec $p, q \geq n_0$, et on essaie de montrer que la distance entre $1/p$ et $1/q$ est petite :

$$d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{n_0}.$$

On vérifie la définition de suite de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$. Posons

Définition qui commence par "$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall p \geq n_0 \;\; \forall q \geq n_0$" : il s'agit donc de prendre un $\varepsilon > 0$ quelconque, puis de *trouver un* n_0 (c'est la partie difficile) tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on arrive à montrer la propriété $d(u_p, u_q) < \varepsilon$. Comme d'habitude, c'est en lisant la définition qu'on voit quelle doit être la structure de la preuve.

$n_0 = ...$ (COMPLÉTER : pour que ça marche, regarder plus bas).

Soit maintenant p, q deux entiers $\geq n_0$. On a alors

$$d\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \leq .... < \varepsilon. \quad \text{(COMPLÉTER !)}$$

Complément : pouvez-vous expliquer de façon convaincante pourquoi, dans l'espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la suite $(\frac{1}{n})_{n>0}$ n'est pas convergente ? (Aide : raisonnez par l'absurde... si jamais elle convergeait, que pourrait-on dire de sa limite ℓ ?)

II.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 32 (à rédiger pour le devoir numéro 2).—

1. Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

2. Plus généralement, montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n.$$

Corrigé de l'exercice 32.—

1. Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}.$$

Montrons qu'elle est de Cauchy. Pour cela nous allons vérifier la définition.

La structure de la preuve est donc identique à celle de la fin de l'exercice 31.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$n_0 = ...$ (COMPLÉTER pour que ça marche plus bas.)

Soient maintenant p, q deux entiers $\geq n_0$. Supposons que $p < q$, (l'autre cas est similaire), on peut alors écrire $q = p + d$

$$d(x_p, x_q) = d(x_p, x_{p+d}) \leq \frac{1}{p} \leq ...... \leq \varepsilon. \quad \text{(COMPLÉTER !)}$$

2. Commençons par la réciproque, qui est une généralisation de la question précédente. On suppose qu'il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n \quad (\star).$$

Et on veut montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

On reprend donc la structure de la preuve précédente, seule la définition de l'entier n_0 va changer.

Soit $\varepsilon > 0$. Utilisons l'hypothèse qui nous dit que la suite (ε_n) tend vers 0 : il existe donc un entier n_0 qui a la propriété suivante :

$$\forall n \geq n_0, \varepsilon_n < \varepsilon$$

(on a enlevé la valeur absolue de la définition de convergence, puisque les ε_n sont des nombres positifs).

Soient maintenant p, q deux entiers $\geq n_0$. Supposons que $p < q$, (l'autre cas est similaire), on peut alors écrire $q = p + d$

$$d(x_p, x_q) = d(x_p, x_{p+d}) \leq \varepsilon_p \leq \varepsilon$$

d'après la propriété vérifiée par n_0, puisque $p \geq n_0$.

Montrons maintenant la réciproque. On considère une suite (x_n), cette fois-ci on suppose qu'elle est de Cauchy, et il s'agit de trouver une suite (ε_n) de nombres positifs telle que la propriété $(\star)$ ci-dessus soit vérifiée.

Soit n un entier, posons

$$\varepsilon_n = \sup_{d \geq 0} d(x_n, x_{n+d}).$$

Comment a-t-on l'idée de définir ε_n ainsi ? Et bien, on cherche un nombre qui majore les distances $d(x_n, x_{n+d})$, pour tous les entiers positifs d (l'entier n, lui, est fixé). On voudrait aussi que ce nombre ne soit pas trop grand, pour que la suite (ε_n) tende vers 0. On prend donc le nombre le plus petit possible qui vérifie toutes les inégalités demandées : c'est bien ce supremum !

Notons d'abord que le nombre ε_n est bien défini : en effet la suite (x_n) étant de Cauchy, elle est bornée, et donc le sup existe et c'est bien un nombre positif. Ensuite, il vérifie bien la propriété $(\star)$. Il reste à voir que la suite (ε_n) ainsi définie tend vers 0. [5]

Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 donné par la définition de suite de Cauchy [6] : il vérifie donc la propriété que

$$\forall p \geq n_0 \quad \forall q \geq n_0 \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Soit $n \geq n_0$. Le nombre ε_n a été défini comme le supremum d'un ensemble de nombres, qui sont tous plus petits que ε d'après la propriété vérifiée par n_0. On a donc $\varepsilon_n \leq \varepsilon$. Ceci termine de montrer que la suite (ε_n) tend vers 0.

Souvenons-nous qu'à ce stade de la preuve il s'agit de montrer que $\varepsilon_n < \varepsilon$.

---

5. Et on se doute très fort qu'ici il va falloir utiliser l'hypothèse que la suite (x_n) est de Cauchy, puisqu'on ne l'a pas encore utilisée. De plus la structure de la preuve découle de la définition de la limite : on prend un $\varepsilon > 0$, on cherche un n_0...

6. Ici encore, trouver ce n_0 est l'endroit difficile de la preuve. On cherche un entier, on a un ε et on doit utiliser la définition de suite de Cauchy, il est donc très naturel de prendre cette valeur pour n_0.

Exercice 33.— Soit (X, d) un espace métrique. Pour une suite (x_n) d'éléments de X, on s'intéresse à la propriété :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer qu'une suite satisfaisant $(*)$ est de Cauchy.

2. Montrer que si (x_n) est de Cauchy, elle a une sous-suite satisfaisant $(*)$.[7]

3. Montrer que (X, d) est complet si et seulement si toute suite ayant $(*)$ converge. *On pourra utiliser le résultat de l'exercice 48 ci-dessous.*

Corrigé de l'exercice 33.—

1. Soient n, p deux entiers positifs, l'inégalité triangulaire et la popriété $(*)$ permettent de majorer

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+i}} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+i}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

On majore la somme géométrique par le reste de la série. Alternativement, on peut se souvenir de la formule (plus compliquée) pour la somme de 0 à $p-1$.

Vérifions alors la que (x_n) est une suite de Cauchy. Etant donné un $\varepsilon > 0$, on peut choisir n_0 tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$, et pour tout $n \leq n_0$ et pour tout $p \geq 0$, la majoration précédente donne $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, comme voulu.

Le point clé dans cet argument est que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente.

2. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on suppose être de Cauchy, et nous voulons en extraire une suite (x_{n_k}) vérifiant la propriété $(*)$. Construisons d'abord n_0. On applique la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$: ceci nous donne un entier n_0 ayant la propriété suivante :

Remarquons que pour cette suite, la propriété $(*)$ s'écrit avec la variable k : $\forall k \in \mathbb{N}$, $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$.

$$\forall n, m \geq n_0 \ \ d(x_n, x_m) < 1$$

et donc, en particulier :

$$(P_0) : \quad m \geq n_0 \ \ d(x_{n_0}, x_m) < 1.$$

Construisons l'entier n_1. On applique de même la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ce qui nous donne un entier n_1' vérifiant en particulier

$$\forall n, m \geq n_1' \ \ d(x_n, x_m) < \frac{1}{2};$$

on choisit $n_1 = \max(n_0 + 1, n_1)$, on a $n_1 > n_0$ et la propriété

$$(P_1) : \quad \forall m \geq n_1 \ \ d(x_{n_1}, x_m) < \frac{1}{2}.$$

De la même façon, en supposant construits les termes $n_0, n_1, ..., n_k$, on construit un entier n_{k+1} strictement plus grand que n_k et vérifiant la propriété

$$(P_k) : \quad \forall m \geq n_k \ \ d(x_{n_k}, x_m) < \frac{1}{2^k}.$$

7. La définition de sous-suite se trouve au début du chapitre sur la compacité.

On obtient ainsi, par récurrence, une suite (n_k). Pour chaque entier k, puisque $n_{k+1} \geq n_k$, la propriété (P_k) entraine $d(x_{n_k}, x_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$, ce qui signifie que la propriété $(*)$ est bien satisfaite par notre suite.

3.

a. Supposons que X est complet, et considérons une suite (x_n) ayant la propriété $(*)$. D'après le premier point de l'exercice, cette suite est de Cauchy. Puisque X est complet, elle converge.

b. Réciproquement, supposons que toute suite de X ayant la propriété $(*)$ converge, et montrons que X est complet. On considère une suite de Cauchy (x_n), il s'agit de voir qu'elle est convergente. D'après le second point de l'exercice, on peut extraire de (x_n) une sous-suite ayant la propriété $(*)$. Par hypothèse, cette sous-suite est convergente. On applique le résultat de l'exercice 48 : toute suite de Cauchy ayant une suite extraite convergente est elle-même convergente, et ceci nous donne la convergence de la suite (x_n), ce qu'on voulait.

Exercice 34.— Montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.[8]

Corrigé de l'exercice 34.— Il s'agit de montrer que toute série réelle absolument convergente est convergente.

Le but de l'exercice est surtout de réaliser que, pour montrer cette propriété bien connue, la complétude de $\mathbb{R}$ est essentielle. Plus tard, on généralisera ceci à tous les espaces de Banach (avec essentiellement la même preuve).

Soit (u_n) une suite. Rappelons que la convergence de la série associée est définie comme la convergence de la suite $(S_N)_{N \geq 0}$ des *sommes partielles*, définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

La convergence absolue, quant à elle, est définie comme la convergence de la série associée à la suite $(|u_n|)$, autrement dit la suite (S'_N) définie par

$$S'_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n| .$$

On suppose donc que la suite (S'_N) est convergente. Nous voulons en déduire que la suite (S_N) est convergente. Pour cela, $\mathbb{R}$ étant complet, il suffit de vérifier que c'est une suite de Cauchy, ce que nous allons faire en revenant à la définition

D'où la structure de la preuve...

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse la série est absolument convergente, ce qui signifie que la suite (S'_N) converge. En particulier, elle est de Cauchy : il existe donc un entier n_0 vérifiant la propriété :

$$\forall p \geq n_0 \;\; \forall q \geq n_0 \;\; d(S'_p, S'_q) < \varepsilon.$$

Soient $p, q \geq n_0$. En utilisant la définition de la distance dans $\mathbb{R}$, puis l'inégalité triangulaire, et enfin la majoration juste au-dessus (donnée par la définition de n_0, MONTRER que

$$d(S_p, S_q) < \varepsilon.$$

8. Voir par exemple Wikipedia si vous avez oublié les définitions.

Nous avons vérifié que la suite (S_N) est de Cauchy, ce qu'on voulait.

Exercice 35.— Soit Φ un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]0,1[$ (on peut par exemple fabriquer une formule en composant arctan par une fonction affine appropriée, voir l'exercice 28, mais la formule n'a aucune importance). Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}$ en "transportant la distance de $]0,1[$ par Φ^{-1}", c'est-à-dire définie par

$$d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|\,.$$

1. Rappeler pourquoi $]0,1[$, muni de la distance usuelle, n'est pas complet. En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

2. La distance d définit-elle les mêmes ouverts que la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Cet exercice nous fait voir que deux distances sur un même ensemble X peuvent définir les mêmes ouverts, bien que l'une fasse de X un espace métrique complet et l'autre non. Ou encore, si deux espaces métriques sont homéomorphes, le fait que le premier soit complet n'impose pas que le second le soit aussi. On dit que la complétude est une propriété métrique mais pas topologique.

Corrigé de l'exercice 35.—

1. Dans l'espace $[0,1[$ muni de la distance usuelle, la suite $(\frac{1}{n})_{n>0}$, par exemple, est de Cauchy mais ne converge pas (cf exercice 31). Ceci montre que $]0,1[$ n'est pas complet. On va en déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet. La raison conceptuelle est que cet espace est isométrique à l'espace $[0,1[$ muni de la distance usuelle ; deux espaces isométriques ont exctament les mêmes propriétés métriques. Détaillons. Considérons la suite

$$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n>0}.$$

C'est une suite de $\mathbb{R}$. Comme la suite $(\frac{1}{n})$ est de Cauchy dans $]0,1[$, cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ (VERIFIER en écrivant les définitions de suite de Cauchy). Comme la suite $(\frac{1}{n})$ ne converge pas dans $]0,1[$, la suite $(\Phi^{-1}(\frac{1}{n})$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d)$ (VERIFIER en utilisant la définition de la convergence).

2. La distance d définit les mêmes ouverts que la distance usuelle. En effet :

1. Φ est un homéomorphisme entre $(\mathbb{R}, \text{distance usuelle})$ et $(]0,1[, \text{distance usuelle})$.
2. Φ^{-1} est une isométrie entre $(]0,1[, \text{distance usuelle})$ et $(\mathbb{R}, d)$.

Or les isométries sont des homéomorphismes, et les homéomorphismes envoie les ouverts sur des ouverts. Si O est un ouvert usuel de $\mathbb{R}$, alors $O' = \Phi(O)$ est un ouvert usuel de $]0,1[$ (d'après le premier point), et donc $\Phi^{-1}(O')$ est un ouvert pour la distance d (d'après le second point). Mais $\Phi^{-1}(O') = O$, autrement dit O est un ouvert pour la distance d. On montre de façon analogue que tout ouvert pour la distance d est aussi un ouvert usuel.

Exercice 36 (à rédiger pour le devoir numéro 2).— On considère une application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui est de la forme $x \mapsto x + \Phi(x)$ où $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application qui est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne pour la distance euclidienne usuelle.

1. Montrer que T est bijective. *Indication : transformer le problème en une recherche de point fixe... En cas de panne on pourra comparer à l'exercice 21 du poly de calcul différentiel.*

2. Montrer que T est un homéomorphisme (on pourra montrer que l'inverse de T est lipschitzienne).

Corrigé de l'exercice 36.—

1. Il s'agit de montrer que pour chaque point y de $\mathbb{R}^N$, il existe un unique point x de $\mathbb{R}^N$ tel que $T(x) = y$. Fixons donc un point y. Un antécédent x de y vérifie $T(x) = y$; on peut ré-écrire cette égalite comme

$$x = \cdots \qquad \text{(compléter à l'aide de la définition de } T\text{)}.$$

En introduisant l'application $S_y : x \mapsto y - \Phi(x)$, qui va de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, on voit que x est un antécédant de y si et seulement si c'est un point fixe de S_y. Si l'on parvient à montrer que S_y est une application contractante, alors l'existence et l'unicité de l'antécédent de y suivront du théorème de point fixe de Banach.

Montrons donc cette propriété, en revenant à la définition. On prend deux points x, x', et on majore

$$\|S_y(x') - S_y(x)\|,$$

en utilisant bien sûr l'hypothèse sur Φ (écrire la majoration).

2. Puisque T est bijective, elle admet une application réciproque $T^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Il s'agit de voir que T et T^{-1} sont continues.

a. Montrons d'abord que T est continue. Pour ça, on montre qu'elle est $\frac{3}{2}$-lipschitzienne. Ecrire le calcul.

b. Montrons maintenant que T^{-1} est continue. L'énoncé suggère de montrer qu'elle est lipschitzienne.

Il est très naturel de démarrer ainsi : Soient y, y' dans $\mathbb{R}^N$, on veut majorer $\|T^{-1}(y') - T^{-1}(y)\|$ par un multiple de $\|y' - y\|$. Mais comme on n'a pas de formule pour T^{-1}, on est bloqué. il faut s'arranger pour formuler le problème à l'aide de T (qu'on connait bien) et non pas de T^{-1}.

Introduisons les antécédents $x = T^{-1}(y), x' = T^{-1}(y')$. On a $\|T^{-1}(y') - T^{-1}(y)\| = \|x' - x\|$ et $\|y' - y\| = \|T(x') - T(x)\|$.[9] On écrit

$$\|T(x') - T(x)\| = \cdots \geq \cdots \geq \|x' - x\| - \frac{1}{2}\|x' - x\| = \cdots$$

Compléter le calcul en utilisant (1) la définition de T, (2) l'inégalité triangulaire sous la forme $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$, (3) le fait que Φ soit lipschitzienne.

En revenant à $y = T(x)$ et $y' = T(x')$, l'inégalité obtenue s'écrit

$$\cdots \qquad \text{(compléter !)},$$

ce qu'on voulait.

Exercice 37.— Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $p \geq 1$ tels que f^p, la composée p fois de f, soit k-lipschitzienne. Montrer que f admet un unique point fixe.

---

9. Majorer $\|T^{-1}(y') - T^{-1}(y)\|$ par un multiple de $\|y' - y\|$ revient à minorer $\|T(x') - T(x)\|$ par un multiple de $\|x' - x\|$.

Corrigé de l'exercice 37.— Puisque f^p est contractante, on peut lui appliquer le théorème du point fixe de Banach : cette application admet un unique point fixe, notons-le Q.

Remarquons maintenant que $f(Q)$ est encore un point fixe de f^p. En effet, on a

$$f^p(f(Q) = f^{p+1}(Q) = f(f^p(Q)) = f(Q).$$

Par unicité du point fixe de f^p, on en déduit que $f(Q) = Q$. Autrement dit, Q est aussi un point fixe de f. Ceci montre l'existence.

Pour montrer l'unicité, prenons un point fixe Q' de f. Une récurrence facile montre que Q' est aussi un point fixe de f^p. Donc $Q' = Q$, ce qu'on voulait.

Exercice 38.— (Examen deuxième session 2014-2015) **1.** L'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|\,,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.

2. Soit $\Phi : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1,1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1,1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction $f : [-1,1] \to [-1,1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n\geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

Corrigé de l'exercice 38.—

1. Oui. L'espace $[-1,1]$ est complet (comme partie fermée de l'espace $\mathbb{R}$, qui est complet). Le cours dit que si un espace Y est complet, alors l'espace $C(X,Y)$ des applications continues et bornées de X dans Y, muni de la distance sup, est complet. Ici, bien sûr, toutes les applications sont automatiquement bornées puisque Y est borné.

2. Puisque Φ est de classe C^1, la fonction $|\Phi'|$ est continue sur $[-1,1]$ qui est compact, elle atteint donc son maximum. Puisque par hypothèse on a $|\Phi'(t)| < 1$ pour tout $t \in [-1,1]$, c'est que ce maximum est < 1. En notant C ce maximum, on a donc, pour tout $t \in [-1,1]$, $|\Phi'(t)| \leq C$. On applique maintenant l'inégalité des accroissements finis, qui nous donne exactement la propriété demandée.

La compacité et la continuité permettent ici de passer de la propriété "pour tout t, $f(t) < 1$" à la propriété "il existe $C < 1$ tel que pour tout t, $f(t) < C$". Cette deuxième propriété est beaucoup plus forte...

3. Notons $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$, dont on a rappelé à la question 1 qu'il est complet. Pour cette question d'existence et d'unicité, il est naturel d'essayer d'utiliser le théorème du point fixe. Cherchons donc à transformer la question en la recherche d'un point fixe pour une certaine transformation $T : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$.

T doit donc transformer une fonction en une autre fonction...

Au vu du problème, on définit T en disant que pour toute fonction f, élément de $\mathcal{C}$, $T(f)$ est la fonction

$$t \mapsto t\Phi(f(t)).$$

Avec cette définition, une fonction f vérifie l'égalité demandée par l'énoncé si et seulement si elle est un point fixe de la transformation T.

Essayons de montrer que T est contractante. On prend donc deux éléments f_1, f_2 de $\mathcal{C}$, et on cherche à majorer la quantité

$$\|T(f_1) - T(f_2)\|_\infty .$$

Puisqu'il s'agit de la norme sup, pour la majorer on cherche à majorer, pour tout $t \in [-1, 1]$, la quantité

$$|T(f_1)(t) - T(f_2)(t)| .$$

En utilisant la définition de T, une propriété de la valeur absolue, puis l'inégalité obtenue à la question 2, majorer ceci par une quantité faisant intervenir $\|f_1 - f_2\|_\infty$.

...

On en déduit que

$$\|T(f_1) - T(f_2)\|_\infty \leq C \|f_1 - f_2\|_\infty ,$$

inégalité qui nous dit que T est une application contractante de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe, et on obtient que T a un unique point fixe, autrement dit il existe une unique application f vérifiant l'égalité demandée.

II.3 Compléments et challenges

Exercice 39.— On munit $X = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ de la distance

$$d_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|dt.$$

1. Montrer que d_1 est effectivement une distance sur X.

2. On définit la fonction $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = 1$ si $x \geq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = -1$ si $x \leq -\frac{1}{n}$, et $f_n(x) = nx$ si $x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_1).

3. Montrer que (X, d_1) n'est pas complet.

Corrigé de l'exercice 39.—

1. Soient f, g, h trois fonctions, éléments de l'espace X. Pour tout $t \in [-1, 1]$, l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$!) nous donne

$$|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|.$$

En intégrant cette inégalité entre -1 et 1, on obtient l'inégalité traingulaire voulue,

$$d_1(f, h) \leq d_1(f, g) + d_1(g, h).$$

2. Soit n_0 un entier, et m, n deux entiers supérieurs ou égaux à n_0. On montre facilement que

$$d_1(f_n, f_m) \leq \int_{-\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{n_0}} 1dt = \frac{2}{n_0}$$

(faire un dessin). Et on en déduit facilement que la suite (f_n) est de Cauchy dans l'espace (X, d_1) (voir par exemple l'exercice 32).

3. Pour montrer que cet espace n'est pas complet, il nous suffit maintenant de montrer que la suite (f_n), étudiée à la question précédente, n'a pas de limite. On raisonne par l'absurde, en supposant que cette suite converge, dans l'espace $(X, d_1$, vers un élément g. Nous allons montrer qu'alors (i) $f(t) = 1$ pour tout $t > 0$ et (ii) $f(t) = -1$ pour tout $t < 0$, ce qui contredira la continuité de la fonction f en 0.

Montrons la propriété (i). Soit $t > 0$, et choisissons un nombre t_0 tel que $0 < t_0 < t$, de façon à ce que le nombre t appartienne au segment $[t_0, 1]$. On a

$$\int_{t_0}^{1} |g(t) - f_n(s)| ds \leq d_1(g, f_n)$$

qui, par hypothèse, tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais d'autre part, pour tout n assez grand, plus précisément dès que $\frac{1}{n} < t_0$, on a

$$\int_{t_0}^{1} |g(t) - f_n(s)| ds = \int_{t_0}^{1} |g(s) - 1| ds$$

et cette dernière intégrale est indépendante de n, elle est donc nulle. C'est l'intégrale d'une fonction continue et positive sur le segment $[t_0, 1]$, on en déduit que cette fonction est nulle, autrement dit que f est constante égale à 1 sur ce segment. En particulier, $f(t) = 1$, ce qui démontre le point (i).

La propriété (ii) se montre de façon symétrique. Ceci conclut la preuve.

L'espace X est en fait une partie de l'espace $L_1([-1, 1])$ des fonctions intégrables sur le segment $[-1, 1]$ qui, lui, est complet pour la distance d_1. En particulier, dans l'espace $L_1([-1, 1])$, la suite (f_n) converge vers la fonction qui vaut -1 sur $[-1, 0]$ et 1 sur $[0, 1]$. On peut montrer que X est une partie dense de cet espace. L'argument de non complétude présenté ici n'utilise pas l'espace $L_1([-1, 1])$.

Exercice 40.— Rédiger la preuve du théorème de Baire. *Le théorème est énoncé dans le poly, à la fin du chapitre sur la complétude, et un canevas de preuve est donné : il s'agit de rédiger les détails de cette preuve.*

Corrigé de l'exercice 40.— Rappelons l'énoncé du théorème de Baire :

Théorème. *Soit (X,d) un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans X. Alors l'intersection*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

est dense dans X.

On va utiliser une caractérisation bien pratique de la densité : une partie A de X est dense si et seulement si elle rencontre tout ouvert non vide de X.

Démontrer cette caractérisation.

On considère donc, comme dans l'énoncé, une famille d'ouverts denses $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On prend également un ouvert non vide O de X, et il s'agit de montrer que l'intersection de tous les O_n rencontre O.

Nous allons construire une suite de boules $B_n = B(x_n, r_n)$, telles que, pour tout $n \geq 0$:

1. $B_n \subset O \cap O_n$;
2. $\mathrm{Adhe}(B_n) \subset B_{n-1}$;
3. $r_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Admettons un instant que nous ayons réussi à construire une telle suite. D'après la deuxième propriété, les boules B_n sont emboitées les unes dans les autres ; ainsi pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \geq 0$, le centre x_{n+p} de B_{n+p} appartient à la boule B_n, et on a donc, d'après la dernière propriété,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite (x_n) est de Cauchy (voir par exemple l'exercice 32). Puisque l'espace X est complet, cette suite converge, notons x sa limite. Pour tout $N \geq 0$, la suite (x_n) est incluse dans la boule B_{N+1} à partir du rang $N+1$, on en déduit que x appartient à l'adhérence de B_{N+1}, qui est elle même incluse dans B_N d'après la deuxième propriété. Autrement dit le point x appartient à B_N, donc à $O \cap O_N$. Comme c'est vrai pour tout entier N, il appartient à l'intersection

$$O \cap \cap_{N\geq 0} O_N$$

Ainsi l'intersection de tous les O_N rencontre tout ouvert non vide O, ce qui prouve qu'elle est dense dans X, comme attendu.

Il nous reste à expliquer la construction des boules B_n. Construisons d'abord B_0. Puisque l'ouvert O_0 est dense dans X, il rencontre O. L'intersection $O \cap O_0$ est un ouvert non vide de X ; on choisit pour x_0 un point de cette intersection. Puisque cette intersection est ou ouvert, il existe un $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset O \cap O_0$. Quitte à diminuer r_0 au besoin, on peut supposer de plus que $r_0 < 1$.

Supposons maintenant qu'on ait construit des boules $B_0, \ldots, B_N$ vérifiant pour tout $n = 0, \ldots, N$ les propriétés 1 à 3 ci-dessus. Expliquons alors comment construire B_{N+1}. L'ouvert O_{N+1} est dense dans X, il rencontre donc la boule B_N, on choisit un point x_{N+1} de leur intersection, puis un réel $r' > 0$ tel que $B(x_{N+1}, r') \subset O_{N+1} \cap B_N$. Enfin, on prend un autre réel $r_{N+1} > 0$ qui est à la fois plus petit que $\frac{1}{N+2}$ et strictement plus petit que r'. On a alors

$$\mathrm{Adhe}(B(x_{N+1}, r_{N+1}) \subset B(x_{N+1}, r') \subset \cap B_N.$$

Puisque B_N est incluse dans O, on en déduit que B_{N+1} est aussi incluse dans O. Ceci termine la construction de la suite des boules B_N, et la preuve du théorème.

Vérifier ce point : dans un espace métrique l'adhérence d'une boule $B(x,r)$ est incluse dans la boule fermée

$$B^f(x,r) = \{y | d(x,y) \leq r\},$$

et donc aussi incluse dans toute boule ouverte $B(x,r')$ avec $r < r'$. On pourra utiliser la continuité de l'application distance (cf exercice 24).

Exercice 41.— (Théorème de prolongement, très utile !) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On suppose que (Y, d_Y) est complet, et on considère une partie $A \subset X$ dense dans X. Soit $f\colon A \to Y$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g\colon X \to Y$ qui prolonge f, et vérifier que g est uniformément continue.

Corrigé de l'exercice 41.—

Nous donnons seulement quelques indications sur la preuve, à charge pour le lecteurs de fournir les détails.

1. Pour montrer l'unicité, on considère une telle fonction g. Tout point x de X est limite d'une suite (x_n) d'élément de A, et par continuité de g, le point $g(x)$ est limite de la suite $(f(x_n))$. Ceci montre l'unicité.

2. a. Pour l'existence, c'est beaucoup plus compliqué. Le raisonnement pour l'unicité nous indique comment définir g : on voudrait poser

$$g(x) = \lim f(x_n)$$

où (x_n) est n'importe quelle suite de A convergeant vers x. Pour que cette définition soit valide, nous devons montrer (i) que la suite $(f(x_n))$ converge, et (ii) que la limite ne dépend pas du choix de la suite (x_n) convergeant vers x. Pour (i) : la suite (x_n) est de Cauchy ; en utilisant la continuité uniforme de f, on montre que la suite $(f(x_n))$ est aussi de Cauchy ; comme Y est complet, on en déduit la convergence. Pour (ii), c'est un peu la même idée : si (x'_n) est une autre suite de A qui converge vers x, la suite des distances $d_X(x'_n, x_n)$ tend vers 0, on en déduit que la suite $(d_Y(f(x_n), f(x'_n)))$ tend aussi vers 0, toujours à cause de la continuité uniforme de f.

b. Il reste à voir que g, que l'on vient de définir, est bien continue, et même uniformément continue. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, la continuité uniforme de f nous donne un $\delta > 0$. Soient x, x' tels que $d_X(x, x') < \delta$. On prend deux suites de A convergeant respectivement vers x et x' ; des termes d'indices assez grands de ces deux suites sont à distance $< \delta$, par définition de δ on en déduit que leurs images sont à distance $< \varepsilon$, et on passe à la limite.

III Compacité

III.1 Assimilation du cours

Exercice 42.—

1. Donner un exemple de suite réelle ayant deux valeurs d'adhérence. Représenter cette suite sur un dessin.

2. Donner un exemple de suite réelle ayant une seule valeur d'adhérence, mais admettant une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Faire un dessin. Cette suite est-elle convergente ?

Corrigé de l'exercice 42.—

1. La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ a pour valeurs d'adhérence -1 et 1.

2. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vaut 0 pour les n pair et n pour les n impairs a pour unique valeur d'adhérence 0, et la sous-suite (u_{2n+1}) tend vers $+\infty$. Elle n'est bien sûr pas convergente.

Exercice 43.— (Examen deuxième session 2014-2015, extrait)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

1. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

2. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

3. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

Corrigé de l'exercice 43.—

1. On écrit la négation de "tendre vers $+\infty$", ce qui donne :

$$\exists M > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geq N \ \ ||x_n|| \leq M.$$

Il est utile de reformuler cette phrase ainsi : il existe des termes de la suite, de rangs arbitrairement grand, et de normes inférieures à un même nombre M.

