UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

Présentation de travaux en vue de l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématique

par

Xiaonan MA

THÉORIE DE L'INDICE LOCAL ET APPLICATIONS

soutenue le 25 mai 2005 devant le Jury composé de :

M Jean-Michel BISMUT
Jean-Benoît BOST
Eric LEICHTNAM
Nessim SIBONY
Christophe SOULÉ
Weiping ZHANG

A ma femme...

Adresse de l'auteur	:	Xiaonan MA Centre de Mathématiques de Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail	:	ma@math.polytechnique.fr
Page personnelle	:	http://www.math.polytechnique.fr/~ma/

Remerciements

C'est bien sûr à Monsieur Jean-Michel Bismut que mes premiers remerciements s'adressent. C'est lui qui a dirigé ma thèse, puis suivi de près les travaux exposés ici. Nos discussions sur des sujets variés et son soutien éclairé sont le fondement de ce travail.

Je remercie sincèrement deux rapporteurs anonymes d'avoir accepté d'écrire un rapport sur cette thèse. Jean-Benoît Bost, Éric Leichtnam, Nessim Sibony, Christophe Soulé, Weiping Zhang me font l'honneur de participer au jury, ce dont je les remercie.

Depuis que je connais Kefeng Liu et Weiping Zhang, ils me considèrent comme leur frère. Ils sont toujours prêt à discuter de mathématiques et plus généralement à me conseiller sur tout. Nos collaborations fructeuses continueront sûrement.

J'ai été très heureux de faire partie de l'équipe de Monsieur Jochen Brüning pendant plus de deux ans. C'est là où j'ai commencé à travailler de manière indépendante, et à apprendre à communiquer avec les autres. L'expérience de notre collaboration de longue durée est aussi inoubliable pour moi.

Je voudrais également remercier mes autres collaborateurs : Ulrich Bunke, Xianzhe Dai, Chongying Dong, Huitao Feng, George Marinescu, Jian Zhou. Ils m'ont beaucoup appris.

Je tiens à remercier Christophe Margerin, Emmanuel Ferrand et David Renard pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de ce texte, et tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre m'ont soutenu dans mes travaux : qu'ils m'excusent de ne pouvoir les remercier ici nommément.

Mes recherches se sont effectuées tour-à-tour au Département de Mathématique de Paris XI, à ICTP Trieste, au Département de Mathématiques de l'Université Humboldt à Berlin, de l'Université de California, Santa-Cruz, et au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École Polytechnique. J'ai pu bénéficier dans ces cinq institutions de conditions de travail exceptionnelles.

Enfin, merci à toute ma petite famille qui m'apporte joie et soutien quotidiens.

PRÉSENTATION DES TRAVAUX

Contents

Notes aux Comptes Rendus

0. Introduction

Nos travaux portent essentiellement sur la théorie de l'indice et ses applications. Ils peuvent être regroupés en trois parties: les formes êta et les formes de torsion analytique holomorphe ou réelle; les genres elliptiques; le développement asymptotique du noyau de Bergman généralisé sur les variétés symplectiques. Dans les trois Sections suivantes sont présentés les résultats principaux. Ces trois Sections sont suivies d'une bibliographie.

En 1944, S. S. Chern [79] a démontré le théorème de Gauss-Bonnet en toute dimension par une méthode intrinsèque. Dix ans plus tard, Hirzebruch [95] a généralisé le théorème classique de Riemann-Roch en toute dimension, et Grothendieck [64] a obtenu une version en famille du théorème de Hirzebruch, en introduisant une théorie nouvelle: la "K-Théorie" des fibrés algébriques. Atiyah et Hirzebruch [31] ont ensuite développé la K-Théorie pour les fibrés vectoriels $\mathscr{C}^\infty$. La K-théorie topologique permet de poser de manière adéquate le théorème de l'indice des opérateurs elliptiques. Finalement, en 1963, Atiyah et Singer [34] ont énoncé leur théorème de l'indice. Ce théorème unifie le théorème de Gauss-Bonnet-Chern et le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.

Le théorème de l'indice local pour un opérateur de type de Dirac de Patodi [118], Gilkey [88], et Atiyah-Bott-Patodi [30], donne une solution à la conjecture des annulations fantastiques de McKean-Singer [112] pour l'asymptotique de la supertrace du noyau de la chaleur. Inspirés par les physiciens, plusieurs mathématiciens ont donné, dans les années 80, des preuves directes du théorème de l'indice local, Bismut [41], Getzler [86], [87], Berline-Vergne [38], Yu [130], etc. Le théorème de l'indice local donne une nouvelle approche du théorème de l'indice lui-même. Les techniques de démonstration permettent de donner des extensions du théorème d'Atiyah-Singer. On peut ainsi démontrer le théorème d'Atiyah-Patodi-Singer pour les variétés à bord [33], où l'invariant êta d'Atiyah-Patodi-Singer donne la contribution du bord.

En 1985, Quillen [120] a introduit les superconnexions, qui généralisent les connexions pour les fibrés vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués. Bismut [42] a défini rigoureusement le représentant du caractère de Chern d'un fibré vectoriel de dimension infinie pour une famille d'opérateurs de Dirac à l'aide de l'opérateur de la chaleur pour la courbure de certaines superconnexions. En particulier, en introduisant la superconnexion de Levi-Civita, Bismut a établi son théorème de l'indice local relatif qui raffine le théorème de l'indice des familles d'Atiyah-Singer [35] au niveau des formes différentielles. Dans ce formalisme, il est naturel de transgresser les formes de Chern en dimension infinie comme on le fait pour les formes de Chern en dimension finie.

Pour une famille d'opérateurs de Dirac, on obtient les formes êta de Bismut-Cheeger [50] par transgression des formes de superconnexion de Bismut; dans le cas holomorphe, par double transgression à la Bott-Chern, on trouve les formes de torsion analytique holomorphe de Bismut-Gillet-Soulé [54] et de Bismut-Köhler [58].

Pour les fibrés vectoriels plats, Bismut et Lott [60] ont aussi établi une version $\mathscr{C}^\infty$ du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck (R.R.G.). Par transgression, on construit les formes de torsion analytique réelle de Bismut-Lott [60]. Dans tous les cas, ce sont des formes différentielles sur la base de la fibration considérée. En particulier, la partie de degré 0 des formes de torsion analytique holomorphe ou réelle est la torsion analytique holomorphe ou réelle de Ray-Singer [121], [122], qui est un déterminant renormalisé du Laplacien. La partie de degré 0 des formes êta de Bismut-Cheeger est l'invariant êta d'Atiyah-Patodi-Singer [33], qui mesure la symétrie du spectre d'un opérateur elliptique auto-adjoint.

Ces constructions peuvent s'interpréter dans le cadre de théories des classes secondaires, qu'elles soient topologiques ou analytiques. Du point de vue de la K-théorie topologique, les invariants primaires sont les classes caractéristiques comme la classe de Chern, la classe de Todd ou la classe du $\widehat{A}$-genre, qui sont apparues dans le théorème d'Atiyah-Singer, les invariants secondaires sont des classes de Chern-Simons [80], les classes de Bott-Chern [69], [54], et les courants de Bott-Chern [56], [45] qui raffinent ces classes caractéristiques. Du point de vue analytique, l'indice d'un opérateur elliptique apparaît comme un invariant primaire. Les formes êta et les formes de torsion analytique holomorphe ou réelle sont des invariants secondaires. En particulier, les formules de transgression nous donnent des raffinements du théorème de l'indice relatif au niveau secondaire.

En général, on définit les invariants primaires ou secondaires ci-dessus à l'aide de données géométriques comme des métriques ou des connexions. Les invariants primaires ne dépendent pas du choix de ces données géométriques, mais les invariants secondaires en dépendent. Plus généralement, les invariants primaires sont naturellement fonctoriels, c'est à dire qu'ils sont compatibles à la composition des applications. Un problème naturel et intéressant est de savoir comment les invariants secondaires dépendent du choix des données géométriques, et plus généralement, de déterminer leurs propriétés fonctorielles. Une fois démontrées, ces propriétés fonctorielles nous aident aussi à élucider la nature de ces invariants.

Ces invariants secondaires apparaissent naturellement dans d'autres théories. Les formes êta de Bismut-Cheeger apparaissent aussi comme la contribution du bord au théorème de l'indice des familles pour les variétés à bord [51], [52], [113]. En degré 0, la torsion analytique holomorphe intervient dans la construction de la métrique de Quillen [119], [55]. Plus généralement, les formes de torsion analytique holomorphe sont utilisées pour la construction de l'image directe en géométrie d'Arakelov [90].

Notre thèse et une grande partie de nos travaux sont consacrés à l'établissement des propriétés fonctorielles des formes êta et des formes de torsion analytique holomorphe ou réelle.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous avons consacré d'autres travaux aux genres elliptiques. Formellement, les genres elliptiques sont des indices équivariants d'opérateurs de Dirac sur les espaces de lacets. Nous nous concentrons surtout sur les propriétés de rigidité de Witten.

En géométrie complexe et symplectique, nos travaux portent sur le noyau de Bergman. Les techniques de localisation analytique de la théorie de l'indice local nous permettent d'établir l'existence du développement asymptotique du noyau de Bergman généralisé, et d'en calculer les premiers coefficients.

Ce texte contient trois Sections. Dans la Section 1, nous nous intéressons aux invariants êta et aux formes de torsion analytique holomorphe ou réelle. La Section 2 est consacrée aux genres elliptiques. La Section 3 concerne le développement asymptotique du noyau de Bergman généralisé.

1. Formes de torsion analytique, Invariants êta

Dans cette Section, nous expliquerons nos travaux sur la théorie de l'indice local, en particulier sur les formes êta et les formes de torsion analytique. Une référence générale de ce sujet est l'article de revue de Bismut [48].

Cette Section est organisé de la façon suivante. Dans la Section 1.1, nous rappelons des idées principales de la preuve du théorème de l'indice local relatif, et nous montrons que les formes êta sont des classes de Chern-Simons en dimension infinie. Dans la Section 1.2, nous présentons les résultats de notre thèse. Dans la Section 1.3, nous expliquons nos travaux sur les formes de torsion analytique holomorphe, et sur ses généralisations au cas équivariant. Dans la Section 1.4, nous décrivons nos travaux sur les formes de torsion analytique réelle pour les fibrés plats, et sur leurs relations avec les formes êta tordues. Dans la Section 1.5, nous discutons nos travaux sur l'indice analytique secondaire pour les fibrés vectoriels plats munis d'une structure de dualité. Dans la Section 1.6, nous présentons nos travaux sur la torsion analytique de Ray-Singer pour les variétés à bord.

Dans cette Section, on utilise le formalisme des superconnexions comme dans [37, §1.3-1.4]. Si $E = E^+ \oplus E^-$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, on pose $\tau = \pm 1$ sur $E^\pm$. Pour $A \in \mathrm{End}(E)$, la supertrace de A est alors définie par $\mathrm{Tr}_s[A] = \mathrm{Tr}[\tau A]$.

1.1. **Indices et Invariants spectraux secondaires.** Soit X une variété $\mathscr{C}^\infty$ orientée spinorielle compacte, de dimension paire $2l$ et soit $S(TX) = S^+(TX) \oplus S^-(TX)$ le fibré des spineurs $\mathbb{Z}_2$-gradué associé à TX. Soit ξ un fibré vectoriel complexe sur X.

Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur TX, et soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita de (TX, g^{TX}) de courbure R^{TX}, et soit $\nabla^{S(TX)}$ la connexion sur $S(TX)$ induite par ∇^{TX}. On note $c(\cdot)$ l'action de l'algèbre de Clifford de TX sur $S(TX)$. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ et soit ∇^ξ une connexion hermitienne sur (ξ, h^ξ) de courbure R^ξ. Soit $\nabla^{S(TX)\otimes\xi}$ la connexion sur $S(TX)\otimes\xi$ induite par $\nabla^{S(TX)}$ et ∇^ξ. On munit $\mathscr{C}^\infty(X, S(TX)\otimes\xi)$ du produit hermitien L^2 associé à g^{TX}, h^ξ. Soit $\{e_i\}_i$ une base orthonormale de TX. L'opérateur de Dirac D est un opérateur elliptique auto-adjoint du premier ordre défini par la formule

$$D := \sum_i c(e_i)\nabla^{S(TX)\otimes\xi}_{e_i} : \mathscr{C}^\infty(X, S^\pm(TX)\otimes\xi) \to \mathscr{C}^\infty(X, S^\mp(TX)\otimes\xi). \tag{1.1}$$

On note $D_\pm$ la restriction de D à $\mathscr{C}^\infty(X, S^\pm(TX)\otimes\xi)$. Comme D_+ est un opérateur de Fredholm, on peut définir son indice par

$$\mathrm{Ind}(D_+) := \dim\mathrm{Ker}\, D_+ - \dim\mathrm{Ker}\, D_-. \tag{1.2}$$

L'indice $\mathrm{Ind}(D_+)$ ne dépend pas du choix des métriques et des connexions. C'est donc un invariant topologique de X et ξ.

Pour énoncer le théorème d'Atiyah-Singer, on introduit d'abord la classe $\widehat{A}$, la classe de Todd et la classe de Chern.

Définition 1.1. Soient

$$\widehat{A}(TX,\nabla^{TX}) := \det{}^{1/2}\left(\frac{R^{TX}/4\pi i}{\sinh(R^{TX}/4\pi i)}\right), \tag{1.3}$$

$$\mathrm{ch}(\xi,\nabla^{\xi}) := \mathrm{Tr}\left[\exp(-\frac{R^{\xi}}{2i\pi})\right],$$

$$\mathrm{Td}(\xi,\nabla^{\xi}) := \det\left(\frac{-R^{\xi}/2i\pi}{1-e^{R^{\xi}/2i\pi}}\right).$$

Alors ces classes de cohomologie ne dépendent pas du choix des connexions. On note $\widehat{A}(TX), \mathrm{ch}(\xi), \mathrm{Td}(\xi)$ les classes de cohomologie correspondantes dans $H^*(X,\mathbb{R})$.

Le théorème d'Atiyah-Singer [1] exprime $\mathrm{Ind}(D_+)$ à l'aide de ces classes caractéristiques,

Théorème 1.2. ([34]).

$$\mathrm{Ind}(D_+) = \int_X \widehat{A}(TX)\,\mathrm{ch}(\xi). \tag{1.4}$$

L'idée de McKean et Singer [112] est d'exprimer $\mathrm{Ind}(D_+)$ à l'aide de l'opérateur de la chaleur $\exp(-tD^2)$ de D. Plus précisément, soit $\exp(-tD^2)(x,x')$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur $\exp(-tD^2)$ pour la forme volume $dv_X(x')$. La formule de McKean-Singer dit que pour $t>0$, on a

$$\mathrm{Ind}(D_+) = \mathrm{Tr}_s[\exp(-tD^2)] = \int_X \mathrm{Tr}_s[\exp(-tD^2)(x,x)]dv_X(x). \tag{1.5}$$

Il est bien connu qu'il existe $a_j \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(S(TX)\otimes E))$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$, quand $t\to 0$, on a un développement asymptotique,

$$\exp(-tD^2)(x,x) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)t^{j-l} + \mathscr{O}(t^{k-l+1}), \tag{1.6}$$

où les $a_j(x)$ ne dépendent que de la géométrie locale près de x. Si β est une forme sur X, on note $[\beta]^{\max}$ sa partie de degré $2l$ dans $\Lambda(T^*X)$.

On a alors le théorème de l'indice local,

Théorème 1.3. ([118], [30], [88], [41], [86], [87]). *Dans (1.6), on a*

$$\mathrm{Tr}_s[a_j(x)] = 0 \quad \text{si } j<l, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{Tr}_s[a_l(x)]dv_X(x) = [\widehat{A}(TX,\nabla^{TX})\,\mathrm{ch}(\xi,\nabla^{\xi})]^{\max}.$$

En particulier, (1.7) implique (1.4).

On considère maintenant la situation en famille. Soit $\pi: W\to V$ une submersion de variétés compactes de fibre X. Soit ξ un fibré vectoriel hermitien sur W muni d'une connexion hermitienne ∇^{ξ}. Soit g^{TX} une métrique sur le fibré tangent relatif TX pour π. Alors on a une famille d'opérateurs de Dirac D^X paramétrée par V. On définit ainsi l'indice analytique dans le groupe de K-Théorie $K(V)$ de V,

$$\mathrm{Ind}(D^X) = [\mathrm{Ker}\, D^X_+ - \mathrm{Coker}\, D^X_+] \in K(V). \tag{1.8}$$

[1]On peut obtenir le théorème de l'indice pour un opérateur elliptique quelconque à partir du théorème de l'indice pour l'opérateur de Dirac par la K-Théorie [30].

Le théorème de l'indice relatif d'Atiyah et Singer nous donne une formule cohomologique pour le caractère de Chern de $\operatorname{Ind}(D^X)$,

Théorème 1.4. ([35]). *Dans $H^*(V,\mathbb{R})$, on a*

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Ind}(D^X)) = \int_X \widehat{A}(TX)\operatorname{ch}(\xi). \tag{1.9}$$

En 1985, Quillen [119] a introduit les superconnexions, qui généralisent les connexions pour les fibrés vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués. Bismut [42] a construit une superconnexion sur un fibré de dimension infinie, qui lui a permis de donner une version locale du théorème 1.4.

Décrivons brièvement la superconnexion utilisée dans [42]. Bismut doit choisir un fibré horizontal T^HW de TW tel que $TW = TX \oplus T^HW$. Soit P^{TX} la projection de TW sur TX. Pour $U \in TV$, nous notons $U^H \in T^HW$ le relèvement de U tel que $\pi_* U^H = U$. Alors la courbure T pour la fibration (π, T^HW) est

$$T(U_1,U_2) = -P^{TX}[U_1^H, U_2^H]. \tag{1.10}$$

Le triplet (π, g^{TX}, T^HW) définit alors une connexion canonique ∇^{TX} sur TX telle que sa restriction le long de la fibre X est la connexion de Levi-Civita, et que pour $U \in TV$,

$$\nabla^{TX}_{U^H} = L_{U^H} + \frac{1}{2}(g^{TX})^{-1}(L_{U^H} g^{TX}). \tag{1.11}$$

Pour $b \in V$, on pose $E_b = \mathscr{C}^\infty(X_b, S(TX)\otimes \xi|_{X_b})$. Les E_b sont les fibres d'un fibré de dimension infinie E sur V dont les sections $\mathscr{C}^\infty$ sont identifiées aux sections $\mathscr{C}^\infty$ de $S(TX)\otimes\xi$ sur W. Si $s \in \mathscr{C}^\infty(V,E)$, on pose

$$\nabla^{E,u}_U s = \nabla^{S(TX)\otimes\xi}_{U^H} s + \frac{L_{U^H} dv_X}{2 dv_X} s. \tag{1.12}$$

Alors $\nabla^{E,u}$ est une connexion hermitienne sur E. La superconnexion de Bismut A_t $(t>0)$ sur $\Lambda(T^*V)\widehat{\otimes}E$ est définie par

$$A_t := \sqrt{t} D^X + \nabla^{E,u} - \frac{1}{4\sqrt{t}} c(T). \tag{1.13}$$

Alors A_t^2 est un opérateur elliptique d'ordre 2 le long de la fibre X agissant sur $\Lambda(T^*V)\widehat{\otimes}E$, et l'opérateur de la chaleur $\exp(-A_t^2)$ est un opérateur à trace. On note $\exp(-A_t^2)(x,x')$ $(x,x' \in X_b)$ le noyau $\mathscr{C}^\infty$ de $\exp(-A_t^2)$ associé à $dv_X(x')$.

Désormais, on fixe une racine de $i=\sqrt{-1}$. Soit $\varphi : \Lambda(T^*V) \to \Lambda(T^*V)$ donnée par $\varphi\alpha = (2i\pi)^{-\deg\alpha/2}\alpha$. Pour β une forme sur W, on note $[\beta]^{\max}$ sa partie de degré $2l$ dans $\Lambda(T^*X)$.

Théorème 1.5. ([42]). *Pour $t>0$, la forme $\varphi\operatorname{Tr}_s[\exp(-A_t^2)]$ est fermée, et sa classe de cohomologie ne dépend pas de t, et est égale à $\operatorname{ch}(\operatorname{Ind}(D^X))$ dans $H^*(V,\mathbb{R})$. De plus,*

$$\lim_{t\to 0} \varphi\operatorname{Tr}_s[\exp(-A_t^2)(x,x)] dv_X(x) = [\widehat{A}(TX,\nabla^{TX})\operatorname{ch}(\xi,\nabla^\xi)]^{\max}. \tag{1.14}$$

Si $\operatorname{Ker} D^X_+$ et $\operatorname{Coker} D^X_+$ sont des fibrés vectoriels, alors la connexion $\nabla^{E,u}$ induit par projection une connexion $\nabla^{\operatorname{Ker} D^X}$ sur $\operatorname{Ker} D^X$. Berline et Vergne [39] ont étudié la convergence quand $t\to\infty$.

Théorème 1.6. ([39], [37, Chap. 9]).

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi\operatorname{Tr}_s[\exp(-A_t^2)] = \operatorname{Tr}_s[\exp(-\nabla^{\operatorname{Ker} D^X,2}/2i\pi)] = \operatorname{ch}(\operatorname{Ind}(D^X), \nabla^{\operatorname{Ker} D^X}). \tag{1.15}$$

Dans [50], Bismut et Cheeger ont démontré la formule de transgression à la Chern-Simons,

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Tr}_s[\exp(-A_t^2)] = -d\operatorname{Tr}_s\left[\frac{\partial A_t}{\partial t}\exp(-A_t^2)\right]. \tag{1.16}$$

La forme êta de Bismut-Cheeger $\widetilde{\eta}$ [50] est une forme impaire sur V définie par l'intégrale suivante

$$\widetilde{\eta} := (2i\pi)^{-1/2}\int_0^{+\infty}\varphi\operatorname{Tr}_s\left[\frac{\partial A_t}{\partial t}\exp(-A_t^2)\right]dt. \tag{1.17}$$

Alors $\widetilde{\eta}$ vérifie une équation du type Chern-Simons,

$$d\widetilde{\eta} = \int_X \widehat{A}(TX,\nabla^{TX})\operatorname{ch}(\xi,\nabla^\xi) - \operatorname{ch}(\operatorname{Ind}(D^X),\nabla^{\operatorname{Ker}D^X}). \tag{1.18}$$

Remarque 1.7. Si la fibre X est de dimension impaire, le fibré des spineurs $S(TX)$ n'est pas $\mathbb{Z}_2$-gradué, Bismut et Cheeger [50] ont également construit une forme êta $\widetilde{\eta}$ de degré pair sur V, vérifiant l'équation suivante,

$$d\widetilde{\eta} = \int_X \widehat{A}(TX,\nabla^{TX})\operatorname{ch}(\xi,\nabla^\xi). \tag{1.19}$$

La partie de degré 0 de $\widetilde{\eta}$, $\widetilde{\eta}^{(0)}$, est l'invariant êta d'Atiyah-Patodi-Singer [33].

1.2. **Formes de torsion analytique holomorphe I. Notre thèse.** La torsion analytique holomorphe de Ray-Singer [122] est obtenue comme le déterminant généralisé de l'opérateur de Laplace-Kodaira sur les fibrés vectoriels hermitiens sur une variété compacte hermitienne. Les formes de torsion analytique holomorphe de Bismut-Gillet-Soulé [54] et de Bismut-Köhler [58] sont des formes différentielles sur la base d'une fibration holomorphe. La composante de degré 0 est la torsion analytique de Ray-Singer de la fibre.

Soit $\pi : W \to V$ une submersion de variétés complexes de fibre compacte X, et $\dim X = l$. Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W. On note $J^{T_{\mathbb{R}}X}$ la structure complexe de $T_{\mathbb{R}}X$ sur le fibré tangent relatif $T_{\mathbb{R}}X$.

On suppose que l'image directe $R^\bullet\pi_*\xi$ est localement libre. Alors $R^\bullet\pi_*\xi$ est un fibré vectoriel holomorphe sur V, et on peut identifier $R^\bullet\pi_*\xi$ à $H(X,\xi|_X)$, la cohomologie du faisceau des sections holomorphes de ξ le long de la fibre X. Alors le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck (R.R.G.) nous donne une formule pour le caractère de Chern de $R^\bullet\pi_*\xi$,

$$\operatorname{ch}(R^\bullet\pi_*\xi) = \sum_i(-1)^i\operatorname{ch}(R^i\pi_*\xi) = \int_X \operatorname{Td}(TX)\operatorname{ch}(\xi) \quad \text{dans } H^*(V,\mathbb{R}). \tag{1.20}$$

Pour établir le théorème de l'indice local relatif correspondant, on va supposer que π est une fibration kählérienne au sens de [54]. De manière équivalente, il existe ω une (1,1)-forme réelle, fermée sur W dont la restriction à chaque fibre X définit une métrique $g^{TX} = \omega(J^{T_{\mathbb{R}}X}\cdot,\cdot)$ sur $T_{\mathbb{R}}X$ (par exemple, une forme kählérienne sur W). Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soient ∇^{TX},∇^ξ les connexions holomorphes hermitiennes sur (TX,g^{TX}), (ξ,h^ξ).

Soit $(\Omega(X,\xi),\overline{\partial}^X) = (\mathscr{C}^\infty(X_b,\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi|_{X_b}),\overline{\partial}^X)$ $(b\in V)$ la famille sur V des complexes de Dolbeault des fibres X à coefficients dans ξ. Les métriques g^{TX}, h^ξ induisent naturellement un produit hermitien sur $\Omega(X,\xi)$,

$$\langle s,s'\rangle = (\frac{1}{2\pi})^{\dim X}\int_X \langle s,s'\rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}\,dv_X. \tag{1.21}$$

Soit $\overline{\partial}^{X*}$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^X$ relativement à (1.21). Soit

$$D^X = \overline{\partial}^X + \overline{\partial}^{X*}. \tag{1.22}$$

Alors $\sqrt{2}D^X$ est une famille d'opérateurs de Dirac le long de la fibre X. Par la théorie de Hodge, $H(X,\xi|_X)\simeq \operatorname{Ker} D^X$. Donc le fibré vectoriel $H(X,\xi|_X)$ hérite naturellement d'une métrique L^2, $h^{H(X,\xi|_X)}$ induite par (1.21).

Soit P^V l'espace des formes $\mathscr{C}^\infty$ sur V qui sont des sommes de formes de type (p,p). Soit $P^{V,0}\subset P^V$ l'espace des $\alpha\in P^V$ telles qu'il existe des formes $\mathscr{C}^\infty$ sur V, notées β,γ pour lesquelles $\alpha = \partial\beta+\overline{\partial}\gamma$. On définit de la même manière $P^W, P^{W,0}$, etc.

La forme de torsion analytique de Bismut-Gillet-Soulé [54] et de Bismut-Köhler [58] est une forme différentielle $T(\omega,h^\xi)\in P^V$ qui vérifie l'équation suivante:

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T(\omega,h^\xi) = \operatorname{ch}(H(X,\xi|_X),h^{H(X,\xi|_X)}) - \int_X \operatorname{Td}(TX,g^{TX})\operatorname{ch}(\xi,h^\xi). \tag{1.23}$$

Ici Td(,) et ch(,) sont respectivement la forme de Todd et la forme du caractère de Chern associées à ∇^{TX},∇^ξ introduites en (1.3). Dans le groupe de cohomologie $H^*(V,\mathbb{C})$, (1.23) est exactement le théorème de R.R.G.. Ainsi, (1.23) raffine le théorème de R.R.G. au niveau secondaire, par la construction explicite de la forme $T(\omega,h^\xi)$.

On rappelle brièvement sa construction. On choisit le sous-fibré complexe T^HW comme le fibré orthogonal à TX dans TW par rapport à ω. On définit ω^H la restriction de ω à $T^H_{\mathbb{R}}W$. Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}$ la connexion holomorphe hermitienne sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi$. Pour $U\in T_{\mathbb{R}}V$, $s\in\mathscr{C}^\infty(V,\Omega(X,\xi))$, on pose

$$\nabla^{\Omega(X,\xi)}_U s = \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{U^H}s. \tag{1.24}$$

Alors $\nabla^{\Omega(X,\xi)}$ est une connexion holomorphe hermitienne sur $\Omega(X,\xi)$. Soit N_X l'opérateur de nombre de $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$, qui agit par multiplication par k sur $\Lambda^k(T^{*(0,1)}X)$. On pose

$$B_t = \sqrt{t}D^X + \nabla^{\Omega(X,\xi)} - \frac{c(T)}{2\sqrt{2t}}. \tag{1.25}$$

Alors B_t est $A_{t/2}$ dans (1.13). Par [54, Théorème 2.9], on a la formule de transgression suivante

$$-\frac{1}{t}\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\varphi\operatorname{Tr}_s\left[\left(N_X+i\frac{\omega^H}{t}\right)\exp(-B_t^2)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\operatorname{Tr}_s\left[\exp(-B_t^2)\right]. \tag{1.26}$$

La forme $T(\omega,h^\xi)\in P^V$ est alors définie comme l'intégrale renormalisée de

$$-\int_0^{+\infty}\varphi\operatorname{Tr}_s\left[\left(N_X+i\frac{\omega^H}{t}\right)\exp(-B_t^2)\right]\frac{dt}{t}. \tag{1.27}$$

Comme en (1.18), l'équation (1.23) est résolue de (1.26) et (1.27). Si on note $T^{(0)}$ la partie de $T(\omega, h^{\xi})$ de degré 0 dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^{*}V)$, alors $\frac{1}{2}T^{(0)}$ est le logarithme de la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer,

$$T^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Tr}_s[N_X((D^{X,2})')^{-s}]|_{s=0}. \tag{1.28}$$

Ici, $(D^{X,2})'$ est l'action de quotient de $D^{X,2}$ sur $\Omega(X,\xi)/\operatorname{Ker} D^X$. On rappelle que $-\operatorname{Tr}_s[N_X\ ((D^{X,2})')^{-s}]$ est bien définie pour $s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > \dim X$, et qu'on peut l'étendre en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe près de 0.

