C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Familles d'immersions holomorphes et formes de torsion analytique équivariantes

Jean-Michel Bismut [a], Xiaonan Ma [b]

[a] Département de mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay, France

[b] Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 20 mars 2002 ; accepté le 22 mars 2002

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

Résumé Dans cette Note, on étend les résultats sur le comportement par immersion des formes de torsion analytique holomorphes dans un contexte équivariant. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Families of equivariant immersions and analytic torsion forms

Abstract In this Note, we extend the known results on the behaviour by immersion of the holomorphic analytic torsion forms to the equivariant case. ***To cite this article: J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

0. Introduction

La métrique de Quillen [19] est une métrique naturelle sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré holomorphe hermitien sur une variété complexe compacte kählérienne, qu'on construit à l'aide de la torsion analytique de Ray–Singer [21]. Cette métrique possède des propriétés remarquables [8], en particulier parce qu'en situation relative, la courbure de la connexion hermitienne sur le fibré déterminant est donnée par une formule explicite locale, compatible au théorème de Riemann–Roch–Grothendieck au niveau des formes différentielles.

Dans [10], Bismut et Lebeau ont étudié le comportement par immersion de la métrique de Quillen. Dans leur formule, apparaît en particulier le genre additif $R(x)$ de Gillet et Soulé [12]. Ce résultat a en particulier permis à Gillet et Soulé [13] de démontrer un théorème de Riemann–Roch arithmétique pour le déterminant. Dans [5], on a étendu le résultat de [10] aux formes de torsion analytiques construites dans [7] et [9]. Ce résultat a été utilisé par Roessler [22] pour démontrer le théorème de Riemann–Roch arithmétique pour toutes les classes de Chern.

Dans [3], on a donné une construction d'une version équivariante du genre R, le genre $R(\theta, x)$, et on a conjecturé qu'il devrait apparaître dans une version arithmétique équivariante à la Lefschetz du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck. Dans [4], on a défini une version équivariante de la métrique de Quillen,

Adresses e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut); ma@math.polytechnique.fr (X. Ma).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés

S1631-073X(02)02372-5/FLA

pour lequel on a montré un analogue équivariant du résultat de [10], où apparaît précisément le genre $R(\theta, x)$.

Köhler et Roessler [15] ont démontré une formule de Lefschetz arithmétique pour le déterminant équivariant, qui généralise la formule de Gillet et Soulé [13].

L'objet de la présente Note est d'annoncer l'extension naturelle des résultats de [5] dans un contexte équivariant, extension conjecturée dans [16]. Plus précisément, on étudie le comportement par immersion des formes de torsion analytique holomorphes équivariantes construites dans [17]. La formule obtenue étend les résultats de [4] en degré arbitraire.

Les résultats annoncés dans cette Note sont démontrés dans [11]. Des applications de ce résultat sont données dans Köhler [14] et Maillot–Roessler [18].

1. Le cadre géométrique

Soit $i : W \to V$ un plongement de variétés complexes, soit S une variété complexe. Soit $\pi_V : V \to S$ une submersion holomorphe de fibre compacte X, induisant une submersion holomorphe $\pi_W : W \to S$ de fibre compacte Y, qui est donc plongée dans X. Soit η un fibré holomorphe sur W, soit (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur V qui résout le faisceau $i_*\mathcal{O}_W(\eta)$. On a ainsi un morphisme de restriction $r : \xi_0|_W \to \eta$ de telle sorte qu'on a une suite exacte de faisceaux sur V,

$$(\xi, v) : 0 \to \xi_m \xrightarrow{v} \xi_{m-1} \xrightarrow{v} \cdots \xrightarrow{v} \xi_0 \cdots \xrightarrow{r} i_*\eta \to 0. \tag{1.1}$$

Soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement sur V, préservant les fibres X et la sous-variété $W \subset V$.