2. Soit M donné par la propriété que l'on vient d'écrire. On construit une suite extraite de la façon suivante : d'après la définition de M, appliquée avec $N = 0$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $||x_{n_0}|| \leq M$. On applique à nouveau la défintion de M, avec $N = n_0 + 1$, pour trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que $||x_{n_1}|| \leq M$. Et ainsi de suite.

Pour un argument plus précis, **écrire** la définition de n_{k+1} à partir de celle de n_k.

3. On vient de montrer que (x_n) admet une sous-suite bornée. Puisqu'une sous-suite d'une sous-suite de (x_n) est encore une sous-suite de (x_n), il suffit maintenant de montrer que toute suite (y_n) bornée admet une sous-suite convergente. Soit M un nombre telle que les termes de la suite (y_n) sont inclus dans la boule fermée $B^f(0, M)$. Cette boule étant fermée et bornée est compact (caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^N$), donc elle admet une sous-suite convergente, comme voulu.

Exercice 44.— Montrer que l'application $x \mapsto x^2$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas uniformément continue.

Corrigé de l'exercice 44.—

Etant donnée la définition de la continuité uniforme (voir le cours), il s'agit de montrer qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe x_1, x_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $d(x_1, x_2) < \alpha$ et $d(x_1^2, x_2^2) \geq \varepsilon$.

On choisit $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha > 0$, et notons $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$. Pour un nombre $x > 0$ quelconque, les deux nombres $x_1 = x$ et $x_2 = x + \alpha'$ vérifient bien sûr $d(x_1, x_2) < \alpha$. Calculons alors

En fait, n'importe quelle valeur de ε marcherait.

$$d(x^2, (x+\alpha')^2) = |(x+\alpha')^2 - x^2| = 2\alpha' x + \alpha'^2 > 2\alpha' x.$$

Pour que cette quantité soit supérieure à 1, il suffit de prendre $x = \frac{1}{2\alpha'}$.

Noter que si α est très petit, x est très grand : l'idée est que la fonction $x \mapsto x^2$ est "de moins en moins continue" au fur et à mesure que x grandit.

Exercice 45.— Montrer que les espaces $[0,1]$ et $]0,1]$ ne sont pas homéomorphes.

Corrigé de l'exercice 45.— Puisque dans $\mathbb{R}$ les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées, l'espace $[0,1]$ est compact, tandis que l'espace $]0,1]$ ne l'est pas. Mais s'ils étaient homéomorphes, puisque l'image d'un compact par une application continue est compact, l'espace $]0,1]$ devrait aussi être compact : contradiction.

Exercice 46.— Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Corrigé de l'exercice 46.—

Soient K, L deux parties compactes de X. Montrons la propriété en utilisant la définition d'un espace métrique compact donnée dans le cours : Z est compact si et seulement si toute suite d'élément de X admet une sous-suite convergente.

Il s'agit de montrer que $K \cup L$ est compact. On considère une suite (x_n) d'éléments de $K \cup L$. D'après le principe des tiroirs, on est dans l'une des deux situations suivantes (éventuellement les deuxà :

1. x_n appartient à K pour une infinité de valeurs de n,
2. x_n appartient à L pour une infinité de valeurs de n.

On suppose qu'on est dans le premier cas (le second se traite de la même façon). On numérote de façon croissante l'ensemble des valeurs de n telles que x_n appartient à K :

$$\{n | x_n \in K\} = \{n_0, n_1, \ldots\}$$

avec (n_k) strictement croissante. La suite (x_{n_k}) est alors une suite d'éléments de K. Puisque K est compact, on peut en extraire une nouvelle suite $(x_{n_{k_\ell}})$ qui converge vers un élément y de K. Cette nouvelle suite est une suite extraite de (x_n) qui converge vers un élément de $K \cup L$, comme voulu.

III.2 Exercices de niveau attendu

Exercice 47 (à rédiger pour le devoir numéro 2).— Dans un espace métrique compact, montrer que toute suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Corrigé de l'exercice 47.— Soit (x_n) une suite d'un espace métrique compact X, et ℓ une valeur d'adhérence de cette suite. Il s'agit de montrer que si (x_n) n'a pas d'autre valeur d'adhérence, alors elle converge vers ℓ. Nous allons montrer ceci sous forme contrapposée : on suppose que (x_n) ne converge pas vers ℓ, et on montrer qu'elle a une autre valeur d'adhérence ℓ' distincte de ℓ.

Puisque (x_n) ne converge pas vers ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$(*)$ pour tout N, il existe $n > N$ tel que $d(x_n, \ell) \geq \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe une suite extraite (x_{n_k}) dont tous les termes sont à distance $\geq \varepsilon$ de ℓ. Par compacité de X, cette suite possède elle-même une valeur d'adhérence ℓ', limite d'une suite $(x_{n_{k_p}})$. La suite $(x_{n_{k_p}})$ converge vers ℓ', et on a, pour tout p,

Ecrire les détails de la construction de cette suite : on pourra s'inspirer de l'exercice 43.

$$d(x_{n_{k_p}}, \ell) \geq \varepsilon \;;$$

puisque la distance est une application continue de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit en passant à la limite que $d(\ell', \ell) \geq \varepsilon$. En particulier $\ell' \neq \ell$. On a ainsi trouvé une valeur d'adhérence ℓ' de (x_n) qui est différente de ℓ, comme voulu.

Exercice 48.— Montrer que dans tout espace métrique, une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. En déduire que tout espace métrique compact est complet.

Corrigé de l'exercice 48.— Soit (x_n) une suite de Cauchy, et ℓ une valeur d'adhérence de cette suite. Montrons que (x_n) converge vers ℓ. On prend un $\varepsilon > 0$. Puisque (x_n) est une suite de Cauchy, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$(*) \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Il nous reste à voir que pour tout entier $n \geq N$, $d(x_n, \ell) < 2\varepsilon$.

Puisque ℓ est une valeur d'adhérence de (x_n), la définition nous dit qu'on peut trouver un entier $m \geq N$ tel que $d(x_m, \ell) < \varepsilon$. Maintenant étant donné un entier $n \geq N$, puisque $m \geq N$, la propriété $(*)$ nous dit que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. On en déduit

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, \ell) < 2\varepsilon.$$

Exercice 49.— Montrer qu'un espace métrique compact X contient une partie dénombrable dense.

Corrigé de l'exercice 49.— Nous allons utiliser la propriété suivante des espaces métriques compacts : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayons ε.

Cette propriété est dans le cours, elle se déduit immédiatement du critère de Borel-Lebesgue, en extrayant un recouvrement fini du rcouvrement $\{B(x, \varepsilon) | x \in X\}$.

D'après cette propriété, il existe un recouvrement $\mathcal{O}_1$ de X par des un nombre fini de boules de rayon 1. Notons N_1 le nombre de ces boules, et $x_1, \ldots, x_{N_1}$ les centres de ces boules. De même, il existe un recouvrement $\mathcal{O}_2$ de X par un nombre fini de boules de rayon $1/2$, on note $x_{N_1+1}, \ldots, x_{N_1+N_2}$ les centres de ces boules. Et ainsi de suite, on construit de cette façon une suite (x_n) dont l'ensemble des termes contient, pour tout entier $k > 0$, les centres d'une famille $\mathcal{O}_k$ de boules de rayon $1/k$ qui recouvre X.

Montrons alors que cette suite est dense dans X. Etant donné un point x de X, et un $\varepsilon > 0$, il s'agit de montrer que la boule $B(x, \varepsilon)$ contient un terme de la suite. Soit k un entier assez grand pour que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$. Le recouvrement $\mathcal{O}_k$ de X, par définition d'un recouvrement, contient une boule B qui contient x. Par construction de la suite (x_n), il existe un terme x_n de la suite qui est le centre de B. Par définition de $\mathcal{O}_k$, la boule B a pour rayon $\frac{1}{k}$, on a donc $d(x, x_n) < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$, et donc x_n appartient à la boule $B(x, \varepsilon)$, comme voulu.

Exercice 50 (à rédiger pour le devoir numéro 2).— Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si K et K' sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x, x') \in K \times K'$ vérifiant

$$d(x, x') = d(K, K') := \inf_{(y, y') \in K \times K'} d(y, y').$$

Corrigé de l'exercice 50.— Nous savons que l'application distance

$$\begin{array}{rcl} d : X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

est continue (voir l'exercice 24) D'autre part, l'ensemble $K \times K'$ constitué des couples (x, x') avec x dans K et x' dans K', est compact, en tant que produit de deux compacts, d'après un théorème du cours. D'après un autre théorème du cours, on en déduit que d est bornée sur $K \times K'$, et atteint sa borne inférieure : autrement dit il existe x dans K et x' dans K' comme demandés.

Cette exercice montre la puissance de la théorie développée en cours : la réponse est très courte si on utilise tous les outils à notre disposition.

Exercice 51.— Dans un espace métrique (X, d), on considère un fermé non vide F et un compact K non vide tel que $K \cap F = \emptyset$.

1. a. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. **b.** Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?

2. Pour $\varepsilon > 0$ on note[10] $K_\varepsilon := \{x \in X, \ \ d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

10. La distance d'un point à un sous-ensemble a été définie dans l'exercice 27.

Corrigé de l'exercice 51.—

1. a. Soient F et K comme dans l'énoncé. Nous supposons que $d(K, F) = 0$, et nous allons trouver un point commun à K et F, ce qui contredira l'hypothèse $K \cap F \neq \emptyset$ de l'énoncé.

Par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un couple (x_n, y_n) avec $x_n \in K$ et $y_n \in F$ tels que $d(x_n, y_y) < \frac{1}{n}$. On a ainsi construit deux suite (x_n) et (y_n), respectovement dans K et dans F. Puisque K est compact, on peut extraire de la suite (x_n) une suite (x_{n_k}) qui converge vers un élément x_∞ de K. Puisque la suite $d(x_{n_k}, y_{n_k})$ tend vers 0, on en déduit facilement que la suite (y_{n_k}) converge également vers x_∞. Puisque F est fermée et que x_∞ est limite d'une suite d'éléments de F, il appartient à F. On a trouvé un point qui est à la fois dans K et dans F, contradiction.

Vérifier en écrivant un argument détaillé pour cette convergence.

b. L'énoncé n'est plus vrai si K est seulement supposé fermé : on peut prendre pour contre-exemple, dans le plan, l'axe des abscisses et un graohe qui lui est asymptote comme le graphe de la fonction $1/x$.

2. a. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, montrons d'abord que l'ensemble K_ε est un ouvert. On a vu à l'exercice 27 que l'application $x \mapsto d(x, K)$ est 1-lipschitzienne, et en particulier continue. Or l'ensemble K_ε n'est rien d'autre que l'image réciproque de $]-\infty, \varepsilon[$ par cette application. Puisque $]-\infty, \varepsilon[$ est unouvert de $\mathbb{R}$, on en déduit que K_ε est ouvert, comme voulu.

b. Appliquons la question 1.a au compact K et au fermé $F = X \setminus \Omega$: on en a bien le droit, puisque l'hypothèse $K \subset \Omega$ se traduit alors par $F \cap K = \emptyset$. Notons $d = d(K, F)$. D'après la question 1.1, d est un nombre strictement positif. L'ensemble K_d est alors disjoint de F, donc inclus dans Ω.

Exercice 52.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{\|x\| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$; ceci revient à dire que pour toute suite (x_n) dans $\mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, 0) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty.$$

On dit alors que f est une application *propre*.

1. Donner des exemples d'applications vérifiant cette hypothèse, et d'applications qui ne la vérifient pas.

2. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

3. Application I. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.

4. Application II. Soit ABC un triangle dans le plan. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que la somme des distances de M à A, B et C est minimale.

Corrigé de l'exercice 52.—

1. Les applications $x \mapsto ||x||$, $x \mapsto x^2$ (si $N = 1$) vérifie cette hypothèse. Une application constante, ou juste bornée, ne la vérifie pas.

2. Soit $M > 0$. L'ensemble

$$K = f^{-1}(]-\infty, M]) = \{x \in \mathbb{R}^N | f(x) \leq M\}$$

est un ensemble fermé. Si on a choisi M assez grand, l'ensemble K n'est pas vide (par exemple pour $M = f(0)$, il contient 0). Montrons que K est borné : dans le cas contraire, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de K telle que la suite $d(x_n, 0))_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$; d'après l'hypothèse sur f, on devrait alors avoir $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = +\infty$, or on a pour tout n, $f(x_n) \leq M$, par définition de K.

D'après la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}^N$, le sous-espace K est compact. La restriction de f à K étant continue, elle est minorée et atteint sa borne inférieure dans K : il existe $x \in K$ tel que pour tout $y \in K$, $f(y) \geq f(x)$. Mais x est en fait un minimum de f sur $\mathbb{R}^N$ tout entier : en effet, pour tout $y \notin K$ on a, par définition de K, $f(y) \geq M \geq f(x)$. f est donc minorée par $f(x)$ et atteint sa borne inférieure au point x.

On pourrait donner une preuve différente, en suivant la stratégie suivante. Appelons m la borne inférieure si elle existe (ou posons $m = -\infty$ dans le cas contraire). En utilisant la définition de la borne inférieure, **construire** une suite (x_n) délément de K telle que la suite $(f(x_n))$ tend vers m. Montrer alors que la suite (x_n) est bornée : pour ceci, raisonner par l'absurde ; en supposant que (x_n) n'est pas bornée, **construire** une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que la suite $(d(x_{n_k}, 0))_{k\geq 0}$ tend vers $+\infty$; mais puisque la suite $(f(x_n))$ tend vers $m \neq +\infty$, ceci contredit l'hypothèse sur f. Puisque la suite (x_n) est bornée dans $\mathbb{R}^N$, on peut en extraire une sous-suite qui convergent vers un point x (**pourquoi ?**). Par continuité de f, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$, mais par unicité de la limite on en déduit que $f(x) = m$, ce qu'on voulait.

3. Si P est un polynome constant, le résultat est évident (tout x_0 convient). On suppose donc que $P(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$, avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Il nous suffit de montrer que l'application $x \mapsto |P(x)|$ vérifie l'hypothèse énoncée dans l'exercice : le résultat de la question 2 nous donnera alors l'existence du nombre x_0. Pour évaluer le comportement lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, on écrit, pour $x \neq 0$,

$$|P(x)| = |a_n x^n| \left| \frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 \right|.$$

Le facteur $|a_n x^n|$ tend vers $+\infty$, puisque $n \geq 1$. Dans l'autre facteur, tous les termes tendent vers 0, sauf le dernier qui vaut 1 : ce deuxième facteur tend donc vers 1. Par produit, on voit que $|P(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. L'hypothèse de l'exercice est vérifiée, comme voulu.

4. On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(M) = d(M, A) + d(M, B) + d(M, C).$$

Elle est continue. Munissons le plan de coordonnées et notons $O = (0, 0)$. Lorsque $d(M, O)$ tend vers $+\infty$, chacun des trois termes de la somme définissant notre fonction tend vers $+\infty$, et $f(M)$ tend donc également vers $+\infty$: notre fonction f vérifie l'hypothèse de l'exercice. D'après la question 2, f est minorée et atteint sa borne inférieure, autrement dit il existe un point M qui minimise la somme des distances à A, B et C.

Exercice 53.— On se place dans $C_b([0,1],\mathbb{R})$. Deux variantes au choix :

1. Soit n un entier, dessiner une fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle

$$I_n = \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$$

et qui prend la valeur 1 au milieu de cet intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ pour $n \neq m$? En déduire que la suite (f_n) n'a pas de valeur d'adhérence.

2. Pour tout n, soit $f_n : x \mapsto x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ lorsque m est très grand ? Formaliser. En déduire que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Corrigé de l'exercice 53.—

1. a. Il suffit de prendre une fonction affine par morceaux, avec quatre morceaux : en particulier, sur l'intervalle I_n, la fonction est nulle sur les extrémités, vaut 1 au milieu, et est affine sur chaque moitié de l'intervalle. En ajoutant qu'elle est nulle en dehors de l'intervalle, cette description détermine complètement l'application.

Pour tous entiers n, m, puisque les fonctions f_n et f_m ne prennent que des valeurs entre 0 et 1, on majore facilement la distance $d_\infty(f_n, f_m)$ par 1. Lorsque $n \neq m$, les intervalles I_n et I_m sont deux à deux disjoints. En particulier si on note x_n lemilieu de I_n, qui est aussi l'unique point où f_n vaut 1, on a

$$f_n(x_n) - f_m(x_n) = 1 - 0 = 1.$$

On en déduit $d_\infty(f_n, f_m) \geq 1$, et finalement cette distance vaut 1.

b. Montrons maintenant que dans tout espace métrique (X, d), une suite (x_n) d'éléments qui sont à distance 1 les uns des autres n'admet pas de valeur d'adhérence. Pour ceci, raisonnons par l'absurde. Si ℓ est une valeur d'adhérence, elle est limite d'une suite extraite (x_{n_k}) ; en particulier, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$, on trouve un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $d(\ell, x_{n_k}) < \frac{1}{10}$; mais alors

$$d(x_{n_{k_0}, x_{n_{k_0+1}}}) \leq d(x_{n_{k_0}}, \ell) + d(\ell, x_{n_{k_0+1}}) < \frac{2}{10} < 1$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse portant sur la suite (x_n), puisque $n_{k_0} \neq n_{k_0+1}$ (par définition d'une suite extraite, l'extraction (n_k) est strictement croissante).

2. a. Commençons par expliquer l'idée. Pour un entier n fixé, on peut choisir $x < 1$ très proche de 1, et alors x^n est très proche de 1. Mais si on choisit ensuite m très grand, x^m devient très proche de 0. Ainsi la distance $d_\infty(f_n, f_m)$ est très proche de 1.

Noter que l'ordre des choix (n, puis x, puis m) est crucial dans cet argument.

Formalisons ceci : montrons que pour tout n, on a

$$\lim_{m \to +\infty} d_\infty(f_n, f_m) = 1.$$

Commençons par remarquer que (comme dans la version 1 de l'exercice) les fonctions f_n et f_m prennent toutes leurs valeurs entre 1 et 1, et donc que la distance $d_\infty(f_n, f_m)$ est méjorée par 1.

Soit n un entier. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f_n(1) = 1$ et f_n est continue au point $x = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, x \in]1-\delta, 1] \Rightarrow f_n(x) > 1 - \varepsilon$. En particulier, choisissons un nombre y quelconque dans l'intervalle $]1-\delta, 1]$, on aura

$$(*) \quad f_n(y) > 1 - \varepsilon.$$

Puisque $y \in]0, 1[$, la suite $(y^m)_{m \geq 0}$ tend vers 0 : il existe un entier m_0 tel que

Noter l'ordre des choix des variables de la preuve : n, puis ε, puis y, puis m_0, puis m. Il y a plus de variables que dans le paragraphe précédent, parce qu'on donne plus de détail.

$$(**) \quad \forall m \geq m_0, \quad f_m(y) < \varepsilon.$$

Considérons un $m \geq m_0$. On a alors, en utilisant $(*)$ et $(**)$,

$$f_n(y) - f_m(y) > 1 - \varepsilon - \varepsilon = 1 - 2\varepsilon.$$

On en déduit que pour un tel m, $d_\infty(f_n, f_m) \geq 1 - 2\varepsilon$. Résumons : l'entier n étant fixé, pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $d_\infty(f_n, f_m) \in]1 - 2\varepsilon, 1]$. Ceci montre bien la limite recherchée.

b. Il s'agit maintenant de généraliser la propriété démontré en 1.b : dans un espace métrique X, une suite x_n vérifiant

$$\forall n \geq 0, \lim_{m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 1$$

n'a pas de valeur d'adhérence. Comme avant, on raisonne par l'absurde, en considérant une valeur d'adhérence ℓ, et une suite extraite (x_{n_k}) convergeant vers ℓ : il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $d(x_{n_k,\ell}) < \frac{1}{10}$. Mais d'autre par hypothèse, puisque (n_k) tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_{n_{k_0}}, x_{n_k}) = 1.$$

En écrivant la définition de cette limite, on trouve en particulier un entier k_1 tel que $d(x_{n_{k_0}}, x_{n_{k_1}}) > \frac{9}{10}$. Mais puisque $x_{n_{k_0}}$ et $x_{n_{k_1}}$ sont tous les deux à moins de $\frac{1}{10}$ de ℓ, ceci contredit l'inégalité triangulaire.

Écrire les détails de cette fin de preuve, en particulier l'obtention de k_1.

Exercice 54.— Etant donnés deux polynômes $P(X), Q(X)$ à coefficients réels, on définit $d(P, Q)$ comme le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme $P(X) - Q(X)$. Il est facile de voir que ceci définit une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer, pour tout entiers positifs p, q, la distance de 0 au polynôme X^p, puis la distance entre les deux polynômes X^p et X^q.

2. En déduire que la suite $(X^p)_{p \geq 0}$ d'élements de $\mathbb{R}[X]$ est bornée mais n'admet pas de sous-suite convergente.

3. Montrer que, dans cet espace métrique, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 n'est pas compacte.

Corrigé de l'exercice 54.—

1. On a bien sûr $d(X^p, X^p) = 0$ et, si $p \neq q$, $d(X^p, X^q) = 1$.

2. Cette propriété a été démontré dans la question 1.b de l'exercice 53.

3. Les X^p sont tous à distance 1 du polynôme nul, ils appartiennent donc à la boule fermée de centre 0 et de rayon 1,

$$B = \{P \in \mathbb{R}[X] | d(P, 0) \leq 1\}.$$

On a construit une suite d'éléments de B qui n'admet pas de valeur d'adhérence, ceci montre que B n'est pas compact.

Cet exercice est une variante du précédent : on montre que dans un espace métrique quelconque, un fermé borné n'est pas nécessairement compact, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}^N$.

Exercice 55.— (partiel 2012) Soit X un espace métrique compact, et A une partie de X. On suppose que A est *localement finie* : pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A.

1. Montrer que A ne contient qu'un nombre fini de points.

2. (*) Montrer que le résultat ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

Corrigé de l'exercice 55.—

1. Pour chaque x de X, notons $\varepsilon(x)$ le nombre fournit par l'hypothèse sur A, qui est tel que la boule $B(x, \varepsilon(x))$ ne contient qu'un nombre fini de point de A. La famille

$$\mathcal{F} = \{B(x, \varepsilon(x)) | x \in X\}$$

est un recouvrement de X par des ouverts : en effet, ses éléments sont des boules ouverts (et donc des ouverts de X), et tout point x de X est dans au moins l'un des éléments de la famille, à savoir la boule $B(x, \varepsilon(x))$.

Puisque X est compact, on peut appliquer le théorème de Borel-Lebesgue : il existe une partie finie de $\mathcal{F}$ qui est encore un recouvrement ; autrement dit, il existe un certain nombre N et des éléments $x_1, \ldots, x_N$ de X tels que

$$X \subset B(x_1, \varepsilon(x_1)) \cup \cdots \cup B(x_N, \varepsilon(x_N)).$$

Puisque A est une partie de X, on en déduit que

$$A = (A \cap B(x_1, \varepsilon(x_1))) \cup \cdots \cup (A \cap B(x_N, \varepsilon(x_N))) .$$

Mais chacune des boules $B(x_i, \varepsilon(x_i))$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A, autrement dit chacun des ensembles $A \cap B(x_i, \varepsilon(x_i))$ est fini. L'égalité précédente fait donc apparaitre A comme une réunion finie d'ensembles finis. On en déduit que A est un ensemble fini.

2. Considérons, dans l'espace $X = [0, 1]$, la partie $A = \{\frac{1}{n} | n > 0\}$. Pour tout entier $n > 0$, la boule

Montrer que le résultat ne tient plus, c'est construire un contre-exemple.

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right) = \left]\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right[$$

ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A (par exemple, parce que la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0, donc à partir d'un certain rang tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $]-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}[$, intervalle qui est disjoint de notre boule). On a donc bien que tout point de A est centre d'une boule qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A. Cependant, l'ensemble A contient une infinité d'éléments. Bien sûr, A n'est pas localement fini au sens de la question 1, puisqu'il n'y a aucune boule de centre 0 qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A.

Exercice 56.— 2 Trouver l'erreur dans la réponse suivante à la première question de l'exercice précédent. *Par hypothèse, pour tout x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $B(x, \varepsilon) \cap A$ ne contient qu'un nombre fini de points. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_k, \varepsilon)$. On a*

$$A \subset A \cap B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup A \cap B(x_k, \varepsilon)$$

et puisque A est une réunion finie d'ensembles finis, il ne contient qu'un nombre fini de points.

Corrigé de l'exercice 56.— Le (gros !!) problème est que le nombre ε donné dans la définition de “localement fini” dépend du point x. On le voit bien, d'ailleurs, dans l'exemple construit dans la question 2 de l'exercice : pour tout élément $\frac{1}{n}$ de A il existe une boule centré en cet élément qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A, mais on ne peut pas choisir le même rayon pour tous les éléments, puisque les éléments tendent vers 0 et on veut que la boule ne touche pas 0.

La même difficulté survient dans toute propriété du type

$$\forall x \quad \exists \varepsilon \quad \ldots$$

La plupart du temps, on utilise ce type de propriété pour un seul x à la fois, il n'y a donc pas de risque à ne pas faire apparaitre explicitement le fait que ε dépende de x. Mais si on a besoin de considérer plusieurs x à la fois, et les ε associés, alors il faut absolument prendre des notations adaptées. C'est ce qu'on a fait dans le corrigé de l'exercice en notant $\varepsilon(x)$.

Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas d'erreur ou d'imprécision dans l'énoncé, c'est juste que dans un discours, chaque nouvel objet dépend des objets introduits auparavant (sauf mention explicite du contraire).

III.3 Compléments et challenges

Exercice 57.— Montrer que l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux est dense dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$. *Aide : utiliser la continuité uniforme.*

Corrigé de l'exercice 57.— Au vu de la définition de la densité, nous considérons une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, nous fixons un $\varepsilon > 0$, et il s'agit de trouver une fonction g, continue et affine par morceaux, telle que $d_\infty(f, g) < \varepsilon$.

Puisque $[0, 1]$ est compact, la fonction f est uniformément continue (théorème de Heine). A notre ε correspond donc un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons maintenant un entier N assez grand pour que $\frac{1}{N} < \delta$. On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en N intervalles de même taille, et on approche f par une fonction affine sur chacun de ces intervalles et qui coincide avec f aux bornes de ces intervalles. Autrement dit, g est l'unique fonction qui est affine sur chaque intervalle du type

$$I_i = \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$$

et telle que $g(\frac{i}{N}) = f(\frac{i}{N})$ pour tout $i = 0, \ldots, N$. Remarquons dès à présent que le fait suivant, qui nous sera utile pour la suite. Fisons un entier i entre 0 et N. Puisque la largeur de chacun des intervalles I_i de la subdivision est inférieure à δ, on a

$$\left| f\left(\frac{i}{N}\right) - f\left(\frac{i+1}{N}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque g est affine sur l'intervalle I_i et coincide avec f aux bornes, toutes les valeurs qu'elle prend sur cet intervalle sont comprises entre $f(\frac{i}{N})$ et $f(\frac{i+1}{N})$. Par conséquent on a aussi

$$\left| g(x) - f\left(\frac{i}{N}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout x dans I_i.

Il reste à vérifier que $d_\infty(f,g) < \varepsilon$. On se fixe un $x \in [0,1]$, et on cherche à majorer $|f(x) - g(x)|$. Soit i un entier tel que

$$x \in \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right].$$

et notons $x_i = \frac{i}{N}$. Puisque l'intervalle est de taille $\frac{1}{N} < \delta$, on a

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après ce qui précède, on a aussi

$$|g(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci suffirait pour conclure à la densité, mais remarquons qu'on a en fait l'inégalité stricte

$$d_\infty(f,g) < \varepsilon$$

que l'on recherchait. En effet, la fonction $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ est continue sur $[0,1]$, elle atteint donc sa borne supérieure, ce qui veut dire qu'il existe un nombre $x_0 \in [0,1]$ pour le quel

$$|f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g).$$

Or on a montré que

$$|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

puisque c'est vrai pour tout x de l'intervalle $[0,1]$. Ceci conclut notre preuve.

Exercice 58.— (Une autre preuve du lemme de Lebesgue) On se place sous les hypothèses du lemme de Lebesgue, c'est-à-dire qu'on considère un recouvrement d'un espace métrique compact X par des ouverts $U_i, i \in I$. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$R(x) = \sup\{r > 0, \exists i \in I, B(x,r) \subset U_i\}.$$

1. Faire un dessin. Montrer que cette formule définit une fonction de X dans $]0, +\infty[$, et que cette fonction est continue (elle est même 1-lipschiptzienne). **2.** En déduire une nouvelle preuve du lemme.

Corrigé de l'exercice 58.— **1.** Dans le but de montrer que R est 1-lipschitzienne, considérons deux points x, y de X. Montrons alors que

$$(*) \qquad R(y) \geq R(x) - d(x,y).$$

En effet, l'inégalité est évidente lorsque le second membre est négatif ou nul. Supposons donc $R(x) - d(x,y) > 0$, choisissons un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $R(x) - d(x,y) - \varepsilon$ soit encore strictement positif, et posons $r = R(x) - \varepsilon - d(x,y)$. Alors

$$B(y,r) \subset B(x, R(x) - \varepsilon).$$

Faire un dessin, puis **vérifier** ce point.

Or par définition de $R(x)$ et de la borne supérieure, il existe $i \in I$ tel que $B(x, R(x) - \varepsilon) \subset U_i$. On a donc $B(y,r) \subset U_i$, ce qui prouve que $R(y) \geq r = R(x) - \varepsilon - d(x,y)$. Comme cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on en déduit que $R(y) \geq R(x) - d(x,y)$, ce qui termine la preuve de $(*)$.

Bien sûr, par symétrie, on obtient l'inégalité $R(x) \geq R(y) - d(x,y)$, et donc

$$-d(x,y) \leq R(x) - R(y) \leq d(x,y)$$

ce qui prouve que R est 1-lipschitzienne. En particulier, R est continue.