Après les travaux fondamentaux de Bismut, Gillet et Soulé, on a trouvé des applications importantes de la torsion analytique holomorphe en géométrie d'Arakelov. Les formes de torsion analytique représentent la partie “analytique” de l'image directe d'un morphisme lisse entre variétés arithmétiques. On doit donc bien comprendre la fonctorialité des formes de torsion analytique holomorphe pour que l'image directe soit bien définie. Dans [59], Bismut et Lebeau ont étudié le comportement par immersion de la métrique de Quillen [120], [55]. Dans leur formule, apparaît en particulier le genre additif $R(x)$ de Gillet et Soulé [90]. Ce résultat a en particulier permis à Gillet et Soulé [91] de démontrer un théorème de Riemann-Roch arithmétique pour le déterminant. Dans [46], Bismut a étendu le résultat de [59] aux formes de torsion analytique holomorphe. Ce résultat a été utilisé par Roessler [123] pour démontrer le théorème de Riemann-Roch arithmétique pour toutes les classes de Chern.

D'autre part, du point de vue purement analytique, il est intéressant de comprendre les propriétés fonctorielles des formes de torsion analytique holomorphe. En effet, ce type de résultats, appliqué aux variétés arithmétiques, donne des informations plus raffinées que le formalisme de l'image directe en géométrie d'Arakelov.

Dans notre thèse [1], [2], [3], nous étudions la compatibilité des formes de torsion analytique pour la composition de deux submersions. Soient $\pi_1 : W \to V$ et $\pi_2 : V \to S$ deux submersions holomorphes des variétés complexes de fibres compactes X, Y, et soit $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. Alors $\pi_3 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. On suppose que les images directes $R^{\bullet}\pi_{1*}\xi$, $R^{\bullet}\pi_{3*}\xi$, $R^{\bullet}\pi_{2*}R^{\bullet}\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Soient T_1, T_2 et T_3 les formes de torsion analytique associées à $(\pi_1, \xi), (\pi_2, R^{\bullet}\pi_{1*}\xi)$ et (π_3, ξ). Le résultat principal dans notre thèse consiste à exprimer T_3 à l'aide de T_1, T_2 et d'une intégrale de certaines classes secondaires de Bott-Chern.

Soient ω^V, ω^W des $(1,1)$-formes réelles fermées sur V, W dont les restrictions aux fibres Y, Z induisent des métriques g^{TY}, g^{TZ} sur les fibrés tangent relatifs TY, TZ. Soit $\widetilde{\operatorname{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [53] associée au complexe de fibrés vectoriels holomorphes sur W, $0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0$, telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\operatorname{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \operatorname{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*\left(\operatorname{Td}(TY, g^{TY})\right)\operatorname{Td}(TX, g^{TX}). \tag{1.29}$$

Pour $s \in S$, il existe une suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s})(r \geq 2)$ [92] associée à $\pi_1 : Z_s \to Y_s$ telle que $E_2 = R^{\bullet}\pi_{2*}R^{\bullet}\pi_{1*}\xi$. Soit h^{E_2} la métrique sur E_2 induite par $h^{H(Y,H(X,\xi|_X)|_Y)}$. On définit une classe de Bott-Chern $\widetilde{\operatorname{ch}}\Big(E_2, H(Z,\xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi|_Z)}\Big)$ $\in P^S/P^{S,0}$ dans les trois cas suivants:

i) On suppose que le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.

ii) On suppose que le rang des E_r $(r \geq 2)$ est localement constant sur S.

iii) On suppose que π_1 et V sont projectives.
et on vérifie que ces définitions sont compatibles.

La classe $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi|_Z)}\big)$ vérifie l'équation

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}\left(E_2, H(Z,\xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi|_Z)}\right) = \mathrm{ch}\left(H(Z,\xi|_Z), h^{H(Z,\xi|_Z)}\right) - \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}). \tag{1.30}$$

Théorème 1.8. ([1], [2], [3]). *On a l'équation suivante dans $P^S/P^{S,0}$,*

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) - T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ + \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) - \widetilde{\mathrm{ch}}\left(E_2, H(Z,\xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi|_Z)}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Quand S est un point, le théorème 1.8 a été montré dans Bismut et Berthomieu [40]. Les formes de torsion analytique holomorphe y apparaissent dans le calcul de la limite adiabatique de la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer d'une fibration.

En appliquant le théorème 1.8, on obtient une relation entre l'image directe $\pi_{3!}$ et $\pi_{2!} \circ \pi_{1!}$ (la composition des images directes $\pi_{2!}$ et $\pi_{1!}$) en géométrie d'Arakelov, qui est compatible avec le théorème de Riemann-Roch arithmétique.

L'idée principale de la preuve du théorème 1.8 est d'utiliser la technique de la "limite adiabatique" qui a été introduite par Bismut et Cheeger [50] : d'abord, on explose la métrique sur la fibre Z horizontalement. On étudie ensuite la limite des objets correspondants.

Notons que la relation entre la suite spectrale de Leray pour $\pi_1 : Z \to Y$ et le problème de petites valeurs propres dans la limite adiabatique est due à Dai [81] et Mazzeo-Melrose [111]. Une méthode plus simple a été développée par Berthomieu-Bismut [40, §6]. Dans notre thèse, une méthode générale est développée pour obtenir la correspondance ci-dessus pour des formes différentielles. Cette technique est aussi utile dans des problèmes similaires.

1.3. **Formes de torsion analytique holomorphe II.** Les articles [4], [9], [7], [10], [13], [12] contiennent nos travaux sur les formes de torsion analytique holomorphe après notre thèse.

On considère une situation équivariante. Soit G un groupe de Lie compact. Soit $\pi : W \to V$ une submersion holomorphe de fibre compacte X. On suppose que G agit holomorphiquement fibre à fibre sur W, et que son action se relève à ξ. On suppose que ω, h^ξ sont G-invariantes. Alors les constructions de la Section 1.2 sont G-équivariantes. Pour $g \in G$, les points fixes W_g de g forment une sous-variété complexe de W, et π induit une submersion holomorphe $\pi_g : W_g \to V$ de fibre compacte X_g.

Soient $\mathrm{Td}_g(TX, g^{TX}), \mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi)$ les formes fermées sur W_g de la classe de Todd équivariante et le caractère de Chern équivariant dans la formule des points fixes de Atiyah-Bott-Segal-Singer pour g. Dans [4], nous définissons la forme de torsion analytique holomorphe équivariante $T_g(\omega, h^\xi) \in P^V$ pour $g \in G$ comme l'intégrale renormalisée de

$$-\int_0^{+\infty} \varphi\,\mathrm{Tr}_s\left[g\left(N_X + i\frac{\omega^H}{t}\right)\exp(-B_t^2)\right]\frac{dt}{t}, \tag{1.32}$$

de telle sorte qu'elle résout l'équation suivante,

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T_g(\omega, h^\xi) = \mathrm{ch}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}) - \int_{X_g} \mathrm{Td}_g(TX, g^{TX})\,\mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi). \tag{1.33}$$

Notons que pour une fibration de tore pas nécessairement kählérienne au sens de [54], Köhler [97] a aussi construit des formes de torsion analytique équivariante.

Si (ω', h'^ξ) est une autre paire de données, on note $\widetilde{\mathrm{Td}}_g(\ )$, $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(\xi, h^\xi, h'^\xi) \in P^{W_g}/P^{W_g,0}$, $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)},\ h'^{H(X,\xi|_X)}) \in P^V/P^{V,0}$ les classes de Bott-Chern associées [53] telles que

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TX, g^{TX}, g'^{TX}) = \mathrm{Td}_g(TX, g'^{TX}) - \mathrm{Td}_g(TX, g^{TX}),\\
&\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g(\xi, h^\xi, h'^\xi) = \mathrm{ch}_g(\xi, h'^\xi) - \mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi),\\
&\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}, h'^{H(X,\xi|_X)})\\
&\qquad\qquad = \mathrm{ch}_g(H(X,\xi|_X), h'^{H(X,\xi|_X)}) - \mathrm{ch}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Théorème 1.9. ([4]). *La classe de $T_g(\omega, h^\xi)$ dans $P^V/P^{V,0}$ dépend seulement de (g^{TX}, h^ξ). Soit (ω', h'^ξ) une autre paire de données, alors dans $P^V/P^{V,0}$, on a*

$$\begin{aligned}
T_g(\omega', h'^\xi) - T_g(\omega, h^\xi) &= \widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}, h'^{H(X,\xi|_X)})\\
&- \int_{X_g}\Big[\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TX, g^{TX}, g'^{TX})\,\mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi) + \mathrm{Td}_g(TX, g'^{TX})\widetilde{\mathrm{ch}}_g(\xi, h^\xi, h'^\xi)\Big].
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Le théorème 1.9 généralise les formules d'anomalie de Bismut-Köhler [58] au cas équivariant, et aussi les formules d'anomalie pour les métriques de Quillen équivariantes de Bismut-Gillet-Soulé [55, Théorème 1.23] et Bismut [45, Théorème 2.5]. En géométrie d'Arakelov, ce résultat implique en effet que l'image directe est compatible au changement de métriques.

Bismut [45] a défini la métrique de Quillen équivariante pour les variétés complexes sur lesquelles un groupe de Lie compacte agit d'une façon équivariante. Dans [4], nous généralisons le résultat de Bismut-Berthomieu [40] au cas équivariant. Soit $\pi_1 : Z \to Y$ une submersion de variétés complexes compactes de fibre X et soit ω^Z une forme kähleriénne sur Z, soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur Z. Soit G un groupe de Lie compact agissant sur Z, Y compatible avec π_1 (pas nécessairement trivial sur Y). On suppose que cette action de G se relève à ξ. Alors $T_g(\omega^Z, h^\xi)$ est définie pour la submersion $\pi_1^{-1}(Y_g) \to Y_g$ induite par π_1. Soient $\lambda_G(\xi)$, $\lambda_G(R^\bullet\pi_*\xi)$ les versions équivariantes de l'inverse du déterminant de $H(Z,\xi)$, $H(Y, H(X,\xi|_X))$. La suite spectrale de Leray pour (π_1, ξ) induit naturellement un isomorphisme σ de $\lambda_G(\xi)$ et $\lambda_G(R^\bullet\pi_*\xi)$. Soit $\|\ \|_{\lambda_G(\xi)\otimes\lambda_G^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)}$ la métrique de Quillen équivariante sur $\lambda_G(\xi)\otimes\lambda_G^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)$ définie dans [45].

Théorème 1.10. ([4]). *Pour $g \in G$, on a*

$$\log(||\sigma||^2_{\lambda_G(\xi)\otimes\lambda_G^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)})(g) = -\int_{Y_g} \mathrm{Td}_g(TY, g^{TY})T_g(\omega^Z, h^\xi) + \int_{Z_g} \widetilde{\mathrm{Td}}_g(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\,\mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi). \tag{1.36}$$

Une difficulté majeure ici est de calculer les différentes contributions provenant des points fixes de l'action du groupe. Remarquons que en combinant les techniques de [40], [2], [3] et [4], nous pouvons généraliser le théorème 1.8 au cas équivariant, c.a.d. exprimer $T_{3,g}$ à l'aide de $T_{1,g}$, $T_{2,g}$ et d'une intégrale de certaines classes secondaires de Bott-Chern.

Bismut [44] a conjecturé l'existence d'un théorème Lefschetz arithmétique. Köhler et Roessler [98] ont démontré une formule de Lefschetz arithmétique pour le déterminant équivariant, qui généralise la formule de Gillet-Soulé [91]. Dans [7], [10], une collaboration avec Bismut, nous étendons des résultats de [46] dans un contexte équivariant, extension conjecturée dans [99]. Plus précisément, nous étudions le comportement sous une immersion des formes de torsion analytique holomorphe équivariante construites dans [4]. Les formules obtenues étendent les résultats de [45] en degré arbitraire, et donc le théorème Riemann-Roch arithmétique équivariant de Köhler et Roessler est valable en tout degré. Des applications de ces résultats sont données par Köhler et Maillot-Roessler [109].

Nous expliquons notre résultat en détail. Soit $i : W \to V$ un plongement de variétés complexes, soit S une variété complexe. Soit $\pi_V : V \to S$ une submersion holomorphe de fibre compacte X, induisant une submersion holomorphe $\pi_W : W \to S$ de fibre compacte Y, qui est donc plongée dans X. Soit η un fibré holomorphe sur W, soit (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur V qui résout le faisceau $i_*\mathcal{O}_W(\eta)$. On a ainsi un morphisme de restriction $r : \xi_0|_W \to \eta$ ainsi qu'on a une suite exacte de faisceaux sur V,

$$(\xi, v) : 0 \to \xi_m \xrightarrow{v} \xi_{m-1} \xrightarrow{v} \cdots \xrightarrow{v} \xi_0 \cdots \xrightarrow{r} i_*\eta \to 0. \tag{1.37}$$

Soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement sur V, préservant les fibres X et la sous variété $W \subset V$.

On fait l'hypothèse que les $R^i\pi_{W*}\eta$ sont localement libres. Alors les $R^i\pi_{V*}\xi$ sont également localement libres. De plus, on a l'isomorphisme de G-fibrés holomorphes $\mathbb{Z}$-gradués sur S,

$$R\pi_{V*}\xi \simeq R\pi_{W*}\eta. \tag{1.38}$$

On fait l'hypothèse que la fibration $\pi_V : V \to S$ est kählérienne au sens de [55]. Soit ω^V la $(1,1)$-forme réelle sur V comme dans la Section 1.2 qui induit une métrique g^{TX} sur TX. On suppose que ω^V est G-invariante. On pose $\omega^W = i^*\omega^V$. Alors π_W est encore une fibration kählérienne pour la forme ω^W, qui induit sur TY une métrique g^{TY}.

Soit $h^\xi = \oplus_{i=0}^m h^{\xi_i}$ une métrique G-invariante sur $\xi = \oplus_{i=0}^m \xi_i$, soit h^η une métrique G-invariante sur η. Soit $N_{Y/X}$ le fibré normal à Y dans X, soit $h^{N_{Y/X}}$ une métrique G-invariante sur $N_{Y/X}$. On suppose que la métrique h^ξ vérifie l'hypothèse (A) de [43] relativement aux métriques $h^\eta, h^{N_{Y/X}}$. Cette hypothèse est une version métrique du résultat classique d'unicité locale des résolutions. Par [45, Proposition 3.5], on sait qu'on peut choisir la métrique G-invariante h^ξ de telle sorte que l'hypothèse (A) soit vérifiée.

On fixe $g \in G$. Soit $V_g \subset V$ la sous-variété complexe des points fixes de g dans V, qui est fibrée sur S, de fibre $X_g \subset X$, soit $W_g \subset W$ la variété correspondante dans W, dont la fibre sur S est Y_g.

Soit $N_{\mathbf{H}}$ l'opérateur de nombre de ξ. Soit $\left(\Omega^{\cdot}\left(X, \xi|_X\right), \overline{\partial}^X + v\right)$ le double complexe de Dolbeault, $\mathbb{Z}$-gradué par $N_X - N_{\mathbf{H}}$ dont la cohomologie est l'hypercohomologie de ξ. Pour $u > 0$, on pose

$$\overline{N}_u^V = N_X - N_{\mathbf{H}} + i\frac{\omega^{V,H}}{u}. \tag{1.39}$$

Soit $\overline{B}_u$ la superconnexion de Levi-Civita, qu'on construit comme précédemment, où l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}^X$ est remplacé par $\overline{\partial}^X + v$. Soit $H^{\cdot}\left(X, \xi|_X\right)$ l'hypercohomologie de ξ dans les fibres X. En procédant comme précédemment, $H^{\cdot}\left(X, \xi|_X\right)$ est un fibré holomorphe hermitien, muni d'une métrique $h^{H^{\cdot}(X,\xi|_X)}$.

On procède comme dans la Section 1.2, en remplaçant en particulier N_X par $\overline{N}_u^V$, on peut alors construire les formes de torsion analytique équivariante du double complexe, de telle sorte que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T_g(\omega^V, h^\xi) = \mathrm{ch}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}) - \int_{X_g} \mathrm{Td}_g(TX, g^{TX})\mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi). \tag{1.40}$$

Soit $\zeta\left(\theta, x\right), \eta\left(\theta, x\right)$ les parties réelles et imaginaires de la fonction de Lerch $L\left(\theta, s\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta}/n^s$. On rappelle que la série formelle $R\left(\theta, x\right)$ définie dans [44] est donnée par

$$\begin{aligned} R(\theta, x) = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ pair}}} i\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\eta(\theta, -n) + 2\frac{\partial \eta}{\partial s}(\theta, -n)\Big)\frac{x^n}{n!} \\ + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\zeta(\theta, -n) + 2\frac{\partial \zeta}{\partial s}(\theta, -n)\Big)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Rappelons que sur V_g, g agit sur $TX|_{X_g}$. On désigne par $R_g\left(TX\right)$ la classe de cohomologie sur V_g, obtenue en scindant $TX|_{X_g}$ selon les angles θ de l'action de g, et en évaluant le genre additif correspondant sur $TX|_{X_g}$.

Soit $T_g\left(\xi, h^\xi\right)$ le courant sur V_g construit dans [45, §6] tel que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T_g(\xi, h^\xi) = (\mathrm{Td}_g)^{-1}(N_{Y/X}, h^{N_{Y/X}})\mathrm{ch}_g(\eta, h^\eta)\delta_{\{W_g\}} - \mathrm{ch}_g(\xi, h^\xi). \tag{1.42}$$

Le front d'onde de $T_g\left(\xi, h^\xi\right)$ est inclus dans $N^*_{Y_g/X_g,\mathbf{R}}$.

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY, TX|_{W_g}, g^{TX})$ la classe de Bott-Chern sur W_g telle que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY, TX|_{W_g}, g^{TX}) = \mathrm{Td}_g(TX|_{W_g}, g^{TX}) \\ - \mathrm{Td}_g(TY, g^{TY})\mathrm{Td}_g(N_{Y/X}, h^{N_{Y/X}}). \end{aligned} \tag{1.43}$$

On construit de même la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(Y,\eta|_Y), h^{H(X,\xi|_X)}, h^{H(Y,\eta|_Y)})$ sur S telle que

$$
\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(Y,\eta|_Y), h^{H(X,\xi|_X)}, h^{H(Y,\eta|_Y)}) = \mathrm{ch}_g(H(Y,\eta|_Y), h^{H(Y,\eta|_Y)}) - \mathrm{ch}_g(H(X,\xi|_X), h^{H(X,\xi|_X)}). \tag{1.44}
$$

Alors on a le résultat suivant,

Théorème 1.11. ([7], [10]). *Dans $P^S/P^{S,0}$, on a*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(Y,\eta|_Y), h^{H(X,\xi|_X)}, h^{H(Y,\eta|_Y)}) - T_g(\omega^W, h^\eta) + T_g(\omega^V, h^\xi) \\
= \int_{X_g} \mathrm{Td}_g(TX, g^{TX}) T_g(\xi, h^\xi) - \int_{Y_g} \frac{\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY, TX|_{W_g}, g^{TX})}{\mathrm{Td}_g(N_{Y/X}, h^{N_{Y/X}})} \mathrm{ch}_g(\eta, h^\eta) \\
+ \int_{X_g} \mathrm{Td}_g(TX) R_g(TX) \,\mathrm{ch}_g(\xi) - \int_{Y_g} \mathrm{Td}_g(TY) R_g(TY)\,\mathrm{ch}_g(\eta).
\end{aligned} \tag{1.45}
$$

Dans [47], Bismut a analysé la singularité de la torsion analytique pour certaines fibrations singulières. Par l'étude de la singularité des formes de torsion analytique, ce résultat est généralisé à une situation en famille dans [9] . Une des motivations est que l'on voudrait obtenir un théorème de Riemann-Roch arithmétique plus général.

Dans [13], comme une application de [59] et motivé par le résultat récent de Beasley et Witten [36] sur le modèle demi-linéaire, nous étudions la relation de la torsion analytique sur la variété totale et sur la sous-variété des zéros d'une section holomorphe transversale d'un fibré vectoriel holomorphe.

Dans [12], nous étudions la torsion analytique holomorphe sur les orbifolds, en particulier, nous étendons le théorème de Bismut-Lebeau [59] au cas des orbifolds. On peut le considérer comme la contrepartie analytique du "Théorème de Kawasaki-Riemann-Roch arithmétique" qui n'existe pas encore.

1.4. **Formes êta et Formes de torsion analytique réelle.** La torsion de Reidemeister a été introduite par Reidemeister, Franz et de Rham quand ils étudiaient la classification des espaces lenticulaires à difféomorphisme près. C'est le premier invariant de difféomorphisme en topologie qui ne soit pas un invariant d'homotopie. Pour les détails, on renvoie à l'article de revue bien connu de Milnor [114]. En 1971, Ray et Singer [121] ont proposé une construction analytique pour la torsion de Reidemeister, que l'on a coutume d'appeler maintenant la torsion analytique de Ray-Singer. Ray et Singer ont conjecturé que la torsion analytique est la torsion de Reidemeister pour un fibré vectoriel plat unitaire sur une variété compacte. Cheeger [77] et Müller [115], [116] ont montré la conjecture de Ray-Singer. Bismut et Zhang [62] l'ont généralisée à des fibrés vectoriels plats généraux.

Les formes de torsion analytique réelle définies par Bismut et Lott [60] pour une fibration $\mathscr{C}^\infty$ étendent la torsion analytique de Ray-Singer pour les fibrés vectoriels plats généraux. Bismut et Goette [57] ont généralisé le théorème de Bismut et Zhang en famille sous des conditions techniques.

Notons que Igusa [96], Dwyer, Weiss et Williams [85] ont aussi construit des versions en famille de la torsion de Reidemeister. Il est intéressant de comparer ces différentes versions de la torsion en famille.

Soit $\pi : W \to V$ une submersion de variétés $\mathscr{C}^\infty$ de fibre compacte X et $\dim X = n$, et soit F un fibré vectoriel complexe plat sur W muni d'une connexion plate ∇^F. Alors $H(X, F|_X)$, la cohomologie de la restriction de F le long de la fibre X, est un fibré vectoriel sur V muni d'une connexion plate naturelle $\nabla^{H(X,F|_X)}$.

Soit $CCS(F, \nabla^F) \in H^{\mathrm{impair}}(W, \mathbb{C}/\mathbb{Q})$ la classe de Cheeger-Chern-Simons [78] de F. On rappelle brièvement sa construction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que kF est un fibré trivial topologiquement, soit ∇_0^{kF} une connexion triviale sur kF donnée par une trivialisation globale de kF. Soit $k\nabla^F$ la connexion sur kF induite par ∇^F. Soit $CS(\nabla_0^{kF}, k\nabla^F) \in H^{\mathrm{impair}}(W, \mathbb{C})$ la classe de Chern-Simons pour le caractère de Chern associé au triplet $(kF, \nabla^{kF}, \nabla_0^{kF})$. Alors

$$CCS(F, \nabla^F) = \frac{1}{k} CS(\nabla_0^{kF}, k\nabla^F) \in H^{\mathrm{impair}}(W, \mathbb{C}/\mathbb{Q}). \tag{1.46}$$

Soit h^F une métrique hermitienne sur F, soit $\omega(F, h^F)$ une 1-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(F)$,

$$\omega(F, h^F) = (h^F)^{-1}(\nabla^F h^F), \tag{1.47}$$

alors $\nabla^{F,u} = \nabla^F + \frac{1}{2}\omega(F, h^F)$ est une connexion hermitienne sur F induite par h^F. Pour $j \in \mathbb{N}$, soit

$$c_{2j+1}(F, h^F) = (2\pi\sqrt{-1})^{-j} 2^{-(2j+1)} \operatorname{Tr}\left[\omega^{2j+1}(F, h^F)\right]. \tag{1.48}$$

Alors $c_{2j+1}(F, h^F)$ est fermé, et sa classe de cohomologie ne dépend pas du choix de h^F. On note $c_{2j+1}(F) \in H^{2j+1}(W, \mathbb{R})$ sa classe de cohomologie associée. D'après [60, Prop. 1.14],

$$\mathrm{Im}(CCS(F, \nabla^F)) = \frac{1}{\sqrt{-1}} CS(\nabla^{F,u}, \nabla^F) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{2j} j!}{(2j+1)!} c_{2j+1}(F). \tag{1.49}$$

Donc

$$\mathrm{Re}(CCS(F, \nabla^F)) = \frac{1}{k} CS(\nabla_0^{kF}, k\nabla^{F,u}) \quad \text{dans} \quad H^{\mathrm{impair}}(W, \mathbb{R}/\mathbb{Q}). \tag{1.50}$$

Soit $o(TX)$ le fibré en droites réel d'orientation de TX. Soit $e(TX) \in H^n(W, o(TX))$ la classe d'Euler de TX.

Le théorème suivant est un analogue $\mathscr{C}^\infty$ du théorème de R.R.G.

Théorème 1.12. ([15], [60], [49]). *Dans $H^{\mathrm{impair}}(V, \mathbb{C}/\mathbb{Q})$, on a*

$$CCS(H(X, F|_X), \nabla^{H(X,F|_X)}) = \int_X e(TX) CCS(F, \nabla^F). \tag{1.51}$$

Dans [60], Bismut et Lott ont établi la partie imaginaire (dans $H^*(V, i\mathbb{R})$) de l'égalité (1.51). Les formes de torsion analytique réelle apparaissent dans une version de leur théorème au niveau des formes différentielles. Dans [15], avec Zhang, nous établissons la partie $H^*(V, \mathbb{R}/\mathbb{Q})$ de l'égalité (1.51) (Alors nous ignorions que Bismut [49] a aussi établi ce résultat quand le fibré TX est fibre à fibre orientable), et nous donnons aussi une nouvelle preuve pour la partie imaginaire de l'égalité (1.51). Nous les démontrons en calculant la limite adiabatique de l'invariant êta tordu (associé à l'opérateur de sous-signature [132]). En effet, un point très intéressant est que les formes de torsion analytique sont reliées à nos formes êta tordues par une formule de transgression! Mais la construction de formes de torsion analytique correspondant à la partie $H^*(V,\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ de l'égalité (1.51) est toujours un objet inconnu.

On utilise les notations de la Section 1.1, en particulier, T^HW est un fibré horizontal de TW tel que $TW = TX \oplus T^HW$. En remplaçant $S(TX)$ par $\Lambda(T^*X)$ dans la Section 1.1, on définit $\Omega^k(X,F)_b = \mathscr{C}^\infty(X_b, \Lambda^k(T^*X)\otimes F|_{X_b})$, alors $\Omega(X,F)$ hérite d'un produit hermitien $\langle\ \ \rangle$ de g^{TX}, h^F tel que

$$\langle s,s'\rangle = \int_X \langle s,s'\rangle_{\Lambda(T^*X)\otimes F}\, dv_X. \tag{1.52}$$

Soit d^X l'opérateur différentiel extérieur le long de la fibre X. Soit d^W l'opérateur différentiel extérieur agissant sur $\Omega(W,F)=\Omega(V,\Omega(X,F))$ induit par ∇^F. Alors $(d^W)^2 = 0$, et d^W est une superconnexion plate de degré total 1 au sens de [60, §2]. Soient $d^{X*}, (d^W)^*$ les adjoints formels de d^X, d^W par rapport à $\langle\ \ \rangle$. Soit N_X l'opérateur de nombre de $\Omega(X,F)$ qui agit par multiplication par k sur $\Omega^k(X,F)$. Pour $u>0$, on pose

$$\begin{aligned}
&D^X = d^X + d^{X*}, \\
&C'_u = u^{N_X/2} d^W u^{-N_X/2}, && C''_u = u^{-N_X/2}(d^W)^* u^{N_X/2}, \\
&C_u = \frac{1}{2}(C'_u + C''_u), && D_u = \frac{1}{2}(C''_u - C'_u).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Alors C''_u est l'adjoint de C'_u par rapport à $\langle\ \ \rangle$, C_u est une superconnexion et D_u est un opérateur différentiel elliptique fibre à fibre et $C_u^2 = -D_u^2$.

Par la théorie de Hodge, $H(X,F|_X) \simeq \operatorname{Ker} D^X$, donc $H(X,F|_X)$ hérite naturellement d'une métrique L^2, $h^{H(X,F|_X)}$ induite par (1.52). Pour $a\in\mathbb{C}$, on pose $f(a) = a\exp(a^2)$. Soient

$$\begin{aligned}
&f(\nabla^F, h^F) := (2i\pi)^{1/2}\varphi \operatorname{Tr}\left[f(\frac{1}{2}\omega(F,h^F))\right], \\
&f(\nabla^{H(X,F|_X)}, h^{H(X,F|_X)}) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q f(\nabla^{H^q(X,F|_X)}, h^{H(Z,F|_X)}).
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Soit Pf : $so(n)\to\mathbb{R}$ le Pfaffien. Soit R^{TX} la courbure de ∇^{TX}. On pose $e(TX,\nabla^{TX}) = \operatorname{Pf}\left[\frac{R^{TX}}{2\pi}\right]$. Alors $e(TX,\nabla^{TX})$ est une n-forme fermée à valeurs dans $o(TX)$ qui représente la classe d'Euler $e(TX)$ de TX.

