C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 205-210, 1997
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Formes de torsion analytique et familles de submersions

Xiaonan MA

Université Paris-Sud, URA 1169 du CNRS,
Département de Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay CEDEX, France.
E-mail: xiaonan@matups.matups.fr

Résumé. Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes, de fibre compacte. Soit ξ un fibré holomorphe sur W. Dans cette Note, on annonce un résultat qui exprime une combinaison des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2 et $\pi_2 \circ \pi_1$ à l'aide de classes de Bott-Chern. Ce résultat étend une formule de Berthomieu-Bismut à une situation en famille.

Analytic torsion forms and families of submersions

Abstract. *Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W. In this Note, we announce a result which relates a combination of the analytic torsion forms associated to π_1, π_2 and $\pi_2 \circ \pi_1$ in terms of Bott-Chern classes. This result extends to a relative situation a result by Berthomieu-Bismut on the behaviour of submersion of Quillen metrics.*

Abridged English Version

The purpose of this Note is to extend to a relative situation a result of Berthomieu-Bismut [1] on the behaviour of submersions of Quillen metrics.

Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre X (resp. Y). Let $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. Then $\pi_3 : W \to S$ is a holomorphic submersion with compact fibre Z. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W.

One assumes that the $R^i\pi_{1*}\xi$, $R^i\pi_{3*}\xi$, $R^j\pi_{2*}R^i\pi_{1*}\xi$ are locally free.

Let ω^V(resp. ω^W) be a real closed (1,1)-form on V(resp. W), which induces a metric g^{TY} (resp. g^{TZ}) on the relative tangent bundle TY (resp. TZ). Let g^{TX} be the metric on TX induced by ω^W. Let h^ξ be a Hermitian metric on ξ.

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

Let $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ denote the L_2 metric on $H(Z,\xi_{|Z}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi$ which one obtains by using the Hodge theory of the fibres Z. Also, we denote by $h^{R\pi_{1*}\xi}$ (resp. h^{E_2}) the L_2 metric on $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ (resp. $E_2 = R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$) associated with g^{TX}, h^ξ (resp. $g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi}$).

Let P^S be the vector space of real smooth forms on S, which are sums of forms of type (p,p). Let $P^{S,0}$ be the vector space of the forms $\alpha \in P^S$ such that there exist smooth forms β, γ on S with $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$.

Let $T_3(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W, h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$) be the analytic torsion forms of Bismut-Köhler [6] on S (resp. V, resp. S) associated with (π_3, g^{TW}, h^ξ) (resp. (π_1, g^{TW}, h^ξ), resp. $(\pi_2, g^{TV}, h^{R\pi_{1*}\xi})$).

On W, we have the exact sequence of holomorphic Hermitian vector bundles

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0.$$

Let $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})$ be the Bott-Chern class constructed in [5].

For $s \in S$, let $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ be the Leray spectral sequence [11] of the fibration $\pi_1 : Z_s \to Y_s$. We construct the Bott-Chern class $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ under one of the two following assumptions:

(i) The E_r $(r \geq 2)$ are locally free,

(ii) π_1 is projective and V is a projective manifold.

THEOREM 0. – *The following identity holds*

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) =& T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ &+ \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &- \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{in } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

---

1. Introduction

Soit $\pi : Z \to Y$ une submersion holomorphe de variétés compactes complexes de fibre X. Soit ξ un fibré holomorphe sur Z. Soit $\lambda(\xi)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ. Supposons que, pour $0 \leq k \leq \dim X$, $R^k\pi_*\xi$ est localement libre. Soit $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$ la droite complexe

$$\lambda(R^\bullet\pi_*\xi) = \bigotimes_{k=0}^{\dim X} (\lambda(R^k\pi_*\xi))^{(-1)^k}. \tag{1}$$

Alors, par la théorie de la suite spectrale sur le complexe de Dolbeault, $\lambda(\xi) \simeq \lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$.