2. Notons que puisque $\{U_i | i \in I\}$ recouvre X, tout point x de X est dans au moins l'un des ouvert U_i, et par définition d'un ouvert il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$: cette remarque montre que $R(x) > 0$ pour tout x. Maintenant puisque R est continue sur un espace compact, elle atteint sa borne inférieure ; et puisque $R(x) > 0$ pour tout x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $R(x) \geq \varepsilon$.

Une fonction continue sur un compact, et qui ne prend que des valeurs strictement positives, est minorée par un nombre $\varepsilon > 0$.

Alors par définition de la fonction R, pour tout x dans X, il existe $i \in I$ tel que

$$B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U_i.$$

Autrement dit, le nombre $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ vérifie la conclusion du lemme de Lebesgue.

Exercice 59.— *(Cet exercice ne sera pas corrigé !)*(produit infini d'espaces compacts) Soit X un espace métrique compact. On munit l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to X\}$ de la distance suivante :

$$\delta(u, v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \min(1, d(u(k), v(k)))$$

1. Vérifier que la formule définissant δ a un sens, et que δ est effectivement une distance.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ et soit $u \in X^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(u_n, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} d(u_n(k), u(k)) = 0.$$

3. Montrer que $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ est compact.

4. Montrer que U est un ouvert de $(X^{\mathbb{N}}, \delta)$ si et seulement si pour tout x dans U, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et un réel strictement positif α vérifiant :

$$\forall y \in X^{\mathbb{N}}, \forall j \in J, \quad d(y(j), x(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U.$$

IV Connexité

IV.1 Assimilation du cours

Exercice 60.—

1. Montrer que l'image d'un espace métrique connexe par arcs par une application continue est un espace métrique connexe par arcs *(indication : on commencera par introduire des notations et préciser les hypothèses).*

2. En déduire que la connexité par arcs est une propriété invariante par homéomorphisme *(même indication).*

Corrigé de l'exercice 60.— **1.** Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application continue. On suppose que X est connexe par arcs. Nous voulons montrer que $f(X)$ l'est également.

Soient y, y' deux points de $f(X)$. Par définition de $f(X)$, il existe x, x' deux points de X tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Puisque X est connexe par arcs, il existe un chemin qui joint x à x', c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = x'$.

Nous voulons vérifier la définition de la connexité par arcs dans $f(X)$, définition qui commence par "$\forall y, y' \in f(X)$", d'où le début de notre preuve. Si votre démonstration commence par considérer deux points de X, elle n'est probablement pas correcte...

Considérons alors l'application $f \circ \gamma$. C'est un chemin de y à y' dans $f(X)$ (**Vérifier !**). Ceci prouve que $f(X)$ est connexe par arcs.

2. Soient X, d_X et Y, d_Y deux espaces métriques, et $h : X \to Y$ un homéomorphisme. Nous voulons voir que X est connexe par arcs si et seulement si Y l'est. Si X est connexe par arcs, alors $f(X)$ aussi d'après la question précédente (en effet h est continue), mais $h(X) = Y$ puisque un homéomorphisme est surjectif. Et réciproquement, si Y est connexe par arcs alors X l'est aussi, puisque h^{-1} est également une application continue surjective.

Exercice 61.— Montrer que la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 61.— Soit X un espace métrique, et A et B deux parties de X que l'on suppose d'intersection non vide et connexes par arcs. Montrons que $A \cup B$ est aussi connexe par arcs. Pour ceci, on prend deux points x, y de $A \cup B$. Si les points sont tous les deux dans A, alors A étant connexe par arcs, il existe un chemin γ joignant x à y ; a fortiori γ un un chemin dans $A \cup B$. Le même argument marche si les points sont tous les deux dans B. Traitons maintenant le cas où x est dans A et y est dans B (le dernier cas restant est symétrique).

Par hypothèse, il existe un point z dans $A \cap B$. Puisque A est connexe par arcs et puisque x, z appartiennent à A, il existe un chemin γ_1 joignant x à z. Puisque B est connexe par arcs et puisque z, y appartiennent à B, il existe un chemin γ_2 joignant z à y. Comme γ_2 commence là où finit γ_1, on peut concaténer les deux chemins. Le chemin concaténé $\gamma_1 \star \gamma_2$ joint x à y dans $A \cup B$. Ceci achève de montrer que $\alpha \cup B$ est connexe par arcs.

IV.2 Exercices de niveau standard

Exercice 62.— (critère pratique de connexité) La caractérisation suivante de la connexité est très utile : *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.* Démontrer cette caractérisation.

Corrigé de l'exercice 62.— Remarquons que l'espace métrique $\{0,1\}$ (qui est muni de la distance en tant que sous-espace de $\mathbb{R}$) n'a que quatre parties : $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$; ces quatre parties sont ouvertes. Montrons le sens direct. On suppose que X est connexe. On considère une application continue $f : X \to \{0,1\}$. On veut montrer que cette application est constante. Soient $O_0 = f^{-1}(\{0\})$, $O_1 = f^{-1}(\{1\})$. C'est une partition[11] de X en deux ouverts (**Vérifier !**). Puisque X est supposé connexe, il n'admet pas de partition en deux ouverts non vides ; on en déduit que l'un des deux ouverts O_0, O_1 est vide. Si O_0 est vide, cela signifie que f est constante égale à 1 ; de même, si O_1 est vide, alors f est constante égale à 0.

Vérifier que ces quatre parties sont ouvertes. L'espace $\{0,1\}$ est l'exemple le plus simple d'espace non connexe, avec sa partition en deux ouverts $\{0\} \cup \{1\}$.

Montrons la réciproque. On raisonne par contrapposée : on suppose que X n'est pas connexe, et on veut construire une application continue $f : X \to \{0,1\}$ qui n'est pas constante. Par hypothèse, il existe une partition de X en deux ouverts non vides O_0, O_1. On définit une application f en décidant que pour tout point x de X, $f(x) = 0$ si x appartient à O_0 et $f(x) = 1$ si X appartient à O_1 (cette définition est valide parce que O_0 et O_1 forment une partition de X). Puisque ni O_0 ni O_1 ne sont vides, cette application n'est pas constante. Il reste à vérifier qu'elle est continue. On utilise le critère topologique : il suffit de vérifier que l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est un ouvert de X. L'espace $\{0,1\}$ a quatre ouverts, et on a

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad ; \quad f^{-1}(\{0\}) = O_0 \quad ; \quad f^{-1}(\{1\}) = O_1 \quad ; \quad f^{-1}(\{0,1\}) = X.$$

Ces quatre parties de X sont des ouverts de X. Donc f est continue. Ceci termine la preuve du critère.

Exercice 63.— **1.** Montrer que le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I est une partie connexe par arcs du plan. **2.** Montrer que le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas connexe par arcs, ni même connexe.

Corrigé de l'exercice 63.—

1. Par définition, le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in I\}.$$

11. Rappelons qu'une partition de X est un ensemble de parties de X qui sont deux à deux disjointes et dont l'union est égale à X.

Or l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \Gamma \\ x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

est continue.[12] Son image est Γ. Puisque l'intervalle I est connexe par arcs, et que l'image d'un espace connexe par arcs est connexe par arcs, on en déduit que Γ est connexe par arcs.

2. Le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est

$$\Gamma = \{(x, \frac{1}{x}) | x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Soient O^- et O^+ les demi-plans ouverts définis respectivement par les inéquations $x < 0$ et $x > 0$ (situés de part et d'autres de l'axe des ordonnés). Alors Γ est inclus dans $O^- \cup O^+$, et rencontre O^- et $O^=$. On peut donc écrire

$$\Gamma = (\Gamma \cap O^-) \cup (\Gamma \cap O^+)$$

et les ensembles $\Gamma \cap O^-, \Gamma \cap O^+$ forment une partition de Γ en deux ouverts non vides. Ceci montre que Γ n'est pas connexe.

Exercice 64 (à rédiger pour le devoir numéro 3).— On rédigera seulement la question 1

1. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe au cercle unité du plan. *On rédigera tous les détails, par exemple en suivant l'idée que voici :(1) le segment* $[0, 1]$ *privé du point* $\frac{1}{2}$ *n'est pas connexe par arcs ; (2) le cercle privé de n'importe quel point est connexe par arcs ; (3) l'existence d'un homéomorphisme entre* $[0, 1]$ *et le cercle conduit à une contradiction.*

2. Montrer, avec la même méthode, que la droite $\mathbb{R}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Corrigé de l'exercice 64.—

1. On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité. On suit le schéma suggéré dans l'énoncé. Commençons par le troisième point, en supposant montré les deux premiers. Supposons donc qu'il existe un homéomorphisme $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$, et considérons le point $a = \Phi(\frac{1}{2})$ du cercle. D'après le point (2), $\mathbb{S}^1 \setminus \{a\}$ est connexe par arcs. Puisque Φ est bijective, on a $\Phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{a\}) = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}$, qu in'est pas connexe par arcs d'après le point (1). Ceci contredit la propriété du cours : l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Le point (1) suit essentiellement du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : en effet si $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ était connexe par arcs, alors il existerait en particulier une courbe $\gamma : [0, 1] \to [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ joignant les points 0 et 1. La courbe γ est une application continue, on a $\gamma(0) = 0 < 1/2$ et $\gamma(1) = 1 > 1/2$ et $\gamma(t) \neq 1/2$ pour tout t, ceci contredit le TVI.

12. De façon générale, pour tous espaces métriques X, Y, Z, si on se donne deux applications $f : X \to Y$ et $g : X \to Z$, alors on peut considérer l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$, qui va de X dans $Y \times Z$. Exercice : montrer que cette application est continue si et seulement si f et g sont continues.

Pour le point (2), fixons un nombre réel y, et considérons l'appplication γ_y

$$\begin{array}{rcl}]y, y+1[& \longmapsto & Y \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t}. \end{array}$$

C'est une application continue de $]y, y+1[$, qui est connexe par arcs, vers le cercle $\mathbb{S}^1$. Son image est donc connexe par arcs, or

$$\gamma_y(]y, y+1[) = \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{2i\pi y}\}.$$

Ceci montre que pour tout y, le cercle privé du point $e^{2i\pi y}$ est connexe par arcs, comme voulu.

2. L'argument général est le même que pour la première question : on montre que le complémentaire d'un point dans le plan est connexe, alors que le complémentaire d'un point dans la droite ne l'est pas. Pour les détails, la non connexité de $]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ est très facile à montrer. Pour le premier point, soit P un point du plan, on veut montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ est connexe. Il suffit de montrer qu'il est connexe par arcs. Soient A, B deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, il s'agit de trouver un chemin joignant A à B dans le complémentaire de P. On distingue deux cas. (1) Si $P \notin [A, B]$, alors le chemin

$$t \mapsto tB + (1-t)A$$

joint A à B dans le complémentaire de P. (2) Sinon, on choisit un point C hors de la droite (A, B), et on joint A à B en concaténant le segment de A à C et le segment de C à B.

Exercice 65.— (Version en dimension un du théorème de Borsuk-Ulam). On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de centre 0 dans le plan ; on le voit comme un sous-espace métrique du plan. Soit f une application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points du cercle, diamétralement opposés, qui ont la même image par f. *Aide : utiliser la connexité du cercle et la fonction auxiliaire définie par $g(v) = f(v) - f(-v)$ (noter que v et $-v$ sont diamétralement opposés).*

Corrigé de l'exercice 65.— Avec l'introduction de l'application g, le problème devient : montrer qu'il existe un point v du cercle en lequel g s'annule. Un point important consiste à remarquer que pour tout point v du cercle, $g(-v) = -g(v)$.

L'application g est continue du cercle dans $\mathbb{R}$. Puisque le cercle est connexe, l'image de g est aussi connexe ; or les connexe de la droite sont les intervalles, donc l'image de g est un intervalle. Nous voulons montrer que g s'annule quelque part, c'est-à-dire que son image contient 0.

Soit v_0 un point quelconque du cercle. Supposons par exemple que $g(v) \geq 0$. Alors $g(-v) = -g(v) \leq 0$. Puisque l'image de g est un intervalle qui contient un nombre positif et un nombre négatif, il contient 0, ce qu'on voulait. La preuve est bien sûr analogue qi $g(v) \leq 0$.

Exercice 66.— 2(Examen deuxième session 2014-2015, extrait) La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

Corrigé de l'exercice 66.— **Essayer** avec $[0, 1]$ et $]1, 2]$.

Exercice 67.— 2 Montrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe *(indication : utiliser le bon critère... Voir le poly !)*

Corrigé de l'exercice 67.— Soit A une partie connexe d'un espace métrique X, il s'agit de montrer que $\mathrm{Adhe}(A)$ est connexe. On utilise le critère pratique suivant : *X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Vu le critère, on considère une fonction $f : \mathrm{Adhe}(A) \to \{0, 1\}$, et on veut montrer que f est constante. L'ensemble A est connexe, et la restriction $f_{|A}$ de f à A est continue. D'après le critère, $f_{|A}$ est constante. Pour fixer les idées, supposons que $f(x) = 0$ pour tout x dans A (le cas où f vaut 1 sur A est tout à fait analogue). Montrons alors que $f(x) = 0$ pour tout x dans $\mathrm{Adhe}(A)$, ce qui terminera la preuve de la connexité de $\mathrm{Adhe}(A)$.

La restriction d'une application continue est continue (propriété très facile à montrer).

On peut donner deux rédactions de cette propriété. Première rédaction. On considère un point x de $\mathrm{Adhe}(A)$; d'après le critère séquentiel de l'adhérence, il existe une suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers x ; or f s'annule sur A : on a $f(x_n) = 0$ pour tout n. D'autre part puisque f est continue et que (x_n) tend vers x, le critère séquentiel de continuité nous dit que $f(x_n)$ tend vers $f(x)$; on a donc $f(x) = 0$, comme voulu.

Deuxième rédaction. L'ensemble $F = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathrm{Adhe}(A)$ (**pourquoi ?**) donc aussi un fermé de X car $\mathrm{Adhe}(A)$ est fermée. Puisque f s'annule sur A, F contient A. Puisque F est un fermé contenant A, il contient $\mathrm{Adhe}(A)$ (l'adhérence de A est le plus petit fermé de X contenant A). Donc f s'annule sur l'adhérence de A.

Lorsque Y est une partie fermée de X, une partie du sous-espace Y est fermée dans Y si et seulement si elle est fermée dans X. Voir l'exercice 14.

IV.3 Compléments et challenges

Exercice 68.— Montrer qu'un ouvert connexe O de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. *Aide : on pourra considérer les composantes connexes par arcs de O.*

Corrigé de l'exercice 68.— Rappelons que les composantes connexes par arcs de O forment une partition de O. Le principe de la preuve est de montrer que les composantes connexe par arcs de O sont des ouverts de O. Soit C une telle composante connexe par arcs. Puisque les composantes connexes par arcs forment une partition de O, on a

$$C = O \setminus \bigcup \{C' | C' \text{ composante connexe de } O \text{ distincte de } C\}$$

Toute réunion d'ouverts étant un ouvert, la réunion dans l'égalité ci-dessus, est un ouvert de O, ce qui montre que C est un fermé de O. L'ouvert O étant connexe, C étant à la fois ouvert et fermé dans O, et non vide, il est égal à O. Ceci montre que O est connexe par arcs.

Il reste à montrer que toute composante connexe par arcs de O est ouvert de O. Soit x un point de O, et notons C la composante connexe par arcs de O contenant x. Soit y un point de C. Puisque O est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset O$. Soit z un point de $B(y, r)$, le segment $[yz]$ est inclus dans $B(y, r)$. **En déduire** qu'il existe un chemin joignant x à z dans O. Autrement dit, le point z est également dans C. Ceci montre que la boule $B(y, r)$ est incluse dans C. On a montré que C est un ouvert de O.

Exercice 69.— *Cet exercice ne sera pas corrigé !* On note A le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle du type $]0, \pi]$.

1. Montrer que sur n'importe quel intervalle du type $[1/(a+2\pi), 1/a]$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1. Dessiner le graphe au-dessus d'un intervalle de ce type lorsque x est très proche de 0.

2. Montrer que $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\} \times [-1, 1]$.

3. Montrer que A est connexe par arcs. En déduire que $\bar{A}$ est connexe.

4. Pour montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs, on raisonne par l'absurde, en considérant un chemin $\gamma : [0, 1]\ to \bar{A}$ allant du point du graphe d'absisse π à un point $(0, 0)$ du segment vertical ; on note $\gamma_x(t), \gamma_y(t)$ les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans le plan.

a. Montrer qu'il existe $\tau \geq 0$ tel que le point $\gamma(t) = (0, y_0)$ est sur le segment vertical mais tous les points $\gamma(t)$ avec $t < \tau$ sont sur le graphe.

b. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, et $x = \gamma_x(\tau - \varepsilon)$. Montrer qu'il existe $t \in [\tau - \varepsilon, t_0]$ tel que

$$\frac{1}{\gamma_x(t)} = \frac{1}{x} + 2\pi.$$

c. En déduire que pour tout point $(0, \alpha)$ du segment, il existe une suite (t_n) décroissante et convergeant vers τ telle que la suite $(\gamma_y(t_n))$ converge vers $(0, \alpha)$.

d. Conclure en montrant que γ ne satisfait pas le critère de continuité séquentiel en τ.

V Espaces vectoriels normés

V.1 Assimilation du cours

Exercice 70.— Montrer que, pour tout vecteur v dans un espace vectoriel normé E, la translation $x \mapsto x + v$ est une isométrie (elle est donc en particulier continue !).

Corrigé de l'exercice 70.— Ceci découle de l'égalité

$$||(x+v)-(y+v)|| = ||x-y||.$$

Exercice 71.—

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Le produit cartésien $E \times F$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Montrer que l'application

$$N_\infty : (u, v) \mapsto \max(\|u\|_E, \|v\|_F)$$

est une norme sur $E \times F$. *On indiquera soigneusement toutes les propriétés utilisées.*

Remarquons que la distance associé à cette norme sur $E \times F$ est une distance produit (voir le chapitre 1 du poly). En particulier, on a toutes les propriétés topologiques de la distance produit : les ouverts sont les réunions de pavés ouverts, les suites convergentes sont les couples de suites convergentes.

Corrigé de l'exercice 71.— Rappelons que la structure produit sur $E \times F$ est définie par les égalités $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ et $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$.
1. L'axiome de séparation se vérifie très facilement : $N_\infty(u, v) = 0$ signifie $\max(\|u\|_E, \|v\|_F) = 0$, et donc $||u||_E \leq 0$ et $||v||_F \leq 0$, d'où $||u||_E = 0$ et $||v||_F = 0$ puisque la norme d'un vecteur est positive, et on conclut que $u = v = 0$ grâce à l'axiome de séparation pour les normes sur E et F. **2.** De même, l'axiome d'homogénéité découle facilement de l'homogénéité des normes sur E et F, et de l'égalité $\max(\lambda x, \lambda y) = \lambda \max(x, y)$, valable pour des nombres x, y quelconques et $\lambda \geq 0$. **3.** Vérifions enfin l'inégalité triangulaire. On prend deux éléments (u, v) et (u', v') de $E \times F$, et on veut comparer $N_\infty((u, v) + (u', v'))$ à $N_\infty((u, v)) + N_\infty((u', v'))$. On écrit

On peut donner plus de détail en justifiant cette propriété sur le max, en utilisant le fait que la multiplication par un nombre $\lambda \geq 0$ ne change pas le sens des inégalités.

$$\begin{array}{rcl} N_\infty((u,v)+(u',v')) & = & \max(\|u+u'\|_E, \|v+v'\|_F) \\ & \leq & \max(\|u\|_E + \|u'\|_E, \|v\|_F + \|v'\|_F) \\ & \leq & \max(\|u\|_E, \|v\|_F) + \max(\|u'\|_E, \|v'\|_F) \\ & = & N_\infty((u,v)) + N((u',v')) \end{array}$$

où on a utilisé successivement l'inégalité triangulaire dans E et F, et les propriétés suivantes du max : (1) si $A \leq A'$ et $B \leq B'$ alors $\max(A, B) \leq \max(A', B')$, et (2) $\max(A + A', B + B') \leq \max(A, B) + \max(A', B')$: pour vérifier cette dernière

Voyez-vous à quelles valeurs de A, A', B, B' on a appliqué la propriété (1) ?

inégalité, on commence par écrire que $A \leq \max(A, B)$ et $A' \geq \max(A', B')$, d'où $A + A' \leq \max(A, B) + \max(A', B')$, on majore de façon analogue $B + B'$ par la même quantité, d'où la majoration de $\max(A+A', B+B')$ par la même quantité.

Exercice 72.— **1.** Montrer, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| .$$

2. Interpréter cette inégalité en termes d'application lipschitzienne.

Corrigé de l'exercice 72.—

1. On écrit d'abord

$$||x|| = ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y||,$$

ce qui donne $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$. On obtient symétriquement $||x|| - ||y|| \leq ||y - x||$ (noter que $||y - x|| = ||x - y||$). Puisqu'on a majoré $||x|| - ||y||$ et $||y|| - ||x||$ par $||x - y||$, on obtient une majoration du maximum de ces deux nombres par $||x - y||$, et ce maximum est égal à $| \|x\| - \|y\| |$ par définition de la valeur absolue.

2. Cette inégalité nous dit que l'application $x \mapsto ||x||$, qui va de E dans $\mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne (où E est muni de la distance associée à la norme, et $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle). En particulier, la norme est une application continue.

Exercice 73.— Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes dans $E, \|.\|$. **1.** Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est convergente et donner sa limite. **2.** Si (λ_n) est une suite convergente de réels, montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge et donner sa limite. **3.** Ces deux résultats s'interprètent en disant que deux application sont continues, de quelles applications s'agit-il ? **4.** En déduire que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Corrigé de l'exercice 73.—

1. Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace vectoriel normé E convergent respectivement vers x et y. On veut montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + y$. Pour ceci, on écrit, pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq ||(u_n + v_n) - (x + y)|| \leq ||u_n - x|| + ||v_n - y||.$$

Par hypothèse les suites réelles $(||u_n - x||)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(||v_n - y||)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0. Par comparaison, on en déduit que la suite $(||(u_n + v_n) - (x + y)||)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0, ce qu'on voulait.

2. De même, en notant λ la limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on écrit pour tout $n \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq ||\lambda_n u_n - \lambda x|| & = & ||\lambda_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda x|| \\ & \leq & ||\lambda_n u_n - \lambda u_n|| + ||\lambda u_n - \lambda x|| \\ & = & |\lambda_n - \lambda| \; ||u_n|| + |\lambda| \; ||u_n - x||. \end{array}$$

Les suites réelles $(\lambda_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(||u_n - x||)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite $(||u_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $||x||$ (puisque la norme est une application continue, voir l'exercice précédent !). Par opération sur les limites, on en déduit que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0, et par comparaison celui de gauche aussi. On en déduit que la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λx.

3. On vient de vérifier le critère séquentiel de continuité pour les applications

$$\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda u. \end{array}\right.$$

Retenons donc que les opérations d'espace vectoriel sont continues.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E, montrons que $\text{Adhe}(F)$ est également un sous-espace vectoriel. Soient $x, y \in \text{Adhe}(F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il s'agit de voir que $x + \lambda y$ est encore élément de $\text{Adhe}(F)$. Par le critère séquentiel pour l'adhérence, il existe deux suite (x_n), (y_n) de E qui convergent respectivement vers x, y. D'après ce qui précède, la suite $(x_n + \lambda y_n)$ converge vers $x + \lambda y$. Mais puisque F est un sous-espace vectoriel, c'est une suite d'éléments de F. On en déduit que $x + \lambda y$ est bien un élément de l'adhérence.

Exercice 74.— 3 Soit E un espace vectoriel normé. On veut montrer que le seul sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide est E. Pour ceci, on considère un sous-espace vectoriel F.

1. On suppose que F contient une boule $B(x,r)$. Montrer que F contient alors la boule $B(0,r)$.

2. En déduire que $F = E$.

Corrigé de l'exercice 74.— On note que si F est d'intérieur non vide, par définition il contient un ouvert non vide, donc une boule $B(x,r)$ pour un certain $v \in E$ et un certain $r > 0$.

1. On peut écrire

$$B(x,r) = \{y| \ \ ||y - x|| < r\} = \{x + v| \ \ ||v|| < r\}.$$

Soit v un vecteur de norme $< r$. Alors le sous-espace vectoriel F contient la boule $B(x,r)$ qui contient à la fois $x + v$ et x, donc il contient aussi leur différence $x + v - x = v$. F contient tout vecteur de norme $< r$, autrement dit il contient la boule $B(0,r)$.

2. Etant donné un vecteur v quelconque dans E, on peut toujours écrire v comme un multiple d'un vecteur de la boule $B(0,r)$: on cherche un nombre $\alpha > 0$ tel que $v = \alpha v'$ avec v' un vecteur de norme $\frac{r}{2}$, ce qui donne $\alpha = ...$ (**compléter !**). Puisque v' est appartient à la boule $B(0,r)$, donc aussi à F, et que F est un sous-espace vectoriel, on en déduit que v appartient aussi à F.

Exercice 75.— (Transport de norme) Soit $f : E \to F$ une application linéaire et N une norme sur F. A quelle condition l'application $N \circ f$ est-elle une norme sur E ?

Corrigé de l'exercice 75.— On suppose que $N \circ f$ est une norme, et on cherche les contraintes que cela impose à f.

Commençons par l'homogénéité. Pour tout vecteur v de E et $\lambda > 0$, on a

$$N(f(\lambda v)) = N(\lambda f(v)) = |\lambda| N(f(v)),$$

donc l'axiome d'homogénéité est toujours vérifiée (elle n'impose aucune contrainte sur f).

Regardons l'inégalité triangulaire. Soient u, v deux vecteurs, on a

$$N(f(u+v)) = N(f(u) + f(v)) \leq N(f(u)) + N(f(v))$$

donc là encore, on ne trouve aucune contrainte : $N \circ f$ vérifie toujours l'inégalité triangulaire.

Il reste l'axiome de séparation. Etant donné un vecteur v de E, supposons $N(f(v)) = 0$. On a alors $f(v) = 0$ puisque la norme N vérifie l'axiome de séparation. **Si on suppose f injective**, alors on en déduit $v = 0$, et $N \circ f$ vérifie l'axiome de séparation. Inversement, si f n'est pas injective, il existe un vecteur non nul v de E tel que $f(v) = 0$, on a alors $N(f(v)) = 0$, ce qui contredit l'axiome de séparation.

Bilan : $N \circ f$ vérifie toujours les axiomes d'homogénéité et d'inégalité tringulaire ; elle vérifie l'axiome de séparation si et seulement si f est injective ; c'est donc aussi la condition nécessaire et suffisante pour que ce soit une norme sur E.

Exercice 76.— 3

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver par un calcul direct un nombre m tel que, pour tout vecteur x, $\|Ax\|_\infty \leq m \|x\|_\infty$.

2. Trouver un vecteur x, de norme 1, pour lequel l'inégalité précédente est une égalité.

3. En déduire la norme matricielle de A.

Corrigé de l'exercice 76.— Soit $x = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (noté en ligne pour plus de lisibilité), on a $Ax = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2)$. On a $||Ax||_\infty = \max(|x_1 + 2x_2|, |3x_1 + 4x_2|)$, et pour majorer cette quantité il suffit de majorer chacun des deux termes du max. Or

$$|x_1 + 2x_2| \leq |x_1| + 2|x_2| \leq 3||x||_\infty$$

et de même, $|3x_1 + 4x_2| \leq 7||x||_\infty$. Donc $||Ax||_\infty \leq 7||x||_\infty$.

1. Le vecteur $(1,1)$ convient, puisque sa norme est 1, et son image est $(3,7)$ dont la norme est 7.

On cherche un vecteur pour lequel les inégalités de la réponse à la question 1 sont des égalités.

2. Par définition, la norme matricielle est

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}.$$

La première question nous dit que le quotient entrant dans cette définition est toujours ≤ 7, donc le sup l'est aussi : on a $|||A||| \leq 7$. La seconde question nous dit qu'il existe un vecteur x pour lequel le quotient vaut 7, donc le sup est ≥ 7. Finalement, $|||A||| = 7$.

Exercice 77.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 77.— D'après le cours, il suffit de montrer que la série est absolument convergente, autrement dit que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} ||M||^{2n} \qquad (*)$$

converge. En effet, l'espace des matrices est un espace de Banach, la convergence absolue entraine la convergence de la série, qui définit donc un élément $\Phi(M)$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Pour montrer cette convergence absolue, on a le choix de la norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (c'est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes). On peut donc choisir une norme d'opérateur, qui satisfait l'inégalité $||MN|| \leq ||M||\ ||N||$. Alors le terme général de la série $(*)$ est majoré par $\frac{1}{(2n)!}\alpha^{2n}$ avec $\alpha = ||M||$.

Il s'agit donc maintenant d'un problème sur les séries réelles à termes positifs, à savoir montrer que pour tout nombre α, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \alpha^{2n}$$

converge. On peut démontrer ceci en majorant le terme général par une suite géométrique. Soit $n_0 > \alpha$. Pour tout entier $n > n_0$, on a

$$\frac{1}{(2n)(2n+1)} \alpha^2 < \frac{1}{4}.$$

Notons $C = \frac{1}{(2n_0)!}\alpha^{2n_0}$. Pour tout entier $p > 0$, on déduit de la majoration précédente

$$\frac{1}{(2(n_0+p))!} \alpha^{2(n_0+p)} \leq C \frac{1}{4^p}.$$

Ces majorations peuvent vous sembler difficiles, mais l'idée est que dans la série, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par $\alpha^2/(2n+1)(2n+2)$; or ce facteur multiplicatif tend vers 0, donc à partir d'un certain rang il est plus petit que $1/4$, et cette remarque permet de majorer notre série par une série géométrique. C'est également la démarche pour montrer que la série définissant l'exponentielle est convergente...