La forme de torsion analytique de Bismut-Lott $\mathcal{T}(T^HW, g^{TX}, h^F)$ est une forme réelle et paire sur V qui vérifie l'équation suivante

$$d\mathcal{T}(T^HW, g^{TX}, h^F) = \int_X e(TX,\nabla^{TX}) f(\nabla^F,h^F) - f(\nabla^{H(X,F|_X)}, h^{H(X,F|_X)}). \tag{1.55}$$

En effet, d'après [60, Théorème 3.20],

$$\frac{1}{u} d \operatorname{Tr}_s\left[\frac{N_X}{2} f'(D_u)\right] = \frac{\partial}{\partial u}\operatorname{Tr}_s\left[f(D_u)\right], \tag{1.56}$$

et comme en (1.27), la forme $\mathcal{T}$ est définie comme l'intégrale renormalisée de

$$-\int_0^\infty \varphi \operatorname{Tr}_s\left[\frac{N_X}{2} f'(D_u)\right]\frac{du}{u}. \tag{1.57}$$

En particulier, si on note $\mathcal{T}^{(0)}$ la partie de $\mathcal{T}$ de degré 0 dans $\Lambda(T^*V)$, alors comme en (1.28), le logarithme de la torsion analytique de Ray-Singer [121] est

$$\mathcal{T}^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{Tr}_s[N_X((D^{X,2})')^{-s}]|_{s=0}. \tag{1.58}$$

L'équation (1.55) raffine la partie imaginaire de l'équation (1.51) au niveau des formes différentielles. La formule d'anomalie de $\mathcal{T}$ est une conséquence directe de (1.55) (c'est plus facile que dans le cas holomorphe (1.35)).

Le résultat suivant est notre façon de comprendre la relation de formes êta et de formes de torsion analytique, ou comment obtenir les formes de torsion analytique d'une façon purement formelle, ignorant le théorème 1.12. Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} I_r &:= -r\varphi \int_0^{+\infty} \operatorname{Tr}_s\left[N_X e^{-(C_u+\sqrt{-1}rD_u)^2}\right]\frac{du}{2u}, \\ \widehat{\eta}_r &:= (2i\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\varphi \operatorname{Tr}_s\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(C_u+\sqrt{-1}rD_u\right)\right)e^{-(C_u+\sqrt{-1}rD_u)^2}\right]du. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Comme avant, l'intégrale ci-dessus est une intégrale renormalisée. Alors $\widehat{\eta}_r$ est une forme êta de Bismut-Cheeger. Soit N_V l'opérateur de nombre de $\Lambda(T^*V)$.

Théorème 1.13. ([15]). *On a $\widehat{\eta}_0 = 0$ et pour $r \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_r &= -\frac{1}{2\pi}dI_r, \\ (1+N_V)\left.\frac{\partial I_r}{\partial r}\right|_{r=0} &= \mathcal{T}(T^HW, g^{TX}, h^F). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Naturellement, nous voulions comprendre la fonctorialité des formes de torsion analytique réelle. Dans [6] (cf. [5]), pour les fibrés vectoriels plats généraux, nous obtenons une relation de fonctorialité des formes de torsion analytique réelle par rapport à la composition de deux submersions.

Soient $\pi_1 : W \to V$ et $\pi_2 : V \to S$ deux submersions des variétés $\mathscr{C}^\infty$ de fibres compactes X, Y, soit F une fibré vectoriel complexe muni d'une connexion plate ∇^F sur W. Soient T_1^HW, T_2^HV, T_3^HW des sous-fibrés vectoriels de TW, TV, TW qui sont des compléments de TX, TY, TZ. Soient g^{TZ}, g^{TX}, g^{TY} des métriques sur TZ, TX, TY.

Soient $\nabla^{TX}, \nabla^{TY}, \nabla^{TZ}$ les connexions sur TX, TY, TZ définies dans la Section 1.1. Soit $T^HZ = T_1^HW \cap TZ$, alors $T^HZ \simeq \pi_1^*TY$. Soit ${}^0\nabla^{TZ} = \pi_1^*\nabla^{TY} \oplus \nabla^{TX}$ la connexion sur $TZ = T^HZ \oplus TX$ induite par ∇^{TY} et ∇^{TX}. Soient $e(TY, \nabla^{TY})$, $e(TZ, \nabla^{TZ})$, $e(TZ, {}^0\nabla^{TZ})$ les formes d'Euler de TY, TZ, TZ dans la théorie de Chern-Weil. Soient $\widetilde{e}(TZ, \nabla^{TZ}, {}^0\nabla^{TZ})$ les $\dim Z - 1$ formes de Chern-Simons sur W à valeurs dans $o(TZ)$, telles que

$$d\,\widetilde{e}(TZ, \nabla^{TZ}, {}^0\nabla^{TZ}) = e(TZ, {}^0\nabla^{TZ}) - e(TZ, \nabla^{TZ}). \tag{1.61}$$

On note Q^S l'espace des formes $\mathscr{C}^\infty$ réelles, paires sur S, par $Q^{S,0}$ l'espace des formes exactes dans Q^S.

On rappelle que pour $s \in S$, il existe une suite spectrale de Leray (E_r, d_r) $(r \geq 2)$ associée à $\pi_1 : Z \to Y$ et au fibré plat F telle que $E_2 = H(Y, H(X, F|_X)|_Y)$. Dans ce cas, (E_r, d_r) $(r \geq 2)$ est toujours un complexe de fibrés plats muni d'une connexion plate ∇^{E_r} induite canoniquement par ∇^F, et la cohomologie du complexe est E_{r+1}. Comme en (1.30), nous définissons la classe de Chern-Simons $\mathcal{T}(E_2, H(Z, F|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,F|_Z)})$

$\in Q^S/Q^{S,0}$ associée à la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) $(r \geq 2)$, de sorte qu'elle vérifie l'équation suivante

$$d\mathcal{T}(E_2, H(Z, F|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,F|_Z)}) = f(\nabla^{E_2}, h^{E_2}) - f(\nabla^{H(Z,F|_Z)}, h^{H(Z,F|_Z)}). \tag{1.62}$$

Théorème 1.14. ([6]). *Dans $Q^S/Q^{S,0}$, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(T_3^H W, g^{TZ}, h^F) = \int_Y e(TY, \nabla^{TY}) \mathcal{T}(T_1^H W, g^{TX}, h^F)\\ + \mathcal{T}(T_2^H V, g^{TY}, h^{H(X,F|_X)}) + \mathcal{T}(E_2, H(Z, F|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z,F|_Z)})\\ - \int_Z \widetilde{e}(TZ, \nabla^{TZ}, {}^0\nabla^{TZ}) f(\nabla^F, h^F).\end{aligned} \tag{1.63}$$

Si la métrique sur $\det F$ induite par h^F est plate, la métrique de Ray-Singer (1.70) est un invariant topologique. Dans ce cas, les relations de $\mathcal{T}^{(0)}$ pour une submersion (c.a.d. quand S est un point) ont été étudiées par Dai-Melrose, Lück, Schick et Thielmann [108] par des méthodes différentes de la nôtre. Comme $e(TY, \nabla^{TY})$ est une forme de degré $\dim Y$, on ne voit que les $\mathcal{T}^{(0)}$, et le dernier terme de (1.63) est nul. Il s'ensuit que les formes de torsion analytique de Bismut-Lott ne peuvent pas être trouvées directement à partir de la limite adiabatique de la torsion analytique. La situation est donc différente du cas holomorphe!

Inspiré des travaux de Gillet et Soulé [89] sur la K-théorie arithmétique dans le cas holomorphe, Lott [104] a défini une K-théorie secondaire pour les fibrés vectoriels plats hermitiens. Les formes de torsion analytique réelle sont contenues dans son indice analytique secondaire $\pi_!$ pour une submersion $\mathcal{C}^\infty$, $\pi : W \to V$. En utilisant le théorème 1.14, Bunke [74] a démontré que l'indice analytique secondaire de Lott est fonctorielle par rapport à la composition de deux submersions.

1.5. **Formes êta et Fibrés vectoriels plats munis d'une structure de dualité.**

Dans [104], Lott a aussi défini la L-théorie secondaire correspondant aux fibrés vectoriels plats munis d'une structure de dualité. Cette fois-ci, la forme êta de Bismut-Cheeger [50] est contenue dans son indice analytique secondaire. Après avoir modifié la définition de Lott, dans [11], avec Bunke, nous démontrons des propriétés intéressantes de la L-théorie secondaire modifiée. En particulier, nous démontrons que l'indice analytique secondaire de Lott est fonctoriel par rapport à la composition de deux submersions dans la L-théorie secondaire modifiée, à partir de la fonctorialité de formes êta de Bismut-Cheeger [50].

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\epsilon_n := (-1)^{[\frac{n+1}{2}]}$. Soit $\epsilon \in \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Soit (F, ∇^F) un fibré vectoriel plat réel sur une variété W, et F^* son dual. On dit que F munit d'une structure de *ϵ-dualité* s'il existe un isomorphisme de fibrés plats $q : F \to F^*$ tel que $q^* = \epsilon q$.

Soient $\hat{L}_\epsilon(W)$ le demi-groupe des classes d'isomorphisme de paires (F, q), un fibré plat muni d'une structure de *ϵ-dualité*. On définit la relation de réduction lagrangienne: $(F, q) \sim 0$ s'il existe $i : \mathcal{L} \to F$ un sous-fibré plat de F tel que $\mathcal{L} = \operatorname{Ker}(i^* \circ q)$. Alors $L_\epsilon(W) = \hat{L}_\epsilon(W)/\sim$ est un groupe, et on note $[F, q]$ la classe de (F, q) dans $L_\epsilon(W)$.

On dit que $J^F : F \to F$ est une structure de métrique si $J^{F,2} = \epsilon$ et si $q(\cdot, J^F \cdot)$ définit une métrique J^F-invariante sur F. Alors $\nabla^{F_\mathbb{C}, J^F} = \nabla^{F_\mathbb{C}} + \frac{1}{2}(J^F)^{-1}(\nabla^F J^F)$ est une connexion euclidienne sur $F_\mathbb{C}$, la complexification de F; et $F_\mathbb{C}$ est $\mathbb{Z}_2$-gradué par

$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} J^F$. On pose

$$p(\nabla^F, J^F) := \mathrm{ch}(\nabla^{F_{\mathbb{C}}, J^F}) := \mathrm{Tr}_s \left[\exp(-(\nabla^{F_{\mathbb{C}}, J^F})^2 / 2i\pi) \right]. \tag{1.64}$$

La version secondaire $\bar{L}_\epsilon(W)$ de $L_\epsilon(W)$ est une K-théorie de fibrés plats munis d'une structure de ϵ-*dualité* et de métrique. Un élément de $\hat{\bar{L}}_\epsilon(W)$ est un quadruplet (F, q, J^F, ρ) avec $[F, q] \in \hat{L}_\epsilon(W)$, J^F une structure de métrique sur F et $\rho \in \Omega^{4*-\epsilon}(W)/\mathrm{Im}(d)$ vérifié $d\rho = p(\nabla^F, J^F)$. La relation d'équivalence est que s'il existe $\mathcal{L}$ un sous-fibré plat de F tel que $\mathcal{L} = \mathrm{Ker}(i \circ q)$, alors

$$(F, q, J^F, \rho) \sim (0, 0, 0, \rho + \tilde{p}(F, q, J^F, \mathcal{L})) \tag{1.65}$$

et $\tilde{p}$ est la classe de Chern-Simons associée à $\nabla^{F_{\mathbb{C}}, J^F}$ et la connexion $\nabla^{\oplus}$ sur $F = \mathcal{L} \oplus J^F \mathcal{L}$ qui préserve cette décomposition et qui induite par $\nabla^{F_{\mathbb{C}}, J^F}$. Alors $\bar{L}_\epsilon(W) := \hat{\bar{L}}_\epsilon(W)/\sim$ est un $L_\epsilon(W)$-module.

Soit $\pi : W \to V$ une fibration de fibre compacte orientée X et $\dim X = n$. On définit l'image directe $\pi_*^L : L_\epsilon(W) \to L_{\epsilon\epsilon_n}(V)$ par

$$\pi_*^L([F, q]) = (H(X, F|_X), \pi(q)), \tag{1.66}$$

et $\pi(q)$ est induite par la dualité de Poincaré fibre à fibre.

On choisit une métrique g^{TX} sur TX et une sous-fibré horizontal $T^H W$ comme dans la Section 1.1. Soit $L(TX, \nabla^{TX}) := \det^{1/2}\left(\frac{R^{TX}/2i\pi}{\tanh(R^{TX}/4i\pi)}\right)$ la forme de la classe L associée à ∇^{TX}.

Définition 1.15. Pour une classe $[F, q_F, J^F, \rho] \in \bar{L}_\epsilon(M)$, son indice analytique secondaire dans $\bar{L}_{\epsilon\epsilon_n}(V)$ est défini par

$$\pi_*^{\bar{L}}[F, q_F, J^F, \rho] := [H(X, F|_X), \pi(q), J^{H(X, F|_X)}, \int_X L(TX, \nabla^{TX}) \wedge \rho - \tilde{\eta}] \,. \tag{1.67}$$

et $\tilde{\eta}$ est la forme êta de Bismut-Cheeger [50] obtenue comme en (1.18) en remplaçant $S(TX) \otimes \xi$ par $\Lambda(T^*X) \otimes F$ avec la $\mathbb{Z}_2$-graduation induite par J^F et l'opérateur de Hodge $*$ associé à g^{TX}. Alors $\pi_*^{\bar{L}}$ est bien définie, en particulier, elle ne dépend pas du choix de g^{TX} et $T^H W$.

Théorème 1.16. ([11]). *Si $\pi_2 : V \to S$ une fibration de fibre compacte orientée Y de dimension n_0, on a*

$$(\pi_2 \circ \pi)_*^L = \pi_{2*}^L \circ \pi_*^L. \tag{1.68}$$

Si n, n_0 sont pairs (d'où $\epsilon_{n+n_0} = \epsilon_n \epsilon_{n_0}$), alors

$$(\pi_2 \circ \pi)_*^{\bar{L}} = \pi_{2*}^{\bar{L}} \circ \pi_*^{\bar{L}} \in \bar{L}_{\epsilon\epsilon_{n+n_0}}(S) \,. \tag{1.69}$$

Remarquons que la définition de $\pi_*^{\bar{L}}$ et le théorème 1.16 sont des conséquences de notre étude sur la fonctorialité de formes êta dans [11]. Dans [11], nous étudions aussi systématiquement les groupes $L_\epsilon(W)$, $\bar{L}_\epsilon(W)$, et ses relations avec $H^*(W, \mathbb{R})$, $K^{-1}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(W)$ [103].

En effet, un problème important dans ce domaine est l'interprétation topologique de formes de torsion analytique (formes êta) pour les fibrés vectoriels plats (munis d'une structure de ϵ-*dualité*) quand elles sont fermées. Nos résultats devraient nous aider à le comprendre.

Remarque 1.17. Le groupe $L_\epsilon(W)$ est un quotient de $L_\epsilon^{Lott}(W)$ [104] qui est défini par modulo la relation d'équivalence $\left(L\oplus L^*, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_L \\ \epsilon\,\mathrm{Id}_{L^*} & 0\end{pmatrix}\right)\sim 0$ pour un fibré plat L. On trouve π_*^L pour L_ϵ^{Lott}, $\pi_*^{\bar{L},Lott}$ pour $\bar{L}_\epsilon^{Lott}$ dans [104], mais ils ne vérifient pas (1.68), (1.69).

1.6. **Torsion analytique réelle pour les variétés à bord.** Le théorème de Cheeger-Müller pour les variétés à bord sont étudies par Lott-Rothenberg [105], Lück [107] sous la condition que la métrique h^F sur le fibré plat F est plate, et que la métrique riemannienne a une structure de produit près du bord. Dai et Fang [82] ont aussi travaillé sur ce sujet. Avec J. Brüning dans [8], [14], nous établissons une formule d'anomalie pour les métriques de Ray-Singer d'un fibré plat F sur une variété à bord X. Nous ne supposons ni que la métrique sur F est plate, ni que la métrique sur X a une structure de produit près du bord. C'est la première fois dans la théorie de l'indice local qu'on peut donner une solution complète dans le cas où la métrique n'a pas une structure de produit près du bord. Les techniques développées dans cet article doivent avoir des applications.

Un corollaire de notre formule d'anomalie est une formule de recollement pour la torsion analytique, et le théorème de Bismut-Zhang pour les variétés à bord.

Soit X une variété compacte à bord Y et $\dim X = n$. Soit (F,∇^F) un fibré vectoriel complexe plat sur X. Soit $H^\bullet(X,F)=\oplus_{p=0}^n H^p(X,F)$ la cohomologie de de Rham absolue de X à coefficients dans F. Soit $\chi(X,F):=\sum_{p=0}^n(-1)^p\dim H^p(X,F)$ la caractéristique d'Euler de X à coefficients dans F.

Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur TX, soit h^F une métrique hermitienne sur F. Soit g^{TY} la métrique sur TY induite par g^{TX}. Soit $\|\ \|_{\det F}$ la métrique sur le fibré en droites $\det F$ induite par h^F. Soient ∇^{TX}, ∇^{TY} les connexions de Levi-Civita sur TX, TY de courbures R^{TX}, R^{TY}.

Alors on a un produit hermitien sur $\Omega(X,F)$ et un opérateur D^X induits par g^{TX}, h^F comme en (1.52), (1.53). On note D_a^X l'opérateur D^X avec la condition du bord absolue, alors D_a^X est un opérateur auto-adjoint. Par la théorie de de Rham-Hodge pour les variétés à bord, $H^\bullet(X,F)\simeq \operatorname{Ker} D_a^X$. Soit $|\ |^{L^2}_{\det H^\bullet(X,F)}$ la métrique L^2 correspondante sur la droite complexe $\det H^\bullet(X,F)=\bigotimes_{p=0}^n(\det H^p(X,\ F))^{(-1)^p}$. Le logarithme de la torsion analytique T_a de Ray-Singer est défini formellement comme en (1.58). La métrique de Ray-Singer sur $\det H^\bullet(X,F)$ est définie par

$$\|\ \|^{RS}_{\det H^\bullet(X,F)} := T_a\, |\ |^{L^2}_{\det H^\bullet(X,F)}. \tag{1.70}$$

Dans [14, Théorème 4.2], nous démontrons le développement asymptotique suivant quand $t\to 0$,

$$\operatorname{Tr}_s\left[N_X\exp(-t^2D_a^2)\right]=\frac{a_{-1}}{t}+\frac{n}{2}\chi(X,F)+\mathscr{O}(t), \tag{1.71}$$

et a_{-1} est l'intégrale d'un terme local sur X. Ceci implique en particulier T_a est bien définie.

Nous expliquons maintenant la construction de la classe d'Euler relative secondaire et d'une classe mystérieuse $B(\nabla^{TX})$ qui vont apparaître dans notre formule finale.

Pour l'injection canonique $j: Y\hookrightarrow X$, on pose $\Omega^p(X,Y,o(TX))=\Omega^p(X,o(TX))\oplus \Omega^{p-1}(Y,o(TX))$ et on définit pour $(\sigma_1,\sigma_2)\in\Omega^p(X,Y,o(TX))$, $d(\sigma_1,\sigma_2)=(d^X\sigma_1, j^*\sigma_1 - d^Y\sigma_2)$. Alors le complexe $(\Omega(X,Y,o(TX)),d)$ calcule la cohomologie relative $H^\bullet(X,Y,o(TX))$.

Pour $(\sigma_1,\sigma_2)\in\Omega(X,Y,o(TX))$, $\sigma_3\in\Omega(X)$, on définit,

$$\int_{(X,Y)}(\sigma_1,\sigma_2)\wedge\sigma_3 \ :=\int_X\sigma_1\wedge\sigma_3-\int_Y\sigma_2\wedge\sigma_3. \tag{1.72}$$

Ceci induit la dualité de Poincaré $H^\bullet(X,Y,o(TX))\times H^\bullet(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$.

Soit $e_{\mathfrak{n}}$ le champ de vecteurs normal vers l'intérieur de Y par rapport à g^{TX} et $|e_{\mathfrak{n}}|_{g^{TX}}=1$. Soit $\psi(TX,\nabla^{TX})$ le courant de Mathai-Quillen défini dans [62, Def. 3.6] (cf. [110]), on pose

$$E(TX,\nabla^{TX}) \ :=(e(TX,\nabla^{TX}),e_{\mathfrak{n}}^*\psi(TX,\nabla^{TX})). \tag{1.73}$$

Alors $e_{\mathfrak{n}}^*\psi(TX,\nabla^{TX})$ est une $n-1$-forme sur Y à valeurs dans $o(TY)$, et si $\dim Y$ est paire $E(TX,\nabla^{TX})=(0,\frac{1}{2}e(TY,\nabla^{TY}))$. La forme $E(TX,\nabla^{TX})$ est fermée et définit la classe d'Euler relative de TX, c.a.d. $E(TX,\nabla^{TX})\in H^n(X,Y,o(TX))$ ne dépend pas du choix de g^{TX}, on la note par $E(TX)$. Alors le théorème de Gauss-Bonnet-Chern peut être formulé comme l'équation suivante,

$$\chi(X,F)=(-1)^n\mathrm{rk}(F)\int_{(X,Y)}E(TX,\nabla^{TX}). \tag{1.74}$$

On note $\widehat{\Lambda(T^*Y)}$ une autre copie de $\Lambda(T^*Y)$, soit $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$ une base orthonormale de (TY,g^{TY}), et $\{e^\alpha\}$ sa base duale. Soient

$$\begin{aligned}\dot S&=\frac12\left\langle\nabla^{TX}_{e_\alpha}e_{\mathfrak{n}},e_\beta\right\rangle e^\alpha\wedge\widehat{e^\beta}\in\Lambda^1(T^*Y)\widehat\otimes\widehat{\Lambda^1(T^*Y)},\\ \dot R^{TY}&=\frac12\left\langle e_\alpha,R^{TY}e_\beta\right\rangle\widehat{e^\alpha}\wedge\widehat{e^\beta}\in\Lambda^2(T^*Y)\widehat\otimes\widehat{\Lambda^2(T^*Y)},\end{aligned} \tag{1.75}$$

en effet $\dot S$ est induite par la forme fondamentale secondaire de Y. Soit $\int^{B_Y}:\Lambda(T^*Y)\widehat\otimes\widehat{\Lambda(T^*Y)}\to\Lambda(T^*Y)\otimes o(TY)$ l'intégrale de Berezin définie par

$$\int^{B_Y}\alpha\wedge\widehat\beta:=(-1)^{n(n-1)/2}\pi^{-(n-1)/2}\beta(e_1,\cdots,e_{n-1})\alpha. \tag{1.76}$$

Alors la $n-1$-forme $B(\nabla^{TX})$ à valeurs dans $o(TY)$ est définie par

$$B(\nabla^{TX}):=-\int_0^1\frac{du}{u}\int^{B_Y}\exp\left(-\frac12\dot R^{TY}-u^2\dot S^2\right)\sum_{k=1}^\infty\frac{(u\dot S)^k}{2\Gamma(\frac{k}{2}+1)}. \tag{1.77}$$

Si n est impair, alors par (1.77),

$$B(\nabla^{TX})=\int^{B_Y}\exp\left(-\frac12\dot R^{TY}\right)\sum_{k=1}^\infty\frac{(-\dot S^2)^k}{4k\,k!}. \tag{1.78}$$

Soient (g_0^{TX},h_0^F), (g_1^{TX},h_1^F) deux couples de métriques sur TX et F. On utilisera les indices $0,1$ pour distinguer les objets correspondants. Dans [14], nous construisons canoniquement une classe de Chern-Simons $\widetilde E$ dans $\Omega^{n-1}(X,Y,o(TX))/\mathrm{Im}(d)$ telle que

$$d\widetilde E(TX,\nabla_0^{TX},\nabla_1^{TX})=E(TX,\nabla_1^{TX})-E(TX,\nabla_0^{TX}). \tag{1.79}$$

Le résultat suivant est une généralisation de [62, Théorème 0.1] aux variétés à bord.

Théorème 1.18. ([8], [14]). *On a*

$$\log\left(\left(\frac{\|\ \ \|^{\mathrm{RS}}_{\det H^{\bullet}(X,F),1}}{\|\ \ \|^{\mathrm{RS}}_{\det H^{\bullet}(X,F),0}}\right)^{2}\right) = (-1)^{n}\int_{X}\log\left(\left(\frac{\|\ \ \|_{\det F,1}}{\|\ \ \|_{\det F,0}}\right)^{2}\right)E(TX,\nabla_{0}^{TX}) \\ + \int_{X}\widetilde{E}(TX,\nabla_{0}^{TX},\nabla_{1}^{TX})\theta(F,h_{1}^{F}) + \mathrm{rk}(F)\left[\int_{Y}B(\nabla_{1}^{TX}) - \int_{Y}B(\nabla_{0}^{TX})\right]\ . \tag{1.80}$$

En comparant avec [62, Théorème 0.1], les termes $E, \widetilde{E}$ sont les analogues des classes d'Euler et d'Euler secondaire $e, \widetilde{e}$. Le dernier terme de (1.80) est plus mystérieux.

2. Rigidité et annulation pour les genres elliptiques

Nous expliquons dans cette Section nos travaux sur les genres elliptiques en collaboration avec K. Liu, W. Zhang, C. Dong et J. Zhou.

2.1. **Rigidité et annulation en famille.** Witten [100] a considéré l'indice des opérateurs elliptiques dans l'espace de lacets libres $\mathcal{L}X$ pour une variété spinorielle X. En particulier, l'indice de l'opérateur de signature formel dans l'espace de lacets est exactement le genre elliptique de Landweber, Stong et Ochanine [117]. En utilisant leur genre elliptique, Landweber, Ravenel et Stong [100] ont défini une nouvelle cohomologie, la "cohomologie elliptique". Motivé par la physique, Witten avait conjecturé la propriété de rigidité pour ces opérateurs elliptiques, c.a.d. que leurs indices S^1-équivariants sur X ne dépendent pas de $g \in S^1$.

Cette conjecture a été démontrée par Taubes [126] et Bott-Taubes [70]. Hirzebruch et Krichever l'ont démontrée pour les variétés presque complexes. En 1992, Liu [102] a trouvé une preuve simple, en utilisant l'invariance modulaire.

Il est intéressant d'obtenir des versions "en famille" des théorèmes de rigidité et d'annulation ci-dessus. Par exemple, nous pouvons ramener l'étude du groupe fondamental d'une variété à un problème sur une famille d'opérateurs elliptiques.

Plus précisément, soient M et B deux variétés compactes $\mathscr{C}^\infty$, et soit $\pi: M \to B$ une fibration $\mathscr{C}^\infty$ de fibre compacte X de dimension paire $2l$. Supposons qu'un groupe de Lie compact G agisse sur M en préservant la base B. Soit P une famille d'opérateurs elliptiques G-équivariants le long de la fibre X. Alors l'indice des familles est défini comme

$$\operatorname{Ind}(P) = \operatorname{Ker} P - \operatorname{Coker} P \in K_G(B). \tag{2.1}$$

Remarquons que $\operatorname{Ind}(P)$ est une G-représentation virtuelle. On note $(\operatorname{Ind}(P))^G \in K(B)$ la partie G-invariante de $\operatorname{Ind}(P)$.

On dit qu'une famille d'opérateurs elliptiques P est *rigide au niveau du caractère de Chern équivariant* pour cette G-action, si le caractère de Chern équivariant $\operatorname{ch}_g(\operatorname{Ind}(P)) \in H^*(B)$ ne dépend pas de $g \in G$. Si $\operatorname{ch}_g(\operatorname{Ind}(P))$ est nul pour tout $g \in G$, on dit que P a aussi *la propriété d'annulation au niveau du caractère de Chern équivariant.* Plus généralement, on dit que P est *rigide au niveau de la K-théorie équivariante*, si $\operatorname{Ind}(P) = (\operatorname{Ind}(P))^G$. De la même manière, on dit que P a *la propriété d'annulation au niveau de la K-théorie équivariante* si l'indice des familles est nul dans $K_G(B)$. Notons que la rigidité au niveau de la K-théorie est plus subtile que celle au niveau du caractère de Chern, car le caractère de Chern élimine la partie de torsion dans l'indice des familles. Pour étudier les propriétés de rigidité et d'annulation pour $\operatorname{Ind}(P)$, il est clair qu'on n'a besoin que de l'étudier pour $G = S^1$.

Désormais, on suppose que S^1 agit sur M fibre à fibre, et que TX est orienté et est muni d'une structure spinorielle S^1-équivariante. Soit V un fibré vectoriel muni d'une structure spinorielle S^1-équivariante sur M. Soit $S(V) = S^+(V) \oplus S^-(V)$ le fibré des spineurs de V.

Dans le reste, on note $D^X \otimes \xi$ la famille d'opérateurs de Dirac agissant fibre à fibre sur $S(TX) \otimes \xi$ comme définis dans la Section 1.1.