On fait l'hypothèse que les $R^i\pi_{W*}\eta$ sont localement libres. Alors les $R^i\pi_{V*}\xi$ sont également localement libres. De plus, on a l'isomorphisme de G-fibrés holomorphes $\mathbf{Z}$-gradués sur S,

$$R\pi_{V*}\xi \simeq R\pi_{W*}\eta. \tag{1.2}$$

On fait l'hypothèse que la fibration $\pi_V : V \to S$ est kählérienne au sens de [8]. De manière équivalente, il existe une $(1,1)$ forme réelle ω^V sur V, qui est fermée, et qui induit une métrique de Kähler le long des fibres X. Ainsi, si $J^{T_{\mathbf{R}}X}$ est la structure complexe de $T_{\mathbf{R}}X$, alors $\omega^V(J^{T_{\mathbf{R}}X}\cdot, \cdot)$ est une métrique Hermitienne h^{TX} sur TX. On supposera dans la suite que ω^V est G-invariante.

On pose $\omega^W = i^*\omega^V$. Alors π_W est encore une fibration kählérienne pour la forme ω^W, qui induit sur TY une métrique h^{TY}.

Soit $h^\xi = \bigoplus_{i=0}^m h^{\xi_i}$ une métrique G-invariante sur $\xi = \bigoplus_{i=0}^m \xi_i$, soit h^η une métrique G-invariante sur η. Soit $N_{Y/X}$ le fibré normal à Y dans X, soit $h^{N_{Y/X}}$ une métrique G-invariante sur $N_{Y/X}$. On suppose que la métrique h^ξ vérifie l'hypothèse (A) de [2] relativement aux métriques $h^\eta, h^{N_{Y/X}}$. Cette hypothèse est une version métrique du résultat classique d'unicité locale des résolutions. Par [4, Proposition 3.5], on sait qu'on peut choisir la métrique G-invariante h^ξ de telle sorte que l'hypothèse (A) soit vérifiée.

2. Les formes de torsion analytique équivariantes

Soit P^S l'espace des formes C^∞ sur S qui sont des sommes de formes de type (p, p). Soit $P^{S,0} \subset P^S$ l'espace des $\alpha \in P^S$ telles qu'il existe des formes C^∞ sur S, notées β, γ pour lesquelles $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$.

Soit $(\Omega^{\cdot}(Y, \eta), \overline{\partial}^Y)$ la famille sur S des complexes de Dolbeault des fibres Y à coefficients dans η. Alors G agit naturellement sur $(\Omega^{\cdot}(Y, \eta), \overline{\partial}^Y)$. Soit $*$ l'opérateur de Hodge. On munit $\Omega^{\cdot}(Y, \eta)$ du produit hermitien fibre à fibre

$$\langle s, s' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\dim Y}} \int_Y \langle s \wedge *s' \rangle_{h^\eta}. \tag{2.1}$$

On fixe $g \in G$. Soit $V_g \subset V$ la sous-variété complexe des points fixes de g dans V, qui est fibrée sur S, de fibre $X_g \subset X$, soit $W_g \subset W$ la variété correspondante dans W, dont la fibre sur S est Y_g.

Par hypothèse, $R\pi_{W*}\eta$ est un fibré holomorphe localement libre de fibre $H^{\cdot}(Y,\eta|_Y)$.

Soit $\overline{\partial}^{Y*}$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^{Y}$ relativement à (2.1). On pose $D^Y=\overline{\partial}^{Y}+\overline{\partial}^{Y*}$. Par la théorie de Hodge, on a

$$H^{\cdot}(Y,\eta)\simeq \ker D^Y. \tag{2.2}$$

Soit $h^{H^{\cdot}(Y,\eta)}$ la métrique sur $H^{\cdot}(Y,\eta)$ induite par (2.1), quand on utilise l'identification (2.2).