Finalement, pour tout entier $n \geq n_0$, en posant appliquant ce qui précède à $p = n - n_0$, on voit que le terme général de la série $(*)$ est majoré par

$$C\frac{1}{4^(n-n_0)} = 4^{n_0}C\frac{1}{4^n}$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente. D'après les théorèmes de comparaison, la série (*) converge, ce qu'on voulait.

Exercice 78.—

Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Démontrer l'équivalence entre les six propriétés suivantes *(on pourra s'aider des indications du poly)* :

(i) L est lipschitzienne,
(ii) L est continue,
(iii) L est continue en 0,
(iv) L est bornée sur la boule $B(0, 1)$,
(v) L est bornée sur la sphère $S(0, 1) := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$,
(vi) il existe $C > 0$ tel que, pour tout x, $\|L.x\| \leq C\,\|x\|$.

Corrigé de l'exercice 78.—

$(i) \Rightarrow (ii)$ C'est vrai pour toute application (rien à voir avec la linéarité ici).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ C'est évident.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Appliquons la définition de la continuité en 0, avec $\varepsilon = 1$: obtient l'existence d'un nombre δ tel que, pour tout x de E,

$$||x|| < \delta \Rightarrow ||L(x)|| < 1.$$

Soit maintenant $y \in B(0, 1)$. Posons $x = \delta y$, on a $||x|| = \delta\ ||y|| < \delta$. Et donc $||L(x)|| < 1$, mais $||L(x)|| = ||L(\delta y)|| = \delta ||L(y)||$, d'où $||L(y)|| < \delta^{-1}$. L'application L est donc bornée par δ^{-1} sur la boule $B(0, 1)$.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Soit M tel que $||L(x)|| \leq M$ pour tout $x \in B(0, 1)$. Soit alors $y \in S(0, 1)$. Le vecteur $\frac{1}{2}y$ est de norme $\frac{1}{2}$, on a donc $||L(\frac{1}{2}y)|| \leq M$, d'où on déduit $||L(y)|| \leq 2M$: l'application L est donc bornée par $2M$ sur $S(0, 1)$.

Pouvez-vous améliorer cet argument pour montrer que L est bornée par M sur $S(0, 1)$?

$(v) \Rightarrow (vi)$ Soit M tel que $||L(y)|| \leq M$ pour tout $y \in S(0, 1)$. On peut toujours supposer que M n'est pas nul (sinon L est l'application nulle, tout est évident). Soit maintenant x un vecteur de E. Si $x = 0$, on a évidemment $||L(x)|| = 0$ et l'inégalité recherchée est vérifiée (pour n'importe quelle valeur de C). Supposons $x \neq 0$. Le vecteur $y = \frac{x}{||x||}$ est de norme 1, on a donc $||L(y)|| \leq M$, d'où **on déduit** $||L(x)|| \leq M||x||$. On obtient donc (vi) avec $C = M$.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Soit c donné par la propriété (vi), et considérons deux vecteurs x, y. Appliquons (vi) au vecteur $x - y$, on obtient

$$||L(x - y)|| \leq C||x - y||.$$

Par linéarité, $L(x-y) = L(x)-L(y)$, ceci nous dit donc que L est C-lipschitzienne.

V.2 Exercices de niveau standard

Exercice 79.— Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé E sont convexes : si C est un point de E, r un réel strictement positif, et P, Q deux points de la boule $B(C, r)$, alors tout point M du segment $[P, Q]$ est encore dans $B(C, r)$. *Indication : on pourra commencer par le cas où $C = 0$ et $r = 1$.*

Corrigé de l'exercice 79.—

1. Montrons d'abord, comme suggéré, que la boule unité $B(0, 1)$ est convexe. On prend donc deux points P, Q de la boule, c'est-à-dire tels que

$$\|P\| < 1, \|Q\| < 1,$$

prenons également un point M du segment $[PQ]$ et montrons que $\{normM < 1$. Par définition du segment $[PQ]$, il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que $M = (1-t)P+tQ$. On a alors

$$\|M\| = \|(1-t)P + tQ\| \leq \quad \cdots \quad < 1$$

(COMPLETER en utilisant les propriétés de la norme).

2. Traitons maintenant le cas général. On prend deux points de la boule $B(C, r)$, on a donc

$$\|P - C\| < r, \|Q - C\| < r,$$

on écrit à nouveau un point quelconque M du segment $[PQ]$, comme $M = (1 - t)P + tQ$ avec $t \in [0, 1]$, et cette fois-ci on évalue

$$\|M - C\| = \|(1-t)P + tQ - C\| \leq \quad \cdots \quad < r$$

(COMPLETER : en écrivant $C = (1-t)C + tC$ et en regroupant les termes en $(1 - t)$ et les termes en t).

Il y a une façon plus conceptuelle de traiter le cas général 2, en se ramenant au cas particulier 1. Il existe une (unique) application affine Φ qui envoie la boule $B(0, 1)$ sur la boule $B(C, r)$: c'est la composée de l'homothétie linéaire de rapport r, qui envoie $B(0, 1)$ sur $B(0, r)$, avec la translation de vecteur C ; en formule,

$$\Phi(x) = rx + C.$$

On vérifie ensuite que Φ envoie le segment $[PQ]$ sur le segment $[\Phi(P)\Phi(Q)]$ (ceci est dû au caractère affine de Φ, mais on le vérifie facilement avec la formule, en utilisant la définition du segment). On en déduit que l'image par Φ d'un ensemble convexe est un ensemble convexe (écrire les détails !). Sachant que la boule $B(0, 1)$ est convexe, ce qu'on a montré en 1, on conclut que la boule $B(C, r)$, qui est son image par Φ, est également convexe.

Exercice 80.—

1. Expliquer pourquoi que les trois applications définies sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels par

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_\infty = \max_{k=0,\dots,n} |a_k| \qquad \|P\|_* = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'elles sont deux à deux non équivalentes. *Indication : on pourra considérer les polynômes $P_n = (X-1)^n$ et $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$.*

Corrigé de l'exercice 80.—

1. Les deux premières normes ressemblent beaucoup aux normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sur $\mathbb{R}^N$, et les arguments donnés dans $\mathbb{R}^N$ devraient marcher ici.

Donnons un argument précis pour l'inégalité triangulaire. On considère deux polynômes P_1, P_2. Soit N le maximum des deux degrés. Alors les polynômes P_1, P_2 et P_1+P_2 appartiennent à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N[X]$. L'application Φ de $\mathbb{R}^N[X]$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ qui associe à chaque polynôme le vecteur formé par ses coefficients est un isomorphisme d'espace vectoriel. D'après l'exercice 75, l'application $P \mapsto ||\Phi(P)||_1$, où $||.||_1$ désigne la norme sur $\mathbb{R}^{N+1}$, est une norme sur $\mathbb{R}^N[X]$. En particulier elle vérifie l'inégalité triangulaire. (Le même argument marche pour la norme $||.||_\infty$; et aussi pour les deux autres axiomes, mais pour ceux-là il est plus rapide de les vérifier directement).

L'argument est un peu subtil, parce qu'on ne peut pas transporter la norme de $\mathbb{R}^{N+1}$ sur $\mathbb{R}[X]$, qui est de dimension infinie, il faut d'abord choisir les deux polynômes pour lesquels on veut vérifier l'inégalité triangulaire, puis choisir un sous-espace de dimension finie qui les contienne.

Pour la troisième application, on considère l'application Ψ qui associe à un polynôme P l'application polynomiale $t \mapsto P(t)$, qui va de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Ceci définit une application

$$\Psi : \mathbb{R}[X] \to C([0,1], \mathbb{R})$$

qui arrive dans l'espace des fonctions continues sur l'intervalle. Montrons que cette application est injective. Il s'agit de voir que si $P(t) = Q(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors $P = Q$. Le polynôme $P - Q$ s'annule sur $[0,1]$, en particulier il a une infinité de racines, mais un polynôme non nul de degré n a au plus n racines, donc $P - Q$ est le polynôme nul, autrement dit $P = Q$.

Attention, il y a vraiment quelque chose à montrer : l'égalité $P = Q$ signifie que P et Q ont les mêmes coefficients, ce qui est à priori très différent de l'hypothèse qu'ils prennent les mêmes valeurs.

Ceci étant dit, on peut considérer l'application $P \mapsto ||\Psi(P)||_\infty$, où $||.||_\infty$ désigne la norme usuelle sur l'espace $C([0,1], \mathbb{R})$. D'après l'exercice 75, c'est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Or notre définition de $||.||_\infty$ sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ coincide avec cette norme.

(Un argument plus concret consiste juste à adapter la preuve du fait que $||.||_\infty$ est une norme sur $C([0,1], \mathbb{R})$; cependant, on n'échappera pas à l'argument d'injectivite).

2.

On remarque que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$||Q_n||_1 = n \quad \text{alors que} \quad ||Q_n||_\infty = 1.$$

Il en découle que les deux premières normes ne sont pas équivalentes (**Vérifier** ce point en supposant qu'elles le sont, et en cherchant la contradiction.)

D'autre part, on a
$$||P_n||_* = 1.$$
Dans le polynôme P_n, le coefficient de X^{n-1} vaut $\pm n$. On a donc
$$||P_n||_1 \geq ||P_n||_\infty \geq n$$
(la première inégalité est vérifiée pour tout polynôme). Ceci montre que ni la première ni la seconde norme ne sont équivalentes à la troisième.

Exercice 81.— Soit E un espace vectoriel normé, $P \in E$ et $r > 0$. Démontrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(P, r)$ est la boule fermée $B_f(P, r)$.

Corrigé de l'exercice 81.— Il y a deux inclusions à montrer. **1.** Montrons d'abord $B_f(P, r) \subset \mathrm{Adhe}(B(P, r))$. On prend donc un point $M \in B_f(P, r)$. On veut montrer qu'il est dans l'adhérence de la boule ouverte, on cherche donc une suite de points de la boule ouverte qui converge vers M. Pour cela, on peut prendre n'importe quel suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de réels dans $]0, 1[$ et convergeant vers 1, et considérer la suite de points $((1 - t_n)P + t_n M)_{n\geq 0}$.

2. Montrons maintenant l'autre inclusion, $\mathrm{Adhe}(B(P, r)) \subset B_f(P, r)$. Pour cela, vérifions d'abord que la boule fermée $B_f(P, r)$ est bien une partie fermée de E. On a
$$B_f(P, r) = \{M \in E \mid \|M - P\| \leq r\}$$
ce qu'on peut reformuler en disant que cet ensemble est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[0, r]$ par l'application $M \mapsto \|M - P\|$. Puisque cette application est continue de E dans $\mathbb{R}$, on en déduit que la boule $B_f(P, r)$ est fermée, comme image réciproque d'un fermé par une application continue (voir les exercices 72 et 70).

Il n'y a plus qu'à utiliser la caractérisation de l'adhérence comme le plus petit fermé contenant $B(P, r)$: puisque $B_f(P, r)$ est un fermé contenant $B(P, r)$, il contient son adhérence.

Remarquer que pour la première inclusion, l'argument utilise la structure d'espace vectoriel normé (pour définir le point $t_n \times M$). Ceci est cohérent avec le fait que cette inclusion n'est pas vrai dans tous les espaces métriques. Par contre, l'autre inclusion est vraie dans tout espace métrique, avec un argument analogue.

Exercice 82.—

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Déterminer la norme d'opérateur associée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, définie par
$$\|M\|_{\mathcal{M}_N(\mathbb{R})} := \sup_{v\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|Mv\|_\infty}{\|v\|_\infty}.$$
Indication : il s'agit de généraliser l'exercice 76, essayer d'exploiter l'exemple qui y est traité pour deviner la formule pour la norme de M. En cas de panne, on trouvera la formule par exemple sur Wikipedia, à l'article "Norme d'opérateurs".

Essayer ensuite de démontrer cette formule en vous inspirant de la démarche de l'exercice 76.

2. On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_2$. Démontrer que la norme d'une matrice A symétrique est égale à son *rayon spectral* $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda|$ où $\mathrm{Spec}(A)$ désigne le *spectre* de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de la matrice A. *On se souviendra que A est diagonalisable dans une base orthonormée !*

Pour une matrice A quelconque, on peut montrer que la norme est égale à la plus grande valeur singulière de A, définie comme la racine carrée du rayon spectral de la matrice symétrique A^tA.

Corrigé de l'exercice 82.—

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour chaque entier i entre 1 et n, notons L_i la somme des valeurs absolues des entrées de la ligne i dans la matrice M,

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|,$$

et notons N le maximum des nombres ainsi obtenus,

$$N = \max_{i=1,\dots,n} L_i.$$

Dans l'exemple de l'exercice 76, la matrice avait pour norme 7, et ce 7 apparaissait comme la somme des éléments sur la deuxième ligne ; cet exemple inspire la définition du nombre N comme candidat à être la norme de M.

Nous allons montrer que la norme de M est égale à N.

a. Montrons d'abord que pour tout vecteur v,

$$||Mv||_\infty \leq N||v||_\infty \quad (*).$$

Etant donnée la définition de la norme infinie, pour la majorer $||Mv||_\infty$ il suffit de majorer la valeur absolue de chacune des coordonnées du vecteur Mv. Soit i un entier entre 1 et n, notons $(Mv)_i$ la i ème coordonnée, on a la majoration

$$|(Mv)_i| \leq ||v||_\infty L_i.$$

Pour montrer cette inégalité, **appliquer** successivement la définition du produit Mv, l'inégalité triangulaire pour majorer la valeur absolue d'une somme, la définition de la norme $||v||_\infty$, puis la définition de L_i.

Ce nombre est majoré par $||v||_\infty N$, ce qui nous donne bien l'inégalité $(*)$. Vu la définition de la norme de M, on déduit de cette inégalité que $\|M\| \leq N$.

b. Montrons l'inégalité inverse. Pour ceci, comme dans l'exercice 76, il suffit de trouver un vecteur v tel que $||Mv||_\infty \geq N||v||_\infty$. Notons d'abord i le numéro de la ligne qui réalise le nombre N, c'est-à-dire tel que $N = L_i$. Soit maintenant v le vecteur défini de la façon suivante : sa $j$ème coordonnée vaut 1 si l'entrée m_{ij} de la matrice est ≥ 0, et vaut -1 dans le cas contraire : de cette façon, on a $m_{ij}v_j = |m_{ij}|$ pour tout entier j entre 1 et n. On en déduit

$$(Mv)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}| = L_i.$$

On a alors

$$||Mv||_\infty \geq |(Mv)_i| = L_i = N.$$

Notons d'autre part que la norme $||v||_\infty$ vaut 1. Vu la définition de la norme de M comme un supremum, on peut écrire

$$\|M\| \geq \frac{\|Mv\|_\infty}{\|v\|_\infty} \geq N.$$

Finalement, on conclut que $\|M\| = N$, comme annoncé.

2. Soit (e_i) une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ dans laquelle la matrice A est diagonale : pour tout vecteur $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, on a $Av = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i e_i$, où les λ_i sont les valeurs propres de A. D'autre part, puisque la base est orthonormée, la norme d'un vecteur est donnée par la formule

$$\left\|\sum_{i=1}^n v_i e_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Calculer la norme de Av, en déduire la majoration

On procède comme pour la question 1, les détails sont donc laissés au lecteur.

$$||Av||_2 \leq \rho(A)||v||_2$$

où $\rho(A)$ est le rayon spectral. **Trouver** ensuite un vecteur particulier v qui réalise l'égalité dans l'inégalité précédente. On pourra considérer pour ça le nombre i_0 tel que $\rho(A) = |\lambda_{i_0}|$. **En déduire** que la norme de A vaut bien $\rho(A)$.

Exercice 83.— Applications bilinéaires

1. Soit $b : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer les équivalences entre :

(i) b est continue,

(ii) b est continue en $(0, 0)$,

(iii) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\|b(x_1, x_2)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}.$$

2. Montrer que la quantité

$$\|(x_1, x_2)\| \stackrel{def}{=} \sup_{x_1 \in B_{E_1}(0,1), x_2 \in B_{E_2}(0,1)} \|b(x_1, x_2)\|_F$$

définit une norme sur l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues.

3. Montrer qu'en dimension finie toutes les applications bilinéaires sont continues.

On aurait des résultats analogues pour les applications multilinéaires continues (voir Wikipedia).

Exercice 84.— (Examen deuxième session 2017) On note E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient :

— $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

— $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

1.

a. Montrer que toute fonction $f \in E$ s'annule.

b. En déduire que si $f \in E$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$

2.

a. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Montrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.

b. Montrer que $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach.

On munira dorénavant E de cette norme. Pour tout $f \in E$, on définit une fonction $\Phi(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(f)(x) = f(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

3.

a. Vérifier que $\Phi(f)$ appartient à E.

b. Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E.

c. A l'aide du théorème du point fixe, montrer que pour tout $g \in E$, l'équation $\Phi(f) = g$ a une unique solution dans E.

d. Montrer que Φ est inversible et que Φ^{-1} est continu.

Corrigé de l'exercice 84.—

1.

a. Soit f une fonction de E. Elle est de classe C^1 donc continue. Supposons qu'elle ne s'annule pas : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f ne change pas de signe. Supposons par exemple que pour tout x, $f(x) > 0$ (le cas négatif est analogue). Par compacité, f atteint des bornes sur $[0,1]$, en particulier il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \ge \varepsilon$. On en déduit par intégration des inégalités que

$$\int_0^1 f(x)dx \ge \varepsilon > 0,$$

ce qui contredit la définition de E.

b. Soit $f \in E$. Notons x_0 un réel, donné par la question précédente, tel que $f(x_0) = 0$. Puisque f est 1-périodique, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[x_0, x_0+1]} |f(x)|.$$

Soit $x \in [x_0, x_0+1]$. On a

$$|f(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)dt + f(x_0) \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f'(t)|dt \leq |x - x_0| \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$$

(on a appliqué successivement la formule fondamentale du calcul différentiel, le fait que $f(x_0) = 0$ et l'inégalité triangulaire dans les intégrales, l'intégration des inégalités, le fait que $\leq |x - x_0| \leq 1$). On en déduit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[x_0,x_0+1]} |f(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$$

ce qu'on voulait.

2.

a. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne posent pas de problème. la norme de la fonction nulle est clairement nulle. Réciproquement, si $f \in E$ vérifie $\|f\| = 0$, alors d'après la question précédente la norme sup de f est également nulle, et donc f est nulle. Ceci montre que $\| \ \|$ définit une norme sur E.

b. Il s'agit de montrer que l'espace métrique associé à $(E, \| \ \|)$ est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \| \ \|)$, nous voulons prouver que cette suite converge vers un élément f de E.

La norme sup $\| \ \|_\infty$ est majorée par la norme de f (question 1.b) : on en déduit facilement que notre suite est encore une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$). D'après le cours cet espace est complet, donc il existe une fonction f continue et bornée telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\| \ \|_\infty$. (A ce stade il n'est pas clair que f soit dans E, et encore moins que la suite converge bien vers f au sens de la norme $\| \ \|$; c'est ce que nous cherchons à montrer maintenant.)

D'autre part, posons pour chaque n $\varphi_n = f'_n$, c'est une fonction continue (puisque f_n est de classe C^1) et 1-périodique (puisque f_n l'est), donc bornée. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \| \ \|)$, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_\infty$. Par complétude, à nouveau, cette suite converge, pour la norme $\| \ \|_\infty$, vers une certaine fonction φ qui est continue et bornée.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque entier n on a

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n(t)dt = f_n(0) + \int_0^x \varphi_n(t)dt.$$

Or la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$, et la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ. Par un théorème de convergence des intégrales, le terme de droite converge vers $f(0) + \int_0^x \varphi(t)dt$. Le terme de gauche, lui, converge vers $f(x)$. On en déduit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Cette égalité est valable pour tout x réel. On en déduit (c'est un autre théorème fondamental du calcul différentiel) que f est dérivable et que sa dérivée est φ ; comme φ est continue, f est même de classe C^1.

Le fait que $f(x+1) = f(x)$ pour tout x réel, et que $\int_0^1 f(x)dx = 0$, se déduisent facilement par passage à la limite des propriétés analogues pour les f_n. Finalement f est dans E, et puisque la suite des dérivées la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f' = \varphi$, on a bien la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans l'espace $(E, \| \ \|)$. Ceci achève la preuve de la complétude.

3.

a. Etant donnée $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe C^1 d'après les théorèmes classiques d'opérations sur les dérivées. **Vérifier** la relation $\Phi(f)(x+1) = \Phi(f)(x)$ pour tout x à l'aide de la relation analogue pour f. **Montrer** la relation $\int_0^1 \Phi(f)(x)dx = 0$ à l'aide de la relation analogue pour f et de sa périodicité, après les changements de variable $u = x/2$ et $u = (x+1)/2$ dans les deux intégrales.

b. Le fait que Φ est linéaire est immédiat. Pour la continuité, **dériver** l'égalité définissant $\Phi(f)$ pour **obtenir** une relation liant la dérivée de $\Phi(f)$ avec celle de f. En utilisant la définition de la norme dans E comme sup de la dérivée, **en déduire** la majoration

$$\|\Phi(f)\| \leq \frac{3}{2}\|f\|.$$

Ceci prouve la continuité de l'endomorphisme Φ.

c. On écrit

$$\begin{aligned}
\Phi(f) = g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = g(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2}) + \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x+1}{2}) = g(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x}{2}) - \tfrac{1}{2}f(\tfrac{x+1}{2}) \\
&\Leftrightarrow \quad f = T_g(f)
\end{aligned}$$

avec $T_g(f)$ l'élément de E défini par $T_g(f)(x) = g(x) - \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}f(\frac{x+1}{2})$ pour tout x. De façon analogue à la question précédente, **obtenir**, pour tout $f_1, f_2 \in E$,

$$\|T_g(f_1) - T_g(f_2)\| \leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|.$$

Par conséquent T_g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. Le théorème du point fixe de Banach s'applique et nous dit que T_g a un unique point fixe dans E, autrement dit que l'équation $\Phi(f) = g$ a une unique solution dans E.

d. D'après la définition, $\Phi = \mathrm{Id} + T$ avec $T : E \to E$ défini par $T(f)(x) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{x+1}{2})$ pour tout x réel. Le même type d'estimée qu'en 3.b montre que pour tout f,

$$\|T(f)\| \leq \frac{1}{2}\|f\|.$$

Autrement dit, T est un endomorphisme continu, et dans l'espace de Banach $L(E)$, muni de la norme d'opérateur $\| \ \|_{op}$, on a $\|T\|_op \leq \frac{1}{2}$. D'après le cours, Φ est donc inversible, c'est-à-dire qu'il existe un endomorphisme continu Φ^{-1} tel que $\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi = \mathrm{Id}$. (La preuve du cours est écrite en dimension finie, mais peut être reproduite mot pour mot en dimension infinie : **le vérifier**).

Exercice 85.— (Examen 2017)

On note l_2 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$, et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in l^2$, on pose $\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. On rappelle que $\| \ \|$ est une norme sur l^2 et que $(l^2, \| \ \|)$ est un espace de Banach. On note d la distance associée à $\| \ \|$ et on définit $S = \{x \in l^2 \mid \|x\| = 1\}$.

1. L'espace métrique (S, d) est-il compact ? *On pourra utiliser l'application* $S \times [0,1] \to l_2, (x, \lambda) \mapsto \lambda x$.

2. Est-il complet ?

3. Est-il connexe ?

Corrigé de l'exercice 85.— Commençons par remarquer que l_2 est de dimension infinie : en effet, les éléments $(1, 0, 0, \dots); (0, 1, 0, 0, \dots); (0, 0, 1, 0, 0, \dots); \dots$ sont linéairement indépendants.

1. On sait, d'après le théorème de Riesz, que la boule unité de l_2 n'est pas compacte puisque cet espace est de dimension infinie. Supposons par l'absurde que la sphère unité S est compacte. Alors l'espace $S \times [0,1]$ est également compact en tant que produit d'espace compact. L'application

$$\begin{array}{rcl} S \times [0,1] & \to & l_2 \\ (x, \lambda) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

est continue (c'est un exercice indispensable du poly). Puisque l'image d'un compact par une application continue est compacte, on en déduit que l'image de cette application est une partie compacte de l_2. **Vérifiez** que c'est exactement S, qui est donc compacte, ce qui contredit le théorème de Riesz. C'est absurde, ce qui termine la preuve.

2. La norme est une application continue de l_2 dans $\mathbb{R}$, la sphère S est l'image réciproque de 1 par cette application, par conséquent c'est une partie fermée de l_2. L'espace l_2 est complet (c'est rappelé dans l'énoncé), une partie fermée d'un espace complet est complète, par conséquent S est complet.

3. Soit v_0 n'importe quel élément de S (par exemple $v_0 = (1, 0, 0, \dots)$). Soit v n'importe quel autre élément de S. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \to & l_2 \\ \lambda & \mapsto & (1-\lambda)v + \lambda v_0. \end{array}$$

Vérifier qu'elle définit un chemin continu allant de v à v_0. En supposant que $v \neq -v_0$, **montrer** que ce chemin ne passe pas par 0. On peut donc définir l'application

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & l_2 \\ \lambda & \mapsto & \frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|}. \end{array}$$

Vérifier qu'elle est également continue, et qu'elle définit un chemin continu de v à v_0 dans S. Il ne reste plus qu'à **traiter le cas où $v = -v_0$**. Qu'a-t-on montré ?

Exercice 86 (à rédiger pour le devoir numéro 3).— *(Examen deuxième session 2017-2018)* Soit $\mathbb{R}[X]$ 'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\|P\| = \sum_{j=0}^{n} |a_j|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Est-ce que la boule unité fermée $\{P \in \mathbb{R}[X] : \|P\| \leqslant 1\}$ de $\mathbb{R}[X]$ est compacte ? Justifier votre réponse.

3. Soit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, $P_n(X) = X^n$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de suite extraite convergente. En déduire une autre preuve de la question précédente.

Corrigé de l'exercice 86.—

1. Il n'y a pas de difficulté (la preuve est la même que pour la norme $\|.\|_1$ dans $\mathbb{R}^N$).

2. D'après le théorème de Riesz, la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si c'est un espace vectoriel de dimension finie. L'espace des polynomes est de dimension infinie (parce que, par exemple, la famille infinie des monomes $\{X^n \; n \in \mathbb{N}\}$ en forme une base). On conclut que la boule unité fermée n'est pas compacte.

3. On vérifie facilement que pour tous entiers positifs distincts n, m, on a

$$\|P_n - P_m\| = 1 \quad (*).$$

Raisonnons alors par l'absurde : en supposant l'existence d'une suite extraite convergente $(P_{\phi(k)})_{k\geq 0}$, cette suite serait en particulier de Cauchy : la définition appliquée d'une suite de Cauchy, appliquée avec $\varepsilon = 1$, donne l'existence d'un K tel que, pour tout $k, k' \geq K$, $\left\|P_{\phi(k)} - P_{\phi(k')}\right\| < 1$. En prenant par exemple $k = K$ et $k' = k+1$, on a $\phi(k) \neq \phi(k')$ car ϕ est strictement croissante (par définition d'une suite extraite), ce qui contredit l'inégalité $(*)$ ci-dessus.

La suite (P_n) est incluse dans la boule unité fermée et n'admet pas de suite extraite convergente, ce qui donne une deuxième preuve que cette boule n'est pas compacte.

Exercice 87 (à rédiger pour le devoir numéro 3).— *(Examen deuxième session 2017-2018)* Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in E$ on pose $T(f) \in E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 e^{tx} f(t)\, dt.$$

1. Soit $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1 \; \forall x \in [0,1]$. Déterminer la fonction $T(f_0)$. Déterminer $\|T(f_0)\|_\infty$ *(pour montrer que cette fonction est croissante, on pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle, ou bien dériver et utiliser l'inégalité* $e^x \geq x+1$*)*.

2. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, autrement dit que T est une application linéaire continue de E dans E.

3. En utilisant la question 1, déterminer $\|T\|$, la norme de T dans $\mathcal{L}(E)$.

4. En déduire que que pour tout nombre réel λ dans un intervalle borné non vide au tour de 0 (à déterminer), $Id_E - \lambda T$ est un isomorphisme de E.

Corrigé de l'exercice 87.—

1. Remarquons d'abord, même si c'est donné implicitement par l'énoncé, que T va bien de E dans E : en effet, pour toute fonction f continue, la fonction $T(f)$ est continue d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

On trouve $T(f_0)$ donnée par la formule $T(f_0)(x) = \frac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$, et $T(f_0)(0) = 1$. En admettant provisoirement que la fonction $T(f_0)$ est croissante, puisqu'elle est aussi positive sur $[0, 1]$, on trouve

$$\|T(f_0)\|_\infty = T(f_0)(1) = e - 1.$$

Pour montrer que $T(f_0)$ est croissante : on trouve facilement le développement en série entière de $T(f_0)$ à partir de celui de l'exponentielle,

$$T(f_0)(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} x^{n-1}$$

d'où la croissance de $T(f_0)$ comme série de fonctions croissantes : pour tout $x, x' \in [0, 1]$, si $x \leq x'$ alors pour tout N

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} x^{n-1} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} x'^{n-1}$$

d'où $T(f_0)(x) \leq T(f_0)(x')$ en faisant tendre N vers $+\infty$.

2. La linéarité ne pose pas de problème. Montrons la continuité. Soit $f \in E$, et $x \in [0, 1]$. En majorant $|f(t)|$ par $\|f\|_\infty$ dans l'intégrale, **on trouve**

$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 e^{tx} dt \leq \|f\|_\infty \times \|T(f_0)\|_\infty = \|f\|_\infty \times (e - 1).$$

On en déduit $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \times (e - 1)$. Ceci montre que l'application linéaire T est continue.