Sous la condition ci-dessus, nous pouvons déjà étendre le célèbre théorème d'annulation d'Atiyah-Hirzebruch [32] en famille,

Théorème 2.1. ([21, Cor.1.1]). *Si M est connexe et si S^1 agit fibre à fibre et non-trivialement sur M, alors*

$$\mathrm{Ind}(D^X \otimes \mathbb{C}) = 0 \quad \text{dans} \quad K_{S^1}(B). \tag{2.2}$$

Dans la suite, si $\mathcal{E}_t = \oplus_{k=0}^{\infty} E_k t^k \in K(M)[[t]]$, on dit que $D^X \otimes \mathcal{E}_t$ est rigide si $D^X \otimes E_k$ est rigide pour chaque k.

Maintenant, on introduit deux opérations importantes dans $K(M)[[t]]$. Pour un fibré vectoriel complexe (réel) E sur M, on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_t(E) &= 1 + tE + t^2 \mathrm{Sym}^2 E + \cdots , \\ \Lambda_t(E) &= 1 + tE + t^2 \Lambda^2 E + \cdots , \end{aligned} \tag{2.3}$$

les opérations symétriques et extérieurs de E (resp. $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) dans $K(M)[[t]]$ respectivement. On définit aussi des éléments dans $K(M)[[q^{1/2}]]$ associés à TX et V:

$$\begin{aligned} \Theta'_q(TX|V) &= \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^n}(V) \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX), \\ \Theta_q(TX|V) &= \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{-q^{n-1/2}}(V) \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX), \\ \Theta_{-q}(TX|V) &= \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^{n-1/2}}(V) \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX). \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'après Witten, pour une variété compacte orientée X, son espace de lacets libres $\mathcal{L}X$ est orientable ssi X est spinorielle, et $\mathcal{L}X$ est spinorielle ssi X est spinorielle et $\frac{1}{2}p_1(TX) = 0$ dans $H^*(X, \mathbb{Z})$. De plus, la restriction du fibré des spineurs de $\mathcal{L}X$ à $X \hookrightarrow \mathcal{L}X$ est $S(TX) \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX)$ et la restriction à X de l'opérateur de Dirac formel sur $\mathcal{L}X$ est $D^X \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX)$. Par l'analogue formel, pour avoir un opérateur de signature sur $\mathcal{L}X$, on doit déjà imposer la condition que X est spinorielle. Ça nous explique partiellement la raison pour laquelle on a introduit des éléments dans (2.4).

Le groupe de cohomologie équivariante $H^*_{S^1}(M, \mathbb{Z})$ de M est défini par

$$H^*_{S^1}(M, \mathbb{Z}) = H^*(M \times_{S^1} ES^1, \mathbb{Z}), \tag{2.5}$$

et ES^1 est le fibré S^1-principal universel sur l'espace de classification BS^1 de S^1. Donc $H^*_{S^1}(M, \mathbb{Z})$ est un module de $H^*(BS^1, \mathbb{Z})$ induit par la projection $\overline{\pi} : M \times_{S^1} ES^1 \to BS^1$. Soient $p_1(V)_{S^1},\ p_1(TX)_{S^1} \in H^*_{S^1}(M, \mathbb{Z})$ les premières classes de Pontrjagin équivariantes de V et TX. Comme $V \times_{S^1} ES^1$ et $TX \times_{S^1} ES^1$ sont spinoriels sur $M \times_{S^1} ES^1$, les classes $\frac{1}{2}p_1(V)_{S^1}$ et $\frac{1}{2}p_1(TX)_{S^1}$ sont bien définies dans $H^*_{S^1}(M, \mathbb{Z})$. Si l'on note $u \in H^2(BS^1, \mathbb{Z})$ son générateur, alors

$$H^*(BS^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]. \tag{2.6}$$

Dans [16], avec Liu, nous démontrons des théorèmes de rigidité et d'annulation en famille au niveau du caractère de Chern équivariant pour les opérateurs $D^X \otimes (S^+(V) + S^-(V)) \otimes \Theta'_q(TX|V)$, $D^X \otimes \Theta_q(TX|V)$ et $D^X \otimes \Theta_{-q}(TX|V)$, qu'on peut considérer comme des théorèmes de rigidité et d'annulation en famille pour des opérateurs elliptiques dans l'espace de lacets libres. Dans [17], avec Liu, nous les généralisons dans deux directions au niveau du caractère de Chern. D'abord, nous établissons un théorème de rigidité pour l'opérateur de Dirac dans l'espace de lacets twisté par une représentation générale de groupe de lacets à énergie positive. Ensuite, nous prouvons aussi un théorème de rigidité en famille pour les variétés Spin^c. Les théorèmes d'annulation dans le cas ci-dessus ont été aussi obtenus dans [17].

Dans la démonstration, nous utilisons l'invariance modulaire, une astuce d'échelle ainsi que des propriétés des formes jacobiennes. Ces théorèmes contiennent les résultats d'annulation en degré supérieur, qui devraient être utiles pour la compréhension de la relation entre l'action du groupe et le groupe fondamental.

Dans [18], [21], [19], avec Liu et Zhang, nous commençons un programme pour comprendre les torsions possibles pour l'indice des familles.

Théorème 2.2. ([21]). *S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{2}p_1(V)_{S^1} - \frac{1}{2}p_1(TX)_{S^1} = m \cdot \overline{\pi}^* u^2$, on considère les indices des familles des opérateurs $D^X \otimes (S^+(V) + S^-(V)) \otimes \Theta'_q(TX|V)$, $D^X \otimes \Theta_q(TX|V)$ et $D^X \otimes \Theta_{-q}(TX|V)$,*

i) Si $m = 0$, alors ils sont rigides au niveau de la K-théorie équivariante.

ii) Si $m < 0$, alors ils sont nuls dans $K_{S^1}(B)$. En particulier, ils sont nuls dans $K(B)$.

Si $V = TX$, $\Theta_q(TX|V) = \mathbb{C} - TXq^{1/2} + \cdots$, et donc $D^X \otimes TX$ est rigide. On note que pour un opérateur simple comme $D^X \otimes TX$, on ne connaît pas de preuve directe sur sa rigidité. La seule preuve existante est de démontrer le théorème 2.2!

Un corollaire intéressant est un théorème d'annulation de $\widehat{A}$-genre en famille pour l'espace de lacets libres, il étend aussi l'analogue de l'espace de lacets du théorème d'Atiyah-Hirzebruch dans [101] en famille,

Théorème 2.3. *On suppose que M est connexe et que S^1 agit fibre à fibre et non-trivialement sur M. S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{2}p_1(TX)_{S^1} = -m \cdot \overline{\pi}^* u^2$, alors l'indice des familles de $D^X \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX)$ est nul dans $K_{S^1}(B)$.*

Les arguments dans [21] sont différents de ceux utilisés dans les articles de Bott-Taubes, Liu et Taubes, même dans le cas où la base B se réduit à un point. Dans la preuve, nous utilisons des opérations de changement (shifting) introduites pour la première fois par Taubes. Mais nous construisons et appliquons directement les opérateurs de changement sur l'ensemble des points fixes. Ainsi, nous évitons d'utiliser les opérateurs de Dirac sur le fibré normal dans l'espace de lacets, et d'analyser la propriété de Fredholm correspondante pour ces opérateurs comme dans l'article de Taubes [126].

D'abord, nous démontrons une formule des points fixes en K-théorie pour l'action S^1 qui nous permet de démontrer des théorèmes de rigidité et d'annulation pour l'indice des familles en K-théorie. Si nous notons $\mathrm{Ind}(D^X \otimes \Theta_q(TX|V), n, h) \in K(B)$ la partie de coefficients de q^n dans $\mathrm{Ind}(D^X \otimes \Theta_q(TX|V))$ sur laquelle $g \in S^1$ agit par multiplication par g^h, alors nous montrons finalement que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Ind}(D^X \otimes \Theta_q(TX|V), n, h) = \mathrm{Ind}(D^X \otimes \Theta_q(TX|V), n + ph + p^2 m, h + 2pm). \tag{2.7}$$

Rappelons que pour $L \subset \mathbb{Z}^2$ un réseau et $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ un groupe modulaire, une fonction holomorphe F sur $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ est une *forme Jacobienne* d'indice m et de poids k sur $L \rtimes \Gamma$, s'il existe ψ un caractère de Γ tel que pour $(t, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$, $(\lambda, \mu) \in L$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a

$$F\Big(\frac{t}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big)=\psi(A)(c\tau+d)^k e^{2\pi i m(ct^2/(c\tau+d))}F(t,\tau), \tag{2.8a}$$

$$F(t+\lambda\tau+\mu,\tau)=e^{-2\pi i m(\lambda^2\tau+2\lambda t)}F(t,\tau). \tag{2.8b}$$

En effet, l'équation de coefficients de Fourier de (2.8b) vérifie une équation analogue de (2.7). Le théorème 2.2 est alors une conséquence de (2.7).

Dans [19], avec Liu et Zhang, nous prouvons des théorèmes de rigidité et d'annulation au niveau de la K-théorie équivariante pour les variétés Spin^c et pour les variétés presque complexes. Dans ces cas, l'action d'un groupe acyclique additionnel introduite par Witten entraîne de nouveaux phénomènes.

Avant de finir cette partie, nous expliquons un peu notre formule des points fixes en K-théorie pour l'action S^1 qui est démontrée par des techniques de localisation analytique développées par Bismut-Lebeau [59, §8,9] et Wu-Zhang [129]. Nous supposons que B est connexe. Soit ξ un fibré vectoriel complexe S^1-équivariant sur M. Soit M_{S^1} la sous-variété des points fixes de S^1 et $M_{S^1}=\cup_\alpha M_\alpha$ ses composants connexes. alors $\pi_{S^1}: M_{S^1}\to B$ est une fibration de fibre $\cup_\alpha Y_\alpha$. Sur M_α, on a des décompositions orthogonales de TX, ξ,

$$TX|_{M_\alpha}=TY_\alpha\oplus_{0<v}N_v,\quad \xi=\oplus_v\xi_v, \tag{2.9}$$

et N_v,ξ_v sont des fibrés vectoriels complexes sur lesquels $g\in S^1$ agit par multiplication par g^v (N_v,ξ_v peuvent être zéro).

Par (2.9), la structure spinorielle sur TX et le fibré en droites $\otimes_v\det N_v$ sur M_α induisent canoniquement une structure Spin^c sur TY_α, on note $D^{Y_\alpha}\otimes V$ l'opérateur de Dirac Spin^c twisté par V comme avant. Comme TX est spinoriel, $\sum_v v\dim_{\mathbb{C}}N_v=0$ mod (2). On pose

$$\begin{aligned} R(q)&=q^{\frac12\sum_v|v|\dim_{\mathbb{C}}N_v}\bigotimes_{v>0}\big(\mathrm{Sym}_{q^v}(N_v)\otimes\det N_v\big)\otimes\Big(\oplus_v q^v\xi_v\Big)=\sum_n R_nq^n,\\ R'(q)&=q^{-\frac12\sum_v|v|\dim_{\mathbb{C}}N_v}\bigotimes_{v>0}\mathrm{Sym}_{q^{-v}}\big(\overline{N}_v\big)\otimes\Big(\oplus_v q^v\xi_v\Big)=\sum_n R'_nq^n.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous notons $\mathrm{Ind}\big(D^X\otimes\xi,n\big)$ la partie de $\mathrm{Ind}(D^X\otimes\xi)\in K_{S^1}(B)$ sur laquelle $g\in S^1$ agit par multiplication par g^n. Le théorème suivant donne un raffinement au niveau de la K-théorie pour le théorème d'Atiyah-Bott-Segal-Singer, et le théorème 2.1 est son corollaire immédiat.

Théorème 2.4. ([21, Théorème 1.1]). *Pour $n\in\mathbb{Z}$, on a l'identité suivante dans $K(B)$,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\big(D^X\otimes\xi,n\big)&=\sum_\alpha(-1)^{\sum_{0<v}\dim_{\mathbb{C}}N_v}\,\mathrm{Ind}\big(D^{Y_\alpha}\otimes R_n\big)\\ &=\sum_\alpha(-1)^{\sum_{v<0}\dim_{\mathbb{C}}N_v}\,\mathrm{Ind}\big(D^{Y_\alpha}\otimes R'_n\big).\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2. **Genres elliptiques et Feuilletages.** Pour montrer les théorèmes d'annulation du nombre de caractéristique pour un feuilletage, la méthode classique est d'utiliser le théorème de l'indice ou le théorème des points fixes pour un feuilletage développés par Connes, Skandalis, Heitsch, Lazarov [94], etc. Dans [20], avec Liu et Zhang, nous prouvons des théorèmes d'annulation pour des classes de genre elliptique généralisé sur les feuilletages à l'aide du théorème de l'indice classique. Nos idées principales sont d'exploiter les fonctions thêta de Jacobi et de construire une nouvelle classe d'opérateurs elliptiques associés aux feuilletages, les opérateurs de sous-Dirac.

Soit M une variété compacte orientée de dimension paire. Soit F un sous-fibré spinoriel, de dimension paire de TM. On suppose que F est un sous-fibré intégrable non-trivial de TM, alors F induit une structure de feuilletage de M. On suppose que S^1 agit sur M et préserve le feuilletage induit par F. Un cas spécial de notre résultat peut se formuler comme suit :

Théorème 2.5. ([20]). *Si M est connexe, et si S^1 agit non-trivialement sur M et $p_1(F)_{S^1} = m\overline{\pi}^* u^2$ pour un $m \in \mathbb{Z}$, alors le genre de Witten de M est nul, c.a.d.*

$$\int_M \widehat{A}(TM)\, \mathrm{ch}(\otimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TM)) = 0. \tag{2.12}$$

2.3. **Genres elliptiques des orbifolds.** Motivé par une conjecture des physiciens (Dijkgraaf, Moore, Verlinde, Verlinde), des mathématiciens ont travaillé sur les genres elliptiques des orbifolds. En particulier, quand l'orbifold est un quotient global M/G (où M est une variété complexe compacte et G un groupe fini agissant sur M), Borisov et Libgober [65] ont suggéré une définition des genres elliptiques orbifolds. Notons que beaucoup d'orbifolds intéressants ne sont pas un quotient global. Dans [22], avec Dong et Liu, nous généralisons leur définition à un orbifold général, et nous démontrons la propriété de rigidité.

2.4. **Genres elliptiques et Algèbre vertex.** L'algèbre vertex est une généralisation naturelle de l'algèbre de Lie affine introduite par Borcherds [63]. Borcherds a résolu la conjecture de "Moonshine de Conway-Norton" en utilisant l'algèbre vertex. Elle est aussi une définition mathématique rigoureuse de la partie chirale de la théorie des champs quantiques en dimension 2 étudiée intensivement par les physiciens.

Dans [23], avec Dong et Liu, nous étudions les théorèmes de rigidité et d'annulation pour des opérateurs elliptiques sur les espaces de lacets tordus par les fibrés vectoriels de modules d'algèbre vertex. C'est le résultat le plus général sur le théorème de rigidité. Nos résultats sont nouveaux même dans le cas de l'algèbre vertex de réseaux. En effet, les éléments dans (2.4) correspondent à des modules intégrables de plus haut poids et de niveau 1 de l'algèbre affine $D_l^{(1)}$, et ils sont des modules irréductibles d'une algèbre vertex associée à un réseau.

Soit $V = \oplus_{n\geq 0} V_n$ une algèbre vertex fortement rationnelle. Alors V_1 est une algèbre de Lie définie par $[a, b] := a_0 b$. La forme bilinéaire $(a, b) = a_1 b$ sur V_1 est $\mathrm{Aut}(V)$-invariante (les opérations $a_0 b$, $a_1 b$ sont définies dans la définition de l'algèbre vertex). Rappelons que le groupe $\langle e^{a_0} | a \in V_1\rangle$ agit naturellement sur V. Soit G un groupe de Lie compact qui agit sur V via un morphisme de G dans $\langle e^{a_0} | a \in V_1\rangle$. Alors G agit sur tout V-module.

Soit P un fibré G-principal S^1-équivariant sur X. Si $M^\mu = \oplus_{p=0}^{\infty} M^\mu_{\mu+p}$ est un V-module, on définit

$$\psi(M^\mu, P) = \sum_\lambda (P \times_G M^\mu_\lambda) q^\lambda \in K(X)[[q^{\mathbb{Q}}]], \tag{2.13}$$

et $P \times_G M^\mu_\lambda$ est le fibré vectoriel associé à la représentation de G sur M^μ_λ.

Notons que la forme bilinéaire G-invariante $a_1 b$ sur V_1 définit une classe caractéristique S^1-équivariante $Q(V_1)_{S^1}$ de P.

Théorème 2.6. *Supposons que V est une algèbre vertex fortement rationnelle et M un V-module irréductible. S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$Q(V_1)_{S^1} - p_1(TX)_{S^1} = m \cdot \overline{\pi}^* u^2 \quad \text{dans} \quad H^*_{S^1}(X, \mathbb{Q}), \tag{2.14}$$

alors l'opérateur elliptique

$$D^X \bigotimes \Big(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(TX) \otimes \psi(M, P) \Big)$$

est rigide pour $m = 0$, et son indice équivariant est nul si $m < 0$.

Mais nous ne savons pas comment le raffiner au niveau de la K-théorie équivariante.

Motivé par le problème de la construction géométrique de la cohomologie elliptique, dans [24], avec Dong, Liu et Zhou, nous introduisons une K-Théorie pour les fibrés vectoriels de modules d'une algèbre vertex, et nous vérifions ses propriétés cohomologiques. Nous espérons qu'elle aura des applications en comparant avec l'histoire de la K-Théorie habituelle.

3. Noyaux de Bergman

Le noyau de Bergman des variétés projectives a été étudié en particulier dans [127], [131], [75], [106], [76], où est établi le développement asymptotique du noyau sur la diagonale associé à une puissance tendant vers $+\infty$ d'un fibré en droites positif. Les coefficients de ce développement donnent des informations géométriques sur la variété projective associée. Ce développement asymptotique joue un rôle crucial dans un travail récent de Donaldson [84], où l'existence d'une métrique kählérienne de courbure scalaire constante est reliée à la stabilité de Mumford-Chow.

Nous étudions le développement asymptotique de ce noyau dans le cas plus général des variétés symplectiques ou orbifolds symplectiques. Notre approche est inspirée de la théorie de l'indice locale, en particulier de [59, §11].

Soit (X,ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$, soit (L,h^L) un fibré en droites hermitien, et soit ∇^L une connexion hermitienne sur L telle que sa courbure R^L vérifie $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^L=\omega$. Soit (E,h^E) un fibré vectoriel hermitien sur X et soit ∇^E une connexion hermitienne sur E et soit R^E sa courbure. Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur X, et ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur (X,g^{TX}), R^{TX} sa courbure, et r^X sa courbure scalaire. Soit J une structure presque complexe de TX qui est compatible séparément à g^{TX} et ω, en particuleir, $\omega(\cdot,J\cdot)$ définit une métrique sur TX. Soit $\nabla^X J$ la dérivée covariante de J induite par ∇^{TX}. On pose $\mathbf{J}\in \mathrm{End}(TX)$ (on ne suppose pas que $J=\mathbf{J}$) tel que

$$\omega(u,v)=g^{TX}(\mathbf{J}u,v). \tag{3.1}$$

Soit dv_X la forme de volume riemannienne de (TX,g^{TX}). Les métriques g^{TX},h^L,h^E induisent un produit hermitien sur $\Omega^{0,\bullet}(X,L^p\otimes E)=\bigoplus_{q=0}^n\Omega^{0,q}(X,L^p\otimes E)$, l'espace de $(0,\bullet)$-formes $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans $L^p\otimes E$,

$$\langle s_1,s_2\rangle=\int_X\langle s_1(x),s_2(x)\rangle_{\Lambda^{0,\bullet}\otimes L^k\otimes E}\,dv_X(x). \tag{3.2}$$

Soit D_p l'opérateur de Dirac Spin^c sur $\Omega^{0,\bullet}(X,L^p\otimes E)$. Soit Φ une section lisse hermitienne de $\mathrm{End}(E)$. Soit $\tau(x)=-\pi\,\mathrm{Tr}_{|TX}[J\mathbf{J}]$ et soit $\Delta^{L^p\otimes E}=\nabla^{L^p\otimes E*}\nabla^{L^p\otimes E}$ l'opérateur de Laplace-Bochner sur $\mathscr{C}^\infty(X,L^p\otimes E)$. Alors l'opérateur de Laplace-Bochner renormalisé est défini par

$$\Delta_{p,\Phi}:=\Delta^{L^p\otimes E}-p\tau+\Phi. \tag{3.3}$$

Notre point de départ est une observation simple faite avec Marinescu [25].

Théorème 3.1. ([25]). *Soit $\mu_0=2\pi\inf_{x\in X}\mathrm{Spec}(-J\mathbf{J})_x>0$. Il existe $C_L,C>0$, $p_0\in\mathbb{N}$ tels que pour $p>p_0$, les spectres de D_p^2 et $\Delta_{p,\Phi}$ vérifient*

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{D}_\mathrm{p}^2)\subset\{0\}\cup[2\mathrm{p}\mu_0-\mathrm{C_L},+\infty[,\quad \mathrm{Ker}\,\mathrm{D_p}|_{\Omega^{0,\mathrm{impair}}}=0; \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\mathrm{p},\Phi})\subset[-\mathrm{C},\mathrm{C}]\cup[2\mathrm{p}\mu_0-\mathrm{C},+\infty[. \tag{3.5}$$

De plus, si on note $\mathcal{H}_p$ l'espace propre de $\Delta_{p,\Phi}$ associé à des valeurs propres dans $[-C,C]$, alors pour $p>p_0$,

$$\dim\mathcal{H}_p=\dim\mathrm{Ker}\,D_p=\int_X\mathrm{Td}(TX)\,\mathrm{ch}(L^p\otimes E). \tag{3.6}$$

Nous démontrons (3.4) comme une application directe de la formule de Lichnerowicz, et (3.5) comme son corollaire direct. Notons que l'annulation du noyau de $D_p|_{\Omega^{0,\mathrm{impair}}}$ est aussi démontrée par Borthwick-Uribe [66, Théorème 2.3], Braverman [73]. Si $E = \mathbb{C}$, (3.5) (sans préciser μ_0) est le résultat principal de Guillemin-Uribe [93], et si de plus $\mathbf{J} = J$, on trouve aussi (3.6) dans [66, p858]. Leur idée est d'appliquer l'analyse des opérateurs de Toeplitz de Boutet de Monvel–Guillemin [71] sur le fibré de cercle unitaire de L^*.

Remarque 3.2. Les opérateurs D_p^2 et $\Delta_{p,0}$ sont deux versions en géométrie presque kählérienne de l'opérateur de Laplace-Kodaira de la géométrie kählérienne. En effet, si (X, ω) est une variété kählérienne et $J = \mathbf{J}$, et si L, E sont des fibrés holomorphes de connexions holomorphes hermitiennes, alors

$$\begin{aligned} D_p &= \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*), \\ 2\overline{\partial}^*\overline{\partial} &= D_p^2|_{\Omega^{0,0}} = \Delta_{p,0} - R^E(w_i, \overline{w}_i), \end{aligned} \tag{3.7}$$

et $\{w_i\}$ est une base orthonormale de $T^{(1,0)}X$, de plus D_p^2 préserves la $\mathbb{Z}$-graduation de $\Omega^{0,\bullet}(X, L^p \otimes E)$. Si $E = \mathbb{C}$, alors pour p assez grand, $\operatorname{Ker} D_p = \operatorname{Ker} \Delta_{p,0} = H^0(X, L^p)$. Dans ce cas, le théorème 3.1 est un corollaire simple de Bismut-Vasserot [61, Théorème 1] qui est démontré en appliquant la formule de Bochner–Kodaira–Nakano.

Définition 3.3. Le noyau de Bergman $P_p(x, x')$ $(x, x' \in X)$ est le noyau $\mathscr{C}^\infty$ de la projection orthogonale P_p de $\Omega^{0,\bullet}(X, L^p \otimes E)$ sur $\operatorname{Ker} D_p$ associé à $dv_X(x')$. Soit $P_{0,p}$ la projection orthogonale de $\mathscr{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$ sur $\mathcal{H}_p$. Pour $q \in \mathbb{N}$, le noyau de Bergman généralisé $P_{q,p}(x, x')$ $(x, x' \in X)$ est le noyau $\mathscr{C}^\infty$ de $(\Delta_{p,\Phi})^q P_{0,p}$ (on note $(\Delta_{p,\Phi})^0 = 1$) associé à $dv_X(x')$.

Notons que pour $x \in X$, $P_p(x, x) \in \operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E)_x$, $P_{q,p}(x, x) \in \operatorname{End}(E_x)$.

Dans [26], [27], avec Dai et Liu, nous étudions le développement asymptotique du noyau de Bergman $P_p(x, x')$. On note $I_{\mathbb{C}\otimes E}$ la projection de $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E$ sur $\mathbb{C} \otimes E$ sous la décomposition $\Lambda(T^{*(0,1)}X) = \mathbb{C} \oplus \Lambda^{>0}(T^{*(0,1)}X)$. Soit $\det \mathbf{J}$ la fonction de déterminant de $\mathbf{J}_x \in \operatorname{End}(T_x X)$. Un des résultats principaux de [27] est le suivant.

Théorème 3.4. ([27]). *Il existe des sections $\mathscr{C}^\infty$ $b_r(x)$ $(r \in \mathbb{N})$ de $\operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E)$ qui sont des polynômes en R^{TX}, $R^{\det}$, R^E (resp. R^L), et leurs dérivées d'ordre $\leq 2r - 1$ (resp. $2r$), et en les inverses des combinaisons linéaires des valeurs propres de $\mathbf{J}_x$ telles que pour $k, l \in \mathbb{N}$, il existe $C_{k,l} > 0$ tel que pour $x \in X$, $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Big| P_p(x, x) - \sum_{r=0}^{k} b_r(x) p^{n-r} \Big|_{\mathscr{C}^l} \leq C_{k,l} p^{n-k-1}. \tag{3.8}$$

De plus on a $b_0 = (\det \mathbf{J})^{1/2} I_{\mathbb{C}\otimes E}$.

Enfin, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que les constantes $C_{k,l}$ soient uniformes sur tout sous-ensemble de $\{(g^{TX}, h^L, \nabla^L, h^E, \nabla^E, J)\}$ borné pour la norme $\mathscr{C}^s$ sur lequel les métriques g^{TX} sont de plus uniformément minorées.

Nous étudions aussi le développement asymptotique du noyau de la chaleur correspondant, et nous le relions au développement de P_p.

Théorème 3.5. ([27]). *Il existe des sections* $\mathscr{C}^\infty$ $b_{r,u}$ $(r \in \mathbb{N})$ *de* $\mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E)$ *sur* X *telles que pour* $u > 0$ *fixé, on a un développement asymptotique au sens de (3.8) quand* $p \to \infty$,

$$\exp(-\frac{u}{p} D_p^2)(x,x) = \sum_{r=0}^{k} b_{r,u}(x) p^{n-r} + \mathcal{O}(p^{n-k-1}). \tag{3.9}$$

De plus, quand $u \to +\infty$,

$$b_{r,u}(x) = b_r(x) + \mathcal{O}(e^{-\mu_0 u}). \tag{3.10}$$

Le théorème 3.5 nous donne aussi une façon de calculer les coefficients du développement asymptotique pour P_p, de la même manière que pour les coefficients du développement asymptotique du noyau de la chaleur. En particulier, dans le cas holomorphe, les deux théorèmes ci-dessus nous donnent une nouvelle preuve du théorème suivant,

Théorème 3.6. *Si* (X, ω) *est une variété kählérienne compacte, et* $\mathbf{J} = J$, *alors il existe* b_r *des sections de* $\mathrm{End}(E)$ *telles qu'on a (3.8), et* $b_r(x)$ *sont des polynômes de* R^{TX}, R^E *et leurs dérivées d'ordre* $\leq 2r - 1$ *en* x, *et*

$$b_0 = \mathrm{Id}_E, \quad b_1 = \frac{1}{8\pi}\Big[4R^E(w_i, \overline{w}_i) + r^X \,\mathrm{Id}_E\Big]. \tag{3.11}$$

Le théorème 3.6 est essentiellement démontré par Zelditch [131], Catlin [75] en appliquant la parametrix de Boutet de Monvel-Sjöstrand [72] pour le noyau de Szegö; Lu [106] et Wang [128] ont calculé (3.11) par la méthode de "section pic" de la géométrie complexe.

Dans [27], nous avons aussi étudié le développement asymptotique en dehors de la diagonale [27, Théorème 3.18], qui est nécessaire pour étudier le noyau de Bergman sur un orbifold. En effet, la propiété de trou spectral (3.4) de D_p^2 et la vitesse finie de propagation des solutions d'équations hyperboliques nous permettent de localiser le problème en un problème sur $\mathbb{R}^{2n}$. Après avoir introduit une famille de normes de Sobolev définies par la connexion de changement d'échelle sur L^p, nous pouvons étendre les techniques d'analyse fonctionnelle de [59, §11] à notre situation, et de cette façon, nous pouvons aussi estimer ses dérivées en $t = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Notre preuve [27] est simple, et on la généralise facilement au cas des orbifolds, qui est une étape importante pour établir une version du résultat mentionné de Donaldson dans le cas des orbifolds.