Dans la suite, les formes de Chern–Weil sont calculées relativement à la connexion holomorphe Hermitienne sur le fibré vectoriel considéré. Ainsi $\mathrm{Td}_g(TY,h^{TY})$ désigne la forme fermée sur W_g qu'on obtient à partir du genre Todd dans la formule de points fixes de Lefschetz–Atiyah–Bott pour g. De même $\mathrm{ch}_g(\eta,h^\eta)$ est la forme de caractère de Chern pour η sur W_g, qui apparaît dans la même formule. De même g agit sur le fibré holomorphe hermitien $H^{\cdot}(Y,\eta)$. On peut donc définir la forme fermée correspondante $\mathrm{ch}_g(H^{\cdot}(Y,\eta|_y),h^{H^{\cdot}(Y,\eta|_y)})$ associée à la métrique $h^{H^{\cdot}(Y,\eta|_y)}$.

Soit $T_g(\omega^W,h^\eta)\in P^S$ les formes de torsion analytique holomorphes équivariantes construites dans [9,17]. Ces formes sont telles que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}T_g\big(\omega^W,h^\eta\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-\int_{Y_g}\mathrm{Td}_g\big(TY,h^{TY}\big)\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^\eta\big). \tag{2.3}$$

Rappelons brièvement la construction de $T_g(\omega^W,h^\eta)$. Soit T^HW le fibré orthogonal à TY dans TW pour la forme ω^W. Soit $\omega^{W,H}$ la restriction de ω^W à T^HW. Alors $\omega^{W,H}$ est une section de $\pi_W^*\Lambda^2(T_{\mathbf{R}}^*S)$ sur W. Pour $u>0$, soit B_u la superconnexion de Levi-Civita sur le fibré $\mathbf{Z}$-gradué $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$ associée à (T^HW,h^{TY},h^η) au sens de [1] de paramètre $t=u/2$. Soit $N_{\mathbf{V}}^Y$ l'opérateur de nombre de $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$. On pose

$$N_u^W=N_{\mathbf{V}}^Y+\mathrm{i}\frac{\omega^{W,H}}{u}. \tag{2.4}$$

On utilise maintenant le formalisme de Quillen [20]. Ainsi $\mathrm{Tr_s}$ désigne la supertrace évaluée sur les endomorphismes à trace de $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$.

Soit φ l'endomorphisme de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$ donné par $\alpha\to(2\mathrm{i}\pi)^{-\deg\alpha/2}\alpha$. Pour $u>0$, on pose

$$\gamma_u=\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N_u^W\exp\big(-B_u^2\big)\big]. \tag{2.5}$$

Alors $T_g(\omega^W,h^\eta)$ est la dérivée en $s=0$ de la transformée de Mellin de $-\gamma_u$.

Il résulte de [9] et [17] que la classe de $T_g(\omega^W,\,h^\eta)$ dans $P^S/P^{S,0}$ ne dépend que de h^{TY}, h^η. Plus généralement, on peut évaluer la dépendance de cette classe par rapport à h^{TY}, h^η en termes des classes de Bott–Chern de [6]. Pour plus de détails on renvoie à [5, Chapitre 2].

3. Les formes de torsion analytique équivariantes d'un double complexe

En procédant comme en [10,5], on peut construire les formes de torsion analytique associées au complexe de fibrés (ξ,v) sur V. Soit en effet $N_{\mathbf{H}}$ l'opérateur de nombre de ξ. Soit $(\Omega^{\cdot}(X,\xi),\overline{\partial}^X+v)$ le double complexe de Dolbeault, $\mathbf{Z}$-gradué par $N_{\mathbf{V}}^X-N_{\mathbf{H}}$ dont la cohomologie est l'hypercohomologie de ξ. Pour $u>0$, on pose

$$\overline{N}_u^V=N_{\mathbf{V}}^X-N_{\mathbf{H}}+\mathrm{i}\frac{\omega^{V,H}}{u}. \tag{3.1}$$

Soit $\overline{B}_u$ la superconnexion de Levi-Civita, qu'on construit comme précédemment, où l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}^X$ est remplacé par $\overline{\partial}^X+v$. Soit $H^{\cdot}(X,\xi)$ l'hypercohomologie de ξ dans les fibres X. En procédant comme précédemment, $H^{\cdot}(X,\xi)$ est un fibré holomorphe hermitien, muni d'une métrique $h^{H^{\cdot}(X,\xi)}$.