3. L'inégalité obtenue à la question précédente montre aussi que $\|T\| \leq (e - 1) = \|T(f_0)\|_\infty$ **(pourquoi ?)**. D'autre part on a

$$\|T\| \geq \frac{\|T(f_0)\|_\infty}{\|f_0\|_\infty} \quad \textbf{(pourquoi ?)}$$

et, puisque $\|f_0\|_\infty = 1$, on en déduit l'égalité :

$$\|T\| = e - 1.$$

4. D'après un résultat du cours, si $U \in \mathcal{L}(E)$ et $\|U\| < 1$, alors l'endomorphisme $U - \mathrm{Id}$ est inversible. Puisque $\|T\| = e - 1$, on a $\|\lambda T\| < 1$ dès que $\lambda < (e - 1)^{-1}$, et dans ce cas $\mathrm{Id} - \lambda T$ est inversible, comme voulu.

(NB : le résultat utilisé est démontré dans le cours en dimension finie seulement, mais la preuve se généralise sans problème en dimension infinie dans un espace de Banach comme l'espace E, comme remarqué dans le cours).

V.3 Compléments et challenges

Exercice 88.— Sur l'espace vectoriel $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère les normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que ce sont bien des normes sur X. *On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz,*

$$|\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

2. Etudier la continuité des applications suivantes et, lorsqu'elles sont continues, calculer leur norme subordonnée.

a. $T_1 : (X, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)$.
b. $T_2 : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)$.
c. $T_3 : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1), \quad f \longmapsto f$.
d. $T_4 : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\infty), \quad f \longmapsto f$.
e. $T_5 : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
f. $T_6 : (X_0, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, où X_0 est le sous-espace de X formé des fonctions qui s'annulent en 0.
g. $T_7 : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1), \quad f \longmapsto gf \quad$ où $g \in X$ est fixé.

Corrigé de l'exercice 88.—

1. **a.** Pour la norme "infini", c'est fait dans le cours. **b.** Montrons que $\|.\|_1$ est une norme. L'homogénéité est très facile. Pour la séparation, on a évidemment $\|0\|_1 = 0$; pour l'autre sens, on prend un élément $f \in X$, on suppose que $\|f\|_1 = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = 0$. L'application $t \mapsto |f(t)|$ est continue, positive, et d'intégrale nulle, on en déduit qu'elle est nulle (c'est un résultat classique, voir plus bas). Montrons enfin l'inégalité triangulaire. Soient $f, g \in X$. Pour un t fixé dans $[0,1]$, on écrit l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$!)

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|.$$

On intègre cette inégalité pour t entre 0 et 1 (en utilisant la positivité de l'intégrale), et on obtient $||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$, comme voulu.

c. Montrons que $\|.\|_2$ est une norme. L'homogénéité est très facile, et pour la séparation, l'argument est analogue à celui pour la norme $||.||_1$. Pour l'inégalité triangulaire, prenons deux fonctions $f, g \in X$. Il s'agit de montrer que $||f+g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$. **En calculant** $||f+g||_2^2$ et en comparant à $(||f||_2 + ||g||_2)^2$, on voit que l'inégalité recherchée revient à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : l'inégalité triangulaire découle donc de cette inégalité classique.

Expliquons rapidement la propriété utilisée plus haut : si F est une fonction positive d'intégrale nulle alors c'est la fonction nulle. On raisonne par contraposée : on suppose que F n'est pas nulle, et on va montrer que son intégrale est strictement positive. Si $F \neq 0$, puisque F est positive, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que

$f(t_0) > 0$. En appliquant la continuité de F avec $\varepsilon = \frac{F(t_0}{2}$, on trouve $\delta > 0$ tel que $F(t) > \varepsilon$ pour tout $t \in I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]$. Notons $I = [a, b]$. Or puisque F est positive, son intégrale en dehors de $[a, b]$ est positive ou nulle ; donc l'intégrale sur $[0, 1]$ est minorée par l'intégrale sur $[a, b]$, elle-même minorée par $\varepsilon(b - a)$, qui est strictement positif. Ceci termine la preuve.

2. a. Pour tout $f \in X$, on a bien sûr $|f(0)| \leq ||f||_\infty$, autrement dit

$$|T_1(f)| \leq ||f||_\infty.$$

Ceci montre que l'application T_1 est continue, et de norme ≤ 1. D'autre part, pour la fonction constante $f = 1$, on a égalité dans l'inégalité précédente, ce qui montre que la norme de T_1 vaut 1.

Vérifier soigneusement que la norme de T_1 est ≤ 1, si ce n'est pas clair pour vous, puis qu'elle est ≥ 1. Comparer à l'exercice 82.

b. Nous allons montrer que T_2 n'est pas continue. Nous utiliserons la contraposée du critère séquentiel : pour montrer la discontinuité, il suffit de trouver une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans X, telle que
(1) cette suite converge vers la fonction nulle pour la norme $||.||_1$, et
(2) la suite image $(T_2(f_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $T_2(0) = 0$.

Le premier point signifie que la suite (réelle) $(||f_n||_1)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Pour le second point, il suffira d'avoir $f_n(0) = 1$ pour tout n. Pour simplifier, la construction, demandons en plus que nos fonctions soient positives. Nous cherchons donc une suite de fonctions positives, valant 1 en 0, telle que la suite des intégrales tend vers 0.

Une information sur l'intégrale de $|f|$ ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur $f(0)$, contrairement à une information sur son supremum. Ceci explique intuitivement pourquoi T_1 est continue, mais pas T_2.

Pour un entier $n \geq 0$ fixé, soit par exemple f_n la fonction affine par morceaux,
— qui est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ avec $f_n(0) = 1$ et $f_n(\frac{1}{n}) = 0$,
— qui est nulle sur $[\frac{1}{n}, 1]$.

L'intégrale de f_n vaut $\frac{1}{2n}$. La suite de fonctions ainsi construite vérifie bien les points (1) et (2).

c. Soit $f \in X$, pour tout $t \in [0, 1]$ on a bien sûr

$$|f(t)| \leq ||f||_\infty.$$

En intégrant cette inégalité on obtient $||f||_1 \leq ||f||_\infty$. Ceci montre que l'application T_3 est continue et de norme inférieure ou égale à 1. Par ailleurs, la fonction constante 1 réalise l'égalité dans l'inégalité précédente, ce qui montre que la norme de T_3 vaut 1.

d. On peut reprendre la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ construite pour montrer la discontinuité de l'application T_2. La suite $(||f_n||_1)_{n\geq 0}$ tend vers 0, c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers la fonction 0 dans l'espace de départ $(X, ||.||_1)$. Par contre pour tout entier n on a $||f_n||_\infty = 1$, en particulier la suite $(T_4(f_n))_{n\geq 0} = (f_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace d'arrivée $(X, ||.||_\infty)$. Ceci montre que l'application T_4 n'est pas continue.

e. En intégrant la majoration $|f(t)| \leq ||f||_\infty$, on obtient l'inégalité

$$|T_5(f)| \leq ||f||_\infty.$$

L'application T_5 est donc continue et de norme ≤ 1. La fonction 1 réalise l'égalité qui permet d'obtenir $||T_5|| = 1$. Les détails sont laissés au lecteur.

f. T_6 est la restriction d'une application continue, elle est donc continue (démonstration immédiate). On a toujours $|T_6(f)| \leq ||f||_\infty$, donc la norme de

T_6 est ≤ 1. Par contre, la fonction 1 qui nous a servi à montrer l'inégalité inverse, à savoir $||T_6|| \geq 1$, n'appartient pas à notre sous-espace X_0, et on pourrait montrer qu'aucune fonction de X_0 ne réalise l'égalité : il faut donc trouver un autre argument. On va construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ qui "approche cette égalité", disons telle que

C'est notre premier exemple de norme non réalisée : aucun élément $f \in X_0$ ne vérifie $||T_6|| = \frac{|T_6(f)|}{||f||_1}$.

1. pour chaque n, $||f_n||_\infty = 1$,
2. la suite $(|T_6(f_n)|)_{n\geq 0}$ tend vers 1.

Supposons un instant qu'on sache construire une telle suite. Pour tout élément f de X_0, la définition de la norme de T_6 donne

$$||T_6|| \geq \frac{|T_6(f)|}{||f||_\infty},$$

en appliquant ceci à la fonction f_n on trouve que $||T_6|| \leq |T_6(f_n)|$, et puisque ce dernier terme tend vers 1, on en déduit en passant à la limite que $||T_6|| \geq 1$. Puisqu'on avait l'autre inégalité, on conclura que $||T_6|| = 1$.

Il reste à construire notre suite (f_n). On peut à nouvea utiliser des fonctions affines par morceaux, en posant par exemple, pour tout entier $n \geq 0$,

- $f_n(t) = nt$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$,
- $f_n(t) = 1$ pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Il est très facile de voir que la fonction f_n est continue et s'annule en 0, et que la suite (f_n) vérifie les propriétés (1) et (2) requises.

g. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne presque immédiatement que T_7 est continue, et de norme majorée par $||g||_2$. En l'appliquant $f = g$, on obtient une égalité, qui permet de conclure que $||T_7|| = ||g||_2$.

Exercice 89.— *(Cet exercice ne sera pas corrigé)* Soit $X = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continûment dérivables sur $[-1,1]$.

1. Démontrer que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ est une norme sur X.

2. Montrer que la suite (f_n) dans X définie par $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - \frac{1}{n}\sin(nx) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{array} \right\}$ est une suite de Cauchy de $(X, \|\cdot\|_\infty)$. En déduire que $(X, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

3. On définit $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que X, muni de la norme N, est complet.

Indication : considérer une suite de Cauchy de X et se ramener au cas de deux suites de Cauchy de $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, qui est complet. Conclure en utilisant le fait que, pour toutes fonctions $f \in X$, $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, $f' = g$ si, et seulement si, $f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [-1,1]$.

VI Différentielle

Beaucoup d'exercices sont extrait du poly, que vous pouvez consulter pour retrouver le contexte. Comme dans le Mémo, on note $L.h$ l'image d'un vecteur h par une application linéaire L (qu'on noterait habituellement $L(h)$).

Exercice 90.— Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et $h \mapsto o(h)$ définie sur E (ou plus généralement, sur un ouvert V de E contenant 0) et à valeur dans F.

1. Vérifier que lorsque $o(h)$ est négligeable devant h, on a $\lim_{h \to 0} o(h) = 0$.

2. Montrer que la réciproque est fausse.

3. Vérifier que $\|h\|^2$ est négligeable devant h.

Corrigé de l'exercice 90.— **1.** Supposons que $o(h)$ soit négligeable devant h : par définition, cela signifie que

$$\lim_{h \to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0.$$

On peut alors écrire, pour tout h dans V,

$$||o(h)|| = ||h|| \times \frac{||o(h)||}{||h||}$$

donc $||o(h)||$ est le produit de deux quantités qui tendent toutes les deux vers 0 lorsque h tend vers 0. On en déduit que $o(h)$ tend également vers 0.

2. Pour montrer que la réciproque est fausse, il s'agit de donner un exemple de fonction $o(h)$ qui tend vers 0 mais qui n'est pas négligeable devant h : la fonctiono $o(h) = h$ convient.

3. Si on pose $o(h) = ||h||^2$, on a

$$\frac{||o(h)||}{||h||} = ||h||$$

qui tend bien vers 0 lorsque h tend vers 0 (continuité de la norme). Donc $||h||^2$ est négligeable devant h.

Exercice 91 (à rédiger pour le devoir numéro 4).— Montrer l'unicité de la différentielle. *En cas de difficulté, on pourra suivre les indications du poly.*

Corrigé de l'exercice 91.— Soient L_1, L_2 deux applications linéaires continues vérifiant toutes les deux la définition de la différentielle d'une application f en un point a, il s'agit de montrer que $L_1 = L_2$. Par hypothèse, on a

Rappelons que L_1 et L_2 étant des applications, l'égalité $L_1 = L_2$ signifie que pour tout $h \in E$, $L_1.h = L_2.h$.

$$f(a+h) = f(a) + L_1.h + o_1(h)$$

$$f(a+h) = f(a) + L_2.h + o_2(h)$$

Les quantités $o_1(h)$ et $o_2(h)$ sont toutes deux négligeables devant h, mais elles n'ont aucune raison a priori d'être égales : on met des indices pour les distinguer.

Notons, pour tout h, $L.h = L_1.h - L_2.h$. Ceci définit une application $L : E \to F$ qui est linéaire, et nous voulons montrer que c'est l'application nulle. En faisant la différence entre les deux égalités, on obtient

$$L.h = o_2(h) - o_1(h)$$

dont **on voit très facilement**, en utilisant la définition, que c'est encore une quantité négligeable devant h.

Fixons maintenant un vecteur $v \neq 0$, nous voulons montrer que $L.v = 0$. Pour ceci nous posons, pour tout entier $n > 0$, $v_n = \frac{1}{n}v$. D'une part on a, pour tout $n > 0$,

$$\frac{\|L.(v_n)\|}{\|v_n\|} = \frac{\left\|L.(\frac{1}{n}v)\right\|}{\left\|\frac{1}{n}v\right\|} = \frac{\frac{1}{n}\ \|L.v\|}{\frac{1}{n}\ \|v\|} = \frac{\|L.v\|}{\|v\|}$$

(on a utilisé la linéarité de L et l'homogénéité de la norme). D'autre part, la suite $(v_n)_{n>0}$ tend vers 0, et puisque $L.h$ est négligeable devant h, par composition on a que la suite

$$\left(\frac{\|L.(v_n)\|}{\|v_n\|}\right)_{n>0}$$

tend vers 0. On conclut que

$$\frac{\|L.v\|}{\|v\|} = 0$$

ce qui signifie que $L.v = 0$.

Exercice 92.— Soit $L : E \to F$ une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés. **1.** Montrer que l'application affine $f : x \mapsto b + L.x$ est différentiable sur E, et pour tout a et tout h, $Df(a).h = L.h$. **2.** Que vaut la différentielle de la translation $x \mapsto x + b$ en un point a ?

Corrigé de l'exercice 92.— **1.** Soient a, h dans E, on calcule

$$f(a+h) = \cdots = f(a) + L.h = f(a) + L.h + o(h)$$

Compléter l'égalité !

en posant, pour tout h, $o(h) = 0$, qui est évidemment une quantité négligeable devant h. Ceci nous dit bien que f est différentiable au point a, avec pour différentielle l'application $h \mapsto L.h$.

2. La translation est une application affine, avec $L = \mathrm{Id}$. D'après la question précédente, elle est différentiable, avec pour différentielle au point a l'application identité, $h \mapsto h$.

Exercice 93.— Pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de norme matricielle $\|H\| < 1$, la matrice $\mathrm{Id} + H$ est inversible et on a

$$(\mathrm{Id} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \mathrm{Id} - H + o(H)$$

en posant

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k.$$

1. On admet provisoirement que $o(H)$ est négligeable devant H. Interpréter très précisément ce qui précède en terme de différentielle de l'application $M \mapsto M^{-1}$. *Ici les points de notre espace vectoriel sont des matrices, ce qui peut être perturbant...*

2. Pour montrer que $o(H)$ est négligeable devant H, majorer la norme de $o(H)$, par exemple pour tout $\|H\| < \frac{1}{2}$. On commencera par mettre H^2 en facteur.

Corrigé de l'exercice 93.— **1.** L'application $L : H \mapsto -H$ est une application linéaire de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Puisque c'est un espace vectoriel de dimension fini, cette application linéaire est automatiquement continue. L'égalité ci-dessus montre alors que $M \mapsto M^{-1}$ est différentiable au point Id, et que sa différentielle est l'application L.

Autrement dit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on pourrait presque écrire $L \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$...

2. Vérifions que $o(H)$ est négligeable devant H. Pour tout H de norme strictement plus petite que 1, on a

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k = H^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k \quad (*),$$

et donc

$$||o(H)|| \leq ||H||^2 \; ||\sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k||$$

(on a utilisé deux fois l'inégalité de la norme d'opérateur, $||AB|| \leq ||A \; ||B||$). D'autre part si $||H|| < \frac{1}{2}$, on a la majoration

$$||\sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k|| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} ||-H||^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 \quad (**).$$

Finalement pour tout H de norme $< \frac{1}{2}$ on a

$$||o(H)|| \leq 2||H||^2.$$

En divisant par $||H||$, on obtient une quantité qui tend vers 0 lorsque H tend vers 0, ce qui montre que $o(H)$ est négligeable devant H, ce qu'on voulait.

Pour être plus précis, justifions plus précisément les égalités $(*)$ et $(**)$: dans la première on a factorisé un terme dans une série de matrice, est-ce valide ? Dans la seconde on a majoré la norme de la série par la série des normes, est-ce correct ?

Pour répondre à ces questions, il faut revenir aux définitions des séries. L'idée est que les séries sont des limites de sommes finies, on va "passer à la limite" dans les règles de calculs avec des sommes finies.

Dans la ligne notée $(*)$ ci-dessus, la dernière égalité fait intevenir deux séries de matrices. Par définition des séries, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} (-H)^k.$$

Pour un entier N fixé, on a certainement

$$H^2 \sum_{k=0}^{N} (-H)^k = \sum_{k=2}^{N+2} (-H)^k,$$

les deux membres étant égaux à $H^2 - H^3 + \cdots + (-H)^{N+2}$. Lorsque N tend vers $+\infty$, le membre de droite tend (par définition de la série) vers la matrice $\sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k$. Qu'en est-il du membre de gauche ? La somme qui y apparaît tend vers la matrice $\sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k$. Pour conclure, il reste à vérifier que

$$\lim_{N \to +\infty} H^2 \sum_{k=0}^{N} (-H)^k \;=\; H^2 \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} (-H)^k.$$

Autrement dit, il s'agit de voir qu'on peut intervertir une limite avec un produit matriciel. C'est le cas : en effet, la matrice H étant fixée, l'application $M \mapsto H^2 M$, qui va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, est linéaire ; comme on est en dimension finie, elle est donc continue ; la propriété désirée n'est rien d'autre que le critère séquentiel pour cette application ; pour toute suite convergeante $(M_N)_{N \geq 0}$ de matrices, on a

$$\lim_{N \to +\infty} H^2 M_N = H^2 \lim_{N \to +\infty} M_N,$$

égalité qu'on applique à la suite de matrices définie par $M_N = \sum_{k=0}^{N} (-H)^k$.

La justification des inégalités $(**)$ est plus facile, mais le principe est le même : on revient à la définition des séries comme des limites des sommes partielles ; on utilise les inégalités sur les sommes partielles, qui sont données par l'inégalité triangulaire ; on conclut en passant à la limite. **Les détails sont laissés au lecteur**.

OUF !! Pour la prochaine fois, on retient que le produit de matrice est continu, et qu'on peut donc l'intervertir avec des séries.

Exercice 94.— La formule $f(x, y) = xe^{3y}$ définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. En calculant $f(2 + h_1, 1 + h_2)$, montrer qu'elle est différentiable au point $(2, 1)$ et donner sa différentielle. *On pourra s'inspirer du poly.*

2. Calculer les dérivées partielles et la matrice jacobienne de la fonction f au point $a = (2, 1)$. Vérifier qu'on retrouve la différentielle de f en ce point.

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = (3, 4)$. En utilisant la définition de la dérivée selon un vecteur, calculer le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(1, 2).$$

4. Comparer le résultat au nombre $Df(1, 2).\overrightarrow{v}$.

Corrigé de l'exercice 94.— **1.** En utilisant le développement limité de l'exponentiel, $e^{3h_2} = 1 + 3h_2 + o(h_2)$, et la relation $e^{ab} = e^a e^b$, on obtient

$$f(2 + h_1, 1 + h_2) = (2 + h_1) \exp(3 + 3h_2) = \cdots = 2e^3 + e^3 h_1 + 6e^3 h_2 + o(h_1, h_2)$$

avec $o(h_1,h_2) = e^3(3h_1h_2 + o(h_2) + h_1 o(h_2))$. Remarquons que $f(2,1) = 2e^3$. En admettant provisoirement que $o(h_1,h_2)$ est négligeable devant $h = (h_1,h_2)$, on reconnait un développement limité du type

$$f(2+h_1, 1+h_2) = f(2,1) + L.(h_1,h_2) + o(h_1,h_2)$$

avec $L.(h_1,h_2) = e^3h_1 + 6e^3h_2$ qui est linéaire en (h_1,h_2). Ceci montre que f est différentiable au point $(2,1)$ et que sa différentielle en ce point est l'application L,

$$Df(2,1).(h_1,h_2) = e^3h_1 + 6e^3h_2.$$

Pour valider ceci, vérifions que $o(h_1,h_2)$ est négligeable devant $h = (h_1,h_2)$: pour ceci on majore séparemment chacun des trois termes, en écrivant par exemple

Pour montrer qu'une quantité est négligeable devant h, on la majore par $||h||$ multiplé par quelque chose qui tend vers 0 (pour une norme au choix).

$$|3h_1h_2| \leq 3||h||_\infty^2,$$

$$|o(h_2)| = \frac{|o(h_2)|}{|h_2|} \times |h_2| \leq \frac{|o(h_2)|}{|h_2|} \times ||h||_\infty$$

$$|h_1 o(h_2))| \leq |o(h_2)| \times ||h||_\infty.$$

Dans chacune des trois inégalités, on peut diviser par $||h||_\infty$ et on obtient une quantité qui tend vers 0 ; ceci montre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h_1,h_2)}{||h||_\infty} = 0,$$

ce qu'on voulait.

2. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = e^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 6e^3$$

La matrice jacobienne de f au point $(2,1)$ est donc

$$\left(e^3, 6e^3\right).$$

C'est bien la matrice de l'application linéaire $Df(2,1)$ calculée plus haut.

3. Si l'on suit la définition, la dérivée selon un vecteur se calcule de la façon suivante. On considère la fonction de la variable t,

$$f(a + t\overrightarrow{v}) = f((2,1) + t(3,4)) = f(2+3t, 1+4t) = \cdots$$

Compléter le calcul...

Et on calcule la dérivée de cette application en $t = 0$. On obtient ici $27e^3$.

4. On trouve $Df(1,2).\overrightarrow{v} = 27e^3$ qui est la dérivée de f au point $(2,1)$ selon le vecteur $\overrightarrow{v}$, comme prévu par le cours.

Exercice 95.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une application différentiable en un point a.

1. Vérifier que f admet des dérivées partielles, et qu'elles sont liées à la différentielle par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a).e_i$$

où $(e_1, \dots, e_N)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$. *Aide : utiliser les définitions : celle de la différentielle comme hypothèse, et celle des dérivées partielles pour savoir ce qu'il faut montrer.*

2. Plus généralement, vérifier que f admet une dérivée selon un vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul quelconque, et qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a) = Df(a).\overrightarrow{v}.$$

Corrigé de l'exercice 95.— **1.** Puisque f est différentiable au point a, on a

$$f(a+h) = f(a) + L.h + o(h)$$

avec $o(h)$ négligeable devant h. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout t, on a peut appliquer cette égalité au vecteur te_i, et en utilisant la linéarité de L on obtient

$$f(a+te_i) = f(a) + tDf(a).e_i + o(te_i),$$

d'où

$$\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = Df(a).e_i + \frac{o(te_i)}{t}.$$

Pour conclure, vue la définition de la dérivée partielle, il reste à voir que le terme $\frac{o(te_i)}{t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Pour ceci, vérifions que la définition de la limite est satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $o(h)$ est négligeable devant h, il existe $\delta > 0$ tel que

On pourrait alternativement invoquer la composition des limites.

$$\forall h \in \mathbb{R}^N \quad (\|h\|_E < \delta \Rightarrow |o(h)| < \varepsilon \|h\|).$$

Posons

$$\delta' = \frac{\delta}{||e_i||}.$$

Soit maintenant t tel que $|t| < \delta'$. On a alors $||te_i|| = |t| \; ||e_i||$ qui est donc strictement plus petit que δ, d'après la propriété précédente on a

$$|o(te_i)| < \varepsilon||te_i|| = \varepsilon|t|,$$

et en divisant par t on obtient ce qu'il faut.

2. Le deuxième point se démontre de façon tout à fait semblable, en remplaçant le vecteur e_i par un vecteur v quelconque.

Exercice 96.—

1. Généraliser la formule de la différentielle d'une application composée, en écrivant la formule donnant la différentielle en un point a de la composée des 3 applications $f_3 \circ f_2 \circ f_1$. *Aide : on appliquera deux fois de suite la formule de composition en écrivant par exemple $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$.*

2. Généraliser à la composée de n applications.

Corrigé de l'exercice 96.—

1. On écrit $F = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$, et on applique deux fois la formule de la différentielle d'une composée, la première fois avec f_1 et $f_3 \circ f_2$, la seconde avec f_3 et f_2. En supposant que f_1, f_2, f_3 sont différentiables respectivement aux points a, $f_1(a)$ et $f_2(f_1(a))$, on obtient que $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est différentiable au point a, et que

$$D(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(a) = Df_3(f_2(f_1(a))) \circ Df_2(f_1(a)) \circ Df_1(a).$$

Attention, dans cette formule, $Df_3(f_2(f_1(a)))$ signifie "la différentielle de l'application f_3 au point $f_2(f_1(a))$". Cette application linéaire est ensuite composée avec les deux autres applications linéaires $Df_2(f_1(a))$ et $Df_1(a)$.

2. Par récurrence, on obtient la formule pour la composée de n applications. Pour alléger les notations, introduisons les points

$$a_0 = a, \quad a_1 = f_1(a), \quad a_2 = f_2 \circ f_1(a), \quad \ldots, \quad a_{n-1} = f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1(a).$$

On a alors

$$D(f_n \circ \cdots \circ f_1)(a) = Df_n(a_{n-1}) \circ Df_{n-1}(a_{n-2}) \cdots \circ Df_2(a_1) \circ Df_1(a_0).$$

Exercice 97.— Soit $f : E \to F$ une application différentiable entre les deux espaces vectoriels normés E et F. Soient a un point de E, b un point de F.

1. Que vaut la différentielle de $T_b \circ f$ en un point x lorsque T_b est la translation de F de vecteur b ? **2.** De $f \circ T_a$ lorsque T_a est la translation de E de vecteur a ?

3. De $L \circ f$, lorsque L est une application linéaire de F ? **4.** De $f \circ L$ lorsque L est une application linéaire de F ?

Corrigé de l'exercice 97.— La différentielle d'une translation, en tout point, est l'identité ; la différentielle d'une application linéaire, en tout point, est elle-même (ce sont deux cas particuliers d'applications affines, voir le cours). On a donc, pour tout point x de E,

1. $D(T_b \circ f)(x) = Df(x)$; **2.** $D(f \circ T_a)(x) = Df(x + a)$;

3. $D(L \circ f)(x) = L \circ Df(x)$; **4.** $D(f \circ L)(x) = Df(L(x)) \circ L$.

Dans ces égalités, tous les symboles sont importants : par exemple, pour la dernière égalité, il s'agit de la différentielle de f au point $L(x)$, composée avec L. On ne pourrait pas écrire, par exemple, $D(f \circ L) = Df(L(x)) \circ L(x)$ ($L(x)$ est un point de E, cette écriture n'a pas de sens).

Exercice 98.— *(très utile, voir section (b) des commentaires sur la différentielle.)*

1. Vérifier qu'une courbe $\gamma : I \to E$ qui est dérivable en t_0 est aussi différentiable en t_0, et que sa différentielle est l'application linéaire $D\gamma(t_0) : h \mapsto h\gamma'(t_0)$.

2. Vérifier la réciproque : si γ est différentiable au point t_0, alors elle est dérivable en ce point.

3. En déduire, à l'aide du théorème de composition, la formule

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0),$$

où $f : E \to F$ est une application différentiable au point $\gamma(t_0)$.

4. Que donne la formule dans le cas particulier où γ est le paramétrage d'une droite, $\gamma(t) = a + t\overrightarrow{v}$, en $t_0 = 0$? Nous avons déjà rencontré cette formule dans le cours, pouvez-vous dire où ?

Corrigé de l'exercice 98.—

1. Par hypothèse, il existe un vecteur $\gamma'(t_0)$ tel que

$$\gamma'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

Écrivons

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h.\gamma'(t_0) + o(h)$$

(pour cela il suffit de définir la fonction $o(h)$ en posant $o(h) = \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) - h.\gamma'(t_0)$). Il reste à vérifier que $o(h)$ est négligeable devant h. On calcule donc

$$\frac{o(h)}{h} = \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \gamma'(t_0)$$

qui tend bien vers 0 lorsque h tend vers 0.

2. Supposons maintenant que γ est différentiable au point t_0. Sa différentielle $D\gamma(t_0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans E, la matrice de cette application est un vecteur colonne, notons-le L : ainsi, pour tout nombre h, on a $D\gamma(t_0)(h) = L.h = hL$. Par définition de la différentielle, on a pour tout h assez petit

Ici, dans la notation $L.h$ on voit le nombre h comme un vecteur à une seule coordonnées ; le "produit matriciel" entre L et h est alors le vecteur hL (produit du nombre h par le vecteur colonne L).

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + hL + o(h)$$

avec $o(h)$ négligeable devant h. **On en déduit** que le quotient

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

a pour limite L lorsque h tend vers 0.

3. Notons d'abord que l'application composée $f \circ \gamma : I \to F$ est une courbe paramétrée dans F. Puisque γ est différentiable au point t_0, et puisque f est différentiable au point $\gamma(t_0)$, l'application composée est différentiable au point t_0 d'après le théorème de composition, et sa différentielle est

$$D(f \circ \gamma)(t_0) = Df(\gamma(t_0)) \circ D\gamma(t_0).$$

Mais d'après ce qui précède, $f \circ \gamma$ est aussi dérivable au point t_0, et on a pour tout nombre h

$$D(f \circ \gamma)(t_0).h = (f \circ \gamma)'(t_0).h, \text{ et de même } D(\gamma)(t_0).h = \gamma'(t_0).h$$

ainsi l'égalité précédente devient

$$(f \circ \gamma)'(t_0).h = D(f \circ \gamma)(t_0).h = Df(\gamma(t_0))(D\gamma(t_0).h) = Df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0).h)$$

et en faisant $h = 1$, on obtient

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = Df(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)),$$

comme voulu.