Dans [28], [29], avec Marinescu, nous étudions le développement asymptotique des noyaux de Bergman généralisés $P_{q,p}(x,x')$ près de la diagonale (c.a.d. pour $d(x,x') \leq \sigma/\sqrt{p}$). Par (3.5), l'opérateur $\Delta_{p,\Phi}$ a de petites valeurs propres non-nulles quand $p \to \infty$ (d'après (3.4), la seule petite valeur propre est zéro pour D_p, d'où nous tirons l'équation-clé [27, (3.89)]). Nous combinons l'estimation de normes de Sobolev dans [27] et une astuce de séries formelles pour conclure.

Théorème 3.7. ([29]). (i) *Il existe des sections* $\mathscr{C}^\infty$, $b_{q,r}(x)$ $(r \in \mathbb{N})$ *de* $\mathrm{End}(E)$ *qui sont des polynômes en* R^{TX}, R^E *(resp.* R^L, Φ*), leurs dérivées d'ordre* $\leqslant 2(r+q) - 1$ *(resp.* $2(r+q)$*), et en les inverses des combinaisons linéaires des valeurs propres de* $\mathbf{J}_x$ *telles que pour* $k, l \in \mathbb{N}$, *il existe* $C_{k,l} > 0$ *tel que pour* $x \in X$, $p \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\Big|\frac{1}{p^n} P_{q,p}(x,x) - \sum_{r=0}^{k} b_{q,r}(x) p^{-r}\Big|_{\mathscr{C}^l} \leqslant C_{k,l}\, p^{-k-1}. \tag{3.12}$$

De plus on a

$$b_{0,0} = (\det \mathbf{J})^{1/2}\, \mathrm{Id}_E\,. \tag{3.13}$$

Enfin, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que les constantes $C_{k,l}$ soient uniformes sur tout sous-ensemble de $\{(g^{TX},\, h^L,\, \nabla^L,\, h^E,\, \nabla^E,\, J, \Phi)\}$ borné pour la norme $\mathscr{C}^s$ sur lequel les métriques g^{TX} sont de plus uniformément minorées, et la norme $\mathscr{C}^l$ dans (3.12) *inclue aussi les dérivées de paramètres.*

(ii) *Si $J = \mathbf{J}$, alors pour $q \geqslant 1$,* [2]

$$b_{0,1} = \frac{1}{8\pi}\Big[r^X + \frac{1}{4}|\nabla^X J|^2 + 2\sqrt{-1}R^E(e_j, Je_j)\Big], \tag{3.14}$$

$$b_{q,0} = \Big(\frac{1}{24}|\nabla^X J|^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2}R^E(e_j, Je_j) + \Phi\Big)^q. \tag{3.15}$$

Si $E = \mathbb{C}$ et $\Phi = 0$, alors $8\pi b_{0,1} = r^X + \frac{1}{4}|\nabla^X J|^2$, c'est exactement la courbure scalaire hermitienne qui a été utilisée par Donaldson [83] pour définir son application moment sur l'espace de structures presque complexes. Le terme $b_{1,0} = \frac{1}{24}|\nabla^X J|^2$ corrige et raffine un résultat de Borthwick-Uribe [68] sur la fonction de densité spectrale.

Dans [29], nous généralisons aussi nos résultats à des variétés non-compactes ou singulières, nous traitons aussi le cas de revêtement. De cette façon, nous obtenons un traitement uniforme de la convergence de la métrique de Fubini-Study induite, l'inégalité de Morse holomorphe et la caractérisation de l'espace de Moishezon. Pour finir cette partie, nous décrivons nos résultats sur les sections pseudo-holomorphes d'un fibré en droites positif.

Par le théorème 3.1 et la remarque 3.2, un candidat naturel pour remplacer $H^0(X, L^p)$ est $\mathcal{H}_p$ pour l'opérateur $\Delta_{p,0}$ associé à $E = \mathbb{C}$. On note $\mathbb{P}\mathcal{H}_p^*$ l'espace projectif associé au dual de $\mathcal{H}_p$ et on identifie $\mathbb{P}\mathcal{H}_p^*$ à la Grassmannienne des hyperplans dans $\mathcal{H}_p$. Comme en géométrie algébrique, on définit l'application de Kodaira $\Phi_p : X \longrightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}_p^*$ par $\Phi_p(x) = \{s \in \mathcal{H}_p : s(x) = 0\}$. Soit ω_{FS} la forme kählérienne associée à la métrique de Fubini–Study sur $\mathbb{P}\mathcal{H}_p^*$.

Théorème 3.8. ([29]). (i) *Pour p assez grand, $\Phi_p : X \longrightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}_p^*$ est bien définie et est un plongement.*

(ii) *Pour $l \geqslant 0$, il existe $C_l > 0$ tel que pour p assez grand,*

$$\Big|\frac{1}{p}\, \Phi_p^*(\omega_{FS}) - \omega\Big|_{\mathscr{C}^l} \leqslant \frac{C_l}{p}. \tag{3.16}$$

Remarque 3.9. 1) Si (X, ω) est kählérienne, et L est holomorphe, alors (i) est le théorème de Kodaira. (ii) est un résultat de Tian [127, Théorème A] comme une solution d'une conjecture de Yau. Dans [127], Tian a obtenu (ii) pour $l = 2$ et le terme à droite de (3.16) est estimé par $C_l/\sqrt{p}$. Ruan [124] l'a amélioré à la forme présente.

2) Borthwick et Uribe [67, Théorème 1.1], Shiffman et Zelditch [125, Théorèmes 2, 3] ont démontré aussi une version symplectique de [127, Théorème A]. Eu lieu d'utiliser $\mathcal{H}_p$, ils ont utilisé l'espace $H^0_J(X, L^p)$ (cf. [67, p.601], [125, §2.3]) des sections presque holomorphes suggéré par Boutet de Monvel et Guillemin [71], [72]. Notons que $H^0_J(X, L^p)$ est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel qui ne se définit ni canoniquement, ni uniquement, $H^0_J(X, L^p)$ non plus.

[2] D'ici $|\nabla^X J|^2 = \sum_{ij} |(\nabla^X_{e_i} J)e_j|^2$ qui est deux fois le terme correspondant $|\nabla^X J|^2$ dans [28].

33

References

A. Formes de torsion analytique, Invariants êta

[1] X. Ma, *Formes de torsion analytique et familles de submersions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 2, 205–210.
[2] X. Ma, *Formes de torsion analytique et familles de submersions. I*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), no. 4, 541–621.
[3] X. Ma, *Formes de torsion analytique et familles de submersions. II*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 3, 633–667.
[4] X. Ma, *Submersions and equivariant Quillen metrics*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 5, 1539–1588.
[5] X. Ma, *Flat vector bundles and analytic torsion forms*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 19, Univ. Grenoble I, Saint, 2001, pp. 25–40.
[6] X. Ma, *Functoriality of real analytic torsion forms*, Israel J. Math. **131** (2002), 1–50.
[7] J.-M. Bismut et X. Ma, *Familles d'immersions holomorphes et formes de torsion analytique équivariantes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 10, 893–897.
[8] J. Brüning et X. Ma, *An anomaly formula for Ray-Singer metrics on manifolds with boundary*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 7, 603–608.
[9] X. Ma, *Formes de torsion analytique et fibrations singulières*, Nonlinear hyperbolic equations, spectral theory, and wavelet transformations, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 145, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 395–418.
[10] J. M. Bismut et X. Ma, *Holomorphic immersions and equivariant torsion forms*, J. Reine Angew. Math. **575** (2004), 189–235.
[11] U. Bunke et X. Ma, *Index and secondary index theory for flat bundles with duality*, Aspects of boundary problems in analysis and geometry, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 151, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 265–341.
[12] X. Ma, *Orbifolds and analytic torsions*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 2205–2233.
[13] H. Feng et X. Ma, *Transversal holomorphic section and localization of analytic torsions*, Pacific J. Math. (2005), à paraître.
[14] J. Brüning et X. Ma, *An anomaly formula for Ray-Singer metrics on manifolds with boundary*, Geom. Funct. Anal. 58 pages, Prépublication (2003).
[15] X. Ma et W. Zhang, *Eta-invariants, torsion forms and flat vector bundles*, math.DG/0405599 (2004), 42 pages.

B. Genres elliptiques

[16] K. Liu et X. Ma, *On family rigidity theorems. I*, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 451–474.
[17] ———, *On family rigidity theorems for* Spin^c *manifolds*, Mirror symmetry, IV (Montreal, QC, 2000), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 343–360.
[18] K. Liu, X. Ma, et W. Zhang, *Rigidity and vanishing theorems in K-theory*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), no. 4, 301–305.
[19] ———, Spin^c *manifolds and rigidity theorems in K-theory*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 4, 933–959.
[20] ———, *On elliptic genera and foliations*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 361–376.
[21] ———, *Rigidity and vanishing theorems in K-theory*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 1, 121–180.
[22] C. Dong, K. Liu, et X. Ma, *On orbifold elliptic genus*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 87–105.
[23] C. Dong, K. Liu, et X. Ma, *Elliptic genus and vertex operator algebras*, math.DG/0201135 (2002), 24 pages.
[24] C. Dong, K. Liu, X. Ma, et J. Zhou, *K-theory associated to vertex operator algebras*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 629–647.

C. Noyaux de Bergman

[25] X. Ma et G. Marinescu, *The* Spin^c *Dirac operator on high tensor powers of a line bundle*, Math. Z. **240** (2002), no. 3, 651–664.

[26] X. Dai, K. Liu, et X. Ma, *On the asymptotic expansion of Bergman kernel*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), no. 3, 193–198.

[27] X. Dai, K. Liu, et X. Ma, *On the asymptotic expansion of Bergman kernel*, J. Differential Geom. 34 pages, à paraître. math.DG/0404494.

[28] X. Ma et G. Marinescu, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), no. 7, 493–498.

[29] X. Ma et G. Marinescu, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, math.DG/0411559, Prépublication (2004), 45 pages.

Autre references bibliographiques

[30] M. Atiyah, R. Bott, et V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973), 279–330. Erratum: **28** (1975), 277–280.

[31] M. F. Atiyah et F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 276–281.

[32] M. Atiyah et F. Hirzebruch, *Spin-manifolds and group actions*, Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham), Springer, New York, 1970, pp. 18–28.

[33] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, et I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.

[34] M. F. Atiyah et I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.

[35] ———, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[36] C. Beasley et E. Witten, *Residues and world-sheet instantons*, J. High Energy Phys. (2003), no. 10, 065, 39 pp. (electronic).

[37] N. Berline, E. Getzler, et M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundl. Math. Wiss. Band 298, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[38] N. Berline et M. Vergne, *A computation of the equivariant index of the Dirac operator*, Bull. Soc. Math. France **113** (1985), no. 3, 305–345.

[39] N. Berline et M. Vergne, *A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators*, Topology **26** (1987), no. 4, 435–463.

[40] A. Berthomieu et J.-M. Bismut, *Quillen metrics and higher analytic torsion forms*, J. Reine Angew. Math. **457** (1994), 85–184.

[41] J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I. The index theorem*, J. Funct. Anal. **57** (1984), no. 1, 56–99.

[42] J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs*, Invent. Math. **83** (1986), no. 1, 91–151.

[43] ———, *Superconnection currents and complex immersions*, Invent. Math. **99** (1990), no. 1, 59–113.

[44] ———, *Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms*, Compositio Math. **93** (1994), no. 3, 291–354.

[45] ———, *Equivariant immersions and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **41** (1995), no. 1, 53–157.

[46] ———, *Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms*, Astérisque (1997), no. 244, viii+275.

[47] ———, *Quillen metrics and singular fibres in arbitrary relative dimension*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), no. 1, 19–149.

[48] ———, *Local index theory, eta invariants and holomorphic torsion: a survey*, Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996), Int. Press, Boston, MA, 1998, pp. 1–76.

[49] ———, *Eta invariants, differential characters and flat vector bundles*, Chinese Ann. Math. **25B** (2004), to appear, With an Appendix by K. Corlette and H. Esnault.

[50] J.-M. Bismut et J. Cheeger, *η-invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 1, 33–70.

[51] ———, *Families index for manifolds with boundary, superconnections, and cones. I. Families of manifolds with boundary and Dirac operators*, J. Funct. Anal. **89** (1990), no. 2, 313–363.

[52] ———, *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones. II. The Chern character*, J. Funct. Anal. **90** (1990), no. 2, 306–354.

[53] J.-M. Bismut, H. Gillet, et C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 1, 49–78.

[54] ———, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott-Chern forms*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 1, 79–126.

[55] ———, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 2, 301–351.

[56] ———, *Bott-Chern currents and complex immersions*, Duke Math. J. **60** (1990), no. 1, 255–284.

[57] J.-M. Bismut et S. Goette, *Families torsion and Morse functions*, Astérisque (2001), no. 275, x+293.

[58] J.-M. Bismut et K. Köhler, *Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 4, 647–684.

[59] J.-M. Bismut et G. Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298 pp. (1992).

[60] J.-M. Bismut et J. Lott, *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 291–363.

[61] J.-M. Bismut et É. Vasserot, *The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), no. 2, 355–367.

[62] J.-M. Bismut et W. Zhang, *An extension of a theorem by Cheeger and Müller*, Astérisque (1992), no. 205, 235 pp, With an appendix by François Laudenbach.

[63] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 10, 3068–3071.

[64] A. Borel et J.-P. Serre, *Le théorème de Riemann-Roch*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

[65] L. Borisov et A. Libgober, *Elliptic genera of singular varieties*, Duke Math. J. **116** (2003), 319–351.

[66] D. Borthwick et A. Uribe, *Almost complex structures and geometric quantization*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 6, 845–861. Erratum: **5** (1998),211–212.

[67] ———, *Nearly Kählerian embeddings of symplectic manifolds*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 3, 599–620.

[68] ———, *The spectral density function for the Laplacian on high tensor powers of a line bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), no. 3, 269–286.

[69] R. Bott et S. S. Chern, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. **114** (1965), 71–112.

[70] R. Bott et C. Taubes, *On the rigidity theorems of Witten*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 137–186.

[71] L. Boutet de Monvel et V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Mathematics Studies, vol. 99, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

[72] L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő*, Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975), Soc. Math. France, Paris, 1976, pp. 123–164. Astérisque, No. 34–35.

[73] M. Braverman, *Vanishing theorems on covering manifolds*, Contemp. Math., vol. 231, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 1–23.

[74] U. Bunke, *On the functoriality of Lott's secondary analytic index*, K-Theory **25** (2002), no. 1, 51–58.

[75] D. Catlin, *The Bergman kernel and a theorem of Tian*, Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997), Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 1–23.

[76] L. Charles, *Berezin-Toeplitz operators, a semi-classical approach*, Comm. Math. Phys. **239** (2003), no. 1-2, 1–28.

[77] J. Cheeger, *Analytic torsion and the heat equation*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 259–322.

[78] J. Cheeger et J. Simons, *Differential characters and geometric invariants*, Lecture Notes in Math., vol. 1167, Springer, Berlin, 1985, pp. 50–80.

[79] S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 747–752.

[80] S.S. Chern et J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. (2) **99** (1974), 48–69.

[81] X. Dai, *Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 2, 265–321.

[82] X. Dai et H. Fang, *Analytic torsion and R-torsion for manifolds with boundary*, Asian J. Math. **4** (2000), no. 3, 695–714.

[83] S. K. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology*, Fields Medallists' lectures, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997, pp. 384–403.

[84] ———, *Scalar curvature and projective embeddings. I*, J. Differential Geom. **59** (2001), 479–522.

[85] W. Dwyer, M. Weiss, et B. Williams, *A parametrized index theorem for the algebraic K-theory Euler class*, Acta Math. **190** (2003), no. 1, 1–104.

[86] E. Getzler, *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. **92** (1983), no. 2, 163–178.

[87] E. Getzler, *A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem*, Topology **25** (1986), 111–117.

[88] P. B. Gilkey, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes*, Advances in Math. **10** (1973), 344–382.

[89] H. Gillet and C. Soulé, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. II*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 2, 205–238.

[90] H. Gillet et C. Soulé, *Analytic torsion and the arithmetic Todd genus*, Topology **30** (1991), no. 1, 21–54, With an appendix by D. Zagier.

[91] ———, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543.

[92] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119–221.

[93] V. Guillemin et A. Uribe, *The Laplace operator on the nth tensor power of a line bundle: eigenvalues which are uniformly bounded in n*, Asymptotic Anal. **1** (1988), no. 2, 105–113.

[94] J. Heitsch et C. Lazarov, *Rigidity theorems for foliations by surfaces and spin manifolds*, Michigan Math. J. **38** (1991), no. 2, 285–297.

[95] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.), Heft 9, Springer-Verlag, Berlin, 1956.

[96] K. Igusa, *Higher Franz-Reidemeister torsion*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[97] K. Köhler, *Complex analytic torsion forms for torus fibrations and moduli spaces*, Regulators in analysis, geometry and number theory, Progr. Math., vol. 171, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, pp. 167–195.

[98] K. Köhler et D. Roessler, *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I: statement and proof*, Invent. Math. **145** (2001), no. 2, 333–396.

[99] ———, *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry II: a residual formula*, Ann. Inst. Fourier **52** (2002), 81–103.

[100] P. S. Landweber (ed.), *Elliptic curves and modular forms in algebraic topology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1326, Berlin, Springer-Verlag, 1988.

[101] K. Liu, *On modular invariance and rigidity theorems*, J. Differential Geom. **41** (1995), 343–396.

[102] ———, *Mathematical results inspired by physics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 457–466.

[103] J. Lott, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *index theory*, Comm. Anal. Geom. **2** (1994), no. 2, 279–311.

[104] ———, *Secondary analytic indices*, Regulators in analysis, geometry and number theory, Progr. Math., vol. 171, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, pp. 231–293.

[105] J. Lott et M. Rothenberg, *Analytic torsion for group actions*, J. Differential Geom. **34** (1991), no. 2, 431–481.

[106] Z. Lu, *On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian-Yau-Zelditch*, Amer. J. Math. **122** (2000), no. 2, 235–273.

[107] W. Lück, *Analytic and topological torsion for manifolds with boundary and symmetry*, J. Differential Geom. **37** (1993), no. 2, 263–322.

[108] W. Lück, T. Schick, et T. Thielmann, *Torsion and fibrations*, J. Reine Angew. Math. **498** (1998), 1–33.

[109] V. Maillot et D. Roessler, *Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs*, Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 5-6, 715–724.

[110] V. Mathai et D. Quillen, *Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms*, Topology **25** (1986), no. 1, 85–110.

[111] R. R. Mazzeo et R. B. Melrose, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 1, 185–213.

[112] H. P. McKean et I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry **1** (1967), no. 1, 43–69.

[113] R. B. Melrose et P. Piazza, *Families of Dirac operators, boundaries and the b-calculus*, J. Differential Geom. **46** (1997), 99–180.

[114] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426.

[115] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 3, 233–305.

[116] ———, *Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 3, 721–753.

[117] S. Ochanine, *Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques*, Topology **26** (1987), no. 2, 143–151.

[118] V. K. Patodi, *Curvature and the eigenforms of the Laplace operator*, J. Differential Geometry **5** (1971), 233–249.

[119] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces*, Functional Anal. Appl. **19** (1985), no. 1, 31–34.

[120] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology **24** (1985), no. 1, 89–95.

[121] D. B. Ray et I. M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Advances in Math. **7** (1971), 145–210.

[122] ———, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 154–177.

[123] D. Roessler, *An Adams-Riemann-Roch theorem in Arakelov geometry*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 1, 61–126.

[124] W. Ruan, *Canonical coordinates and Bergmann metrics*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 589–631.

[125] B. Shiffman et S. Zelditch, *Asymptotics of almost holomorphic sections of ample line bundles on symplectic manifolds*, J. Reine Angew. Math. **544** (2002), 181–222.

[126] C. Taubes, *S^1 actions and elliptic genera*, Comm. Math. Phys. **122** (1989), no. 3, 455–526.

[127] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 1, 99–130.

[128] X. Wang, *Canonical metric and stability of vector bundles over a projective manifold*, Ph.D. thesis, Brandeis University, 2002.

[129] S. Wu et W. Zhang, *Equivariant holomorphic Morse inequalities. III. Non-isolated fixed points*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 1, 149–178.

[130] Y. Yu, *Local index theorem for Dirac operator*, Acta Math. Sinica (N.S.) **3** (1987), no. 2, 152–169.

[131] S. Zelditch, *Szegő kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 6, 317–331.

[132] W. Zhang, *Sub-signature operators, η-invariants and a Riemann-Roch theorem for flat vector bundles*, Chinese Ann. Math. Ser. B **25** (2004), no. 1, 7–36.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 205-210, 1997
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Formes de torsion analytique et familles de submersions

Xiaonan MA

Université Paris-Sud, URA 1169 du CNRS,
Département de Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay CEDEX, France.
E-mail: xiaonan@matups.matups.fr

Résumé. Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes, de fibre compacte. Soit ξ un fibré holomorphe sur W. Dans cette Note, on annonce un résultat qui exprime une combinaison des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2 et $\pi_2 \circ \pi_1$ à l'aide de classes de Bott-Chern. Ce résultat étend une formule de Berthomieu-Bismut à une situation en famille.

Analytic torsion forms and families of submersions

Abstract. *Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W. In this Note, we announce a result which relates a combination of the analytic torsion forms associated to π_1, π_2 and $\pi_2 \circ \pi_1$ in terms of Bott-Chern classes. This result extends to a relative situation a result by Berthomieu-Bismut on the behaviour of submersion of Quillen metrics.*

Abridged English Version

The purpose of this Note is to extend to a relative situation a result of Berthomieu-Bismut [1] on the behaviour of submersions of Quillen metrics.

Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre X (resp. Y). Let $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. Then $\pi_3 : W \to S$ is a holomorphic submersion with compact fibre Z. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W.

One assumes that the $R^i\pi_{1*}\xi$, $R^i\pi_{3*}\xi$, $R^j\pi_{2*}R^i\pi_{1*}\xi$ are locally free.

Let ω^V (resp. ω^W) be a real closed (1,1)-form on V (resp. W), which induces a metric g^{TY} (resp. g^{TZ}) on the relative tangent bundle TY (resp. TZ). Let g^{TX} be the metric on TX induced by ω^W. Let h^ξ be a Hermitian metric on ξ.

Note présentée par Jean-Michel BISMUT.

Let $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ denote the L_2 metric on $H(Z,\xi_{|Z}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi$ which one obtains by using the Hodge theory of the fibres Z. Also, we denote by $h^{R\pi_{1*}\xi}$ (resp. h^{E_2}) the L_2 metric on $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ (resp. $E_2 = R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$) associated with g^{TX}, h^ξ (resp. $g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi}$).

Let P^S be the vector space of real smooth forms on S, which are sums of forms of type (p,p). Let $P^{S,0}$ be the vector space of the forms $\alpha \in P^S$ such that there exist smooth forms β, γ on S with $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$.

Let $T_3(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W, h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$) be the analytic torsion forms of Bismut-Köhler [6] on S (resp. V, resp. S) associated with (π_3, g^{TW}, h^ξ) (resp. (π_1, g^{TW}, h^ξ), resp. $(\pi_2, g^{TV}, h^{R\pi_{1*}\xi})$).

On W, we have the exact sequence of holomorphic Hermitian vector bundles

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0.$$

Let $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})$ be the Bott-Chern class constructed in [5].

For $s \in S$, let $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ be the Leray spectral sequence [11] of the fibration $\pi_1 : Z_s \to Y_s$. We construct the Bott-Chern class $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ under one of the two following assumptions:

(i) The E_r $(r \geq 2)$ are locally free,

(ii) π_1 is projective and V is a projective manifold.

THEOREM 0. – *The following identity holds*

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) =& T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ &+ \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &- \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\, \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{in } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

1. Introduction

Soit $\pi : Z \to Y$ une submersion holomorphe de variétés compactes complexes de fibre X. Soit ξ un fibré holomorphe sur Z. Soit $\lambda(\xi)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ. Supposons que, pour $0 \leq k \leq \dim X$, $R^k\pi_*\xi$ est localement libre. Soit $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$ la droite complexe

$$\lambda(R^\bullet\pi_*\xi) = \bigotimes_{k=0}^{\dim X} (\lambda(R^k\pi_*\xi))^{(-1)^k}. \tag{1}$$

Alors, par la théorie de la suite spectrale sur le complexe de Dolbeault, $\lambda(\xi) \simeq \lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$.

Soient g^{TZ}, g^{TY} des métriques kählériennes sur TZ, TY. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soit $h^{R^\bullet\pi_*\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_*\xi$ associée à g^{TZ}, h^ξ. Soient $\|\ \|_{\lambda(\xi)}$ et $\|\ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)}$ les métriques de Quillen sur les droites $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$. Bismut et Köhler [6] ont construit des formes de torsion analytique sur Y qui généralisent en degré arbitraire la torsion de Ray-Singer [14], et ils ont montré qu'elles vérifient des formules d'anomalie, qui les rendent « naturelles » en théorie d'Arakelov. Dans [1], Bismut et Berthomieu ont calculé une formule explicite pour $\log(\|\ \|_{\lambda(\xi)}/\|\ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)})^2$ à l'aide de classes de Bott-Chern et des formes de torsion analytique de [6].

L'objet de cette Note est d'annoncer une extension de [1] en situation relative. En effet, on considère des submersions $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$. On pose $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. On donne une formule exprimant en combinaison naturelle des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2, π_3 à l'aide de classes de Bott-Chern [5].

La preuve de cette formule repose sur des techniques de limites adiabatiques de Bismut-Cheeger [4] et sur la suite spectrale de Leray. La stratégie générale de la preuve est identique à la preuve d'un résultat de Berthomieu-Bismut [1].

Les preuves des résultats annoncés dans cette Note sont développées dans [12].

2. Une famille de submersions complexes

Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes de fibre compacte X (resp. Y). Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. On a donc

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & W \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ & Y \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_2"'] & S. \end{tikzcd}$$

Soit ξ un fibré holomorphe sur W.

Dans toute la suite, on suppose que $R^\bullet\pi_{1*}\xi$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$ et $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Soit $H(Z,\xi_{|Z})$ la cohomologie de $\xi_{|Z}$. Alors $H(Z,\xi_{|Z})$ est un fibré holomorphe $\mathbf{Z}$-gradué sur S. Plus exactement $R^\bullet\pi_{3*}\xi = H(Z,\xi_{|Z})$.

On suppose désormais que la fibration $\pi_2 : V \to S$ (resp. $\pi_3 : W \to S$) est kählérienne au sens de [5]. Plus précisément, soit ω^V (resp. ω^W) une $(1,1)$ forme réelle fermée sur V (resp. W), dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. g^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ). Soit g^{TX} la métrique hermitienne sur TX induite par ω^W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

Pour $s \in S$, soit $\Omega(Z_s,\xi_{|Z_s})$ le complexe de Dolbeault relatif. Soit $*^{TZ}$ l'opérateur de Hodge associé à g^{TZ} sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Z)$. On munit $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ de la métrique hermitienne L_2 normalisée

$$\langle s, s'\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\dim Z} \int_Z \langle s, *^{TZ}s'\rangle_{h^\xi}. \tag{3}$$

Par identification de $H(Z,\xi_{|Z})$ aux éléments harmoniques dans le complexe $\Omega(Z,\xi_{|Z})$, on note $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique L_2 associée sur $H(Z,\xi_{|Z})$. De même, on désigne par $h^{R\pi_{1*}\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ associée à g^{TX}, h^ξ.

Soit P^S l'espace des formes réelles C^∞ sur S qui sont la somme de formes de type (p,p). Soit $P^{S,0}$ l'espace des $\gamma \in P^S$, qui s'écrivent $\gamma = \partial\beta + \bar\partial\gamma$, où β et γ sont C^∞ sur S.

Si K un fibré holomorphe avec métrique g^K et si Q est un polynôme caractéristique, on désigne par $Q(K,g^K) \in P^S$ la forme de Chern-Weil associée à la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur K.

Soit $T_3(\omega^W,h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W,h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V,h^{R\pi_{1*}\xi})$) les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [6] sur S (resp. V, resp. S) associées à (π_3,ω^W,h^ξ) (resp. (π_1,ω^W,h^ξ), resp. $(\pi_2,\omega^V,h^{R\pi_{1*}\xi})$). Les formes T_3 vérifient l'équation

$$\frac{\bar\partial\partial}{2\pi i}T_3(\omega^W,h^\xi) = \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|Z}),h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \int_Z \mathrm{Td}(TZ,g^{TZ})\,\mathrm{ch}(\xi,g^\xi) \tag{4}$$

et les formes T_1 et T_2 vérifient des équations analogues. Dans [6], on a établi des formules d'anomalie pour ces formes qui les rendent potentiellement compatibles au formalisme d'image directe en théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé [10].

On considère la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens sur W

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0. \tag{5}$$

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [5] telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\,\mathrm{Td}(TX, g^{TX}). \tag{6}$$

3. Définition de la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$

On montre tout d'abord que pour $s \in S$, le complexe de Dolbeault $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ muni d'une filtration convenable calcule la suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ au sens de Grothendieck [11]. Comme dans [1], on construit la métrique $h^{E_{r,s}}$ sur $E_{r,s}$ associée à g^{TZ}, g^{TY}, h^{ξ}.