Comme dans [5, Chapitre 3], on peut alors construire les formes de torsion analytique équivariantes du double complexe, de telle sorte que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T_g\big(\omega^V,h^\xi\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(X,\xi|_X),h^{H(X,\xi|_X)}\big)-\int_{X_g}\mathrm{Td}_g\big(TX,h^{TX}\big)\mathrm{ch}_g(\xi,h^\xi). \tag{3.2}$$

Pour construire ces formes, on procède comme dans la Section 2, en remplaçant en particulier N_u^W par $\overline{N}_u^V$.

4. La formule de comparaison

Soit $\zeta(\theta,x)$, $\eta(\theta,x)$ les parties réelles et imaginaires de la fonction de Lerch $L(\theta,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}/n^s$. On rappelle que la série formelle $R(\theta,x)$ définie dans [3] est donnée par

$$R(\theta,x)=\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ n\text{ pair}}}\mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\eta(\theta,-n)+2\frac{\partial\eta}{\partial s}(\theta,-n)\right)\frac{x^n}{n!}+\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ impair}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\zeta(\theta,-n)+2\frac{\partial\zeta}{\partial s}(\theta,-n)\right)\frac{x^n}{n!}. \tag{4.1}$$

Rappelons que sur V_g, g agit sur $TX|_{X_g}$. On désigne par $R_g(TX)$ la classe de cohomologie sur V_g, obtenue en scindant $TX|_{X_g}$ selon les angles θ de l'action de g, et en évaluant le genre additif correspondant sur $TX|_{X_g}$.

Soit $T_g(\xi,h^\xi)$ le courant sur V_g construit dans [4, Section 6] tel que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T_g\big(\xi,h^\xi\big)=(\mathrm{Td}_g)^{-1}\big(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}}\big)\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^\eta\big)\delta_{\{W_g\}}-\mathrm{ch}_g\big(\xi,h^\xi\big). \tag{4.2}$$

Le front d'onde de $T_g(\xi,h^\xi)$ est inclus dans $N^*_{Y_g/X_g,\mathbf{R}}$.

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY,TX|_{W_g},h^{TX})$ la classe de Bott–Chern sur W_g telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}_g\big(TY,TX|_{W_g},h^{TX}\big)=\mathrm{Td}_g\big(TX|_{W_g},h^{TX}\big)-\mathrm{Td}_g\big(TY,h^{TY}\big)\mathrm{Td}_g\big(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}}\big). \tag{4.3}$$

On construit de même la classe de Bott–Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)})$ sur S telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-\mathrm{ch}_g\big(H(X,\xi|_X),h^{H(X,\xi|_X)}\big). \tag{4.4}$$

Le résultat principal annoncé dans cette Note est le suivant.

THÉORÈME 4.1. – *On a l'identité*

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-T_g\big(\omega^W,h^\eta\big)+T_g\big(\omega^V,h^\xi\big)\\&\quad=\int_{X_g}\mathrm{Td}_g\big(TX,h^{TX}\big)T_g\big(\xi,h^\xi\big)-\int_{Y_g}\frac{\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY,TX|_{W_g},h^{TX})}{\mathrm{Td}_g(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}})}\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^\eta\big)\\&\qquad+\int_{X_g}\mathrm{Td}_g(TX)R_g(TX)\mathrm{ch}_g(\xi)-\int_{Y_g}\mathrm{Td}_g(TY)R_g(TY)\mathrm{ch}_g(\eta)\quad \textit{dans } P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $R^i\pi_{V*}\xi_j=0$ pour $i>0$, $0\leqslant j\leqslant m$ et que $R^i\pi_{W*}\eta=0$ pour $i>0$. Alors on a la suite exacte $\mathcal{K}$ de fibrés holomorphes hermitiens sur S,

$$\mathcal{K}:0\to H^0(X,\xi_m)\xrightarrow{v}H^0(X,\xi_{m-1})\cdots\xrightarrow{v}H^0(X,\xi_0)\xrightarrow{r}H^0(X,\xi)\to 0. \tag{4.5}$$

