Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Question de cours

Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 1

Dire pour chacune des propositions si elle est vraie ou fausse. Démontrer vos affirmations.

1. $\exists \delta > 0, \forall x > 0,\ x > \delta$.

> **Solution:** C'est faux : Soit $\delta > 0$. Posons $x = \delta/2$. Alors $x \leqslant \delta$.

2. $\forall x > 0, \exists \delta > 0,\ x > \delta$.

> **Solution:** C'est vrai. Soit $x > 0$. Posons $\delta = x/2$. On a bien $x > \delta$.

3. $\forall A > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant M \Rightarrow x^2 \leqslant A$.

> **Solution:** C'est vrai. Soit $A > 0$. Posons $M = \sqrt{A}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \leqslant M$, alors $|x|^2 \leqslant M^2 \leqslant A$. Or $|x|^2 = x^2$, donc $x^2 \leqslant A$.

Exercice 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne si

$$\exists k > 0, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

1. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée bornée est Lipschitzienne.

> **Solution:** Nous avons toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer l'inégalité des accroissements finis. On obtient : $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \sup_I |f'|$. Il suffit donc de prendre $k > \sup |f'|$.

2. On suppose que $I = [-2, 3]$, et que f est dérivable, de dérivée continue. Montrer que f est Lipschitzienne.

> **Solution:** D'après la question précédente, il suffit de montrer que f' est bornée. C'est le cas d'après le théorème des bornes atteintes car f' est continue et I est un segment.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

> **Solution:** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ par opération sur les fonction dérivables. Calculons le taux d'acroissement en 0. Posons pour $x \neq 0$, $\tau(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. On a $\tau(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Or $0 \leqslant |x\sin(\frac{1}{x})| \leqslant |x|$, car sin prend ses valeurs dans $[-1, 1]$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, τ admet une limite quand $x \to 0$, qui est 0. Ainsi f est dérivable en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

2. La dérivée de f est-elle continue ?

> **Solution:** Un calcul montre que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Ceci n'a pas de limite en 0. En effet comme $2x\sin(\frac{1}{x}) \to 0$ par le théorème des gendarmes comme avant, donc f' a une limite en 0 si et seulement si $\cos(\frac{1}{x})$ a une limite en 0. Ce n'est pas le cas : posons $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{2\pi n+\pi/2}$. Ces suites tendent vers 0 mais $\cos(\frac{1}{x_n}) = 1$ et $\cos(\frac{1}{y_n}) = 0$ pour tout n.

Exercice 4

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est *dense dans* $\mathbb{R}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists y \in A,\ |x - y| < \epsilon.$$

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers est-il dense dans $\mathbb{R}$?

> **Solution:** Non, prenons $x = 1,5$, et $\epsilon = 0,1$. Il n'existe pas de $y \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - y| < \epsilon$, car cela revient à dire $y \in]1,4\ ;\ 1,6[$.

2. Supposons (pour cette question seulement) que A est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de A tel que $\forall n \geqslant 1,\ |x - u_n| < \frac{1}{n}$.

> **Solution:** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geqslant 1$. Posons $\epsilon = \frac{1}{n}$. Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un $y \in A$ tel que $|x - y| < \epsilon$. Prenons pour u_n un tel y. On construit ainsi une suite $(u_n)_n$ qui vérifie bien $\forall n \geqslant 1,\ |x - u_n| < \frac{1}{n}$.

3. Justifier qu'une suite $(u_n)_n$ vérifiant $\forall n \geqslant 1,\ |x - u_n| < \frac{1}{n}$ converge vers x.

> **Solution:** On a : $0 \leqslant |x - u_n| \leqslant \frac{1}{n}$, donc d'après le théorème des gendarmes, $|x - u_n| \to 0$, donc $u_n \to x$.

4. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui tend vers x. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A qui tend vers x. Comme $u_n \to x$, il existe un $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - x| < \epsilon$. Donc il suffit de prendre $y = u_N$. En effet on a alors $y \in A$ et $|x - y| < \epsilon$.

5. Résumer en une phrase ce que vous avez démontré.

Solution: Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x.

SUJET B