Soient g^{TZ}, g^{TY} des métriques kählériennes sur TZ, TY. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soit $h^{R^\bullet\pi_*\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_*\xi$ associée à g^{TZ}, h^ξ. Soient $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$ et $\| \ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)}$ les métriques de Quillen sur les droites $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$. Bismut et Köhler [6] ont construit des formes de torsion analytique sur Y qui généralisent en degré arbitraire la torsion de Ray-Singer [14], et ils ont montré qu'elles vérifient des formules d'anomalie, qui les rendent « naturelles » en théorie d'Arakelov. Dans [1], Bismut et Berthomieu ont calculé une formule explicite pour $\log(\| \ \|_{\lambda(\xi)}/\| \ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)})^2$ à l'aide de classes de Bott-Chern et des formes de torsion analytique de [6].

L'objet de cette Note est d'annoncer une extension de [1] en situation relative. En effet, on considère des submersions $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$. On pose $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. On donne une formule exprimant en combinaison naturelle des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2, π_3 à l'aide de classes de Bott-Chern [5].

La preuve de cette formule repose sur des techniques de limites adiabatiques de Bismut-Cheeger [4] et sur la suite spectrale de Leray. La stratégie générale de la preuve est identique à la preuve d'un résultat de Berthomieu-Bismut [1].

Les preuves des résultats annoncés dans cette Note sont développées dans [12].

2. Une famille de submersions complexes

Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes de fibre compacte X (resp. Y). Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. On a donc

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & W \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ & Y \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_2"'] & S. \end{tikzcd} \tag{2}$$

Soit ξ un fibré holomorphe sur W.

Dans toute la suite, on suppose que $R^\bullet\pi_{1*}\xi$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$ et $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Soit $H(Z, \xi_{|Z})$ la cohomologie de $\xi_{|Z}$. Alors $H(Z, \xi_{|Z})$ est un fibré holomorphe $\mathbf{Z}$-gradué sur S. Plus exactement $R^\bullet\pi_{3*}\xi = H(Z, \xi_{|Z})$.

On suppose désormais que la fibration $\pi_2 : V \to S$ (resp. $\pi_3 : W \to S$) est kählérienne au sens de [5]. Plus précisément, soit ω^V (resp. ω^W) une $(1,1)$ forme réelle fermée sur V (resp. W), dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. g^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ). Soit g^{TX} la métrique hermitienne sur TX induite par ω^W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

Pour $s \in S$, soit $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ le complexe de Dolbeault relatif. Soit $*^{TZ}$ l'opérateur de Hodge associé à g^{TZ} sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Z)$. On munit $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ de la métrique hermitienne L_2 normalisée

$$\langle s, s' \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\dim Z} \int_Z \langle s, *^{TZ} s' \rangle_{h^\xi}. \tag{3}$$

Par identification de $H(Z, \xi_{|Z})$ aux éléments harmoniques dans le complexe $\Omega(Z, \xi_{|Z})$, on note $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique L_2 associée sur $H(Z, \xi_{|Z})$. De même, on désigne par $h^{R\pi_{1*}\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ associée à g^{TX}, h^ξ.

Soit P^S l'espace des formes réelles C^∞ sur S qui sont la somme de formes de type (p,p). Soit $P^{S,0}$ l'espace des $\gamma \in P^S$, qui s'écrivent $\gamma = \partial\beta + \bar\partial\gamma$, où β et γ sont C^∞ sur S.

Si K un fibré holomorphe avec métrique g^K et si Q est un polynôme caractéristique, on désigne par $Q(K, g^K) \in P^S$ la forme de Chern-Weil associée à la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur K.

Soit $T_3(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W, h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$) les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [6] sur S (resp. V, resp. S) associées à (π_3, ω^W, h^ξ) (resp. (π_1, ω^W, h^ξ), resp. $(\pi_2, \omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$). Les formes T_3 vérifient l'équation

$$\frac{\bar\partial\partial}{2\pi i} T_3(\omega^W, h^\xi) = \mathrm{ch}(H(Z, \xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \int_Z \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ})\, \mathrm{ch}(\xi, g^\xi) \tag{4}$$

et les formes T_1 et T_2 vérifient des équations analogues. Dans [6], on a établi des formules d'anomalie pour ces formes qui les rendent potentiellement compatibles au formalisme d'image directe en théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé [10].