Soit (E, v) (avec $E = \bigoplus_{i=0}^m E^i$) un complexe de fibrés holomorphes sur S. Pour $s \in S$, on note $H_s(E)$ la cohomologie du complexe $(E, v)_s$. On suppose que le rang de $H_s^i(E)$ est localement constant. Ainsi $H(E)$ est un fibré holomorphe $\mathbf{Z}$-gradué sur S. Soit h^{E^i} (resp. $h^{H(E)}$) une métrique hermitienne sur E^i (resp. $H(E)$). En imitant [5] et [6], on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \mathrm{ch}(E, h^E) - \mathrm{ch}(H(E), h^{H(E)}). \tag{7}$$

Soit $F = F^0 \supset \ldots \supset F^m = 0$ une filtration de fibrés holomorphes sur S. Soit $\mathrm{Gr}^i F = F^i/F^{i+1}$. Soit h^F (resp. $h^{\mathrm{Gr}\,F}$) une métrique hermitienne sur F (resp. $\mathrm{Gr}\ F$). De même, on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\ F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\,F}) \in P^S/P^{S,0}$ qui vérifie

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\ F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\,F}) = \mathrm{ch}(F,\ h^F) - \mathrm{ch}(\mathrm{Gr}\ F,\ h^{\mathrm{Gr}\,F}). \tag{8}$$

Proposition 1. – *Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})$ $(0 \leq p, q \leq n)$ un bicomplexe de fibrés holomorphes hermitiens sur S. Soit $H^i(\mathcal{E})$ la cohomologie de E de degré i. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale induite par la filtration $F^p\mathcal{E} = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{E}^{p',\bullet}$. On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant. Soit $h^{\mathcal{E}_r}$ (resp. $h^{H(\mathcal{E})}$) la métrique sur $\mathcal{E}_r$ (resp. $H(\mathcal{E})$) induite par $h^{\mathcal{E}}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) = &\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}, h^{\mathcal{E}_i}, h^{\mathcal{E}_{i+1}}) \\ &- \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{9}$$

Dans la suite, on définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),\ h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ dans les trois cas suivants :

(i) On suppose que le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.

Alors $E_2 = H(Z, \xi_{|Z})$. Par la construction de [5], la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),\ h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ est bien définie.

(ii) En toute généralité, si le rang de $E_r (r \geq 2)$ est localement constant sur S, on pose :

$$\begin{aligned}(10)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) &= \sum_{i=2}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(E_i, E_{i+1}, h^{E_i}, h^{E_{i+1}}) \\ &\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z,\xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}).\end{aligned}$$

(iii) On suppose que l'application π_1 est projective [5], p. 337, et que V est une variété projective. Soit $n = \dim Z$.

Soit $(\xi^i)_{0 \leq i \leq n}$ une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de fibrés holomorphes de ξ sur W, et $F = (F^{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ une résolution π_{2*} acyclique de fibrés holomorphes du complexe $(R^0\pi_{1*}\xi^i)$ au sens de [8], chap. XVII. Si on filtre le bicomplexe $E(F) = R^0\pi_{2*}F$ par $F^pE(F) = \bigoplus_{p' \geq p} R^0\pi_{2*}F^{\bullet,p'}$, alors la suite spectrale associée $(E_r(F), d_r)$ calcule la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) (à partir de $r = 2$).

On se donne des métriques hermitiennes $h^{E^{p,q}(F)}$ sur $E^{p,q}(F) = R^0\pi_{2*}F^{p,q}$.

Définition 2. – On définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}(11)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) &= \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), H(E(F)), h^{E(F)}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), E_2(F), h^{E(F)}, h^{E_2}).\end{aligned}$$

Proposition 3. – *La classe $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ ne dépend pas du choix des résolutions et des métriques. De plus, on a*

$$(12)\qquad \frac{\partial\bar\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}) - \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|z}), h^{H(Z,\xi_{|z})}).$$

On vérifie, sous les hypothèses de (iii), la compatibilité de notre construction à (ii).

4. La fonctorialité des formes de torsion analytique

On énonce maintenant le résultat principal de cette Note, qui étend en degré arbitraire un théorème de Berthomieu-Bismut [1] sur les métriques de Quillen [5]. Cet énoncé s'applique dans les trois cas précédents.

Théorème 4. – *On a l'identité*

$$\begin{aligned}(13)\qquad T_3(\omega^W, h^\xi) &= T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ &\quad + \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &\quad - \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\, \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

5. Principe de la preuve du théorème 4

Notons que les formules d'anomalie de [6] montrent qu'il suffit de montrer le théorème 4 pour un seul choix de $(1,1)$-formes ω^W, ω^V.

Dans la preuve de [12], dans les cas (i) et (ii), on reprend la démarche générale décrite dans Berthomieu-Bismut [1], mais naturellement, les objets considérés sont maintenant des formes sur S de degré pair arbitraire.

Le schéma général de la preuve de [12] consiste à utiliser des techniques de limites adiabatiques en remplaçant $\omega^W = \widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V$ par $\frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V$ (avec $T \to +\infty$).

Il est clair que dans [12], les techniques d'indice local de [1] doivent être remplacées par des techniques d'indice relatif local [2].

Par rapport à [1], une difficulté générale tient au fait que les formes de superconnexion sur S, qui dépendent d'un paramètre u, ne convergent quand $u \to +\infty$ qu'à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{u}}$, alors que dans [1], la vitesse de convergence était e^{-cu} $(c > 0)$.

Dans les trois cas, la preuve du cas (i) est essentielle. Dans le cas (ii), il y a une difficulté qui tient au fait qu'il y a des petites valeurs propres au sens de [9].

Enfin, pour terminer la preuve dans le cas (iii), on appliquera le théorème 4, cas (i) au complexe $(\xi^\bullet, v)$ qui est une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de ξ.

Remerciements. Je tiens à remercier le Professeur J.-M. Bismut de m'avoir proposé ce sujet, et pour d'utiles discussions.

Note remise le 16 septembre 1996, acceptée le 30 septembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Berthomieu A. et Bismut J.M., 1994**. Quillen metrics and higher analytic torsion forms, *J. Reine Angew. Math.*, 457, p. 85-184.
[2] **Bismut J.-M., 1986**. The index theorems for families of Dirac operators : two heat equation proofs, *Invent. Math.*, 85, p. 91-151.
[3] **Bismut J.-M**. Families of immersions, and higher analytic torsion, *Preprint*, Orsay, 96-14.
[4] **Bismut J.-M. et Cheeger J., 1989**. η-invariant and their adiabatic limits. *J. Amer. Math. Soc.*, 2, p. 33-70.
[5] **Bismut J.-M., Gillet H. et Soulé C., 1988**. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, *Comm. Math. Phys.*, 115, p. 49-78, 79-126, 301-351.
[6] **Bismut J.-M. et Köhler K., 1992**. Higher analytic torsion forms and anomaly formulas, *J. Algebraic Geom.*, 1, p. 647-684.
[7] **Bismut J.-M. et Lebeau G., 1991**. Complex immersions and Quillen metric, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 74, p. 1-297.
[8] **Cartan H. et Eilenberg S., 1956**. *Homological Algebra*, Princeton.
[9] **Dai X., 1991**. Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence, *J. Amer. Math. Soc.*, 4, p. 265-321.
[10] **Gillet H. et Soulé C., 1991**. Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology*, 30, p. 21-54.
[11] **Grothendieck A., 1957**. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9, p. 119-221.
[12] **Ma X**. Formes de torsion analytique et familles de submersions (à paraître).
[13] **Quillen D**. Superconnections and the Chern character, *Topology*, 24, p. 89-95.
[14] **Ray D. B. et Singer I. M., 1971**. R-torsion and the Laplacien on Riemannian manifolds, *Adv. in Math.*, 7, p. 145-210.

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Familles d'immersions holomorphes et formes de torsion analytique équivariantes

Jean-Michel Bismut [a], Xiaonan Ma [b]

[a] **Département de mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay, France**

[b] **Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France**

Reçu le 20 mars 2002 ; accepté le 22 mars 2002

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

Résumé Dans cette Note, on étend les résultats sur le comportement par immersion des formes de torsion analytique holomorphes dans un contexte équivariant. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Families of equivariant immersions and analytic torsion forms

Abstract In this Note, we extend the known results on the behaviour by immersion of the holomorphic analytic torsion forms to the equivariant case. ***To cite this article: J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

0. Introduction

La métrique de Quillen [19] est une métrique naturelle sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré holomorphe hermitien sur une variété complexe compacte kählérienne, qu'on construit à l'aide de la torsion analytique de Ray–Singer [21]. Cette métrique possède des propriétés remarquables [8], en particulier parce qu'en situation relative, la courbure de la connexion hermitienne sur le fibré déterminant est donnée par une formule explicite locale, compatible au théorème de Riemann–Roch–Grothendieck au niveau des formes différentielles.

Dans [10], Bismut et Lebeau ont étudié le comportement par immersion de la métrique de Quillen. Dans leur formule, apparaît en particulier le genre additif $R(x)$ de Gillet et Soulé [12]. Ce résultat a en particulier permis à Gillet et Soulé [13] de démontrer un théorème de Riemann–Roch arithmétique pour le déterminant. Dans [5], on a étendu le résultat de [10] aux formes de torsion analytiques construites dans [7] et [9]. Ce résultat a été utilisé par Roessler [22] pour démontrer le théorème de Riemann–Roch arithmétique pour toutes les classes de Chern.

Dans [3], on a donné une construction d'une version équivariante du genre R, le genre $R(\theta, x)$, et on a conjecturé qu'il devrait apparaître dans une version arithmétique équivariante à la Lefschetz du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck. Dans [4], on a défini une version équivariante de la métrique de Quillen,

Adresses e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut); ma@math.polytechnique.fr (X. Ma).

S1631-073X(02)02372-5/FLA

pour lequel on a montré un analogue équivariant du résultat de [10], où apparaît précisément le genre $R(\theta, x)$.

Köhler et Roessler [15] ont démontré une formule de Lefschetz arithmétique pour le déterminant équivariant, qui généralise la formule de Gillet et Soulé [13].

L'objet de la présente Note est d'annoncer l'extension naturelle des résultats de [5] dans un contexte équivariant, extension conjecturée dans [16]. Plus précisément, on étudie le comportement par immersion des formes de torsion analytique holomorphes équivariantes construites dans [17]. La formule obtenue étend les résultats de [4] en degré arbitraire.

Les résultats annoncés dans cette Note sont démontrés dans [11]. Des applications de ce résultat sont données dans Köhler [14] et Maillot–Roessler [18].

1. Le cadre géométrique

Soit $i : W \to V$ un plongement de variétés complexes, soit S une variété complexe. Soit $\pi_V : V \to S$ une submersion holomorphe de fibre compacte X, induisant une submersion holomorphe $\pi_W : W \to S$ de fibre compacte Y, qui est donc plongée dans X. Soit η un fibré holomorphe sur W, soit (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur V qui résout le faisceau $i_*\mathcal{O}_W(\eta)$. On a ainsi un morphisme de restriction $r : \xi_0|_W \to \eta$ de telle sorte qu'on a une suite exacte de faisceaux sur V,

$$(\xi, v) : 0 \to \xi_m \xrightarrow{v} \xi_{m-1} \xrightarrow{v} \cdots \xrightarrow{v} \xi_0 \cdots \xrightarrow{r} i_*\eta \to 0. \tag{1.1}$$

Soit G un groupe de Lie compact agissant holomorphiquement sur V, préservant les fibres X et la sous-variété $W \subset V$.

On fait l'hypothèse que les $R^i\pi_{W*}\eta$ sont localement libres. Alors les $R^i\pi_{V*}\xi$ sont également localement libres. De plus, on a l'isomorphisme de G-fibrés holomorphes $\mathbf{Z}$-gradués sur S,

$$R\pi_{V*}\xi \simeq R\pi_{W*}\eta. \tag{1.2}$$

On fait l'hypothèse que la fibration $\pi_V : V \to S$ est kählérienne au sens de [8]. De manière équivalente, il existe une $(1,1)$ forme réelle ω^V sur V, qui est fermée, et qui induit une métrique de Kähler le long des fibres X. Ainsi, si $J^{T_{\mathbf{R}}X}$ est la structure complexe de $T_{\mathbf{R}}X$, alors $\omega^V(J^{T_{\mathbf{R}}X}, \cdot)$ est une métrique Hermitienne h^{TX} sur TX. On supposera dans la suite que ω^V est G-invariante.

On pose $\omega^W = i^*\omega^V$. Alors π_W est encore une fibration kählérienne pour la forme ω^W, qui induit sur TY une métrique h^{TY}.

Soit $h^\xi = \bigoplus_{i=0}^m h^{\xi_i}$ une métrique G-invariante sur $\xi = \bigoplus_{i=0}^m \xi_i$, soit h^η une métrique G-invariante sur η. Soit $N_{Y/X}$ le fibré normal à Y dans X, soit $h^{N_{Y/X}}$ une métrique G-invariante sur $N_{Y/X}$. On suppose que la métrique h^ξ vérifie l'hypothèse (A) de [2] relativement aux métriques $h^\eta, h^{N_{Y/X}}$. Cette hypothèse est une version métrique du résultat classique d'unicité locale des résolutions. Par [4, Proposition 3.5], on sait qu'on peut choisir la métrique G-invariante h^ξ de telle sorte que l'hypothèse (A) soit vérifiée.

2. Les formes de torsion analytique équivariantes

Soit P^S l'espace des formes C^∞ sur S qui sont des sommes de formes de type (p,p). Soit $P^{S,0} \subset P^S$ l'espace des $\alpha \in P^S$ telles qu'il existe des formes C^∞ sur S, notées β, γ pour lesquelles $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$.

Soit $(\Omega^{\cdot}(Y, \eta), \overline{\partial}^Y)$ la famille sur S des complexes de Dolbeault des fibres Y à coefficients dans η. Alors G agit naturellement sur $(\Omega^{\cdot}(Y, \eta), \overline{\partial}^Y)$. Soit $*$ l'opérateur de Hodge. On munit $\Omega^{\cdot}(Y, \eta)$ du produit hermitien fibre à fibre

$$\langle s, s' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\dim Y}} \int_Y \langle s \wedge *s' \rangle_{h^\eta}. \tag{2.1}$$

On fixe $g \in G$. Soit $V_g \subset V$ la sous-variété complexe des points fixes de g dans V, qui est fibrée sur S, de fibre $X_g \subset X$, soit $W_g \subset W$ la variété correspondante dans W, dont la fibre sur S est Y_g.

Pour citer cet article : J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897

Par hypothèse, $R\pi_{W*}\eta$ est un fibré holomorphe localement libre de fibre $H^{\cdot}(Y,\eta|_Y)$.

Soit $\overline{\partial}^{Y*}$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^{Y}$ relativement à (2.1). On pose $D^Y=\overline{\partial}^{Y}+\overline{\partial}^{Y*}$. Par la théorie de Hodge, on a

$$H^{\cdot}(Y,\eta)\simeq\ker D^Y. \tag{2.2}$$

Soit $h^{H^{\cdot}(Y,\eta)}$ la métrique sur $H^{\cdot}(Y,\eta)$ induite par (2.1), quand on utilise l'identification (2.2).

Dans la suite, les formes de Chern–Weil sont calculées relativement à la connexion holomorphe Hermitienne sur le fibré vectoriel considéré. Ainsi $\mathrm{Td}_g(TY,h^{TY})$ désigne la forme fermée sur W_g qu'on obtient à partir du genre Todd dans la formule de points fixes de Lefschetz–Atiyah–Bott pour g. De même $\mathrm{ch}_g(\eta,h^{\eta})$ est la forme de caractère de Chern pour η sur W_g, qui apparaît dans la même formule. De même g agit sur le fibré holomorphe hermitien $H^{\cdot}(Y,\eta)$. On peut donc définir la forme fermée correspondante $\mathrm{ch}_g(H^{\cdot}(Y,\eta|_y),h^{H^{\cdot}(Y,\eta|_y)})$ associée à la métrique $h^{H^{\cdot}(Y,\eta|_y)}$.

Soit $T_g(\omega^W,h^{\eta})\in P^S$ les formes de torsion analytique holomorphes équivariantes construites dans [9,17]. Ces formes sont telles que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}T_g\big(\omega^W,h^{\eta}\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-\int_{Y_g}\mathrm{Td}_g\big(TY,h^{TY}\big)\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^{\eta}\big). \tag{2.3}$$

Rappelons brièvement la construction de $T_g(\omega^W,h^{\eta})$. Soit T^HW le fibré orthogonal à TY dans TW pour la forme ω^W. Soit $\omega^{W,H}$ la restriction de ω^W à T^HW. Alors $\omega^{W,H}$ est une section de $\pi_W^*\Lambda^2(T^*_{\mathbf{R}}S)$ sur W. Pour $u>0$, soit B_u la superconnexion de Levi-Civita sur le fibré $\mathbf{Z}$-gradué $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$ associée à (T^HW,h^{TY},h^{η}) au sens de [1] de paramètre $t=u/2$. Soit $N_{\mathbf{V}}^Y$ l'opérateur de nombre de $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$. On pose

$$N_u^W=N_{\mathbf{V}}^Y+\mathrm{i}\frac{\omega^{W,H}}{u}. \tag{2.4}$$

On utilise maintenant le formalisme de Quillen [20]. Ainsi $\mathrm{Tr_s}$ désigne la supertrace évaluée sur les endomorphismes à trace de $\Omega^{\cdot}(Y,\eta)$.

Soit φ l'endomorphisme de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$ donné par $\alpha\to(2\mathrm{i}\pi)^{-\deg\alpha/2}\alpha$. Pour $u>0$, on pose

$$\gamma_u=\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N_u^W\exp\big(-B_u^2\big)\big]. \tag{2.5}$$

Alors $T_g(\omega^W,h^{\eta})$ est la dérivée en $s=0$ de la transformée de Mellin de $-\gamma_u$.

Il résulte de [9] et [17] que la classe de $T_g(\omega^W,\,h^{\eta})$ dans $P^S/P^{S,0}$ ne dépend que de h^{TY}, h^{η}. Plus généralement, on peut évaluer la dépendance de cette classe par rapport à h^{TY}, h^{η} en termes des classes de Bott–Chern de [6]. Pour plus de détails on renvoie à [5, Chapitre 2].

3. Les formes de torsion analytique équivariantes d'un double complexe

En procédant comme en [10,5], on peut construire les formes de torsion analytique associées au complexe de fibrés (ξ,v) sur V. Soit en effet $N_{\mathbf{H}}$ l'opérateur de nombre de ξ. Soit $(\Omega^{\cdot}(X,\xi),\overline{\partial}^X+v)$ le double complexe de Dolbeault, $\mathbf{Z}$-gradué par $N_{\mathbf{V}}^X-N_{\mathbf{H}}$ dont la cohomologie est l'hypercohomologie de ξ. Pour $u>0$, on pose

$$\overline{N}_u^V=N_{\mathbf{V}}^X-N_{\mathbf{H}}+\mathrm{i}\frac{\omega^{V,H}}{u}. \tag{3.1}$$

Soit $\overline{B}_u$ la superconnexion de Levi-Civita, qu'on construit comme précédemment, où l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}^X$ est remplacé par $\overline{\partial}^X+v$. Soit $H^{\cdot}(X,\xi)$ l'hypercohomologie de ξ dans les fibres X. En procédant comme précédemment, $H^{\cdot}(X,\xi)$ est un fibré holomorphe hermitien, muni d'une métrique $h^{H^{\cdot}(X,\xi)}$.

Comme dans [5, Chapitre 3], on peut alors construire les formes de torsion analytique équivariantes du double complexe, de telle sorte que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}T_g\big(\omega^V,h^\xi\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(X,\xi|_X),h^{H(X,\xi|_X)}\big)-\int_{X_g}\mathrm{Td}_g\big(TX,h^{TX}\big)\mathrm{ch}_g(\xi,h^\xi). \tag{3.2}$$

Pour construire ces formes, on procède comme dans la Section 2, en remplaçant en particulier N_u^W par $\overline{N}_u^V$.

4. La formule de comparaison

Soit $\zeta(\theta,x)$, $\eta(\theta,x)$ les parties réelles et imaginaires de la fonction de Lerch $L(\theta,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}/n^s$. On rappelle que la série formelle $R(\theta,x)$ définie dans [3] est donnée par

$$R(\theta,x)=\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ n\ \text{pair}}}\mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\eta(\theta,-n)+2\frac{\partial\eta}{\partial s}(\theta,-n)\right)\frac{x^n}{n!}+\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\ \text{impair}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\zeta(\theta,-n)+2\frac{\partial\zeta}{\partial s}(\theta,-n)\right)\frac{x^n}{n!}. \tag{4.1}$$

Rappelons que sur V_g, g agit sur $TX|_{X_g}$. On désigne par $R_g(TX)$ la classe de cohomologie sur V_g, obtenue en scindant $TX|_{X_g}$ selon les angles θ de l'action de g, et en évaluant le genre additif correspondant sur $TX|_{X_g}$.

Soit $T_g(\xi,h^\xi)$ le courant sur V_g construit dans [4, Section 6] tel que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}T_g\big(\xi,h^\xi\big)=(\mathrm{Td}_g)^{-1}\big(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}}\big)\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^\eta\big)\delta_{\{W_g\}}-\mathrm{ch}_g\big(\xi,h^\xi\big). \tag{4.2}$$

Le front d'onde de $T_g(\xi,h^\xi)$ est inclus dans $N^*_{Y_g/X_g,\mathbf{R}}$.

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY,TX|_{W_g},h^{TX})$ la classe de Bott–Chern sur W_g telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}_g\big(TY,TX|_{W_g},h^{TX}\big)=\mathrm{Td}_g\big(TX|_{W_g},h^{TX}\big)-\mathrm{Td}_g\big(TY,h^{TY}\big)\mathrm{Td}_g\big(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}}\big). \tag{4.3}$$

On construit de même la classe de Bott–Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)})$ sur S telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)=\mathrm{ch}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-\mathrm{ch}_g\big(H(X,\xi|_X),h^{H(X,\xi|_X)}\big). \tag{4.4}$$

Le résultat principal annoncé dans cette Note est le suivant.

THÉORÈME 4.1. – *On a l'identité*

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(H(Y,\eta|_Y),h^{H(X,\xi|_X)},h^{H(Y,\eta|_Y)}\big)-T_g\big(\omega^W,h^\eta\big)+T_g\big(\omega^V,h^\xi\big)\\&\quad=\int_{X_g}\mathrm{Td}_g\big(TX,h^{TX}\big)T_g\big(\xi,h^\xi\big)-\int_{Y_g}\frac{\widetilde{\mathrm{Td}}_g(TY,TX|_{W_g},h^{TX})}{\mathrm{Td}_g(N_{Y/X},h^{N_{Y/X}})}\mathrm{ch}_g\big(\eta,h^\eta\big)\\&\qquad+\int_{X_g}\mathrm{Td}_g(TX)R_g(TX)\mathrm{ch}_g(\xi)-\int_{Y_g}\mathrm{Td}_g(TY)R_g(TY)\mathrm{ch}_g(\eta)\quad \textit{dans } P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $R^i\pi_{V*}\xi_j=0$ pour $i>0$, $0\leqslant j\leqslant m$ et que $R^i\pi_{W*}\eta=0$ pour $i>0$. Alors on a la suite exacte $\mathcal{K}$ de fibrés holomorphes hermitiens sur S,

$$\mathcal{K}:0\to H^0(X,\xi_m)\xrightarrow{v}H^0(X,\xi_{m-1})\cdots\xrightarrow{v}H^0(X,\xi_0)\xrightarrow{r}H^0(X,\xi)\to 0. \tag{4.5}$$

To cite this article: J.-M. Bismut, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 893–897

Soit $h^{\mathcal{K}}$ la métrique hermitienne évidente sur $\mathcal{K}$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}_g(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}) \in P^S/P^{S,0}$ la classe de Bott–Chern telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\mathrm{i}\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}\big) = \mathrm{ch}_g\big(H^0(X, \xi|_X), h^{H^0(X,\xi|_X)}\big) - \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \mathrm{ch}_g\big(H^0(X, \xi_i|_X), h^{H^0(X,\xi_i|_X)}\big). \tag{4.6}$$

THÉORÈME 4.2. – *On a l'identité,*

$$T_g\big(\omega^V, h^{\xi}\big) - \sum_{i=0}^{m}(-1)^i T_g\big(\omega^V, h^{\xi_i}\big) - \widetilde{\mathrm{ch}}_g\big(\mathcal{K}, h^{\mathcal{K}}\big) = 0 \quad \textit{dans } P^S/P^{S,0}. \tag{4.7}$$

5. Principe de la preuve

Les preuves des Théorèmes 4.1 et 4.2, données dans [11], mêlent les techniques de [4] et [5]. Il s'agit en effet de combiner les techniques d'indice relatif utilisées dans [4] avec les techniques de point fixe de [5]. Les méthodes d'analyse fonctionnelle de [4] s'appliquent sans aucune modification, les techniques d'indice relatif local sont remplacées par des méthodes d'indice relatif équivariant local.

Remerciements. Jean-Michel Bismut remercie l'Institut Universitaire de France (I.U.F.) pour son soutien.

Références bibliographiques

[1] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1) (1986) 91–151.
[2] J.-M. Bismut, Superconnection currents and complex immersions, Invent. Math. 99 (1) (1990) 59–113.
[3] J.-M. Bismut, Equivariant short exact sequences of vector bundles and their analytic torsion forms, Compositio Math. 93 (3) (1994) 291–354.
[4] J.-M. Bismut, Equivariant immersions and Quillen metrics, J. Differential Geom. 41 (1) (1995) 53–157.
[5] J.-M. Bismut, Holomorphic families of immersions and higher analytic torsion forms, Astérisque 244 (1997) viii+275.
[6] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott–Chern forms and analytic torsion, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 49–78.
[7] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott–Chern forms, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 79–126.
[8] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants, Comm. Math. Phys. 115 (2) (1988) 301–351.
[9] J.-M. Bismut, K. Köhler, Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas, J. Algebraic Geom. 1 (4) (1992) 647–684.
[10] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 74 (1991) ii+298.
[11] J.-M. Bismut, X. Ma, Holomorphic immersions and equivariant torsion forms, Preprint Université Paris-Sud, Orsay, 2002.
[12] H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, Topology 30 (1) (1991) 21–54. With an appendix by D. Zagier.
[13] H. Gillet, C. Soulé, An arithmetic Riemann–Roch theorem, Invent. Math. 110 (3) (1992) 473–543.
[14] K. Köhler, A Hirzeburch proportionality principle in Arakelov geometry, Preprint, 2002.
[15] K. Köhler, D. Roessler, A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I: statement and proof, Invent. Math. 145 (2) (2001) 333–396.
[16] K. Köhler, D. Roessler, A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry II: a residual formula, Ann. Inst. Fourier 52 (2002) 81–103.
[17] X. Ma, Submersions and equivariant Quillen metrics, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (5) (2000) 1539–1588.
[18] V. Maillot, D. Roessler, Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs, Preprint, 2002.
[19] D. Quillen, Determinants of Cauchy–Riemann operators on Riemann surfaces, Functional Anal. Appl. 19 (1) (1985) 31–34.
[20] D. Quillen, Superconnections and the Chern character, Topology 24 (1) (1985) 89–95.
[21] D.B. Ray, I.M. Singer, Analytic torsion for complex manifolds, Ann. of Math. (2) 98 (1973) 154–177.
[22] D. Roessler, An Adams–Riemann–Roch theorem in Arakelov geometry, Duke Math. J. 96 (1) (1999) 61–126.

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 603–608

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

An anomaly formula for Ray–Singer metrics on manifolds with boundary

Jochen Brüning [a], Xiaonan Ma [b]

[a] Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin, Germany

[b] Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Received 6 July 2002; accepted 9 July 2002

Note presented by Jean-Michel Bismut.

Abstract We establish an anomaly formula for Ray–Singer metrics defined by a Hermitian metric on a flat vector bundle over a Riemannian manifold with boundary. We do not assume that the Hermitian metric on the flat vector bundle is flat, nor that the Riemannian metric has product structure near the boundary. ***To cite this article: J. Brüning, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 603–608.***

Formules d'anomalie pour les métriques de Ray–Singer sur les variétés à bord

Résumé On annonce une formule d'anomalie pour les métriques de Ray–Singer d'un fibré plat F sur une variété à bord X . On ne suppose ni que la métrique sur F est plate, ni que la métrique sur X a une structure produit près du bord. ***Pour citer cet article : J. Brüning, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 603–608.***

Version française abrégée

Soit X une variété compacte à bord Y. Soit (F, ∇^F) un fibré vectoriel complexe plat sur X. Soit g^{TX} une métrique riemannienne sur TX, soit h^F une métrique hermitienne sur F.

Soit $H^\bullet(X, F) = \bigoplus_{p=0}^m H^p(X, F)$ la cohomologie de de Rham absolue de X à coefficients dans F. La métrique de Ray–Singer sur la droite complexe $\det H^\bullet(X, F) = \bigotimes_{p=0}^m (\det H^p(X,\ F))^{(-1)^p}$ est le produit de la métrique L^2 standard sur $\det H^\bullet(X, F)$ et de la torsion analytique de Ray–Singer [14].

Dans cette Note, on annonce une formule d'anomalie pour les métriques de Ray–Singer, qui généralise le résultat correspondant pour les variétés sans bord [2, Théorème 0.1]. On ne suppose ni que la métrique sur F est plate, et ni que la métrique sur X a une structure produit près du bord.