4. Dans le cas d'une droite paramétrée $\gamma(t) = a+t\overrightarrow{v}$, on a $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{v}$ pour tout t_0 (la vitesse est constante). On obtient que la dérivée de la composée $t \mapsto f(a+t\overrightarrow{v})$, en $t_0 = 0$, est égale à $Df(a).\overrightarrow{v}$. On retrouve ainsi la dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{v}$, et son lien avec la différentielle.

Exercice 99.—

1. Montrer que l'application "produit" $(x, y) \mapsto xy$, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et donner sa différentielle en un point (x, y).

2. Plus généralement, montrer que l'application "produit scalaire" $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, définie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et donner sa différentielle.

3. Encore plus généralement, on considère trois espaces vectoriels normés de dimensions finies E_1, E_2, F, et une application bilinéaire $B : E_1 \times E_2 \to F$. On rappelle que, grâce l'hypothèse de dimension finie, B est automatiquement continue : il existe une constante C telle que, pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_2$, $|B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$. Montrer que B est différentiable sur $E = E_1 \times E_2$, et que sa différentielle au point $a = (a_1, a_2)$ est l'application linéaire

$$(h_1, h_2) \mapsto B(h_1, a_2) + B(a_1, h_2).$$

On pourra utiliser sur E la norme $N_\infty(h, k) = \max\{\|h\|_{E_1}, \|k\|_{E_2}\}$.

Corrigé de l'exercice 99.—

1. Notons $\Phi : (x, y) \mapsto xy$ l'application produit. On fixe un couple (x, y). Pour tout $h = (h_1, h_2)$, on a

$$\Phi((x, y) + h) = \Phi(x + h_1, y + h_2) = (x + h_1)(y + h_2) = xy + (yh_1 + xh_2) + h_1h_2.$$

Pour montrer la différentiabilité et trouver la différentielle à partir de la définition, le principe est toujours de calculer $f(a+\overrightarrow{h})$ et d'essayer de mettre le résultat sous la forme $f(a) + L.\overrightarrow{h} + o(h)$.

On reconnait $xy = \Phi(x, y)$. Posons $L(h_1, h_2) = yh_1 + xh_2$: c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. D'autre part on a, pour tout $h = (h_1, h_2)$,

$$|h_1h_2| \leq \max(h_1, h_2)^2 = ||h||_\infty^2$$

et on voit en divisant par $||(h, k)||_\infty$ que ce terme est négligeable devant h.

2. De même, on fixe x, y dans $\mathbb{R}^N$, et pour tout $h = (h_1, h_2)$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on écrit

$$\langle x + h_1, y + h_2\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, h_2\rangle + \langle h_1, y\rangle + \langle h_1, h_2\rangle.$$

On pose $L(h_1, h_2) = \langle x, h_2\rangle + \langle h_1, y\rangle$: c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. Pour démontrer que le produit scalaire est différentiable, et que sa différentielle au point (x, y) est l'application L, il reste à voir que le terme $\langle h_1, h_2\rangle$ est négligeable devant h.

Utilisons sur $\mathbb{R}^N$ la norme $||.||_2$ associée au produit scalaire, et sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ la norme $N_\infty(h) = \max(||h_1||_2, ||h_2||_2)$ (voir l'exercice 71). ; d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $h = (h_1, h_2)$,

Comme les normes sont toutes équivalentes, on a le choix de la norme sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$: on choisit celle qui nous semble la plus adaptée au problème.

$$|\langle h_1, h_2\rangle| \leq ||h_1||_2 ||h_2||_2 \leq N_\infty(h)^2$$

ce qui montre que $\langle h_1, h_2\rangle$ est négligeable devant h, ce qu'on voulait.

3. L'argument est en tout point identique à ce qui précède, en remplaçant l'inégalité de Cauchy-Schwarz par l'inégalité donnée par la continuité de l'application bilinéaire.

Exercice 100.—

1. Soient $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ différentiables au point a. **a.** Exprimer l'application produit $x \mapsto f_1(x)f_2(x)$ comme une composée de deux applications différentiables. **b.** Retrouver ainsi la formule de la différentielle d'un produit. (On pourra utiliser l'exercice 99).

2. Plus généralement, soient $f_1 : E \to F_1$ et $f_2 : E \to F_2$ différentiables au point a, et $B : F_1 \times F_2 \to F$ une application bilinéaire. On considère l'application $f : x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$, dont on veut montrer qu'elle est différentiable en a et calculer sa différentielle. **a.** Expliquer pourquoi la question précédente était un cas particulier cette question. **b.** Résoudre cette deuxième question en s'inspirant de la première.

3. Application : donner la différentielle au point a de $f : x \mapsto \langle f_1(x), f_2(x)\rangle$ lorsque f_1, f_2 sont deux applications de E dans $\mathbb{R}^n$ différentiable en a.

Corrigé de l'exercice 100.—

1. a. Définissons l'application $f : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$, qui va de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^2$, et l'application $\Phi : (y, z) \mapsto yz$, qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout x de E, $\Phi \circ f(x) = f_1(x)f_2(x)$. L'application Φ est différentiable, sa différentielle au point (y, z) est $(h_1, h_2) \mapsto yh_2 + zh_1$ (exercice 99). L'application f est différentiable, sa différentielle au point x est $h \mapsto (Df_1(x).h, Df_2(x).h)$ (preuve rapide : si $o_1(h)$ et $o_2(h)$ sont les restes dans les développements limités donnés par la différentiabilité de f_1 et f_2 respectivement, **vérifier** alors le reste du développement limité pour f est $(o_1(h), o_2(h))$; **puis vérifier** que ce reste est négligeable devant h).

b. On applique alors la formule de différentiation composée :

$$D(\Phi \circ f)(x) = (D\Phi(f(x))) \circ (Df(x))\,.$$

Pour expliciter le résultat, notons que puisque $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, la différentielle de Φ au point $f(x)$ est l'application inéaire $(h_1, h_2) \mapsto f_1(x)h_2 + f_2(x)h_1$. On doit donc composer l'application linéaire $h \mapsto (Df_1(x).h, Df_2(x).h)$ avec l'application linéaire $(h_1, h_2) \mapsto f_1(x)h_2 + f_2(x)h_1$, et le résultat est l'application linéaire $h \mapsto f_1(x)Df_2(x).h + f_2(x)Df_1(x).h$. En résumé,

$$D(f_1 \times f_2)(x) = f_1(x) \times Df_2(x) + f_2(x) \times Df_1(x).$$

2. La démarche est tout à fait analogue, les détails sont laissés au lecteur. On obtient

$$D(B(f_1, f_2))(a) = B(f_1(a), Df_2(a)) + B(Df_1(a), f_2(a)).$$

3. La différentielle de cette application est

$$h \mapsto \langle f_1(a), Df_2(a).h\rangle + \langle Df_1(a).h, f_2(a)\rangle.$$

En prenant $f_1 = f_2$, on obtient en particulier la différentielle de l'application $x \mapsto ||f_1(x)||_2^2$, qui est donc $h \mapsto 2\langle f_1(x), Df_1(x).h\rangle$.

Exercice 101.— (Examen deuxième session 2014-2015) On considère une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :

Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\overrightarrow{h}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec $o(\overrightarrow{h})$ négligeable devant $\overrightarrow{h}$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0, R)$ de $\mathbb{R}^N$.

Corrigé de l'exercice 101.— **1.** Voir le cours.

2. Le développement limité à l'ordre 1, rappelé dans la question précédente, donne

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) = nDf(0).\frac{x}{n} + n\ o\left(\frac{x}{n}\right) = Df(0).x + n\ o\left(\frac{x}{n}\right)$$

où la dernière égalité vient de la linéarité de l'application $Df(0)$. En utilisant que $o(h)$ est ,négligeable devant h, **on montre que** x étant fixé, la quantité $no(\frac{x}{n})$ tend vers 0. On conclut que la suite converge vers $Df(0).x$.

3. Il s'agit donc de montrer que la suite de fonctions $x \mapsto n\ o(x/n)$ converge uniformément vers 0 sur la boule $B(0, R)$. Soit $\varepsilon > 0$. On applique le fait que $o(h)$ est négligeable devant h : il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall h, \quad \|h\| < \delta \Rightarrow \|o(h)\| < \frac{\varepsilon}{R}\|h\|.$$

Soit n_0 un entier supérieur a R/δ. Soit $n \geq n_0$ et x un point de la boule $B(0,R)$. Alors $\|x\|/n$ est plus petit que δ **(vérifier)**, on en déduit que

$$\left\| o\left(\frac{x}{n}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{R} \frac{\|x\|}{n} < \frac{\varepsilon}{n}$$

et donc que

$$n \left\| o\left(\frac{x}{n}\right) \right\| < \varepsilon,$$

ce qu'on voulait.

Exercice 102.— Calculer la différentielle de l'application $f \mapsto \int_0^1 (f(t))^2 dt$, définie de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, en un point α quelconque. Attention, le "point" α est ici une fonction !!

Corrigé de l'exercice 102.— Soit h un élement de $C([0,1],\mathbb{R})$, on calcule $\Phi(\alpha+h)$ est on cherche à mettre le résultat sous la forme $\Phi(\alpha)+L(h)+o(h)$. On trouve

$$\Phi(\alpha+h) = \Phi(\alpha) + 2\int_0^1 f(t)h(t)dt + \int_0^1 (h(t))^2 dt.$$

On pose $L(h) = 2\int_0^1 f(t)h(t)dt$. Ceci définit une application $L : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dont on voit facilement qu'elle est linéaire. Il faut aussi vérifier qu'elle est continue ; pour ceci, on calcule

$$|L(h)| = 2\left|\int_0^1 f(t)h(t)dt\right| \leq 2\int_0^1 |f(t)|\,|h(t)|\,dt \leq 2\,\|f\|_\infty\,\|h\|_\infty$$

ce qui prouve que L est continue (et sa norme d'application linéaire est majorée par $2\,\|f\|_\infty$).

Enfin, il faut voir que le dernier terme, $\int_0^1 (h(t))^2 dt$, est un "o(h)". Le même type de majoration qu'avant donne $\int_0^1 (h(t))^2 dt \leq \|h\|_\infty^2$, et donc

$$\frac{1}{\|h\|_\infty} \int_0^1 (h(t))^2 dt \to 0 \text{ quand } h \to 0,$$

ce qu'on voulait. Finalement, on a

$$\Phi(\alpha+h) = \Phi(\alpha) + L(h) + o(h)$$

où L est une application linéaire continue, et l'application est bien différentiable au point α, avec pour différentielle l'application L.

Exercice 103 (à rédiger pour le devoir numéro 4).— (adapté de l'examen deuxième session 2017-2018)

Soient $E = \{f :\ f \in C^1([0,1]),\ f(0) = 0\}$ muni de la norme

$$\|f\|_E = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,\ f \in E,$$

et $F = C([0,1])$ muni de la norme

$$\|f\|_F = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \ f \in F.$$

1. Vérifier que $\|.\|_E$ est bien une norme.
2. Donner la définition d'une application linéaire et continue d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|.\|_F)$ et donner également la définition de la norme d'une telle application linéaire continue.
3. Donner la définition de la différentiabilité d'une application $\Phi : E \to F$ en un point $f \in E$.
4. Montrer que $\forall h \in E$

$$\|h\|_F \leqslant \|h\|_E.$$

Soit $\Phi : E \to F$, définie par $\Phi(f) = f' + f^2$.

5. Montrer que Φ est différentiable en tout point $f \in E$ et déterminer la différentielle de Φ.

Corrigé de l'exercice 103.—
1. Le seul point un peu délicat est la propriété de séparation : on suppose que $\|f\|_E = 0$, et on veut montrer que $f = 0$. Puisque

$$\|f\|_E = 0 = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,$$

on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Soit $x \in [0,1]$, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 + \int_0^x 0dt = 0$$

et donc $f = 0$, ce qu'on voulait.
2. **3.** Voir le cours. Cette question a pour but, en particulier, de rappeler au lecteur que **la différentielle est toujours supposée continue** (en dimension finie c'est impliqué par la linéarité et on a donc tendance à l'oublier, mais ici nous sommes en dimension infinie...).
4. On écrit, comme à la première question, $h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)dt = \int_0^x h'(t)dt$ puisque $h(0) = 0$ et on en déduit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|h(x)| = \left|\int_0^x h'(t)dt\right| \leq \int_0^x |h'(t)|\, dt \leq |x| \, \|h\|_E \leq \|h\|_E.$$

En passant au sup on obtient bien l'inégalité voulue.
5. Soit $f, h \in E$. Pour étudier la différentiabilité de Φ au point f, on calcule $\Phi(f+h)$ et on tente de le mettre sous la forme $\Phi(f) + L(h) + o(h)$ où L est une application linéaire continue (qui peut dépendre de f). Ici on obtient

$$\Phi(f+h) = \cdots = f' + f^2 + L(h) + o(h)$$

avec $L(h) = h' + 2fh$ et $o(h) = h^2$. Il reste à montrer (1) que L est une application linéaire continue, et (2) que $o(h)$ est négligeable devant h. Pour (1), la linéarité ne pose pas de problème, pour la continuité on doit évaluer

$$\|L(h)\|_F \leq \cdots \quad \textbf{(compléter ?)}.$$

On remarque que $\|h'\|_F = \|h\|_E$, et que

$$\|2hf\|_F \leq \cdots \leq 2\|f\|_F \|h\|_E \quad \textbf{(pourquoi ?)}.$$

Finalement

$$\|L(h)\|_F \leq (2\|f\|_F + 1)\|h\|_E$$

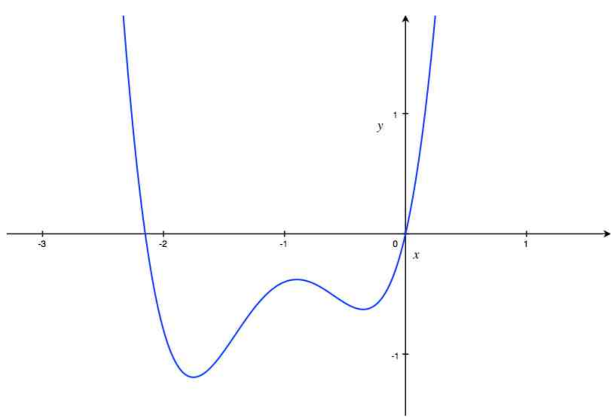
où le nombre $2\|f\|_F + 1$ ne dépend pas de h : ceci montre que L est continue, et termine la vérification du point (1). Le point (2) est laissé au lecteur (utiliser, naturellement, la définition de la norme dans E et la définition d'être négligeable). Finalement, tout ceci montre que Φ est différentiable au point f, et que sa différentielle en ce point est l'application linéaire continue $h \mapsto h' + 2fh$. Pour répondre totalement à la question posée, la différentielle de Φ est l'application $D\Phi : E \to \mathcal{L}(E, F)$ définie par

$$D\Phi(f) = (h \mapsto h' + 2fh).$$

VII Extrema : conditions d'ordre 1

Exercice 104.— Dessiner l'allure du graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet exactement deux minimum locaux dont l'un est un minimum, et un maximum local qui n'est pas un maximum.

Corrigé de l'exercice 104.—



Exercice 105.— Démontrer le théorème sur la condition d'ordre 1 pour les extrema libres. On pourra appliquer le théorème de Fermat en une variable, pour une fonction bien choisie.

Corrigé de l'exercice 105.— On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E, et a un point de Ω en lequel f est différentiable. On suppose que f admet un maximum local en un point a : par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(b) \leq f(a)$ pour tout b dans la boule $B(a, \varepsilon)$. On veut montrer que $Df(a) = 0$.

Fixons un vecteur non nul $\overrightarrow{h}$ quelconque : il s'agit alors de montrer que $Df(a).\overrightarrow{h} = 0$. On considère l'application $\phi : t \mapsto f(a + t\overrightarrow{h})$. C'est une application définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Puisque f est différentiable en a, l'application ϕ est dérivable en 0 et on a $\phi'(0) = Df(a).\overrightarrow{h}$ (dérivée en a selon le vecteur $\overrightarrow{h}$).

D'autre part, l'application ϕ admet un maximum local en 0. (En effet, prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{\|h\|}$. Alors pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, le vecteur $a + t\overrightarrow{h}$ apparitent à la boule $B(a, \varepsilon)$ (**vérifier**), et donc $\phi(t) = f(a + t\overrightarrow{h}) \leq f(a) = \phi(0)$.) On applique le principe de Fermat en une variable : puisque 0 est un maximum local de ϕ, et puisque ϕ est dérivable en 0, on a $\phi'(0) = 0$. Autrement dit, $Df(a).\overrightarrow{h} = 0$, ce qu'on voulait.

Exercice 106.— On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + 3y + 4z$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^3$?

On note B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$, et S la sphère unité.

2. La restriction de la fonction f à la boule B admet-elle un maximum ? Même question sur S.

3. *(extrema liés)* Déterminer s'ils existent, le ou les points en le(s)quel(s) f atteint son maximum sur S, et la valeur de ce maximum.

4. Déterminer s'ils existent, le ou les points en le(s)quel(s) f atteint son maximum sur B, et la valeur de ce maximum.

Corrigé de l'exercice 106.—

1. Les points critiques sont les points $P = (x, y, z)$ en lesquels la différentielle $Df(P)$ s'annule ; cette condition équivaut à l'annulation des trois dérivées partielles, qui ici valent $2x$, 3 et 4. Puisque la seconde dérivée partielle ne s'annule jamais, f n'a aucun point critique sur $\mathbb{R}^3$.

D'après le théorème sur la condition d'ordre 1 des extrema, ceci implique qu'elle n'a aucun maximum local sur $\mathbb{R}^3$. Puisqu'un maximum est en particulier un maximum local, f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^3$. (on pouvait aussi montrer directement que f n'est pas majorée, ce qui implique bien sûr qu'elle n'a pas de maximum).

2. Les ensembles B et S sont des fermés bornés de $\mathbb{R}^3$, donc des parties compactes, d'après la caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^N$. La fonction f étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur B. Sa restriction à B admet donc un maximum. Même réponse pour S.

3. Il s'agit d'appliquer le théorème sur les extrema liés. La sphère S est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+y^2+z^2=1$, le gradient de la fonction $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ vaut $(2x,2y,2z)$, il ne s'annule en aucun point de la sphère : autrement dit, tous les points de la sphère sont réguliers. Notons P un point en lequel $f_{|S}$ atteint son maximum. D'après le théorème, les gradients $\nabla_P f$ et $\nabla_P \phi$ sont colinéaires : il existe un nombre λ tel que $\nabla_P f = \nabla_P \phi$. Le point $P=(x,y,z)$ et le nombre λ vérifient alors le système d'équations

$$\begin{cases} 2x & = & \lambda 2x \\ 3 & = & \lambda 2y \\ 4 & = & \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1 \end{cases}$$

La première équation équivaut à $x(1-\lambda)=0$, donc à $x=0$ ou $\lambda=1$. Dans le cas ou $\lambda=1$, on trouve $y=\frac{3}{2}$, $z=2$, et la dernière équation n'a alors aucune solution en x (géométriquement, aucun point de la sphère unité n'a une coordonnée z égale à 2). Dans le cas où $x=0$, on exprime y et z en fonction de λ à l'aide des équations 2 et 3, puis on reporte dans la dernière pour trouver $\lambda=\pm\frac{5}{2}$. Ceci donne alors $y=\frac{3}{5}, z=\frac{4}{5}$, ou $y=-\frac{3}{5}, z=-\frac{4}{5}$; on trouve ainsi comme solution du système les points $P_+=(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ et $P_-=(0,-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

Attention à ne pas "simplifier par x" dans l'équation $x=\lambda x$...

D'après le théorème des extrema liés, le maximum de f sur la sphère S est atteint en l'un de ses deux points. Comme on a $f(P_-)<f(P_+)$, on en déduit que $f_{|S}$ atteint son maximum en P_+.

4. Montrons que le maximum de $f_{|B}$ ne peut pas être atteint en un point P de l'intérieur de B. En effet, si c'était le cas, alors P serait un maximum local de la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$; d'après le théorème sur la condition d'ordre 1 des extrema, P serait un point critique de f, or nous avons vu que f n'a aucun point critique.

Par conséquent le maximum de $f_{|B}$ est atteint en un point P du bord de B, c'est-à-dire de S. Il s'agit donc du maximum de $f_{|S}$, et il est atteint au point P_+.

Exercice 107.— La volume d'une boite rectangulaire de côtés x,y,z est $f(x,y,z)=xyz$, la surface extérieure est $g(x,y,z)=2yz+2xz+2xy$. On veut fabriquer une boite de volume 1 avec le moins de matériau possible, autrement dit on cherche à minimiser $g(x,y,z)$ avec la contrainte $f(x,y,z)=1$.

1. a. Utiliser l'équation $f(x,y,z)=1$ pour exprimer z en fonction de x et y. En déduire une fonction φ des deux variables x et y dont on cherche le minimum.
b. Trouver les points critiques de φ. En admettant provisoirement que φ possède un minimum, conclure à l'aide de la condition d'ordre 1 sur les extrema libres.
c. Démontrer que φ possède un minimum. *On pourra commencer par montrer que φ est propre, c'est-à-dire que pour tout M, il existe une partie K compacte du domaine de définition de φ telle que $|\varphi(x,y)|\geq M$ pour tout $(x,y)\notin K$ (comparer à l'exercice 52 lorsque l'application est définie sur $\mathbb{R}^2$) : on pourra chercher K sous la forme d'un carré.*

2. *(extrema liés)* On peut aussi utiliser le théorème des extrema liés. Exprimer les gradients de f et de g, écrire la condition donnée par le théorème. Résoudre le problème en faisant les différences des équations deux à deux.

Corrigé de l'exercice 107.—

1. a. Si $xyz = 1$, alors $z = \frac{1}{xy}$, la surface extérieure s'écrit alors $2\varphi(x, y)$ avec

$$\varphi(x, y) = \left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

b. L'application φ est définie sur $\mathrm{Dom}(\varphi) =]0, +\infty[^2$. Ses points critiques sont les points (x, y) en lesquels la différentielle s'annule, c'est-à-dire ceux en lesquels les deux dérivées partielles sont nulles. Autrement dit, ce sont les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} & = & 0 \\ x - \frac{1}{y^2} & = & 0 \end{cases}$$

En utilisant la deuxième équation pour exprimer y en fonction de x, puis en reportant dans la première, **montrer que** ce système implique l'équation $x^5 = 1$. L'application $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante, la seul solution de cett dernière est $x = 1$, qui donne $y = 1$ en reportant dans le système. D'autre part, on vérifie que le couple $(x = 1, y = 1)$ est bien solution du système. La conclusion de ce calcul est que l'application φ admet pour unique point critique le point $(1, 1)$.

Si on admet que φ admet un minimum, alors d'après le théorème sur la condition d'ordre 1 pour les extrema libre, ce minimum doit être atteint un point critique, et puisqu'il n'y en a qu'un seul, le minimum doit être $\varphi(1, 1) = 1$. La surface minimale vaut $2\varphi(1, 1) = 2$, et est réalisée lorsque la boite est un cube.

c. Montrons que φ est propre : on se donne un $M > 0$, et on cherche un compact K de $\mathrm{Dom}(\varphi) =]0, +\infty[^2$ tel que $\varphi(x, y) \geq M$ pour tout (x, y) hors de K. On note que $\varphi(x, y)$ est la somme des trois termes positifs $xy, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, elle est donc minorée par chacun de ces trois termes. En particulier :

- lorsque $x < \frac{1}{M}$, on a $\varphi(x, y) \geq \frac{1}{x} \geq M$;
- même minoration lorsque $y < \frac{1}{M}$;
- si, au contraire, on a $x \geq \frac{1}{M}$ et $y \geq \frac{1}{M}$, alors si l'une des deux coordonnées est de plus supérieur à M^2, on aura a nouveau $\varphi(x, y) \geq xy > \frac{1}{M}M^2 = M$.

La conclusion est que $\varphi(x, y) \geq M$ pour tout point (x, y) en dehors du compact $K = [\frac{1}{M}, M^2]^2$. En effet, tout point (x, y) en dehors de ce compact tombe dans au moins l'une des trois situation que l'on vient de décrire (on peut **vérifier** ceci, par exemple en dessinant K et les zones correspondant aux trois situations).

Utilisons maintenant la propreté de φ pour démontrer que φ admet un minimum. Soit P un point quelconque du plan, et $M = \varphi(P) + 1$. Par proprété, il existe un compact K tel que pour tout point P' hors de K, on a $\varphi(P') \geq \varphi(P) + 1$. notons en particulier que P appartient à K. Par compacité de K et continuité de φ, la restriction de φ à K atteint sa borne inférieure en un point P_0 de K. Alors φ admet pour minimum $m = \varphi(P_0)$ au point P_0. En effet,

- pour tout point (x, y) de K, $\varphi(x, y) \geq \varphi(P_0)$, par définition de P_0,
- pour tout point (x, y) hors de K, on a $\varphi(x, y) \geq M = \varphi(P) + 1 \geq \varphi(P_0)$, par définition de K.

2. Notons $S = \{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$. D'après le théorème des extrema liés, si $g_{|S}$

atteint son minimum en un point $P = (x, y, z)$, alors il existe un nombre λ tel que

$$\begin{cases} yz &= \lambda(y+z) \quad (1) \\ xz &= \lambda(x+z) \quad (2) \\ xy &= \lambda(x+y) \quad (3) \\ xyz &= 1 \quad\quad\quad\ \ (4) \end{cases}$$

La différence entre les équation (1) et (2) donne l'équation $(1')$ / $(x-y)(z-\lambda) = 0$, et on obtient de même l'équation $(2')$ $(x-z)(y-\lambda) = 0$.

Supposons d'abord que $x \neq y$. D'après l'équation (1'), on a alors $z = \lambda$. Regardons l'équation (2'). Si $x = z$, on a $x = z = \lambda$, l'équation (2) donne $\lambda^2 = 2\lambda^2$, d'où $\lambda = 0$, mais alors (1) donne $y = 0$ ou $z = 0$ ce qui contredit l'équation (4). On a donc $x \neq z$, mais alors l'équation (2') donne $y = \lambda$, d'où $y = z = \lambda$, ce qui conduit à nouveau à une contradiction.

On en déduit que $x = y$. Symétriquement, on obtient $x = z$. L'équation (4) donne alors $x^3 = 1$, d'où $x = 1 = y = z$: l'unique solution du système est le point $(1, 1, 1)$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$. La conclusion est que **si $f_{|S}$ admet un minimum**, alors il est atteint au point $(1, 1, 1)$.

VIII Applications de classe C^1

Exercice 108.—

1. Soit $\gamma : [a, b] \to E$ une courbe de classe C^1. Expliquer pourquoi la vitesse de la courbe est bornée sur $[a, b]$. En déduire une majoration de la distance entre les deux extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

2. Soit $f : \Omega \to F$ de classe C^1, et K un compact convexe de Ω (par exemple une boule fermée). Montrer que f est lipschitzienne sur K.

Corrigé de l'exercice 108.—

1. Le fait que la courbe est de classe C^1 signifie en particulier que sa dérivée est une fonction continue. L'intervalle $[a, b]$ étant compact, l'application continue γ' est bornée sur $[a, b]$. On peut alors considérer le réel

$$M = \sup_{t \in [a,b]} ||\gamma'(t)||.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$||\gamma(b) - \gamma(a)|| \leq M||b - a||.$$

2. Puisque f est de classe C^1, l'application Df est une application continue de K dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$, par compacité de K elle est bornée. On peut donc définir le réel

$$M = \sup_{x \in K} ||Df(x)||.$$

Soient $a, b \in K$. L'ensemble K étant convexe, le segment $[a, b]$ est inclus dans K, la norme de $Df(x)$ est donc majorée par M pour tout point x de $[a, b]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$||f(b) - f(a)|| \leq M||b - a||.$$

L'application f est donc M-lipschitzienne sur K.

Exercice 109.— Soit $f : E \to F$ une application différentiable entre deux espaces vectoriels normés. On suppose que la différentielle est constante : pour tout x, y, $Df(x) = Df(y)$. Que peut-on dire de l'application f ? *Aide : on pourra utiliser un corollaire de l'inégalité des accroissements finis.*

Corrigé de l'exercice 109.— Nous allons montrer que f est une application affine. Appelons L l'application $Df(x)$ pour un point x_0 quelconque de E : par hypothèse, L ne dépend pas du choix de x_0. L'application L va de E dans F et est linéaire Considérons maintenant l'application $g = f - L$. On a, pour tout x de E, $Dg(x) = Df(x) - DL(x) = Df(x) - L = 0$. De plus g est définie sur E qui est connexe. D'après le corollaire de l'inégalité des accroissements finis, l'application g est constante : il existe un élément b de f tel que pour tout x, $g(x) = a$, autrement dit $f(x) = L(x) + a$, et f est bien une application affine.

Exercice 110.— Dans cet exercice, on montre que si la vitesse le long d'une courbe reste proche d'un vecteur $\overrightarrow{v}$, alors la courbe reste proche de la droite parcourue à vitesse $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, soit t un réel positif, et $\gamma : [0, t] \to F$ une application continue, on suppose que γ est dérivable sur $]0, t[$ (F est un espace vectoriel normé). Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de F, et M un réel tel que

$$\forall s \in [0, t], \|\gamma'(s) - \overrightarrow{v}\| \leq M.$$

Montrer l'inégalité

$$\|\gamma(t) - (\gamma(0) + t.\overrightarrow{v})\| \leq M\,|t| \quad (\star).$$

Corrigé de l'exercice 110.— On applique l'inégalité des accroissements finis à la courbe $\alpha(s) = \gamma(s) - s\overrightarrow{v}$, qui va de $[0, t]$ dans F. En effet, pour tout s dans l'intervalle $[0, t]$, on a $\alpha'(s) = \gamma'(s) - \overrightarrow{v}$, dont la norme est majorée par M par hypothèse. L'inégalité des accroissements finis nous dit alors que $\|\alpha(t) - \alpha(0)\| \leq Mt$, ce qui donne le résultat voulu.

IX Inversion locale, fonctions implicites

IX.1 Théorème d'inversion locale

Exercice 111.— Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, x + \cos(y))$ est un C^1-difféomorphisme.