On considère la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens sur W

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0. \tag{5}$$

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [5] telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\,\mathrm{Td}(TX, g^{TX}). \tag{6}$$

3. Définition de la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$

On montre tout d'abord que pour $s \in S$, le complexe de Dolbeault $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ muni d'une filtration convenable calcule la suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ au sens de Grothendieck [11]. Comme dans [1], on construit la métrique $h^{E_{r,s}}$ sur $E_{r,s}$ associée à g^{TZ}, g^{TY}, h^ξ.

Soit (E, v) (avec $E = \bigoplus_{i=0}^m E^i$) un complexe de fibrés holomorphes sur S. Pour $s \in S$, on note $H_s(E)$ la cohomologie du complexe $(E, v)_s$. On suppose que le rang de $H_s^i(E)$ est localement constant. Ainsi $H(E)$ est un fibré holomorphe $\mathbf{Z}$-gradué sur S. Soit h^{E^i} (resp. $h^{H(E)}$) une métrique hermitienne sur E^i (resp. $H(E)$). En imitant [5] et [6], on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \mathrm{ch}(E, h^E) - \mathrm{ch}(H(E), h^{H(E)}). \tag{7}$$

Soit $F = F^0 \supset \ldots \supset F^m = 0$ une filtration de fibrés holomorphes sur S. Soit $\mathrm{Gr}^i F = F^i/F^{i+1}$. Soit h^F (resp. $h^{\mathrm{Gr}\, F}$) une métrique hermitienne sur F (resp. $\mathrm{Gr}\, F$). De même, on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\, F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}) \in P^S/P^{S,0}$ qui vérifie

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\, F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}) = \mathrm{ch}(F,\ h^F) - \mathrm{ch}(\mathrm{Gr}\, F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}). \tag{8}$$

Proposition 1. – *Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})$ $(0 \leq p, q \leq n)$ un bicomplexe de fibrés holomorphes hermitiens sur S. Soit $H^i(\mathcal{E})$ la cohomologie de E de degré i. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale induite par la filtration $F^p\mathcal{E} = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{E}^{p',\bullet}$. On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant. Soit $h^{\mathcal{E}_r}$ (resp. $h^{H(\mathcal{E})}$) la métrique sur $\mathcal{E}_r$ (resp. $H(\mathcal{E})$) induite par $h^{\mathcal{E}}$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) = &\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}, h^{\mathcal{E}_i}, h^{\mathcal{E}_{i+1}}) \\ &- \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dans la suite, on définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),\ h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ dans les trois cas suivants :

(i) On suppose que le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.

Alors $E_2 = H(Z, \xi_{|Z})$. Par la construction de [5], la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),$ $h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ est bien définie.

(ii) En toute généralité, si le rang de $E_r (r \geq 2)$ est localement constant sur S, on pose :

$$(10)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \sum_{i=2}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(E_i, E_{i+1}, h^{E_i}, h^{E_{i+1}}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z,\xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}).$$

(iii) On suppose que l'application π_1 est projective [5], p. 337, et que V est une variété projective. Soit $n = \dim Z$.

Soit $(\xi^i)_{0 \leq i \leq n}$ une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de fibrés holomorphes de ξ sur W, et $F = (F^{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ une résolution π_{2*} acyclique de fibrés holomorphes du complexe $(R^0\pi_{1*}\xi^i)$ au sens de [8], chap. XVII. Si on filtre le bicomplexe $E(F) = R^0\pi_{2*}F$ par $F^pE(F) = \bigoplus_{p' \geq p} R^0\pi_{2*}F^{\bullet,p'}$, alors la suite spectrale associée $(E_r(F), d_r)$ calcule la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) (à partir de $r = 2$).

On se donne des métriques hermitiennes $h^{E^{p,q}(F)}$ sur $E^{p,q}(F) = R^0\pi_{2*}F^{p,q}$.