Dans notre formule, la contribution du bord est obtenue à partir de la solution fondamentale d'un problème modèle sur $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$ avec condition de bord.

Les résultats annoncés dans cette Note sont démontrés dans [5].

E-mail addresses: bruening@mathematik.hu-berlin.de (J. Brüning); ma@math.polytechnique.fr (X. Ma).

S1631-073X(02)02496-2/FLA

0. Introduction

Let X be a m-dimensional compact smooth manifold with boundary $\partial X = Y$, and let F be a flat complex vector bundle over X, with flat connection ∇^F. We denote by $H^\bullet(X,F) = \bigoplus_{p=0}^m H^p(X,\ F)$ the de Rham cohomology of X with coefficients in F with absolute boundary conditions. If E is a finite dimensional vector space, let $\det E := \Lambda^{\max} E$, and denote by $(\det E)^{-1} := \det E^*$ the dual line. The complex line $\det H^\bullet(X,F) = \bigotimes_{p=0}^m (\det H^p(X,F))^{(-1)^p}$ is the determinant of the cohomology of F.

Choose a Hermitian metric, h^F, on F and a smooth Riemannian metric, g^{TX}, on TX. By Hodge–de Rham theory, the de Rham cohomology $H^\bullet(X,F)$ is canonically isomorphic to the kernel of the associated Laplacian. Hence the chosen metrics induce a canonical L^2-metric, $h^{H^\bullet(X,F)}$, on $H^\bullet(X,F)$. Then the Ray–Singer metric, $\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F)}$, on $\det H^\bullet(X,F)$ is defined as the product of the metric induced on $\det H^\bullet(X,F)$ by $h^{H^\bullet(X,F)}$ with the Ray–Singer analytic torsion [14], see also Definition 1.2.

If $Y = \emptyset$ and h^F is flat, $\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F)}$ does not depend on g^{TX}. The Cheeger–Müller theorem [6,12] tells us that, in this case, the Ray–Singer metric can be identified with the Reidemeister metric, which is a topological invariant of the flat bundle F. Müller [13] extended his result to the case where $m = \dim X$ is odd and only the metric induced on $\det F$ is required to be flat. Bismut and Zhang [2] generalized this discussion to arbitrary flat vector bundles with arbitrary metrics and showed that in even dimension, the independence ceases to hold. There are also various extensions to the equivariant case, cf. [9,10,3].

Now consider X with $Y \neq \emptyset$. This case was studied in [9] and [10] under the assumption that h^F is flat and that g^{TX} is product near the boundary. Dai and Fang [8] were the first to study this problem with flat h^F but without assuming a product structure for g^{TX} near Y, by methods completely different from ours.

In this Note, we announce an anomaly formula for Ray–Singer metrics in the general case, allowing arbitrary Riemannian metrics on X and arbitrary Hermitian metrics on F. Our method also leads to a local Gauss–Bonnet–Chern theorem [7] for manifolds with boundary. The full details of our results are given in [5].

1. Analytic torsion for manifolds with boundary

Denote by $\Omega(X,F) := \bigoplus_{p=0}^m \Omega^p(X,F) := \bigoplus_{p=0}^m C^\infty(X, \Lambda^p(T^*X)\otimes F)$ the space of smooth differential forms on X with values in F. The flat connection extends naturally to a differential, d^F, on $\Omega(X,F)$. The metrics g^{TX}, h^F induce a Hermitian metric $\langle,\rangle_{\Lambda(T^*X)\otimes F}$ on $\Lambda(T^*X)\otimes F$. Let dv_X be the Riemannian volume element on (TX, g^{TX}). Let $o(TX)$ be the orientation bundle of TX, which is a flat real line bundle on X [4, p. 88]; then we can view dv_X as a section of $\Lambda^m(T^*X)\otimes o(TX)$. We define the Hermitian product on $\Omega(X,F)$ by $(\sigma,\sigma') := \int_X \langle\sigma,\sigma'\rangle_{\Lambda(T^*X)\otimes F}\, \mathrm{d}v_X$, for $\sigma,\sigma'\in\Omega(X,F)$. The Hilbert space obtained by completion is denoted by $\mathrm{L}^2(X,F)$.

We consider d^F as an unbounded operator in $\mathrm{L}^2(X,F)$ with domain $\Omega_0(X,F) := \{\sigma\in\Omega(X,F);\ \operatorname{supp}\sigma\cap Y=\emptyset\}$. The adjoint operator d^{F*} is also defined on $\Omega_0(X,F)$, and so is $D := d^F + d^{F*}$.

Next we define self-adjoint extensions of D by elliptic boundary conditions. We use the metric on X to identify the normal bundle $N_{Y/X}$ to Y in X with the orthogonal complement of TY in $TX|Y$. Denote by $e_{\mathfrak n}$ the inward pointing unit normal vector field along Y. Then we put, with $i(.)$ interior multiplication,

$$\begin{aligned}
&\Omega_a^p(X,F) := \bigl\{\sigma\in\Omega^p(X,F);\ i(e_{\mathfrak n})\sigma = i(e_{\mathfrak n})\bigl(d^F\sigma\bigr) = 0 \text{ on } Y\bigr\},\\
&D_a := D|\Omega_a(X,F) := D|\bigoplus_{p=0}^m \Omega_a^p(X,F), \qquad H_a^p(X,F) := \ker D_a \cap \Omega_a^p(X,F).
\end{aligned} \tag{1}$$

The operator D_a is essentially self-adjoint and we denote its closure also by D_a. By the de Rham–Hodge theorem for manifolds with boundary, $H_a^p(X,F)$ is canonically isomorphic to $H^p(X,F)$. We denote by $h^{H^\bullet(X,F)}$ the L^2-metric induced on $H^\bullet(X,F)$ by this isomorphism, and by $|\ |^{L^2}_{\det H^\bullet(X,F)}$ the corresponding metric on $\det H^\bullet(X,F)$.

To cite this article: J. Brüning, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 603–608

Let P_a be the orthogonal projection in $\mathrm{L}^2(X,F)$ onto $H_a^\bullet(X,F)$ with $P_a^\perp := 1 - P_a$, and let N be the number operator on $\Lambda(T^*X)\otimes F$, which is multiplication by p on $\Lambda^p(T^*X)\otimes F$. Let $\exp(-tD_a^2)$ be the heat semi-group of D_a^2.

DEFINITION 1.1. – For $s\in\mathbb{C}$ with $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}\dim X$, set

$$\theta_a^F(s) := -\mathrm{Tr}_s\big[N\big(D_a^2\big)^{-s}P_a^\perp\big] := \textstyle\sum_{p=0}^m(-1)^{p+1}p\,\mathrm{Tr}_{\Omega_a^p(X,F)}\big[\big(D_a^2\big)^{-s}P_a^\perp\big]$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}t^s\,\mathrm{Tr}_s\big[N\exp\big(-tD_a^2\big)P_a^\perp\big]\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{2}$$

By Theorem 2.1, θ_a^F extends meromorphically to $\mathbb{C}$, and 0 is a regular value.

DEFINITION 1.2. – The Ray–Singer analytic torsion of X with coefficients in F is defined by $T_a(X,h^F) := \exp\{\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_a^F}{\partial s}(0)\}$, and the Ray–Singer metric on the line $\det H^\bullet(X,F)$ is defined by

$$\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F)} := T_a\big(X,h^F\big)|\cdot|^{\mathrm{L}^2}_{\det H^\bullet(X,F)}. \tag{3}$$

2. Anomaly formulas for analytic torsion

The objects which follow will be defined more precisely in Section 3.

Using the notation in Section 3 to the metrics $g_s^{TX} = g^{TX}$, we denote by $\dot R^{TX}$, $\dot R^{TX}|Y$, $\dot S$ the corresponding forms defined in (11), (12). Then the following result generalizes [2, Theorem 7.10] to manifolds with boundary.

THEOREM 2.1. – *When $t\to 0$, for any $k\in\mathbb{N}$,*

$$\mathrm{Tr}_s\big[N\exp\big(-t^2D_a^2\big)\big] = \sum_{j=-1}^k a_jt^j + \mathcal{O}\big(t^{k+1}\big),\quad \textit{and} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \mathrm{rk}(F)\int_X\int^{B_X}\sum_{i=1}^m\frac{1}{2}e^i\wedge\widehat{e^i}\exp\Big(-\frac{1}{2}\dot R^{TX}\Big)\\ &\quad+\mathrm{rk}(F)\int_Y\int^{B_Y}\sum_{\alpha=1}^{m-1}\frac{1}{2}e^\alpha\wedge\widehat{e^\alpha}\sum_{k=0}^\infty\frac{\dot S^k}{2\Gamma\big(k/2+1\big)}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\dot R^{TX}|Y\big)\Big),\\ a_0 &= \frac{m}{2}\chi(X,F). \end{aligned}\tag{5}$$

Let $\|\cdot\|_{\det F}$ be the metric on the line bundle $\det F$ induced by h^F.

Let (g_0^{TX},h_0^F) and (g_1^{TX},h_1^F) be two couples of metrics on TX and F. We will use the subscripts 0, 1 to distinguish the corresponding objects. Let ∇_j^{TX} $(j=0,1)$ be the Levi-Civita connection on (TX,g_j^{TX}) and put $\theta(F,h_1^F) := \mathrm{Tr}[(h_1^F)^{-1}\nabla^F h_1^F]$; this is a closed 1-form which vanishes if the metric $\|\cdot\|_{\det F,1}$ is flat, cf. [2, p. 63]. Let $E(TX,\nabla_0^{TX})$ be the relative Euler form of (TX,g_0^{TX}) defined by (17), let $\widetilde{E}(TX,\nabla_0^{TX},\nabla_1^{TX})$ be the secondary relative Euler class defined by (18), and let $B(\nabla_j^{TX})$ $(j=0,1)$ be the $m-1$-form on Y defined before (15). In (16), we define also the integral on X of a form in the relative complex $\Omega(X,Y,o(TX))$.

Now we can present our main result which generalizes [2, Theorem 0.1] to manifolds with boundary.

THEOREM 2.2. – *Let (g_0^{TX},h_0^F), (g_1^{TX},h_1^F) be two couples of metrics on TX and F. Then*

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F),1}}{\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F),0}}\right)^2 = (-1)^m\int_X\log\left(\frac{\|\cdot\|_{\det F,1}}{\|\cdot\|_{\det F,0}}\right)^2E\big(TX,\nabla_0^{TX}\big)$$

$$+\int_X \widetilde{E}\big(TX,\nabla_0^{TX},\nabla_1^{TX}\big)\theta\big(F,h_1^F\big)+\mathrm{rk}(F)\left[\int_Y B\big(\nabla_1^{TX}\big)-\int_Y B\big(\nabla_0^{TX}\big)\right]. \tag{6}$$

Outline of the proof. – We can guess the first two terms in the right-hand side of (6) by comparing with [2, Theorem 0.1], but the third term is more mysterious.

Let $s\in\mathbb{R}\to(g_s^{TX},h_s^F)$ be a smooth family of metrics on TX, F. Let $*_s$ be the Hodge operator associated to the metrics g_s^{TX}. Let D_s be the operator D attached to the metrics (g_s^{TX},h_s^F). Let $\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F),s}$ be the corresponding Ray–Singer metric on $\det H^\bullet(X,F)$ and denote by $\exp(-tD_{s,a}^2)$ the heat semi-group of D_s^2 with boundary condition (1). Then as $t\to 0$, for any $k\in\mathbb{N}$, there is an asymptotic expansion

$$\mathrm{Tr}_s\left[\left(*_s^{-1}\frac{\partial *_s}{\partial s}+\big(h_s^F\big)^{-1}\frac{\partial h_s^F}{\partial s}\right)\exp\big(-tD_{s,a}^2\big)\right]=\sum_{j=-m}^{k}M_{j,s}t^{j/2}+\mathcal{O}\big(t^{k/2}\big). \tag{7}$$

Moreover,

$$\frac{\partial}{\partial s}\log\big(\|\cdot\|^{\mathrm{RS}}_{\det H^\bullet(X,F),s}\big)^2=M_{0,s}. \tag{8}$$

Eqs. (7), (8) generalize [2, Theorem 4.14] to manifolds with boundary, they generalize also [6, Theorem 3.27], [14, Theorem 7.3] to general metrics on F.

To prove Theorem 2.2, we need to calculate the asymptotic expansion of (7) when $t\to 0$. By using the local index technique in [2, §4(h)], we get the local contribution of (6) in the interior of X. To get the local contribution of (6) from the boundary, we use three ideas. First, we rescale the Clifford variables along Y, secondly, we use a special trivialization of the vector bundles involved adapted to the boundary situation, in order to get a manageable limiting boundary value problem (this special trivalization has already been used in [1, §13 (d), (e)], in a different context). Third, we introduce two extra Grassmann variables and a strange rescaling. □

3. Secondary classes for manifolds with boundary

In this section, we use the formalism of Berezin integrals to express certain characteristic classes which naturally arise in our anomaly formula (6).

For $\mathbb{Z}_2$-graded algebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ with identity we introduce the $\mathbb{Z}_2$-graded tensor product $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ and define $\mathcal{A}:=\mathcal{A}\widehat{\otimes}I$, and $\widehat{\mathcal{B}}:=I\widehat{\otimes}\mathcal{B}$. Also, we write $\wedge:=\widehat{\otimes}$. Let E and V be finite dimensional real vector spaces of dimension n and l, respectively. Assume that E is Euclidean and oriented, with oriented orthonormal basis $\{e_i\}_{i=1}^n$ and dual basis $\{e^i\}_{i=1}^n$. Then the Berezin integral [2, §3(a)], [11] is the linear map

$$\int^B:\Lambda V^*\wedge\widehat{\Lambda E^*}\to\Lambda V^*,\qquad \alpha\wedge\hat{\beta}\mapsto c_B\alpha\beta(e_1,\dots,e_n), \tag{9}$$

where the normalizing constant is given by $c_B:=(-1)^{n(n+1)/2}\pi^{-n/2}$. More generally, for any Euclidean vector space E with orientation line $o(E)$, the Berezin integral maps $\Lambda V^*\wedge\widehat{\Lambda E^*}$ into $\Lambda V^*\otimes o(E)$.

We now consider a smooth family of metrics, $\{g_s^{TX}\}_{s\in\mathbb{R}}$, on TX. We denote by g_s^{TY} the induced metrics on TY and by ∇_s^{TX}, ∇_s^{TY} the Levi-Civita connections on (TX,g_s^{TX}), (TY,g_s^{TY}), with curvatures R_s^{TX} and R_s^{TY}. Introduce the deformation space $X\times\mathbb{R}$, with projections $\pi_{\mathbb{R}}:X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $\pi_X:X\times\mathbb{R}\to X$, and canonical embedding $j:Y\times\mathbb{R}\hookrightarrow X\times\mathbb{R}$. The vertical bundle of the fibration $\pi_{\mathbb{R}}$ (resp. $Y\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) will be denoted by $T\mathcal{X}$ (resp. $T\mathcal{Y}$); clearly, $T\mathcal{X}=\pi_X^*TX$ and $T\mathcal{Y}=(\pi_X\circ j)^*TY$. The bundle $T\mathcal{X}$ is naturally equipped with a metric, $g^{T\mathcal{X}}$, which coincides with g_s^{TX} over $X\times\{s\}$. Moreover, following [2, (4.50), (4.51)], there is a natural metric connection $\nabla^{T\mathcal{X}}$ on $T\mathcal{X}$ defined by

$$\nabla^{T\mathcal{X}}=\pi_X^*\nabla_s^{TX}+\mathrm{d}s\wedge\left(\mathcal{L}_{\partial/\partial s}+\frac{1}{2}\big(g_s^{TX}\big)^{-1}\mathcal{L}_{\partial/\partial s}g_s^{TX}\right) \tag{10}$$

Pour citer cet article : J. Brüning, X. Ma, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 603–608

with curvature $R^{T\mathcal{X}}$. We also denote by $\nabla^{T\mathcal{Y}}$ the connection on $T\mathcal{Y}$ defined as in (10) by g_s^{TY}, and denote $R^{T\mathcal{Y}}$ its curvature. Following [2, §3(e)], we view $R^{T\mathcal{X}}$ as a section of $\Lambda(T^*(X\times\mathbb{R}))\wedge\widehat{\Lambda(T^*\mathcal{X})}$ and write, with $\{e_i\}_{i=1}^m$ an orthonormal basis of $(T\mathcal{X}, g^{T\mathcal{X}})$ and $\{e^i\}_{i=1}^m$ the corresponding dual basis of $T^*\mathcal{X}$,

$$\dot{R}^{T\mathcal{X}} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant m}\langle e_k, R^{T\mathcal{X}}e_l\rangle \widehat{e^k}\wedge\widehat{e^l}. \tag{11}$$

Near the boundary, we only consider orthonormal frames with the property that $e_m(y,s)=e_{\mathfrak{n}}$ is the inward pointing unit normal vector at $y\in Y$ with respect to the metric g_s^{TX}. Now let $\{e_\alpha\}_{1\leqslant\alpha\leqslant m-1}$ be a local orthonormal frame for $T\mathcal{Y}$, such that $\{e_\alpha\}_{1\leqslant\alpha\leqslant m-1}\cup\{e_m\}$ is an orthonormal frame for $T\mathcal{X}|(Y\times\mathbb{R})$. We set on $Y\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\dot{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\nabla^{T\mathcal{X}}\widehat{e^m} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m-1}\langle\nabla^{T\mathcal{X}}_{e_\alpha}e_m, e_\beta\rangle e^\alpha\wedge\widehat{e^\beta},\\ &\dot{R}^{T\mathcal{X}}|Y = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant m-1}\langle e_\alpha, j^*R^{T\mathcal{X}}e_\beta\rangle\widehat{e^\alpha}\wedge\widehat{e^\beta},\qquad \dot{R}^{T\mathcal{Y}} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant\gamma,\delta\leqslant m-1}\langle e_\gamma, R^{T\mathcal{Y}}e_\delta\rangle\widehat{e^\gamma}\wedge\widehat{e^\delta}.\end{aligned} \tag{12}$$

We will denote by $\int^{B_X}$, $\int^{B_Y}$ the Berezin integrals acting on $\Lambda(T^*X)\wedge\widehat{\Lambda(T^*X)}$, $\Lambda(T^*Y)\wedge\widehat{\Lambda(T^*Y)}$. We now put

$$e(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}}) = \int^{B_X}\exp\Big(-\frac{1}{2}\dot{R}^{T\mathcal{X}}\Big),\qquad e(T\mathcal{Y},\nabla^{T\mathcal{Y}}) = \int^{B_Y}\exp\Big(-\frac{1}{2}\dot{R}^{T\mathcal{Y}}\Big). \tag{13}$$

Then $e(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}})$ is an $o(TX)$-valued closed m-form on $X\times\mathbb{R}$, and $e(T\mathcal{Y},\nabla^{T\mathcal{Y}})$ is a closed $m-1$-form on $Y\times\mathbb{R}$ with values in the the orientation line bundle $o(TY)$ of TY.

Let $\psi(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}})$ be the Mathai–Quillen current on $T\mathcal{X}$ defined in [2, Def. 3.6] (*cf.* [11]). On $Y\times\mathbb{R}$, set

$$\begin{aligned}&e_b(Y\times\mathbb{R},\nabla^{T\mathcal{X}}) := e_m^*\psi(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}}),\\ &B(\nabla^{T\mathcal{X}}) := \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u}\int^{B_Y}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(\dot{R}^{T\mathcal{X}}|Y\big)+\big(1-u^2\big)\dot{\mathcal{S}}^2\Big)\sum_{k=1}^\infty\frac{(u\dot{\mathcal{S}})^k}{2\Gamma(k/2+1)}.\end{aligned} \tag{14}$$

The form $e_b(Y\times\mathbb{R},\nabla^{T\mathcal{X}})$ is an $o(TY)$-valued $m-1$-form on $Y\times\mathbb{R}$. If m is odd, then $e(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}})=0$ and, since $\dot{R}^{T\mathcal{Y}}=\dot{R}^{T\mathcal{X}}|Y-2\dot{\mathcal{S}}^2$, we obtain $e_b(Y\times\mathbb{R},\nabla^{T\mathcal{X}})=\frac{1}{2}e(T\mathcal{Y},\nabla^{T\mathcal{Y}})$.

For $j=0,1$, denote by $e(TX,\nabla_j^{TX})$ (resp. $e(TY,\nabla_j^{TY})$, $e_b(Y,\nabla_j^{TX})$, $B(\nabla_j^{TX})$) the restrictions of $e(T\mathcal{X},\nabla^{T\mathcal{X}})$ (resp. $e(T\mathcal{Y},\nabla^{T\mathcal{Y}})$, $e_b(Y\times\mathbb{R},\nabla^{T\mathcal{X}})$, $B(\nabla^{T\mathcal{X}})$) to $X\times\{j\}$ (resp. $Y\times\{j\}$), obviously, they depend only on the metric g_j^{TX}. If $Y=\emptyset$, $e(TX,\nabla_0^{TX})$ represents the Euler class $e(TX)$ of (TX,g_0^{TX}) in Chern–Weil theory. Hence $\chi(X,F):=\sum_{p=0}^m(-1)^p\dim H^p(X,F)$, the Euler characteristic of X with coefficients in F, is given in the case $Y=\emptyset$ by the Gauss–Bonnet–Chern theorem [7], $\chi(X,F)=\mathrm{rk}(F)\int_X e(TX)$. If $Y\neq\emptyset$, then by the Gauss–Bonnet–Chern theorem [7],

$$\chi(X,F) = \mathrm{rk}(F)\int_X e(TX,\nabla_0^{TX}) + (-1)^{m-1}\mathrm{rk}(F)\int_Y e_b(Y,\nabla_0^{TX}). \tag{15}$$

In [5], we give a new derivation of (15) by establishing the corresponding local index theorem by using heat kernel methods.

Put $\Omega^p(X,Y,o(TX))=\Omega^p(X,o(TX))\oplus\Omega^{p-1}(Y,o(TX))$ and define, for $(\sigma_1,\sigma_2)\in\Omega^p(X,Y,o(TX))$, $d(\sigma_1,\sigma_2)=(d\sigma_1, j^*\sigma_1-d\sigma_2)$, where we still denote by $j:Y\hookrightarrow X$ the canonical embedding. Then the complex $(\Omega(X,Y,o(TX)),d)$ calculates the relative cohomology $H^\bullet(X,Y,o(TX))$, cf. [4, p. 78]. For $(\sigma_1,\sigma_2)\in\Omega(X,Y,o(TX))$, $\sigma_3\in\Omega(X)$, we denote, cf. [4, p. 86],

$$\int_X (\sigma_1, \sigma_2) \wedge \sigma_3 := \int_X \sigma_1 \wedge \sigma_3 - \int_Y \sigma_2 \wedge \sigma_3 \tag{16}$$

this induces the Poincaré duality $H^\bullet(X, Y, o(TX)) \times H^\bullet(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. For $j = 0, 1$,

$$E\big(TX, \nabla_j^{TX}\big) := \big(e\big(TX, \nabla_j^{TX}\big), e_b\big(Y, \nabla_j^{TX}\big)\big) \tag{17}$$

is closed in $\Omega(X, Y, o(TX))$ and defines the relative Euler class of TX, i.e. $E(TX, \nabla_j^{TX}) \in H^\bullet(X, Y, o(TX))$ does not depend on the choice of g_j^{TX}.

In the following, if β_1, β_2 are two forms on a manifold Z depending on $s \in \mathbb{R}$, then we write $[\beta_1 + ds \wedge \beta_2]^{ds} := \beta_2$.

We now define the secondary classes which appear in our final formula (6):

DEFINITION 3.1. – Set

$$\begin{gathered}\widetilde{e}\big(TX, \nabla^{T\mathcal{X}}\big) = \int_0^1 ds\big[e\big(T\mathcal{X}, \nabla^{T\mathcal{X}}\big)\big]^{ds}, \qquad \widetilde{e_b}\big(TX, \nabla^{T\mathcal{X}}\big) = \int_0^1 ds\big[e_b\big(Y \times \mathbb{R}, \nabla^{T\mathcal{X}}\big)\big]^{ds}.\\ \widetilde{E}\big(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}\big) = \big(\widetilde{e}\big(TX, \nabla^{T\mathcal{X}}\big), -\widetilde{e_b}\big(TX, \nabla^{T\mathcal{X}}\big)\big).\end{gathered} \tag{18}$$

If Y is empty, then $\widetilde{E}$ is the usual Chern–Simons class associated with the Euler class.

THEOREM 3.2. – *Modulo exact forms in the complex* $(\Omega(X, Y, o(TX)), d)$, $\widetilde{E}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX})$ *does not depend on the choice of the path* g_s^{TX} *from* g_0^{TX} *to* g_1^{TX}. *Moreover,*

$$d\widetilde{E}\big(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX}\big) = E\big(TX, \nabla_1^{TX}\big) - E\big(TX, \nabla_0^{TX}\big). \tag{19}$$

It is obvious from Theorem 3.2 that $\widetilde{E}(TX, \nabla_0^{TX}, \nabla_1^{TX})$ defines the secondary relative Euler class of TX in the spirit of Chern–Simons theory.

Acknowledgements. We thank Jean-Michel Bismut for very useful and inspiring conversations.

References

[1] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Publ. Math. IHES 74 (1991) 1–297.
[2] J.-M. Bismut, W. Zhang, An Extension of a Theorem by Cheeger and Müller, in: Astérisque, Vol. 205, 1992.
[3] J.-M. Bismut, W. Zhang, Milnor and Ray–Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle, Geom. Funct. Anal. 4 (1994) 136–212.
[4] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, in: Graduate Texts in Math., Vol. 82, Springer, New York, 1982.
[5] J. Brüning, X. Ma, An anomaly formula for Ray–Singer metrics on manifolds with boundary, to appear.
[6] J. Cheeger, Analytic torsion and the heat equation, Ann of Math. 109 (1979) 259–322.
[7] S.S. Chern, On the curvatura integra in a Riemannian manifold, Ann. of Math. 46 (1945) 674–684.
[8] X. Dai, H. Fang, Analytic torsion and R-torsion for manifolds with boundary, Asian J. Math. 4 (2000) 695–714.
[9] J. Lott, M. Rothenberg, Analytic torsion for group actions, J. Differential Geom. 34 (1991) 431–481.
[10] W. Lück, Analytic and topological torsion for manifolds with boundary and symmetry, J. Differential Geom. 37 (1993) 263–322.
[11] V. Mathai, D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, Topology 25 (1986) 85–110.
[12] W. Müller, Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds, Adv. in Math. 28 (1978) 233–305.
[13] W. Müller, Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993) 721–753.
[14] D.B. Ray, I.M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. in Math. 7 (1971) 145–210.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 301–305, 2000
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Rigidity and vanishing theorems in K-theory

Kefeng LIU [a], Xiaonan MA [b], Weiping ZHANG [c]

[a] **Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA**
E-mail: kefeng@math.stanford.edu

[b] **Humboldt-Universitat zu Berlin, Institut für Mathematik, unter den Linden 6, 10099 Berlin, Germany**
E-mail: xiaonan@mathematik.hu-berlin.de

[c] **Nankai Institute of Mathematics, Nankai university, Tianjin 300071, People's Republic of China**
E-mail: weiping@nankai.edu.cn

(Reçu le 2 décembre 1999, accepté le 3 janvier 2000)

Abstract. In this Note we announce some new rigidity and vanishing results in the equivariant K-theory. These results generalize the famous Witten rigidity theorems. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Théorèmes de rigidité et d'annulation dans la K-théorie

Résumé. *Dans cette Note, nous annonçons des résultats de rigidité et d'annulation dans la K-théorie équivariante. Ces résultats étendent les théorèmes de rigidité de Witten dans le contexte de la K-théorie équivariante.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

Soit X une variété compacte, orientée et de dimension paire. On suppose que X admet une action de S^1 et que X est munie d'une structure spinorielle S^1-invariante.

Soit $g^{\mathrm{T}X}$ une métrique S^1-invariante sur $\mathrm{T}X$. Soit $\mathrm{S}(\mathrm{T}X) = \mathrm{S}^+(\mathrm{T}X) \oplus \mathrm{S}^-(\mathrm{T}X)$ le fibré des spineurs $\mathbf{Z}_2$-gradués sur $(\mathrm{T}X, g^{\mathrm{T}X})$. Suivant Witten [9], on pose

$$\Theta'_q(\mathrm{T}X) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^n}(\mathrm{T}X \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(\mathrm{T}X \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n q^n,$$

avec $R_n \in K(X)$.

Witten a conjecturé dans [9] que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre de Lefschetz $\mathrm{L}(g)_n$ de l'opérateur de Dirac twisté, qui envoit $\Gamma(\mathrm{S}^+(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{S}(\mathrm{T}X) \otimes R_n)$ dans $\Gamma(\mathrm{S}^-(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{S}(\mathrm{T}X) \otimes R_n)$, ne dépend pas $g \in \mathrm{S}^1$.

La conjecture de Witten a été démontrée par Taubes [8], Bott–Taubes [2] et Liu [5] etc.

Note présentée par Jean-Michel BISMUT.

S0764-4442(00)00155-5/FLA

Dans [6], Liu et Ma ont étendu la conjecture de Witten à une situation en famille. Ils ont démontré des résultats de rigidité et d'annulation au niveau du caractère de Chern équivariant pour la famille d'opérateurs de Dirac twistés décrit ci-dessus.

