Devoir 1

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $||.|| : E \to \mathbb{R}^+$ une norme ie une fonction positive sur E telle que
— $\forall x \in E$, $||x|| = 0 \iff x = 0$,
— $\forall x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,
— $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $||\lambda.x|| = |\lambda|.||x||$.

1. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$, $(x, y) \mapsto ||x - y||$ est une distance. On dit que cette distance est issue de la norme $||.||$. On ne considèrera que cette distance dans la suite.
2. Montrer que l'homothétie $\lambda.\mathrm{Id}_E$ de rapport λ non nul est un homéomorphisme et préciser son inverse. Montrer que si $h \in E$, la translation $\tau_h : E \to E$, $x \mapsto x + h$ est un homéomorphisme et préciser son inverse.
3.

i) Soit $r > 0$. Soit $S(0, r)$, la sphère de centre 0 de rayon r. Montrer que $S(0, r) \subset \overline{B(0, r)} \cap \overline{E \setminus B_f(0, r)}$.

ii) En déduire que $\forall x \in E$, $r > 0$, $\overline{B(x, r)} = B_f(x, r)$ et $\overset{\circ}{B_f}(x, r) = B(x, r)$.

4.

i) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que s'il existe $r > 0$ tel que $S(0, r) \subset F$ alors $F = E$.

ii) En déduire qu'un sous-espace vectoriel F distinct de E est d'intérieur vide.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique $A \subset X$ une partie et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que s'il existe une fonction continue $g : \bar{A} \to \mathbb{R}$ telle que $g_{|A} = f$ alors g est unique.
2. Soit $x \in \bar{A}$. On dit que f admet une limite en x s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall a \in A \cap B(x, \delta),\ |\alpha - f(a)| < \epsilon\,.$$

Dans ce cas on note $\lim_{a \to x, a \in A} f(a) = \alpha$.
On suppose qu'en chaque point $x \in \bar{A}$ f admet une limite notée $\bar{f}(x)$.
Montrer que $\bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}$ est continue et que $\bar{f}_{|A} = f$.