DÉFINITION 2. – On définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ de la manière suivante

$$(11)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), H(E(F)), h^{E(F)}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), E_2(F), h^{E(F)}, h^{E_2}).$$

PROPOSITION 3. – *La classe $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ ne dépend pas du choix des résolutions et des métriques. De plus, on a*

$$(12)\qquad \frac{\partial\bar\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}) - \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|z}), h^{H(Z,\xi_{|z})}).$$

On vérifie, sous les hypothèses de (iii), la compatibilité de notre construction à (ii).

4. La fonctorialité des formes de torsion analytique

On énonce maintenant le résultat principal de cette Note, qui étend en degré arbitraire un théorème de Berthomieu-Bismut [1] sur les métriques de Quillen [5]. Cet énoncé s'applique dans les trois cas précédents.

THÉORÈME 4. – *On a l'identité*

$$(13)\qquad T_3(\omega^W, h^\xi) = T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

5. Principe de la preuve du théorème 4

Notons que les formules d'anomalie de [6] montrent qu'il suffit de montrer le théorème 4 pour un seul choix de $(1,1)$-formes ω^W, ω^V.

Dans la preuve de [12], dans les cas (i) et (ii), on reprend la démarche générale décrite dans Berthomieu-Bismut [1], mais naturellement, les objets considérés sont maintenant des formes sur S de degré pair arbitraire.

Le schéma général de la preuve de [12] consiste à utiliser des techniques de limites adiabatiques en remplaçant $\omega^W = \widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V$ par $\frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V$ (avec $T \to +\infty$).

Il est clair que dans [12], les techniques d'indice local de [1] doivent être remplacées par des techniques d'indice relatif local [2].

Par rapport à [1], une difficulté générale tient au fait que les formes de superconnexion sur S, qui dépendent d'un paramètre u, ne convergent quand $u \to +\infty$ qu'à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{u}}$, alors que dans [1], la vitesse de convergence était e^{-cu} $(c > 0)$.

Dans les trois cas, la preuve du cas (i) est essentielle. Dans le cas (ii), il y a une difficulté qui tient au fait qu'il y a des petites valeurs propres au sens de [9].

Enfin, pour terminer la preuve dans le cas (iii), on appliquera le théorème 4, cas (i) au complexe $(\xi^\bullet, v)$ qui est une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de ξ.

Remerciements. Je tiens à remercier le Professeur J.-M. Bismut de m'avoir proposé ce sujet, et pour d'utiles discussions.

Note remise le 16 septembre 1996, acceptée le 30 septembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Berthomieu A. et Bismut J.M., 1994**. Quillen metrics and higher analytic torsion forms, *J. Reine Angew. Math.*, 457, p. 85-184.

[2] **Bismut J.-M., 1986**. The index theorems for families of Dirac operators : two heat equation proofs, *Invent. Math.*, 85, p. 91-151.

[3] **Bismut J.-M**. Families of immersions, and higher analytic torsion, *Preprint*, Orsay, 96-14.

[4] **Bismut J.-M. et Cheeger J., 1989**. η-invariant and their adiabatic limits, *J. Amer. Math. Soc.*, 2, p. 33-70.

[5] **Bismut J.-M., Gillet H. et Soulé C., 1988**. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, *Comm. Math. Phys.*, 115, p. 49-78, 79-126, 301-351.

[6] **Bismut J.-M. et Köhler K., 1992**. Higher analytic torsion forms and anomaly formulas, *J. Algebraic Geom.*, 1, p. 647-684.

[7] **Bismut J.-M. et Lebeau G., 1991**. Complex immersions and Quillen metric, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 74, p. 1-297.

[8] **Cartan H. et Eilenberg S., 1956**. *Homological Algebra*, Princeton.

[9] **Dai X., 1991**. Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence, *J. Amer. Math. Soc.*, 4, p. 265-321.

[10] **Gillet H. et Soulé C., 1991**. Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology*, 30, p. 21-54.

[11] **Grothendieck A., 1957**. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9, p. 119-221.

[12] **Ma X**. Formes de torsion analytique et familles de submersions (à paraître).

[13] **Quillen D**. Superconnections and the Chern character, *Topology*, 24, p. 89-95.

[14] **Ray D. B. et Singer I. M., 1971**. R-torsion and the Laplacien on Riemannian manifolds, *Adv. in Math.*, 7, p. 145-210.