Corrigé de l'exercice 111.— D'après la définition, il s'agit de montrer que l'application f est bijective, de classe C^1, et que son inverse est aussi de classe C^1.

1. Montrons que f est bijective. Pour ceci, on se donne un point (a, b), et on cherche ses antécédants (le but étant de voir qu'il en a un et un seul), c'est-à-dire les points (x, y) tels que $f(x, y) = (a, b)$. Autrement dit, il s'agit de résoudre le système suivant (et de voir qu'il a une unique solution) :

$$\begin{cases} y & = & a \\ x + \cos(y) & = & b \end{cases}$$

Dans ce système il y a des x, des y, des a et des b, qui mais tous ne jouent pas le même rôle : x et y sont les inconnues, alors que a et b sont deux réels fixés (on dit que ce sont des paramètres du systèmes).

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} y & = & a \\ x & = & b - \cos(a) \end{cases}$$

ce qui montre bien qu'il existe un unique couple (x, y) solution, autrement dit le point (a, b) a un unique antécédent) qui est $(a, b - \cos(a)$.

2. Comme on a une formule pour f et f^{-1}, on voit que ce sont des applications de classe C^∞. L'application f est donc bien un C^1-difféomorphisme.

D'après le théorème d'inversion globale, pour savoir si la réciproque est de classe C^1, on peut aussi vérifier que la différentielle de f en n'importe quel point du plan est une application linéaire inversible. Mais ici c'est aussi simple de le faire directement.

Exercice 112.— On définit les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, on considère les deux propriétés suivantes :

(1) $f(5, 6) = (7, 8)$,

(2) $Df(5, 6) = A$,

où $Df(5, 6)$ désigne la matrice jacobienne de f au point $(5, 6)$.

1. Donner un exemple d'une application de classe C^1 vérifiant ces deux propriétés.

2. Soit f une application de classe C^1 vérifiant les propriétés (1) et (2). Montrer la propriété (3) suivante :
pour toute suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du plan qui tend vers le point $(7, 8)$, il existe un entier N et une suite $(P_n)_{n\geq N}$ de points du plan, qui tend vers le point $(5, 6)$, et telle que $f(P_n) = Q_n$ pour tout $n \geq N$.

3. Donner un exemple d'application f de classe C^1

— qui vérifie la propriété (1),

— qui vérifie la propriété (2') suivante : $Df(5, 6) = B$,

— mais qui ne vérifie pas la propriété (3).

Corrigé de l'exercice 112.—

1. Le plus simple est de prendre une application affine : l'application

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} + A.\begin{pmatrix} x-5 \\ y-6 \end{pmatrix}$$

convient.

2. La différentielle de f au point $(5,6)$ a pour matrice A, qui est inversible (ce qu'on vérifie en calculant par exemple son déterminant). On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage U de $(5,6)$ et un voisinage V de $(7,8)$ tels que la restriction $f_{|U}$ de f à U est un difféomorphisme de U sur V. En particulier, c'est une bijection. Soit (Q_n) une suite qui tend vers $(7,8)$, comme dans l'énoncé. Puisque V est un ouvert contenant $(7,8)$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, Q_n appartient à V. Pour chaque entier $n \geq N$, on peut alors définir P_n comme $f_{|U}^{-1}(Q_n)$. Puisque $f_{|U}$ est un difféomorphisme, son inverse est en particulier continue au point $(7,8)$, et on en déduit que la suite (P_n) converge vers $(5,6)$ en appliquant le critère séquentiel de continuité.

3. Ici encore, on peut prendre pour f une application affine : il y en a une seule qui vérifie les conditions données. Comme la matrice B n'est pas inversible, l'image de $\mathbb{R}^2$ par f est une droite. Il suffit alors de prendre une suite (Q_n) de points hors de cette droite, et convergeant vers $(7,8)$, pour contredire la propriété (3). Les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 113 (à rédiger pour le devoir numéro 4).— Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (2x+y, x^2-y^2)$. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant le point $(2,1)$ tel que la restriction $g_{|U} : U \to g(U)$ est un C^1-difféomorphisme.

Corrigé de l'exercice 113.— On veut appliquer le théorème d'inversion locale. Pour cela, on calcule les dérivées partielles de g pour écrire la matrice jacobienne

$$Dg(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut -8 : $Dg(2,1)$ est une application linéaire inversible. L'application g étant de classe C^1, le théorème s'applique, et nous donne exactement ce qui est demandé.

Exercice 114.—

1. L'application $M \mapsto M^2$ est-elle un C^1-difféomorphisme de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées dans lui-même ?

2. a. Calculer la différentielle de l'application $M \mapsto M^2$ en un point M_0 quelconque. **b.** Montrer que toute matrice N assez proche de l'identité est le carré d'une unique matrice M proche de l'identité. *On pourra commencer par traduire précisément cette phrase, en introduisant les quantificateurs appropriés.*

3. On note $\sqrt{N}$ la matrice M de la première question. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{Id+H}$ lorsque H tend vers 0. *On pourra calculer simplement la différentielle de $M \mapsto \sqrt{M}$ en l'identité.*

Corrigé de l'exercice 114.—

1. Cette application n'est pas injective, puisque par exemple $(-\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Id}^2$. Ce n'est donc pas un difféomorphisme.

2. a. On a, pour toute matrice H,

$$(M_0 + H)^2 = M_0^2 + M_0H + HM_0 + H^2$$

(attention, le produit matriciel ne commutent pas en général), avec

$$||H^2|| \leq ||H||^2$$

qui est négligeable devant H lorsque H tend vers 0, et l'application $H \mapsto M_0H + HM_0$ est linéaire. Par définition, $F : M \mapsto M^2$ est différentiable au point M_0 et

$$DF(M_0).H = M_0H + HM_0.$$

b. On fixe une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute matrice N dans la boule $B(\mathrm{Id}, \delta)$, il existe une unique matrice M dans la boule $B(\mathrm{Id}, \epsilon)$ telle que $M^2 = N$.

Pour ceci, on va appliquer le théorème d'inversion locale. L'application $F : M \mapsto M^2$ est de classe C^1. Sa différentielle au point $M_0 = \mathrm{Id}$ est l'application $H \mapsto 2H$, qui est clairement inversible (d'inverse $H \mapsto \frac{1}{2}H$). On peut donc appliquer le théorème d'inversion local, qui nous dit qu'il existe un voisinage U de Id sur lequel $F_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme sur son image.

En particulier, l'application $F_{|U}^{-1}$ est continue : soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\mathrm{Id}, \delta) \subset F(U)$ et tel que pour toute matrice N,

$$N \in B(\mathrm{Id}, \delta) \Rightarrow F_{|U}^{-1}(N) \in B(\mathrm{Id}, \epsilon).$$

Étant donnée une matrice N dans la boule $B(\mathrm{Id}, \delta)$, la matrice $M = F_{|U}^{-1}(N)$ est dans la boule $B(\mathrm{Id}, \epsilon)$ et vérifie $M^2 = F(M) = F(F_{|U}^{-1}(N)) = N$. L'unicité suit de l'injectivité de $F_{|U}$.

3. Puisque $F_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme, son inverse $M \mapsto \sqrt{M}$ est aussi de classe C^1 ; puisque $\mathrm{Id}^2 = \mathrm{Id}$, sa différentielle en l'identité vaut

$$D[F_{|U}^{-1}](\mathrm{Id}) = [DF_{|U}(\mathrm{Id})]^{-1} = H \mapsto \frac{1}{2}H.$$

Par définition de la différentielle, on en déduit le développement limité

$$\sqrt{\mathrm{Id} + H} = \mathrm{Id} + \frac{1}{2}H + o(H).$$

Exercice 115.— On se place dans l'espace vectoriel normé $E = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que l'application $f \mapsto f^2$ n'est pas un C^1-difféomorphisme sur son image.

2. Montrer qu'elle n'est pas un C^1-difféomorphisme sur aucun voisinage de la fonction nulle.

3. Montrer que, par contre, sa restriction à l'ouvert des fonctions strictement positives est un difféomorphisme (on pourra relire le paragraphe sur la différentielle de cette application dans le mémo).

Corrigé de l'exercice 115.—

1. L'application $f \mapsto f^2$ n'est pas injective : par exemple si f_1 est l'application $x \mapsto 1$ et f_{-1} est l'application $x \mapsto -1$, alors $f_0^2 = f_1^2 = f_1$. En particulier ce n'est pas un difféomorphisme sur son image.

2. Soit U un voisinage de la fonction nulle. Pour $c > 0$ assez petit, U contient les deux applications $f_c : x \mapsto c$ et $f_{-c} : x \mapsto -c$, puisque $||f_c||_\infty = ||f_{-c}||_\infty = c$. Or $f_c^2 = f_{-c}^2 = f_{c^2}$, ce qui montre que $f_{|U}$ n'est pas injective.

3. Notons $O = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. L'application $f \mapsto f^2$ est bijective de O dans O. En effet :

- soient $f, g \in O$ telles que $f^2 = g^2$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)^2 = g(x)^2$, d'où on déduit $f(x) = g(x)$ puisque $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$; donc $f = g$: l'application $f \mapsto f^2$ est injective.
- Soit $g \in O$, l'application $f = \sqrt{g}$ est bien définie puisque $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, et on a $f^2 = g$:l'application$f \mapsto f^2$ est donc surjective sur O.

De plus, la différentielle de $f \mapsto f^2$ en un point f_0 est l'application $h \mapsto 2f_0h$ (même preuve qu'à l'exercice précédent). Cette application linéaire est clairement inversible, d'inverse $h \mapsto \frac{h}{2f_0}$ (l'application

$$\frac{h}{2f_0} : x \mapsto \frac{h(x)}{2f_0(x)}$$

est bien définie car par hypothèse, f_0 ne s'annule pas). D'après le théorème d'inversion globale (dans le mémo, corollaire 2 du théorème d'inversion locale), on en déduit que $f \mapsto f^2$ est un C^1 difféomorphisme de O dans O.

Exercice 116.— *Dans cet exercice on se demande comment les racines d'un polynôme varient en fonction des coefficients. Pour simplifier, on se restreint aux polynômes de degré 3 (mais la même démarche fonctionne en degré plus grand, et produit un résultat analogue).*

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P_{a,b,c}(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$.

1. On se donne $(a_0, b_0, c_0, x_0) \in \mathbb{R}^4$ et on suppose que x_0 est une racine du polynôme $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$. Trouver une condition suffisante pour qu'il existe un voisinage ouvert U de (a_0, b_0, c_0) et une application $\mathcal{X}_0 : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que

$$\mathcal{X}_0(a_0, b_0, c_0) = x_0 \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(\mathcal{X}_0(a, b, c)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in U.$$

2. *(optionnelle et difficile)* Montrer que cette condition est aussi nécessaire.

3. Soit $\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid P_{a,b,c}(X) \text{ a trois racines réelles distinctes}\}$

a. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \mapsto (x, y, z)$ où $x < y < z$ sont les racines (distinctes) de $P_{a,b,c}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur l'ouvert $\{(x, y, z) \mid x < y < z\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé de l'exercice 116.—

1. Il s'agit de voir à quelle conditions sur a_0, b_0, c_0, x_0 la relation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ définit localement x comme une fonction de a, b, c. D'après le théorème des fonctions implicites, il suffit pour cela que la dérivée partielle

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + ax^2 + bx + c)$$

ne s'annule pas au point (a_0, b_0, c_0, x_0). Or cette dérivée partielle n'est autre que $P_0'(x_0)$. Par conséquent, si $P'(x_0) \neq 0$, alors le théorème des fonctions implicites garantit l'existence de U et de $\mathcal{X}_0$ comme voulus.

2. Inversement, il faut montrer que si $P_0'(x_0) = 0$, alors il n'existe pas de telle fonction $\mathcal{X}$. On va trouver deux raisons très différentes selon les cas : la plupart du temps on va trouver qu'en modifiant un peu les coefficients de notre polynôme P_0, on obtient un polynôme qui n'a plus de racine proche de x_0, c'est alors la continuité de l'application $\mathcal{X}_0$ qui est contredite. Dans un autre cas, une telle application continue existera, mais ce sera son caractère C^1 qui sera mis en défaut.

Bien sûr, le fait que l'hypothèse du théorème des fonctions implicites n'est pas vérifiée n'entraine pas automatiquement que sa conclusion ne l'est pas non plus...

La condition $P_0'(x_0) = 0$ signifie que x_0 est une racine au moins double du polynôme P_0, c'est-à-dire que P_0 se factorise sous la forme

$$P_0(X) = (X - x_0)^2(X - \alpha)$$

pour un certain α.

Étudions d'abord le cas où $\alpha \neq x_0$, c'est-à-dire que x_0 n'est pas une racine triple. Supposons également que $\alpha < x_0$. Pour un $\varepsilon > 0$, considérons le polynôme $P_\varepsilon(X) = P_0(X) = (X - x_0)^2(X - \alpha) + \varepsilon$, et notons $a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon)$ ses coefficients. Pour tout $x > \alpha$, on a $x - \alpha > 0$ et donc $P_\varepsilon(x) > 0$: en particulier P_ε n'a aucune racine supérieure à α. Si la fonction $\mathcal{X}_0$ existe, alors le nombre $\mathcal{X}_0(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ est une racine de P_ε, et donc il est inférieur ou égal à α. Mais puisque $\mathcal{X}_0$ est supposée être continue, lorsque ε tend vers 0, on devrait avoir $\mathcal{X}_0(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ qui tend vers x_0, ce qui est absurde. Le raisonnement est analogue dans le cas où $x_0 < \alpha$, en posant $P_\varepsilon(X) = P_0(X) = (X - x_0)^2(X - \alpha) - \varepsilon$.

Étudions enfin le cas où $\alpha = x_0$, c'est-à-dire que x_0 est une racine triple : on a

$$P_0(X) = (X - x_0)^3.$$

Posons à nouveau $P_\varepsilon(X) = P_0(X) = (X-x_0)^3-\varepsilon$; l'équation $P_0(x) = 0$ se résoud explicitement et on trouve que son unique racine est $x_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{3}}+x_0$. Si $\mathcal{X}$ existe et est de classe C^1, alors par composition l'application $\varepsilon \mapsto \mathcal{X}_0(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon))$ doit aussi être de classe C^1, mais d'après ce qui précède on a $\mathcal{X}_0(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon)) = \varepsilon^{\frac{1}{3}} + x_0$, or cette application n'est pas de classe C^1 au point $\varepsilon = 0$: contradiction.

3. a. Soit (a_0, b_0, c_0) tel que le polynôme P_{a_0,b_0,c_0} ait trois racines distinctes x_1, x_2, x_3. On peut appliquer le résultat de la question précédente séparément à chacune des trois racines ; on obtient l'existence, pour $i = 1, 2, 3$, d'un voisinage ouvert U_i de (a_0, b_0, c_0) et d'une application $\mathcal{X}_i : U_i \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que

$$\mathcal{X}_i(a_0, b_0, c_0) = x_i \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(\mathcal{X}_i(a, b, c)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in U_i.$$

Soit U l'ensemble des valeurs de (a, b, c), incluses dans $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, pour lesquelles les trois nombres $\mathcal{X}_i(a, b, c)$ sont distincts. **En écrivant U comme l'intersection de trois ensembles ouverts** (utiliser la continuité des $\mathcal{X}_i$, et exprimer U comme intersection de trois images réciproques), on voit qu'il s'agit d'un ensemble ouvert. Puisque les trois racines x_1, x_2, x_3 sont distinctes, cet ensemble contient (a_0, b_0, c_0). Puisque U est inclus dans Ω, on voit que le point (a_0, b_0, c_0) est dans l'intérieur de Ω, et puisque nous avons montré ceci pour un point quelconque de Ω, on conclut que Ω est bien un ouvert.

b. Avec les notations de la réponse précédente, l'application Θ est donnée localement par $(a, b, c) \mapsto (\mathcal{X}_1(a, b, c), \mathcal{X}_2(a, b, c), \mathcal{X}_3(a, b, c))$, qui est de classe C^1 d'après la question 1, donc Θ est de classe C^1.

Pour tout $x < y < z$, le polynôme unitaire dont les racines sont x, y, z est

$$(X - x)(X - y)(X - z) = X^3 - (x + y + z)X^2 + (yz + zx + xy)X - xyz.$$

L'application Θ est surjective, puisque tout triplet $x < y < z$ constitue les racines du polynôme ci-dessus. Elle est injective, puisque les racines d'un polynôme détermine les coefficients (ce que montre par exemple le calcul qui précède). L'inverse de Θ est l'application $(x, y, z) \mapsto (-x - y - z, yz + zx + xy, -xyz)$ qui est de classe C^1. Il s'agit donc d'un C^1-difféomorphisme.

Exercice 117.— (Examen deuxième session 2016-2017) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \ \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que, pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|.$$

1. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $Df(x)$ est injective. En déduire que $Df(x)$ est inversible. **b.** Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

3. a. Que vaut $f(\mathbb{R}^n)$? **b.** En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé de l'exercice 117.— **1. a.** Soit x un point de $\mathbb{R}^n$, supposons que l'application linéaire $Df(x)$ n'est pas injective : il existe un vecteur $h \neq 0$ tel que $Df(x).h = 0$. La définition de la différentielle donne alors, pour tout réel $t > 0$,

$$f(x+th) = f(x) + tDf(x).h + o(th) = f(x) + o(th).$$

On en déduit

$$\|f(x+th) - f(x)\| = \|o(th)\| \geq \|th\|$$

Mais lorsque t tend vers 0, le quotient $\frac{o(th)}{\|th\|}$ tend vers 0, ce qui contredit cette inégalité. L'application linéaire $Df(x)$ est donc injective.

Puisque $Df(x)$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^n$, il est aussi surjectif (d'après le théorème noyau-image), et donc inversible.

Autre présentation possible pour la première partie : pour tout x, h, on a

$$Df(x).h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x+th) - f(x) \right).$$

Or pour tout $t > 0$, $\|f(x+th) - f(x)\| \geq \|th\| = t\,\|h\|$, d'où on tire $\|Df(x) - .h\| \geq \|h\|$ et en particulier, si $h \neq 0$, $Df(x).h \neq 0$.)

b. On applique le corollaire du théorème d'inversion locale.

2. Nous cherchons à appliquer le critère séquentiel de fermeture. Soit B un point de $\mathbb{R}^n$, et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de point de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers B, il s'agit de voir que B est dans $f(\mathbb{R}^n)$. Par définition de $f(\mathbb{R}^n)$, il existe pour chaque n un point A_n de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(A_n) = B_n$. L'hypothèse sur f entraine, pour tout p, q,

$$\|B_p - B_q\| = \|f(A_p) - f(A_q)\| \geq \|A_p - A_q\|.$$

D'autre part la suite (B_n) est convergente, elle est donc de Cauchy. L'inégalité ci-dessus permet d'en déduire que la suite (A_n) est aussi de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, la suite (A_n) converge, notons A sa limite. Par continuité de f, on a $f(A) = B$. Le point B est dans l'image de f, comme voulu.

Une autre façon de rédiger la question 2 consiste à montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est complet ; on en déduit alors que c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

3. **a.** Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, ses seules parties à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide et lui-même. La partie $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte et fermée, et non vide (elle contient par exemple $f(0)$), on en déduit $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. **b.** D'abord f est injective (ceci se déduit très rapidement de l'inégalité donnée en hypothèse). On vient de voir qu'elle est surjective. C'est donc une bijection, elle admet une application réciproque f^{-1}, et il reste à voir que cette réciproque est continue.

Soient $x', y' \in \mathbb{R}^n$ et $x = f^{-1}(x')$, $y = f^{-1}(y')$, l'inégalité donnée en hypothèse s'écrit

$$\|x' - y'\| \geq \left\|f^{-1}(x') - f^{-1}(y')\right\|$$

ce qui montre que f^{-1} est 1-lipschitzienne, donc continue.

IX.2 Théorème des fonctions implicites

Exercice 118.—

1. Montrer que l'équation

$$-\sin(y) + x + \cos(xy) = 0$$

définit localement y comme une fonction de x au voisinage du point $(-1, 0)$.

2. Calculer la dérivée de cette fonction en $x = -1$.

Corrigé de l'exercice 118.— **1.** Posons $f(x, y) = -\sin(y) + x + \cos(xy)$. On voudrait appliquer le théorème des fonctions implicites avec $X = Y = \mathbb{R}$, $(a, b) = (-1, 0)$ et $c = 0$. L'hypothèse consiste à vérifier que l'application $y \mapsto f(-1, y)$ a une différentielle inversible en $y = 0$, autrement dit que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0)$ n'est pas nulle. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(y) - x\sin(xy), \text{ et donc } \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = -1.$$

Puisque cette dérivée n'est pas nulle, le théorème s'applique, et on en déduit qu'il existe un voisinage U de -1 et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(-1) = 0$ et pour tout x dans U, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

2. Le plus simple est de dériver la relation précédente, puis d'appliquer avec $x = -1, \varphi(0) = 0$. On obtient, pour tout x dans U,

$$-\sin(\varphi(x)) + x + \cos(x\varphi(x)) = 0, \text{ d'où } -\varphi'(x)\sin(\varphi(x)) + 1 - (x\varphi'(x) + \varphi(x))\sin(x\varphi(x)) = 0$$

et pour $x = -1$ cela donne $\varphi'(-1) = -1$.

On pouvait aussi dériver la relation abstraite $f(x, \varphi(x)) = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

et on obtient la formule générale

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

qui redonne $\varphi'(-1) = 1$ lorsqu'on prend $x = -1$.

Exercice 119.— (Examen 2016)

1. Montrer que l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ln(1 + y - z) - x - z = 0\}$$

s'écrit au voisinage de $(0, 0, 0)$ comme le graphe $z = \Phi(x, y)$ d'une fonction Φ de classe C^1 telle que $\Phi(0, 0) = 0$.

2. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de Φ en $(0, 0)$.

Corrigé de l'exercice 119.—

1. Soit f la fonction définie par $f(x, y, z) = \ln(1+y-z)-x-z$. On remarque f est définie au voisinage de $(0, 0, 0)$, de classe C^1 (et même C^∞), et que $f(0, 0, 0) = 0$.

On cherche à appliquer le théorème des fonctions implicites ; pour cela, il suffit de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$. Or

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{1+y-z} - 1$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = -2 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites s'applique donc, et nous dit que l'ensemble S s'écrit au voisinage de $(0,0,0)$ comme le graphe d'une fonction $z = \Phi(x,y)$ de classe C^1 (et même C^∞). Notons qu'on a $\Phi(0,0) = 0$.

2. Écrire le développement limité de Φ à l'ordre 1 revient à calculer les dérivées partielles de Φ. Or par définition de Φ, on a pour tout (x,y) assez proche de $(0,0)$, $f(x,y,\Phi(x,y)) = 0$. Nous allons obtenir ses dérivées partielles en dérivant cette égalité par rapport à x et y. En dérivant par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\Phi(x,y)) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\Phi(x,y)) = 0.$$

Il s'agit d'une dérivation d'une fonction composée $f \circ \gamma$, avec $\gamma(x) = (x,y,\Phi(x,y))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $Df(\gamma(x)).\gamma'(x)$, dont l'expression en coordonnées fait apparaitre le produit de la matrice des dérivées partielles de f par le vecteur vitesse $\gamma'(x) = (1, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x})$.

d'où on tire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = -\frac{1}{2}.$$

On obtient de même

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = \frac{1}{2}.$$

On peut maintenant écrire le développement limité à l'ordre 1 de Φ en $(0,0)$,

$$\Phi(h,k) = \Phi(0,0) + h\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,0) + o(h,k) = 0 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + o(h,k).$$

Autre solution : comme Φ est de classe C^1, on sait qu'elle admet un développement limité

$$\Phi(x,y) = ax + by + o(x,y).$$

Pour calculer les coefficients a et b, on utilise le développement limité de f en $(0,0,0)$, en écrivant

$$\begin{aligned} f(x,y,\Phi(x,y)) = 0 &= \ln(1+y-\Phi(x,y)) - x - \Phi(x,y) \\ &= y - \Phi(x,y) - x - \Phi(x,y) + o(x,y) \\ &= (-1-2a)x + (1-2a)y + o(x,y) \end{aligned}$$

(on a utilisé $\ln(1+u) = u + o(u)$) et la composition des développements limités). D'où on déduit, par unicité du développement limité, $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Exercice 120.— On considère l'équation

$$z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1 = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions du type $(0,0,z)$.

2. Montrer que l'équation définit localement z comme une fonction $z = \phi(x,y)$ au voisinage de la solution $(0,0,1)$.

3. En dérivant la relation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, calculer les dérivées partielles de φ au point $(0, 0)$.

4. En déduire une valeur approchée d'une solution avec $x = 0,03$ et $y = -0,04$ (si elle existe...).

Corrigé de l'exercice 120.—

1. lorsque $x = y = 0$, l'équation se réduit à $z^2 - 1 = 0$, d'où les solutions $(0, 0, -1)$ et $(0, 0, 1)$.

2. On pose $f(x, y, z) = z^2 e^{zx} + 2zy^2 - 1$. On veut appliquer le thérème des fonctions implicites avec $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $a = (0, 0)$, $b = 1$ et $c = 0$. L'hypothèse consiste à vérifier que l'application $y \mapsto f(0, 0, z)$ a une différentielle inversible en $z = 1$, autrement dit que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)$ n'est pas nulle. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 2$$

et puisque cette dérivée partielle n'est pas nulle, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe un voisinage U du point $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, et une application $\varphi : U \to \mathbb{R}$, telle que $\varphi(0, 0) = 1$ et

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

pour tout $(x, y) \in U$.

3. En dérivant par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \text{ d'où } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{1}{2}.$$

La formule pour la deuxième dérivée partielle est analogue et donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

4. On a donc le développement limité au voisinage de $(0, 0)$

$$\varphi(h, k) = \varphi(0, 0) + h\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) + k\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) + o(h, k) = 1 - \frac{1}{2}h + o(h, k)$$

avec $o(h, k)$ négligeable devant (h, k) lorsque (h, k) tend vers $(0, 0)$. En négligeant le reste on obtient l'approximation

$$\varphi(0, 03; -0, 04) = 1 - 0, 015 = 0, 985.$$

(On note que la méthode ne donne aucune idée de la taille du voisinage U, donc on ne sait pas si $\varphi(0, 03; -0, 04)$ est vraiment défini, et si par chance c'est le cas, on n'a aucune idée de l'erreur commise par cette approximation!!)

Exercice 121.— On considère l'intersection de la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ avec le cylindre d'axe vertical passant par le point $(1,0,0)$ et de rayon 1, qui a pour équation $(x-1)^2+y^2=1$.

1. Montrer que le système des deux équations détermine localement y et z en fonction de x, sauf en quatre points à déterminer.

2. Esquisser le dessin de cette intersection et interpréter graphiquement le résultat du calcul.

Corrigé de l'exercice 121.—

1. On pose

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2, (x-1)^2+y^2),$$

ce qui définit une application de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On veut appliquer le théorème des fonctions implicites avec $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}^2$, $(a,b)=(x,(y,z))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ un point quelconque vérifiant $F(a,b)=(1,1)$. L'hypothèse du théorème est que la différentielle de l'application $(y,z)\mapsto F(a,y,z)$ doit être inversible. Cette application a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $-4yz$, il s'annule si et seulement si $y=0$ ou $z=0$.

Cherchons les **mauvais points**, c'est-à-dire points de l'intersection en lesquels l'hypothèse du théorème n'est pas vérifiée : il s'agit donc des points (x,y,z) vérifiant le système d'équations

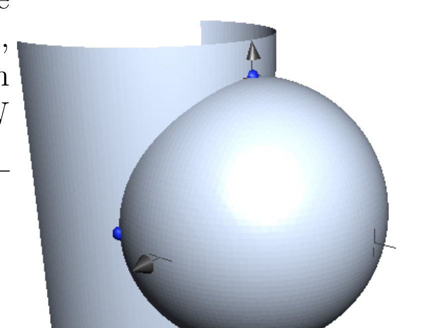
$$\left\{\begin{array}{lcll} yz & = & 0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1 & (2) \\ (x-1)^2+y^2 & = & 1 & (3). \end{array}\right.$$

Lorsque $y=0$, l'équation (3) donne $x=0$ ou $x=2$. Avec $y=0, x=0$ l'équation (2) donne alors $z=\pm 1$, d'où les solutions $N=(0,0,1)$ et $S=(0,0,-1)$. Avec $x=2, y=0$ l'équation (2) donne $z^2=-3$ qui n'est jamais réalisée.

Lorsque $z=0$, la différence des équations (2) et (3) donne $2x-1=0$, d'où $x=\frac{1}{2}$, et l'équation (2) donne alors $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où les solutions $E=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ et $O=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

Soit enfin (a,b) un point de l'intersection qui n'est pas l'un de ces quatre points. Alors la restriction de la différentielle est inversible, le théorème des fonctions implicites s'applique, et nous dit que le système d'équations définit localement (y,z) comme une fonction de x, $y=\varphi(x), z=\psi(x)$.

2. L'intersection est une courbe C. Les points N,S correspondent aux altitudes maximales et minimales : au voisinage de ces points, l'application $C\to\mathbb{R}$ donnée par $(x,y,z)\mapsto z$ n'est injective sur aucun voisinage de ces points. De même, les points O et E correspondent au minimum et au maximum de la fonction $(x,y,z)\to y$ restreinte à C. On voit ci-contre les deux surfaces, avec les points N et E.



Exercice 122.—

1. Montrer que l'équation matricielle $M^3 + N^3 - 3MN = \mathrm{Id}$ définit localement N en fonction de M au voisinage du couple solution $(\mathrm{Id}, 0)$. Autrement dit, pour toute matrice M dont les coefficients assez proches de ceux de l'identité, il existe une unique matrice $N = \Phi(M)$ dont les coefficients sont proches de 0, telle que $M^3 + N^3 - 3MN = \mathrm{Id}$.