To cite this article: J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897

Soit $h^{\mathcal{K}}$ la métrique hermitienne évidente sur $\mathcal{K}$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}) \in P^S/P^{S,0}$ la classe de Bott–Chern telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}\big) = \mathrm{ch}_g\big(H^0(X, \xi|_X), h^{H^0(X,\xi|_X)}\big) - \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \mathrm{ch}_g\big(H^0(X, \xi_i|_X), h^{H^0(X,\xi_i|_X)}\big). \tag{4.6}$$

THÉORÈME 4.2. – *On a l'identité,*

$$T_g\big(\omega^V, h^{\xi}\big) - \sum_{i=0}^{m}(-1)^i T_g\big(\omega^V, h^{\xi_i}\big) - \widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}\big) = 0 \quad \textit{dans } P^S/P^{S,0}. \tag{4.7}$$

5. Principe de la preuve

Les preuves des Théorèmes 4.1 et 4.2, données dans [11], mêlent les techniques de [4] et [5]. Il s'agit en effet de combiner les techniques d'indice relatif utilisées dans [4] avec les techniques de point fixe de [5]. Les méthodes d'analyse fonctionnelle de [4] s'appliquent sans aucune modification, les techniques d'indice relatif local sont remplacées par des méthodes d'indice relatif équivariant local.

Remerciements. Jean-Michel Bismut remercie l'Institut Universitaire de France (I.U.F.) pour son soutien.

Références bibliographiques

[1] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1) (1986) 91–151.
[2] J.-M. Bismut, Superconnection currents and complex immersions, Invent. Math. 99 (1) (1990) 59–113.
[3] J.-M. Bismut, Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms, Compositio Math. 93 (3) (1994) 291–354.
[4] J.-M. Bismut, Equivariant immersions and Quillen metrics, J. Differential Geom. 41 (1) (1995) 53–157.
[5] J.-M. Bismut, Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms, Astérisque 244 (1997) viii+275.
[6] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott–Chern forms and analytic torsion, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 49–78.
[7] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott–Chern forms, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 79–126.
[8] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants, Comm. Math. Phys. 115 (2) (1988) 301–351.
[9] J.-M. Bismut, K. Köhler, Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas, J. Algebraic Geom. 1 (4) (1992) 647–684.
[10] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 74 (1991) ii+298.
[11] J.-M. Bismut, X. Ma, Holomorphic immersions and equivariant torsion forms, Preprint Université Paris-Sud, Orsay, 2002.
[12] H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, Topology 30 (1) (1991) 21–54. With an appendix by D. Zagier.
[13] H. Gillet, C. Soulé, An arithmetic Riemann–Roch theorem, Invent. Math. 110 (3) (1992) 473–543.
[14] K. Köhler, A Hirzeburch proportionality principle in Arakelov geometry, Preprint, 2002.
[15] K. Köhler, D. Roessler, A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I: statement and proof, Invent. Math. 145 (2) (2001) 333–396.
[16] K. Köhler, D. Roessler, A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry II: a residual formula, Ann. Inst. Fourier 52 (2002) 81–103.
[17] X. Ma, Submersions and equivariant Quillen metrics, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (5) (2000) 1539–1588.
[18] V. Maillot, D. Roessler, Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs, Preprint, 2002.
[19] D. Quillen, Determinants of Cauchy–Riemann operators on Riemann surfaces, Functional Anal. Appl. 19 (1) (1985) 31–34.
[20] D. Quillen, Superconnections and the Chern character, Topology 24 (1) (1985) 89–95.
[21] D.B. Ray, I.M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. (2) 98 (1973) 154–177.
[22] D. Roessler, An Adams–Riemann–Roch theorem in Arakelov geometry, Duke Math. J. 96 (1) (1999) 61–126.