1

$e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ est génératrice si et seulement si $Vect(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}) = E$. Si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe λ_i tel que $x = \sum \lambda_i e_i$.

e_1, e_2, e_3 base canonique de $\mathbb{R}^3$, $F = vect((1, 1, 0))$.

Si part d'une base de F on peut la compléter en une base de E. (théorème de la base incomplète).

2

Soient λ_i tels que $\sum \lambda_i P_i = 0$. On veut montrer que tous les $\lambda_i = 0$. On a $\lambda_k = 0$.

$P_k = a_k X^k + \ldots$.

$\sum \lambda_i P_i = \lambda_k a_k X^k + \ldots$

2.1

$\mathbb{R}_k[X] \simeq \mathbb{R}^{k+1}$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k) \mapsto a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k$$

On veut montrer que la famille des P_i est libre.

Proposition 2.1. *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $e_1, \ldots, e_k$ est libre ssi $f(e_1), \ldots, f(e_k)$ est libre.*

Démonstration. Supposons $e_1, \ldots, e_k$ est libre. Montrer que $f(e_1), \ldots, f(e_k)$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0$. On veut montrer que $\forall i, \lambda_i = 0$. Comme f est linéaire, on a

$$f(\lambda_1 e_1) + \ldots + f(\lambda_n e_n) = 0$$

$$f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$$

Comme f est bijective, $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$. On sait que $e_1, \ldots, e_n$ est libre, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 0$. Il faut montrer aussi que si $f(e_1), \ldots f(e_k)$ est libre alors $e_1, \ldots e_k$ est libre. Par contraposée, supposons que $e_1, \ldots, e_n$ n'est pas libre. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec au moins un $\lambda_i \neq 0$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$.

$$f(0) = 0 = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots \lambda_n f(e_n)$$

Donc la famille des $f(e_i)$ n'est pas libre. □

Remark 2.2. On a montré un peu plus : que l'image d'une famille liée par n'importe quelle application linéaire est liée. Et que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

Important : une famille libre de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est une base.

2.2

On montre que la famille est libre. On écrit les vecteurs de cette famille dans la base canonique $(1, X, X^2)$. La matrice dont les colonnes sont ces coordonnées, on a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X + 1 = 1.1 + 1.X$$

Cette matrice est inversible si et seulement si la famille $(X+1, X-1, 2X+X^2)$ est une base. On calcule le déterminant, et il est non nul!

Pour trouver les coordonnées de X^2 dans cette base.

$$X^2 = a(1 + X) + b(-1 + X) + c(2X + X^2) = a - b + (a + b + 2c)X + cX^2$$

. On a $c = 1$. On a $a = b$. On a de plus $2a + 2c = 0$. Donc les coordonnées sont $(-1, -1, 1)$.

2.3

Montrons que A est un sous-ev de $\mathbb{C}[X]$. Il faut montrer :

— $0 \in A$.

— A est stable par addition

— A est stable par multiplication par un scalaire.

On a bien $0 \in A$ car 0 n'a pas de coefficient d'ordre pair.

Soit $P, Q \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} X^{2k+1}$ pour des $a_i \in \mathbb{R}, n \geqslant 0$.

On peut aussi écrire $Q = \sum_{k=0}^{m} b_{2k+1} X^{2k+1}$. On peut supposer que $m = n$, quitte a rajouter des $a_i = 0$ ou $b_i = 0$.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_{2k+1} X^{2k+1} \in A$$

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} X^{2k+1} + b_{2k+1} X^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (a_{2k+1} + b_{2k+1}) X^{2k+1}$$

.

Ainsi c'est un sev. Pour montrer que B est un sev, on remarque que $XP + \lambda XQ = X(P + \lambda Q) \in B$ si $P, Q \in B$.

C'est quoi $A + B$?

Montrons que $A + B = \{P \mid P(0) = 0\} := E$.

Il faut montrer les deux inclusions. On a $A \subset E$ et $B \subset E$ donc $A + B \subset E$. Montrons que $X^k \in A + B$ si $k \geqslant 1$. Si jamais k est impair, alors $X^k \in A$ donc $X^k \in A + B$. Si jamais k est pair, alors $X^k \in B$ car $X^k = X \cdot X^{k-1} \in B$. Ainsi $E = Vect(\{X^k \mid k \geqslant 1\} \subset A + B$.

$$E = A \oplus B$$