2. Calculer la différentielle de l'application Φ au point Id, et écrire le développement limité à l'ordre 1 en ce point.

Corrigé de l'exercice 122.—

1. On veut appliquer le théorème des fonctions implicites, avec $X = Y = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M, N) = M^3 + N^3 - 3MN$, $(a, b) = (\mathrm{Id}, 0)$, $c = \mathrm{Id}$. Notons que $F(\mathrm{Id}, 0) = \mathrm{Id}$, et que l'application F est bien de classe C^1 (en coordonnées, il s'agit de fonctions polynômes). Pour vérifier l'hypothèse principale du théorème, il s'agit de calculer la différentielle de l'application $N \mapsto F(\mathrm{Id}, N)$ au point $N = 0$.

Notons Ψ cette application. On a $\Psi(N) = \mathrm{Id} - 3N + N^3 = \Psi(0) - 2N + o(N)$, avec $o(N) = N^3$ qui est négligeable devant N lorsque N tend vers 0, puisque $||N^3|| \leq ||N||^3 = ||N|| \times ||N||^2$ (on a utilisé une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). La différentielle de Ψ au point $N = 0$ est donc l'application $H \mapsto -3H$, qui est inversible (son inverse est $H \mapsto \frac{1}{3}H$). Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc satisfaites. On en déduit qu'il existe un voisinage U de l'identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et un voisinage V de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et une application $\Phi : U \to V$ de classe C^1, telle que pour tout (M, N) dans $U \times V$, on a

$$F(M, N) = \mathrm{Id} \Leftrightarrow N = \Phi(M).$$

2. D'après ce qui précède, on a en particulier, pour tout M dans U,

$$G(M) \stackrel{\text{def}}{=} F(M, \Phi(M)) = \mathrm{Id} = M^3 + \Phi(M)^3 - 3M\Phi(M) \quad /(\star).$$

Nous allons trouver la différentielle de Φ au point 0 en différenciant cette égalité. L'application G est composée de $G_1 : M \mapsto (M, \Phi(M))$ et de F. La différentielle de G_1 au point 0 est l'application $H \mapsto (H, D\Phi(0).H)$. Pour calculer la différentielle de F au point $G_1(0) = (0, \mathrm{Id})$, on évalue

$$F(H, \mathrm{Id} + K) = \cdots = \mathrm{Id} - 3H + 3K + o(H, K)$$

avec $o(H, K) = 3K^2 - 3HK + K^3 + H^3$ qui est négligeable devant (H, K). La différentielle de F au point $(0, \mathrm{Id})$ est donc l'application $(H, K) \mapsto -3H + 3K$. La différentielle de G au point 0 est la composée des deux différentielles, qui vaut donc $H \mapsto -3H + 3D\Phi(0).H$.

D'après la relation $(\star)$, l'application G est constante sur l'ouvert U, sa différentielle est donc nulle. On a donc, pour tout H, $-3H + 3D\Phi(0).H = 0$, ce qui donne $d\Phi(H) = H$: la différentielle de Φ est l'application Identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son développement limité s'écrit

$$\Phi(M) = \mathrm{Id} + M + o(M).$$

Exercice 123.— Il s'agit de démontrer le théorème des extrema liés, dans le cas d'une seule équation de liaison.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une autre fonction. on considère l'ensemble

$$S = \varphi^{-1}(0) = \{x \mid \varphi(x) = 0\}.$$

Soit a un point de $\mathbb{R}^n$, on suppose que le gradient de φ au point a n'est pas nul : $\nabla_a \varphi \neq 0$.

L'hypothèse $\nabla_a \varphi \neq 0$ équivaut à $D\varphi(a) \neq 0$.

On suppose que $f_{|S}$ admet un maximum local au point a. On veut montrer que le gradient de f en ce point est colinéaire au gradient de φ : il existe λ tel que $\nabla_a f = \lambda \nabla_a \varphi$.

1. Montrer que l'équation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ détermine localement l'une des variables en fonction des autres au voisinage du point a. Quitte à permuter les variables, on supposera désormais qu'il existe un voisinage U du point $a = (a_1, \dots, a_n)$ et une fonction $\psi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ dans } U.$$

2. Exprimer les dérivées partielles de ψ au point $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ en fonction de celles de φ au point a.

3. On considère la fonction $g : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1})$. Montrer que $f \circ g$ admet un maximum local au point $\bar{a}$.

4. En déduire une relation entre les dérivées partielles de f et celles de ψ, puis trouver un facteur λ tel que $\nabla_a f = \lambda \nabla_a \varphi$, comme voulu.

Corrigé de l'exercice 123.—

1. Par hypothèse, le gradient de φ au point a n'est pas nul, ce qui signifie que l'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a)$ n'est pas nulle. Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

2. Comme dans les exercices précédents, on dérive la relation $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, \psi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ pour obtenir, pour tout $i = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\bar{a}) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)} \quad (1).$$

3. La fonction f admet un maximum local au point a : il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout x dans V. La fonction g étant continue et vérifiant $g(\bar{a}) = a$, il existe un voisinage U' de $\bar{a}$ tel que $g(U') \subset V$. Pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1})$ dans U', on a alors $g((x_1, \dots, x_{n-1}) \in V$ et par conséquent $f(g(x_1, \dots, x_{n-1})) \leq f(a) \leq f(g(\bar{a}))$: la fonction $f \circ g$ admet donc un maximum local au point $\bar{a}$.

4. La fonction $f \circ g$ admet un maximum local au point $\bar{a}$, et par composition elle est différentiable en ce point. On en déduit que $D(f \circ g)(\bar{a}) = 0$, autrement dit que toutes les dérivées partielles s'annulent. Or pour $i = 1, \ldots, n-1$, la $i$ème dérivée partielle de $f \circ g$ vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\bar{a})\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0 \quad (2).$$

Des relations (1) et (2) on déduit, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) \qquad \text{avec } \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)}.$$

Bien sûr on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a).$$

Finalement, $\nabla_a f = \lambda \nabla_a \varphi$.

Cette preuve n'est pas très éclairante. Pour voir la lumière, il faut lire le chapitre sur les sous-variétés...

X Différentielle seconde

X.1 Formule de Taylor

Exercice 124.— (Examen 2014) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy} - 2e^2 xy$.

1. Calculer, pour tout vecteur $v = (h,k)$, le nombre $Df(2,1)\ v$.

2. **a.** Calculer, pour tout vecteur $v = (h,k)$, le nombre $D^2f(2,1)\ (v,v)$. **b.** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(2,1)$.

3. Montrer que, pour tout vecteur $v \neq (0,0)$, $D^2f(2,1)\ (v,v) > 0$.

4. Déduire de la question précédente l'existence d'un nombre $c > 0$ tel que, pour tout vecteur $v \neq (0,0)$,

$$D^2f(2,1)\ (v,v) \geq c\|v\|^2$$

où $\|v\|$ est la norme euclidienne du vecteur v.

5. En déduire que pour tout point (x,y) assez proche du point $(2,1)$,

$$f(x,y) > -3e^2 + Df(2,1)\ (x-2, y-1).$$

6. Interpréter géométriquement l'inégalité obtenue.

Corrigé de l'exercice 124.— **1.** L'application f est de classe C^2 (et même C^∞, d'après les théorèmes d'opérations). On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} - 2ye^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} - 2xe^2.$$

et en particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = e^2 - 2e^2 = -e^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2e^2 - 4e^2 = -2e^2.$$

Pour tout vecteur $v = (h,k)$, on a donc

$$Df(2,1)v = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)k = -e^2h - 2e^2k.$$

2. **a.** On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = (1+xy)e^{xy} - 2e^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy}.$$

et en particulier

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = e^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(2,1) = e^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 4e^2.$$

Pour tout vecteur $v = (h,k)$, on a donc

$$D2f(2,1)(v,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(2,1)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)k^2 = e^2(h^2 + 2hk + 4k^2).$$

L'exercice teste la compréhension concrète de la différentielle et la différentielle seconde d'une fonction, et la capacité à utiliser la formule de Taylor et notamment la définition du "o".

b. on a $f(2,1) = -3e^2$, la formule de Taylor au point $(2,1)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(2+h,1+k) &= f(2,1) + Df(2,1)(h,k) + \tfrac{1}{2}D^2f(2,1)((h,k),(h,k)) + o(\|(h,k)\|^2) \\ &= -3e^2 + -e^2h - 2e^2k + \tfrac{1}{2}e^2(h^2+2hk+4k^2) + o(\|(h,k)\|^2). \end{aligned}$$

3. On peut écrire (selon la méthode de Gauss)

$$h^2 + 2hk + 4k^2 = (h+k)^2 + 3k^2$$

Soit $v = (h,k) \neq (0,0)$; ou bien $k \neq 0$, et alors $D^2f(2,1)(v,v) \geq 3e^2k^2 > 0$, ou bien $k = 0$, et alors $h \neq 0$ et $D2f(2,1)(v,v) = e^2h^2 > 0$, on a la conclusion dans tous les cas (plus conceptuellement, ceci vient du fait que la différentielle seconde est, ici, une forme quadratique définie positive).

4. L'application

$$v \mapsto D2f(2,1)(v,v)$$

est continue, d'après la question précédente elle ne prend que des valeurs strictement positive sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^2$. Or S est compacte, par conséquent cette application atteint sa borne inférieure, qui est donc strictement positive : notons-là c. Maintenant pour tout vecteur $v \neq 0$, le vecteur $v/\|v\|$ appartient à S, on a donc

$$D^2f(2,1)\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) \geq c.$$

Puisque l'application $D^2f(2,1)$ est bilinéaire, ceci équivaut à la propriété demandée.

Attention, l'énoncé demande de déduire le résultat de la question précédente, ce qui veut dire qu'on demande de raisonner à partir de la propriété "$D^2f(v,v) > 0$", sans utiliser la valeur explicite de cette expression. Le raisonnement s'inspire d'un morceau de la preuve d'un des théorèmes d'extrema (si ça ne vous rappelle rien, **relire** le cours !)

5. En combinant l'inégalité obtenue avec la formule de Taylor, on obtient pour tout $v = (h,k)$,

$$f(2+h,1+k) \geq f(2,1) + Df(2,1)(h,k) + c\|h,k\|^2 + o(\|(h,k)\|^2).$$

D'autre part le terme $o(\|(h,k)\|^2$ est négligeable devant $\|(h,k)\|^2$, ce qui signifie que le quotient de ce terme par $\|(h,k)\|^2$ tend vers 0 lorsque (h,k) tend vers 0. En appliquant la défintion de la limite avec $\epsilon = c$, on obtient qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout (h,k) de norme plus petite que δ,

$$\left|\frac{o(\|(h,k)\|^2)}{\|(h,k)\|^2}\right| < c$$

et donc $c\|h,k\|^2 + o(\|(h,k)\|^2) > 0$, ce qui entraine

$$f(2+h,1+k) > f(2,1) + Df(2,1)(h,k).$$

C'est bien l'inégalité demandé (avec le changement de variables $(x,y) = (2,1) + (h,k)$).

6. L'inégalité dit que le graphe de la fonction f, qui est une surface de $\mathbb{R}^3$, est située au dessus de son plan tangent au point $(2,1)$ au voisinage du point de coordonnées $(2,1,f(2,1))$.

X.2 Extrema : conditions d'ordre 2

Exercice 125.— (Question de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème donnant la condition d'ordre 1 sur les extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $Df(0) = 0$, $D^2f(0)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, $D^2f(0)((1,0),(1,0)) > 0$ et f n'a pas de minimum local en 0.

3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admet un minimum local strict en 0, et pour laquelle il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \neq 0$ tel que $D^2f(0)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$.

4. Enoncer les deux théorèmes donnant des conditions d'ordre 2 sur les extrema locaux.

Exercice 126.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f n'a pas d'extremum local en un point (x,y) tel que x ou y soit positif ou nul.

2. Trouver un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, dont les deux coordonnées sont égales, et tel que $Df(x_0, y_0) = 0$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en ce point.

4. En déduire un développement limité de $f(x_0 + h, y_0 + h)$, et un développement limité de $f(x_0 + h, y_0 - h)$.

5. Conclure quant à la nature de ce point critique.

6. Montrer que la différentielle de f ne s'annule en aucun autre point du plan. Finalement, quels sont les extrema locaux de f ?

Corrigé de l'exercice 126.— Les dérivées partielles sont $e^y + ye^x$ et $xe^y + e^x$. La première est strictement positive dès que y est positif ou nul, la seconde est strictement positive dès que x est positif ou nul. Lorsque x ou y est positif ou nul, on a donc $Df(x,y) \neq 0$, le point (x,y)n'est pas un point critique et f n'a pas d'extremum local en ce point d'après le critère d'ordre 1 (sous forme contrapposée).

1. On cherche un nombre x_0 tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0) = 0.$$

Ces relations équivalent à $e^{x_0}(1 + x_0) = 0$ dont l'unique solution est $x_0 = -1$. D'où le point critique $(-1, -1)$. **2.**

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont ye^x, $e^y + e^x$ et xe^y ; la matrice de $D^2f(-1,-1)$ est

$$e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} f(-1+h, -1+k) &= f(-1,-1) + Df(-1,-1)(h,k) + \tfrac{1}{2}D^2f(-1,-1)((h,k),(h,k)) + o(\|(h,k)\|^2) \\ &= -2e^{-1} + 0 + \tfrac{1}{2}e^{-1}(-h^2 + 4hk - k^2) + o(\|(h,k)\|^2). \end{aligned}$$

3.

La formule précédente donne

$$f(x_0 + h, y_0 + h) = -2e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}2h^2 + o(h^2).$$

et

$$f(x_0 + h, y_0 - h) = -2e^{-1} + 0 + \frac{1}{2}e^{-1}(-2h^2) + o(h^2).$$

4. D'après la question précédente, on a $f(-1+h, -1+h) > f(-1,-1)$ et $f(-1+h, -1-h) < f(-1,-1)$ pour tout h assez proche de 0. Donc f n'admet ni maximum ni minimum local au point $(-1,-1)$: c'est un point selle.

5. Les points critiques sont les points dont les coordonnées (x, y) sont solution du système d'équations données par l'annulation des deux dérivées partielles. **En posant le système on arrive** à l'équation $e^x + xe^{1/x} = 0$; en étudiant les variations on voit que la fonction est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, ce qui montre (avec la question 1) que $x = -1$ est l'unique solution.

Le système n'a donc aucune solution autre que $(-1,-1)$ déjà trouvée. Si f admet un extremum local, c'est un point critique, c'est donc $(-1,-1)$, mais on a vérifié plus haut que celui-ci n'est pas un extremum local : la conclusion est que f n'admet aucun extremum local.

Exercice 127.— Etudier la nature des extréma des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ données par **1.** $f(x,y) = x^4 + y^2$, **2.** $g(x,y) = xy$, **3.** $h(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Corrigé de l'exercice 127.— **1.** Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

On voit facilement que $(0,0)$ est l'unique point critique. Par conséquent si (x,y) est un extremum, alors $x = y = 0$. D'autre part les dérivées secondes s'annulent en ce point, c'est donc un point critique dégénéré et les critères d'ordre 2 ne permet pas de dire s'il s'agit d'un extremum ou non. Mais il est clair que la fonction f est positive et que $f(0,0) = 0$, la fonction admet donc un minimum global (et a fortiori local) au point $(0,0)$.

2. Pour tout $x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x.$$

Si (x,y) est un extremum, alors $x = y = 0$. La différentielle seconde est $D^2g(0,0)((h,k),(h,k)) = 2hk$ et prend à la fois des valeurs positives et négatives (par exemple avec $(1,1)$ et $(-1,1)$). On applique le second théorème d'ordre 2 sur les extrema, sous forme contrapposée, et on obtient que $(0,0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local (c'est un point selle).

3. La fonction est à nouveau de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et on a, pour tout (x, y),

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -4(x-y)+4x^3, \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 4(x-y)+4y^3.$$

Si (x, y) est un extremum, alors $x^3 = x - y$ et $y^3 = -(x - y)$, donc $x^3 = -y^3$ et on a

— $(x = y = 0)$ ou

— $(x = -y$ avec $x \neq 0$ et $x^3 = 2x$, i.e. $x = \pm\sqrt{2})$.

Les points critiques de h sont donc

$$(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Nous considérons les matrices hessiennes de h en ces points.

• La matrice

$$Hh(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

est dégénérée (puisque son déterminant est nul). Elle ne permet donc pas de déduire la nature du point critique. Cependant, observons que $l(x, x) = 2x^4 \geq 0$ et $l(0, y) = y^2(-2 + y^2)$ est négatif pour y assez petit. Comme tout voisinage de $(0, 0)$ contient des points (x, x) et des points $(0, y)$ avec y petit, on déduit que f ne présente ni de minimum ni de maximum en $(0, 0)$. C'est un point selle.

• La matrice

$$Hh(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres 4 et 6, toutes deux strictement positives donc pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ non nul , $D^2h(\sqrt{2}, -\sqrt{2})((h, k), (h, k)) > 0$ et h présente un minimum local en ce point, ce minimum est $h(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Comme $h(x, y) = h(y, x)$ pour tout (x, y), il en est de même du point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On peut aussi montrer directement que -8 est bien le minimum global de h, i.e. pour tous x, y, $h(x, y) + 8 \geq 0$.

Comme $h(x, y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x|$ et $|y|$ tendent vers l'infini, le point $(0, 0)$ ne peut pas être un maximum global, c'est juste un maximum local.

Exercice 128.— Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2 - 2y^2$.

1. Déterminer les points critiques de la fonction f.

2. Sachant que $f(x, y, z)$ tend vers $+\infty$ quand $\|(x, y, z)\|$ tend vers $+\infty$, montrer que l'ensemble $\Gamma = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leq 0\}$ est compact.

3. Préciser la nature des points critiques de f (minimum/maximum/point selle/local/global).

Corrigé de l'exercice 128.— **1.** Les points critiques de f sont les (x, y, z) tels que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3-4x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y^3-4y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z^3 = 0$$

et ces équations conduisent à $x = 0$ ou ± 1, $y = 0$ ou ± 1, $z = 0$, donc les points critiques de f sont les neuf points

$$(0,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,-1,0),(-1,0,0),(-1,1,0),(-1,-1,0).$$

2. L'ensemble $\Gamma = f^{-1}(]-\infty, 0])$ est fermé puisque image réciproque d'un fermé par l'application continue f. Montrons que Γ est borné. On sait que $\lim_{\|(x,y,z)\|\to\infty} f(x,y,z) = +\infty$ donc il existe un nombre B tel que pour tout (x,y,z), $\|(x,y,z)\| > B \Longrightarrow f(x,y,z) > 0$. Ceci entraîne que Γ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon B.

Etant une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^3$, Γ est donc compact. Remarquons pour la suite que comme f est continue, elle atteint son minimum et son maximum sur Γ, et que le minimum de f sur Γ est aussi le minimum de f sur $\mathbb{R}^3$ puisque $f \leq 0$ sur Γ et $f \geq 0$ sur le complémentaire de Γ.

3. La matrice hessienne de f en (x,y,z) est donnée par

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 \end{pmatrix}$$

donc est dégénérée aux points critiques et ne permet pas de déduire leur nature. Comme,

$$\begin{gathered} f(0,0,0) = 0 \\ f(0,1,0) = f(1,0,0) = f(0,-1,0) = f(-1,0,0) = -1 \\ f(1,1,0) = f(1,-1,0) = f(-1,1,0) = f(-1,-1,0) = -2 \end{gathered}$$

alors tous les points critiques sont dans Γ, où f atteint son minimum et son maximum. De plus le minimum de f sur Γ est forcément minimum global de f sur $\mathbb{R}^3$, et ce minimum vaut -2, il est atteint aux points $(1,1,0),(1,-1,0),(-1,1,0),(-1,-1,0)$.

La fonction f atteint son maximum sur Γ au point $(0,0,0)$, mais $(0,0,0)$ est un point selle de f sur $\mathbb{R}^3$: en effet, pour (h,k,l) voisin de $(0,0,0)$, $f(h,k,l) - f(0,0,0)$ change de signe puisque, pour n assez grand,

$$f(\tfrac{1}{n},0,0) = \frac{1}{n^4} - 2\frac{1}{n^2} \leq 0 \text{ et } f(0,0,\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{n^4} \geq 0.$$

D'autre part, on montre que $(0,1,0),(0,-1,0),(1,0,0),(-1,0,0)$ sont des points selles de f sur $\mathbb{R}^3$ en utilisant la même méthode que pour $(0,0,0)$.

Exercice 129.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

1. Montrer que :

- **a.** $f(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| + |y|$ tend vers $+\infty$.
- **b.** L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$ est compact.
- **c.** f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer ce minimum.

Corrigé de l'exercice 129.—

1. a. Comme $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ alors $f(x,y) \geq \frac{x^2+y^2}{2} - 2x + y = (x^2+y^2)(\frac{1}{2} - \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2})$, et , comme $\frac{|x|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|} \to 0$ quand $|x|$ tend vers l'infini, alors on déduit que $f(x,y)$ tend vers l'infini quand $|x| + |y|$ tend vers l'infini.

b. L'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 0\}$ est fermé borné (même preuve que pour le Γ de l'exercice précédent).

c. Ici encore, l'argument est le même que celui donné dans l'exercice précédent.

2. Un point (x,y) est point critique de f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 2 = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x + 1 = 0$, donc $(x,y) = (1,0)$. D'autre part nous savons d'après ce qui précède que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$, ce minimum est un point critique. L'unique point critique est donc nécessairement le point où f atteint son minimum. La valeur du minimum de f est donc $f(1,0) = -1$.

XI Elements de corrigés de l'examen 2017-2018

Ce corrigé a été écrit bien après l'épreuve, les calculs n'ont pas été vérifiés, il peut donc y avoir des erreurs ; si vous en trouvez, merci de me les signaler.

Exercice 1.—

1. La première inéquation définit le disque unité ouvert, la seconde le complémentaire du disque ouvert de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mise ensemble ces deux équations définissent donc un anneau qui contient sa frontière intérieure mais pas sa frontière extérieure. La dernière inéquation définit le complémentaire d'une bande horizontale, autrement dit la réunion de deux demi-plan délimités respectivement par les droites d'équations $y = -\frac{1}{4}$ et $y = +\frac{1}{4}$.

2. L'adhérence de A est l'ensemble définit par les mêmes inéquations en remplaçant le premier "$<$" par "$\leq$". A n'est pas fermé puisqu'il diffère de son adhérence.

3. A n'est pas ouvert : en effet, par exemple le point $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est dans A mais aucune boule centrée en ce point n'est incluse dans A.

4. Ni A ni son adhérence ne sont connexe. En effet, notons A^- l'ensemble obtenu en remplaçant, dans la définition de A, la dernière inéquation par $y \leq -\frac{1}{4}$; et de même A^+ en remplaçant la dernière inéquation par $y \geq \frac{1}{4}$. Alors A^-, A^+ forme une partition de A en deux ouverts disjoint non vides (A^- est ouvert, par exemple, parce que $A^- = A \cap \{(x, y) \mid y > 0\}$ est l'intersection de A avec un ouvert du plan). Un argument analogue marche pour l'adhérence.

Exercice 2.—

1. Le but recherché est exctament la conclusion du théorème des fonctions implicites au point $(0, 0, 0)$. Pour en vérifier les hypothèses, on remarque qu'on a $F(0, 0, 0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = 3 \neq 0$.

2. En dérivant la relation $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ par rapport à x, on obtient l'expression de $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ à partir des dérivées partielles de F (voir le cours). On obtient respectivement $-1/3$ et 0.

3. La question précédente permet d'obtenir une expression des dérivées partielles de ϕ à partir de celles de F, qui montre que ces dérivées partielles sont de classe C^1, ϕ est donc de classe C^2. Un autre argument consiste à dire que F étant de classe C^∞, c'est aussi le cas de ϕ d'après la version C^p du théorème des fonctions implicites. Pour le calcul le principe est le même que la question précédente, on trouve $-4/9$.

Exercice 3.— Soit H une matrice 2×2, On écrit

$$\det(I_2 + H) = \det \begin{pmatrix} 1 + h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & 1 + h_{22} \end{pmatrix} = 1 + h_{11} + h_{22} + h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}.$$

Notons $Tr(H) = h_{11} + h_{22}$ la trace de H, il s'agit d'une application linéaire. Notons $o(H) = h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}$, on a facilement $|o(H)| \leq 2|||H|||^2$, ce qui montre que

$$\frac{o(H)}{|||H|||}$$

tend vers 0 lorsque H tend vers 0, et donc que $o(H)$ est négligeable devant H. La définition de la différentiabilité nous dit que det est différentiable en l'identité et que sa différentielle est l'application Trace.

Exercice 4.— La première dérivée partielle vaut une fraction dont le numérateur est

$$(y+1)(y-1+2x).$$

Puisque $y \neq -1$ sur l'ouvert considéré, son annulation équivaut à celle de $2x+y-1$. La deuxième dérivée partielle est symétrique, de même son annulation équivaut à celle de $2y+x-1$. On obtient un système de deux équations à deux inconnues dont l'unique solution est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En calculant les dérivées seconde en ce point, on voit qu'il s'agit d'un minimum local, c'est donc l'unique minimum local de cette fonction. On peut se passer du calcul des dérivées secondes avec cet autre argument : la fonction est positive et propre : elle tend vers $+\infty$ lorsque (x, y) tend vers la frontière de l'ouvert de définition, un exercice vu en TD montre alors que F admet un unique minimum global, ce minimum global est a fortiori un minimum local et donc un point critique, comme on a trouvé un unique point critique il s'agit donc aussi de l'unique minimum local.

Exercice 5.—

1. Utiliser l'homogénéité de la norme.

2. Si $u(x) = 0$ alors $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$: u est injective. Puisque E et F ont la même dimension finie, elle est aussi surjective, et donc inversible.

3. La norme $|||.|||$ est une norme d'algèbre, en particulier on a

$$|||u||| \times |||u^{-1}||| \geq |||uu^{-1}||| = |||\mathrm{Id}||| = 1$$

ce qui permet de conclure.

4. L'inverse de $w = \lambda v$ est $w^{-1} = \frac{1}{\lambda} v^{-1}$ (ce qu'on vérifie en composant les deux applications). On en déduit l'égalité voulue.

5. Par définition de l'inf on a une suite (u_n) dans $GL(E, F)$ qui vérifie la seconde propriété. En posant $u'_n = \frac{u_n}{|||u_n|||}$, on obtient une nouvelle suite qui vérifie la première propriété, et toujours la première d'après la question précédente.

6. Soit (u_n) donnée par la question précédente. L'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est de dimension finie, sa sphère unité S est donc compacte. Puisque la suite est à valeurs dans S, on peut en extraite une sous-suite convergente (qu'on note encore (u_n)). Soit u la limite. Alors $|||u||| = 1$. La difficulté est de voir que u est inversible. Pour ceci, notons que puisque la suite

$$\ln(|||u_n|||.|||u_n^{-1}|||) = \ln(|||u_n^{-1}|||)$$

converge, la suite $(|||u_n^{-1}|||)$ est majorée par une constante M : la suite u_n^{-1} est incluse dans la boule de rayon M dans l'espace $L(F, E)$, boule qui est également compacte, quitte à extraire on peut encore supposer que cette suite converge vers une application $v \in L(F, E)$. D'autre part on a pour tout n $u_n.u_n^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$, cette égalité passe à la limite par continuité de la composition, et entraine donc l'égalité $uv = \mathrm{Id_F}$. On obtient de même $vu = \mathrm{Id_E}$, ce qui montre que u est inversible (d'inverse v). Finalement on a bien $\ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) = d(E,F)$ en passant à la limite.

7. Si $u : E \to F$ est une isométrie, alors $|||u||| = 1 = |||u^{-1}|||$ ce qui montre que $d(E,F) = 0$. Réciproquement, si $d(E,F) = 0$, alors d'après la question précédente il existe u de norme 1 telle que $\ln(|||u|||.|||u^{-1}|||) = 0$, ce qui montre que u^{-1} est aussi de norme 1. On en déduit que $||u(x)|| = ||x||$ pour tout x, et donc que u est une isométrie d'après la partie A.

Exercice 6.—

1. Partir de $||f(v+v')|| \leq |||f|||.||v+v'||$ et utiliser l'inégalité triangulaire pour introduire le point x_0.

2. A v' fixé, on passe au sup dans le membre de gauche de l'inégalité précédente ; puis on passe à l'inf sur les v'.

3. $f(v) - |||f|||.||v - x_0||$ est majoré par α, ce qui donne l'une des inégalités, l'autre s'obtient avec l'inf.

4. Il est facile de voir que $\tilde{f}$ est linéaire et que sa restriction est f. Elle est continue car $\tilde{F}$ est de dimension finie.

5. Pour $t = 0$ c'est facile. Pour $t > 0$ on écrit $\tilde{f}(v + tx_0) = f(v) + t\alpha = t(f(\frac{1}{t}v) + \alpha)$. On applique alors l'inégalité de la question 3 au vecteur $v' = \frac{1}{t}v$. Le cas $t < 0$ est analogue.

6. Ca découle de la question précédente, par définition de la norme triple.

7. Ceci vient du fait que f est la restriction de $\tilde{f}$ à F. On a donc pour tout v dans F l'inégalité

$$||\tilde{f}(v)|| = ||f(v)|| \leq |||\tilde{f}|||.||v||,$$

ce qui montre en prenant l'inf, par définition de $|||f|||$, que $|||f||| \leq |||\tilde{f}|||$.

8. On procède par récurrence sur $dim(E) - dim(F)$, ce qui précède expliquant comment étendre la dimension de un.

9. Si $|||f||| = 1$ alors $|f(x)| \leq ||x||$, ce qui donne une inégalité. Pour obtenir l'autre il suffit de construire une forme linéaire continue f sur E de norme 1 et telle que $|f(x)| = 1$. Une telle forme existe sur la droite vectorielle F engendrée par x : il suffit en effet de poser $f(tx) = t$. D'après ce qui précède, cette forme linéaire définie sur F s'étend en une forme f définie sur E et de norme 1, ce qui conclut.