Dans cette Note, nous annonçons des résultats de rigidité et d'annulation au niveau de la K-théorie équivariante, qui raffinent les résultats de Liu–Ma [6]. Les détails de la preuve et les extensions sont développés dans [7].

In this Note, we announce the proofs of the K-theory versions of the famous rigidity and vanishing theorems for elliptic genera. Details and further extensions will be developed in [7].

1. A family rigidity theorem for the Witten elements

For simplicity, we will focus on the discussion of the rigidity for one of the elliptic genera. For more general rigidity and vanishing results, we refer the reader to [7].

Let $\pi : M \to B$ be a smooth fibration of compact manifolds with fibre X and $\dim X = 2\ell$. Let $\mathrm{T}X$ be the vertical tangent bundle of the fibration $\pi : M \to B$. We make the assumption that S^1 acts fiberwise on M, and that $\mathrm{T}X$ admits an S^1-equivariant spin structure. Let $g^{\mathrm{T}X}$ be an S^1-invariant metric on $\mathrm{T}X$. Let $\mathrm{S}(\mathrm{T}X) = \mathrm{S}^+(\mathrm{T}X) \oplus \mathrm{S}^-(\mathrm{T}X)$ be the $\mathbf{Z}_2$-graded bundle of spinors of $(\mathrm{T}X, g^{\mathrm{T}X})$.

For a complex (resp. real) vector bundle E over M, let

$$\mathrm{Sym}_t(E) = 1 + tE + t^2\mathrm{Sym}^2 E + \cdots,$$
$$\Lambda_t(E) = 1 + tE + t^2\Lambda^2 E + \cdots$$

be the symmetric and exterior power operations of E (resp. $E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$) in $K(M)[[t]]$ respectively. Following Witten [9], set

$$\Theta'_q(\mathrm{T}X) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^n}(\mathrm{T}X) \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(\mathrm{T}X) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n q^n, \tag{1.1}$$

with each $R_n \in K(M)$.

For any $n \in \mathbf{N}$, $b \in B$, let $D_b^X \otimes R_n$ denote the twisted *signature* operator on $X_b = \pi^{-1}(b)$ mapping from $\Gamma\big((\mathrm{S}^+(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{S}(\mathrm{T}X) \otimes R_n)|_{X_b}\big)$ to $\Gamma\big((\mathrm{S}^-(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{S}(\mathrm{T}X) \otimes R_n)|_{X_b}\big)$. Then $\{D_b^X \otimes R_n\}_{b\in B}$ is a smooth family of twisted signature operators which we denote by $D^X \otimes R_n$. The family operator $D^X \otimes R_n$ is clearly S^1-equivariant. Thus, its index bundle $\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_n)$, in the sense of Atiyah and Singer [1], lies in $K_{\mathrm{S}^1}(B)$. Let $\big(\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_n)\big)^{\mathrm{S}^1} \in K(B)$ denote the S^1-invariant part of $\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_n)$. We say that $D^X \otimes R_n$ is *rigid on the equivariant* K*-theory level* if $\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_n) = \big(\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_n)\big)^{\mathrm{S}^1}$.

We can now state the main result of this Note as follows:

THEOREM 1.1. – *For any $n \in \mathbf{N}$, the family operator $D^X \otimes R_n$ is rigid on the equivariant K-theory level.*

Remark 1.2. – When B is a point, Theorem 1.1 was conjectured by Witten [9] and was proved by Taubes [8], Bott–Taubes [2] and Liu [5], etc. When B is not a point, Theorem 1.1 refines a result of Liu–Ma [6] to the equivariant K-theory level.

In order to outline a proof of Theorem 1.1, we will first state in the next section a K-theory version of the equivariant family index theorem for the considered operators.

2. An equivariant family index theorem for circle actions

Let F be the fixed point set of the S^1-action on M. Then $\pi : F \to B$ is a fibration with compact fibre denoted by Y. One has the following splitting of $\mathrm{T}X$ over F,

$$\mathrm{T}X|_F = \mathrm{T}Y \bigoplus_{v\neq 0} N_{v,\mathbf{R}}, \tag{2.1}$$

where $N_{v,\mathbf{R}}$ denotes the underlying real bundle of the complex vector bundle N_v on which S^1 acts by sending g to g^v. Since we can choose either N_v or $\overline{N}_v$ as the complex vector bundle for $N_{v,\mathbf{R}}$, in what follows we may and we will assume that

$$\mathrm{T}X|_F = \mathrm{T}Y \bigoplus_{0<v} N_v, \tag{2.2}$$

where N_v is the complex vector bundle on which S^1 acts by sending g to g^v (here N_v can be zero).

Let $\mathrm{T}Y$ carry the orientation induced from those of $\mathrm{T}X$ and the N_v's via (2.2). Let D^Y be the family signature operator along the fibers Y. If E is an S^1-equivariant Hermitian vector bundle over F carrying with an S^1-invariant Hermitian connection, we denote by $D^Y \otimes E$ the associated family twisted signature operator. Then the index bundle of $D^Y \otimes E$ lies in $K_{\mathrm{S}^1}(B)$. For any $h \in \mathbf{Z}$, let $\mathrm{Ind}(D^Y \otimes E, h)$ denote the component of $\mathrm{Ind}(D^Y \otimes E)$ of weight h with respect to the induced S^1-representation. In what follows, if $R(q) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} R_m q^m \in K_{\mathrm{S}^1}(M)[[q]]$, we will also denote $\mathrm{Ind}(D^X \otimes R_m, h)$ by $\mathrm{Ind}(D^X \otimes R(q), m, h)$.

The main result of this section can be stated as follows:

THEOREM 2.1. – *For $m,\ h \in \mathbf{Z}$, we have the following identity in $K(B)$,*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}\big(D^X \otimes \Theta'_q(\mathrm{T}X), m, h\big)\\ &\quad = \sum_\alpha (-1)^{\Sigma_{0<v}\dim N_v} \mathrm{Ind}\left(D^{Y_\alpha} \otimes \Theta'_q(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right) \otimes \Lambda\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right), m, h\right),\end{aligned} \tag{2.3}$$

where α runs over the connected components of F.

Proof. – Theorem 2.1 is proved in [7] by using the analytic arguments in [10] and [11]. □

3. Proof of Theorem 1.1

For $p \in \mathbf{N}$, we define the following elements in $K_{\mathrm{S}^1}(F)[[q]]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_p(X) &= \bigotimes_{0<v}\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(N_v) \bigotimes_{n>pv} \mathrm{Sym}_{q^n}(\overline{N}_v)\right) \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(\mathrm{T}Y),\\
\mathcal{F}'_p(X) &= \bigotimes_{\substack{0<v\\ 0\leqslant n\leqslant pv}} \big(\mathrm{Sym}_{q^{-n}}(N_v) \otimes \det N_v\big),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-p}(X) = \mathcal{F}_p(X) \otimes \mathcal{F}'_p(X) \otimes \Lambda\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right) \otimes \left(\det\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right)\right)^{-1} \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Lambda_{q^n}(\mathrm{T}X). \tag{3.1}$$

Then

$$\mathcal{F}^0(X) = \Theta'_q(\mathrm{T}X) \otimes \mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right) \otimes \Lambda\left(\bigoplus_{0<v} N_v\right).$$

Set

$$e(N)=\sum_{0<v}v^2\dim N_v,\qquad d'(N)=\sum_{0<v}v\dim N_v. \tag{3.2}$$

We now state two intermediate results on the relations between the family indices on the fixed point set.

PROPOSITION 3.1. – *For* $h,\ p,\ m\in\mathbf{Z}$, $p>0$, *we have the following identity in* $K(B)$,

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha(-1)^{\Sigma_{0<v}\dim N_v}\operatorname{Ind}\left(D^{Y_\alpha}\otimes\Theta_q'(\mathrm{T}X)\otimes\operatorname{Sym}\left(\bigoplus_{0<v}N_v\right)\otimes\Lambda\left(\bigoplus_{0<v}N_v\right),m,h\right)\\&\quad=\sum_\alpha(-1)^{\Sigma_{0<v}\dim N_v}\operatorname{Ind}\left(D^{Y_\alpha}\otimes\mathcal{F}^{-p}(X),m+\frac{1}{2}p^2e(N)+\frac{1}{2}pd'(N),h\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

PROPOSITION 3.2. – *For* $h,\ p\in\mathbf{Z}$, $p>0$, $m\in\mathbf{Z}$, *on each connected component* F_α *of* F, *we have the following identity in* $K(B)$,

$$\operatorname{Ind}\left(D^{Y_\alpha}\otimes\mathcal{F}^{-p}(X),m+\frac{1}{2}p^2e(N)+\frac{1}{2}pd'(N),h\right)=\operatorname{Ind}(D^{Y_\alpha}\otimes\mathcal{F}^{0}(X),m+ph,h).$$

Propositions 3.1 and 3.2 are proved in [7], where, inspired by Taubes [8], we introduce certain shifting operations for vector bundles over F and study the behaviour of the involved family indices under the shifting operations. Moreover, in the proof of Proposition 3.1, we make use a key idea in [8] to reduce the problem to the fixed point set of the induced $\mathbf{Z}_n$-actions. For more details, *see* [7].

Proof of Theorem 1.1. – By (3.1), Theorem 2.1 and Propositions 3.1, 3.2, for $p\in\mathbf{Z}$, $p>0$, we get the following identity in $K(B)$,

$$\operatorname{Ind}\big(D^X\otimes\Theta_q'(\mathrm{T}X),m,h\big)=\operatorname{Ind}(D^X\otimes\Theta_q'(\mathrm{T}X),m',h), \tag{3.4}$$

with

$$m'=m+ph. \tag{3.5}$$

Note that by (1.1), if $m<0$, for $h\in\mathbf{Z}$, we have

$$\operatorname{Ind}\big(D^X\otimes\Theta_q'(\mathrm{T}X),m,h\big)=0\quad\text{in }K(B). \tag{3.6}$$

Let $m_0,\ h\in\mathbf{Z}$ with $h\neq0$ be fixed:
(i) if $h>0$, we take $m'=m_0$, then when p is big enough, we get $m<0$;
(ii) if $h<0$, we take $m=m_0$, then as p is big enough we get $m'<0$.
From (3.4), (3.6) and the above discussion, we get Theorem 1.1. □

4. Vanishing results and further remarks

In some sense, our proof given in [7] may be considered as a K-theory version of the proof given by Bott–Taubes [2] of the Witten rigidity theorem, which was also inspired by the ideas in Taubes' proof [8]. While on the other hand, the proof in [7] is self-contained and the arguments in [7], even in the case where the base B is a point, are different from the ones in the papers of Bott–Taubes [2], Liu [5] and Taubes [8]. Moreover, our method in [7] is quite general and allows us to deal with systematically more general situations than what was described in this note. We refer to [7] for more results and discussions. Here, for the conclusion of this Note, we only state one of the vanishing results, which follows from our techniques together with an observation of Dessai [3].

THEOREM 4.1. – *Assume that M is connected and that $\frac{1}{2}p_1(\mathrm{T}X)=0$, where $p_1(\mathrm{T}X)$ is the first Pontryagin class of $\mathrm{T}X$. If the S^1-action on M is non-trivial, and is induced from a fiberwise S^3-action on M which also preserves the spin structure on $\mathrm{T}X$, then the index bundle of the family twisted* Dirac *operator $\mathcal{D}^X \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sym}_{q^n}(\mathrm{T}X)$ is identically zero in $K_{\mathrm{S}^1}(B)$.*

Acknowledgements. Part of this work was done while the authors were visiting the Morningside Center of Mathematics in Beijing during the summer of 1999. The authors would like to thank this Center for hospitality. The second author would also like to thank the Nankai Institute of Mathematics for hospitality. The work of the first author was partially supported by the Sloan Fellowship and an NSF grant. The work of the second author was supported by SFB 288. The work of the third author was partially supported by NSFC, MOEC and the Qiu Shi Foundation.

References

[1] Atiyah M.F., Singer I.M., The index of elliptic operators IV, Ann. Math. 93 (1971) 119–138.
[2] Bott R., Taubes C., On the rigidity theorems of Witten, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 137–186.
[3] Dessai A., The Witten genus and S^3-actions on manifolds, Preprint, 1994.
[4] Hirzebruch F., Complex cobordism and elliptic genus, Contemp. Math. 241 (1999) 9–20.
[5] Liu K., On elliptic genera and theta-functions, Topology 35 (1996) 617–640.
[6] Liu K., Ma X., On family rigidity theorems I, Duke Math. J. (to appear).
[7] Liu K., Ma X., Zhang W., Rigidity and vanishing theorems in K-theory I, Preprint, 1999, math.KT/9912108.
[8] Taubes C., S^1-actions and elliptic genera, Commun. Math. Phys. 122 (1989) 455–526.
[9] Witten E., The index of the Dirac operator in loop space, in: Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology, P.S. Landweber (Ed.), Lect. Notes in Math. 1326, Springer-Verlag, 1988, pp. 161–181.
[10] Wu S., Zhang W., Equivariant holomorphic Morse inequalities III: non-isolated fixed points, Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 149–178.
[11] Zhang W., Symplectic reduction and family quantization, Int. Math. Res. Notices 19 (1999) 1043–1055.

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 193–198
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Differential Geometry

On the asymptotic expansion of Bergman kernel

Xianzhe Dai [a], Kefeng Liu [b,c], Xiaonan Ma [d]

[a] *Department of Mathematics, UCSB, California, CA 93106, USA*
[b] *Center of Mathematical Science, Zhejiang University, China*
[c] *Department of Mathematics, UCLA, California, CA 90095-1555, USA*
[d] *Centre de mathématiques, CNRS UMR 7640, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France*

Received 14 May 2004; accepted 18 May 2004

Presented by Jean-Michel Bismut

Abstract

We study the asymptotics of the Bergman kernel and the heat kernel of the spin^c Dirac operator on high tensor powers of a line bundle. ***To cite this article: X. Dai et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Résumé

Sur le développement asymptotique du noyau de Bergman. On étudions les développements asymptotiques du noyau de la chaleur et de Bergman de l'opérateur de Dirac spin^c associé à une puissance grande d'un fibré en droites positif. ***Pour citer cet article : X. Dai et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Version française abrégée

Le noyau de Bergman des variétés projectives a été étudié en particulier dans [13,12,15,5,9], où on a établi le développement asymptotique du noyau associé à une puissance tendant vers $+\infty$ d'un fibré en droites positif. Les coefficients de ce développement donnent des informations géométriques sur la variété projective associée. Ce développement asymptotique joue un rôle crucial dans un travail récent de Donaldson [7], où l'existence d'une métrique Kählérienne de courbure scalaire constante est reliée à la stabilité de Mumford–Chow.

Dans cette Note, on étudions le développement asymptotique de ce noyau dans le cas plus général des variétés symplectiques ou orbifolds symplectiques. On étudie aussi le développement asymptotique du noyau de la chaleur correspondant, et on le relie au développement du noyau de Bergman. Une autre motivation de ce travail est d'étendre le travail récent de Donaldson au cas des orbifolds.

Les résultats annoncés dans cette note sont démontrés dans [6].

E-mail addresses: dai@math.ucsb.edu (X. Dai), liu@math.ucla.edu (K. Liu), ma@math.polytechnique.fr (X. Ma).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.05.011

1. Introduction

The Bergman kernel in the context of several complex variables (i.e. for pseudoconvex domains) has long been an important subject. Its analogue for compact complex projective manifolds is studied in [13,12,15,5,9], where its asymptotic expansion for high powers of an ample line bundle is established. Moreover, the coefficients in the asymptotic expansion encode geometric information of the underlying complex projective manifolds. This asymptotic expansion plays a crucial role in the recent work of [7] where the existence of Kähler metrics with constant scalar curvature is shown to be closely related to the Mumford–Chow stability.

In this Note, we study the asymptotic expansion of Bergman kernel for high powers of an ample line bundle in the more general context of symplectic manifolds and orbifolds. We also study the asymptotic expansion of the corresponding heat kernel and relates it to that of the Bergman kernel. One of our motivations is to extend Donaldson's recent work to orbifolds.

The full details of our results are given in [6].

2. Bergman kernels and heat kernels

Let (X,ω) be a compact symplectic manifold of real dimension $2n$. Assume that there exists an Hermitian line bundle L over X endowed with an Hermitian connection ∇^L with the property that $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^L=\omega$, where $R^L=(\nabla^L)^2$ is the curvature of (L,∇^L). Let (E,h^E) be an Hermitian vector bundle on X with Hermitian connection ∇^E and curvature R^E.

Let g^{TX} be a Riemannian metric on X. Let $\mathbf{J}:TX\to TX$ be the skew-adjoint linear map which satisfies the relation

$$\omega(u,v)=g^{TX}(\mathbf{J}u,v)\tag{1}$$

for $u,v\in TX$. Let J be an almost complex structure which is (separately) compatible with g^{TX} and ω, especially, $\omega(\cdot,J\cdot)$ defines another metric on TX; then J commutes with $\mathbf{J}$. The almost complex structure J induces a splitting $T_{\mathbb{R}}X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=T^{(1,0)}X\oplus T^{(0,1)}X$, where $T^{(1,0)}X$ and $T^{(0,1)}X$ are the eigenbundles of J corresponding to the eigenvalues $\sqrt{-1}$ and $-\sqrt{-1}$ respectively. Let $T^{*(1,0)}X$ and $T^{*(0,1)}X$ be the corresponding dual bundles.

Let $\mathrm{d}v_X$ be the Riemannian volume form of (TX,g^{TX}). The above data induce naturally a scalar product $\langle s_1,s_2\rangle=\int_X\langle s_1(x),s_2(x)\rangle_{\Lambda^{0,\bullet}\otimes L^k\otimes E}\,\mathrm{d}v_X(x)$, on $\Omega^{0,\bullet}(X,L^p\otimes E)=\bigoplus_{q=0}^n\Omega^{0,q}(X,L^p\otimes E)$, the direct sum of spaces of $(0,q)$-forms with values in $L^p\otimes E$.

Let ∇^{TX} be the Levi-Civita connection on (TX,g^{TX}) with curvature R^{TX}. We denote by $P^{T^{(1,0)}X}$ the projection from $T_{\mathbb{R}}X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ to $T^{(1,0)}X$. Let $\nabla^{T^{(1,0)}X}=P^{T^{(1,0)}X}\nabla^{TX}P^{T^{(1,0)}X}$ be the Hermitian connection on $T^{(1,0)}X$ induced by ∇^{TX} with curvature $R^{T^{(1,0)}X}$. Let $\nabla^{\det(T^{(1,0)}X)}$ be the connection on $\det(T^{(1,0)}X)$ induced by $\nabla^{T^{(1,0)}X}$ with curvature $R^{\det}=\mathrm{Tr}[R^{T^{(1,0)}X}]$. Then spin^c Dirac operator D_p acts on $\Omega^{0,\bullet}(X,L^p\otimes E)$ (cf. also [11, §2]).

Let P_p be the orthogonal projection from $\Omega^{0,\bullet}(X,L^p\otimes E)$ on $\operatorname{Ker}D_p$. Let $P_p(x,x')$, $\exp(-\frac{u}{p}D_p^2)(x,x')$ be the smooth kernel of P_p, and of the heat kernel $\exp(-\frac{u}{p}D_p^2)$ with respect to $dv_X(x')$. Especially, $P_p(x,x)$, $\exp(-\frac{u}{p}D_p^2)(x,x)\in\operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E)_x$.

We denote by $I_{\mathbb{C}\otimes E}$ the projection from $\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E$ onto $\mathbb{C}\otimes E$ under the decomposition $\Lambda(T^{*(0,1)}X)=\mathbb{C}\oplus\Lambda^{>0}(T^{*(0,1)}X)$. Let $\det\mathbf{J}$ be the determinant function of $\mathbf{J}_x\in\operatorname{End}(T_xX)$. One of our main results is

Theorem 2.1. *There exist smooth coefficients $b_r(x)\in\operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E)_x$ which are polynomials in R^{TX}, $R^{\det}$, R^E (and R^L) and their derivatives with order $\leqslant 2r-1$ (resp. $2r$) and $\mathbf{J}^{-1}$ at x, and $b_0=(\det\mathbf{J})^{1/2}I_{\mathbb{C}\otimes E}$, such that for any $k,l\in\mathbb{N}$, there exists $C_{k,l}>0$ such that for any $x\in X$, $p\in\mathbb{N}$,*

$$\left| P_p(x,x) - \sum_{r=0}^{k} b_r(x) p^{n-r} \right|_{C^l} \leqslant C_{k,l}\, p^{n-k-1}. \tag{2}$$

Moreover, the expansion is uniform in the sense that for any $k, l \in \mathbb{N}$, there is an integer s such that if all data $(g^{TX},\ h^L,\ \nabla^L,\ h^E,\ \nabla^E,\ J)$ run over a set which are bounded in C^s and with g^{TX} bounded below, then the constants $C_{k,l}$ are independent of g^{TX}.

We also have the following large p asymptotic expansion for the heat kernel.

Theorem 2.2. *There exist smooth sections $b_{r,u}$ of $\mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E)$ on X such that for each $u > 0$ fixed, we have the asymptotic expansion in the sense of (2) as $p \to \infty$,*

$$\exp\left(-\frac{u}{p} D_p^2\right)(x,x) = \sum_{r=0}^{k} b_{r,u}(x) p^{n-r} + \mathcal{O}\left(p^{n-k-1}\right). \tag{3}$$

Moreover, there exists $c > 0$ such that as $u \to +\infty$,

$$b_{r,u}(x) = b_r(x) + \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-cu}\right). \tag{4}$$

In fact, this gives us a way to compute the coefficient $b_r(x)$, as it is relatively easy to compute $b_{r,u}(x)$. As an example, we compute b_1 which plays an important role in Donaldson's recent work [7]. Note if (X,ω) is Kähler and $\mathbf{J} = J$, then $B_p(x) \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ for p big enough, thus $b_r(x) \in \mathrm{End}(E)_x$.

Theorem 2.3. *If (X,ω) is Kähler and $\mathbf{J} = J$, then there exist smooth functions $b_j(x) \in \mathrm{End}(E)_x$ such that we have (2), and b_j are polynomials in R^{TX}, R^E and their derivatives with order $\leqslant 2r-1$ at x, and*

$$b_0 = \mathrm{Id}_E, \quad b_1 = \frac{1}{4\pi}\left[\sqrt{-1}\sum_i R^E(e_i, Je_i) + \frac{1}{2} r^X\, \mathrm{Id}_E\right], \tag{5}$$

here r^X is the scalar curvature of (X, g^{TX}), and $\{e_i\}$ is an orthonormal basis of (X, g^{TX}).

Theorem 2.3 was essentially obtained in [9,14] by applying the peak section trick, and in [5] and [15] by applying the Boutet de Monvel–Sjöstrand parametrix for the Szegö kernel [4]. We refer the reader to [7,14] for interesting applications. Our proof of Theorems 2.1, 2.2 is inspired by local Index Theory, especially from [2, § 11]. It can be easily generalized to the orbifold situation.

Let (X,ω) be a compact symplectic orbifold of real dimension $2n$ with singular set X' (cf. [8]). By definition, for any $x \in X$, there exists a small neighborhood $U_x \subset X$, a finite group G_x acting linearly on $\mathbb{R}^{2n}$, and $\widetilde{U}_x \subset \mathbb{R}^{2n}$ an G_x-open set such that $\widetilde{U}_x \xrightarrow{\tau_x} \widetilde{U}_x/G_x = U_x$ and $\{0\} = \tau_x^{-1}(x) \in \widetilde{U}_x$.

An orbifold vector bundle E on an orbifold X is such that for any $x \in X$, there exists $\tilde{p}_{U_x} : \widetilde{E}_{U_x} \to \widetilde{U}_x$ a $G^E_{U_x}$-equivariant vector bundle and $(G^E_{U_x}, \widetilde{E}_{U_x})$ (resp. $(G^E_{U_x}/K_{U_x}, \widetilde{U}_x)$, $K_{U_x} = \mathrm{Ker}(G^E_{U_x} \to \mathrm{Diffeo}(\widetilde{U}_x))$) is the orbifold structure of E (resp. X). We say E is proper if $G^E_{U_x} = G_x$ for any $x \in X$. For any orbifold vector bundle E, its proper part is a proper orbifold vector bundle.

Now, any structure on X or E should be locally G_x or $G^E_{U_x}$ equivariant.

Theorem 2.4. *If (X,ω) is a symplectic orbifold with singular set X', and L, E are corresponding proper orbifold vector bundles on X as in Theorem 2.1. Then there exist smooth coefficients $b_r(x) \in \mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes E)_x$ with $b_0 = (\det \mathbf{J})^{1/2} I_{\mathbb{C}\otimes E}$, and $b_r(x)$ which are polynomials in R^{TX}, $R^{\det}$, R^E (and R^L) and their derivatives with* *order* $\leqslant 2r-1$ (*resp.* $2r$) *and* $\mathbf{J}^{-1}$ *at* x*, such that for any* $k,l\in\mathbb{N}$*, there exist* $C_{k,l}>0,\ N\in\mathbb{N}$ *such that for any* $x\in X,\ p\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{p^n}P_p(x,x)-\sum_{r=0}^{k}b_r(x)p^{-r}\right|_{C^l}\leqslant C_{k,l}\big(p^{-k-1}+p^{l/2}\big(1+\sqrt{p}d(x,X')\big)^N\,\mathrm{e}^{-C\sqrt{p}d(x,X')}\big). \tag{6}$$

Moreover if the orbifold (X,ω) *is Kähler,* $\mathbf{J}=J$ *and the proper orbifold vector bundles* E,L *are holomorphic on* X*, then* $b_r(x)\in\mathrm{End}(E)_x$ *and* $b_r(x)$ *are polynomials in* R^{TX}*,* R^E *and their derivatives with order* $\leqslant 2r-1$ *at* x.

3. Idea of the proofs

Our first observation is that by [11, Theorem 0.1], [3, Theorem 1] exist $\mu_0, C_L>0$ such that

$$\operatorname{Spec}D_p^2\subset\{0\}\cup[2p\mu_0-C_L,+\infty[. \tag{7}$$

Now by (7), using finite propagation speed for solutions of hyperbolic equation, we can localize the problem. In particular, the asymptotics of $P_p(x_0,x')$ as $p\to\infty$ is localized on a neighborhood of x_0.

For $x_0\in X,\ \varepsilon>0$, let $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ be the open ball in $T_{x_0}X$ with center x_0 and radius ε, we identify it with a neighborhood of $x_0\in X$ by using the exponential map. We also identify $(L,h^L),\ (E,h^E)$ with $(L_{x_0},h^{L_{x_0}})$, $(E_{x_0},h^{E_{x_0}})$ respectively on a neighborhood of 0 by using the parallel transport with respect to ∇^L, ∇^E along the radial direction.

We replace the manifold X by $\mathbb{R}^{2n}\simeq T_{x_0}X=X_0$, and we extend the bundles and connections to the full $T_{x_0}X$. In particular, we can extend ∇^L (resp. ∇^E) to a Hermitian connection ∇^{L_0} on $(L_{x_0},h^{L_{x_0}})$ (resp. ∇^{E_0} on $(E_{x_0},h^{E_{x_0}})$) on $T_{x_0}X$ in such a way so that we still have positive curvature R^{L_0}; in addition $R^{L_0}=R^L_{x_0}$ outside a compact set. Also the metric g^{TX_0}, the almost complex structure J_0, (resp. the connection ∇^{E_0}) are extended in such a way that they coincide with the corresponding ones at 0 (resp. the trivial connection) outside a compact set. Now, we fix a unit vector $S_L\in L_{x_0}$, then using S_L and the above discussion, we can get an isometry $\Lambda(T^{*(0,1)}X_0)\otimes L_0^p\otimes E_0\simeq(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E)_{x_0}=\mathbf{E}_{x_0}$.

Let $D_p^{X_0}$ be the Dirac operator on X_0 associated to the above data. Then (7) still holds for $D_p^{X_0}$. Let P_p^0 be the orthogonal projection from $\Omega^{0,\bullet}(X_0,L_0^p\otimes E_0)\simeq C^\infty(X_0,\mathbf{E}_{x_0})$ on $\operatorname{Ker}D_p^{X_0}$, and let $P_p^0(x,x')$ be the smooth kernel of P_p^0 with respect to the volume form $\mathrm{d}v_{X_0}(x')$. Let $\mathrm{d}v_{TX}$ be the Riemannian volume form on $(T_{x_0}X,g^{T_{x_0}X})$. Let $\kappa(Z)$ be the smooth positive function defined by the equation

$$\mathrm{d}v_{X_0}(Z)=\kappa(Z)\,\mathrm{d}v_{TX}(Z), \tag{8}$$

with $k(0)=1$. For $s\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbf{E}_{x_0})$ and $Z\in\mathbb{R}^{2n}$, for $t=1/\sqrt{p}$, set

$$(S_ts)(Z)=s(Z/t),\qquad L_2^t=S_t^{-1}t^2D_p^{X_0,2}S_t. \tag{9}$$

For $s\in C^\infty(T_{x_0}X,\mathbf{E}_{x_0})$, set

$$\|s\|_{t,0}^2=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\big|s(Z)\big|^2_{h^{\Lambda(T^{*(0,1)}X_0)\otimes E_0}(tZ)}\,\mathrm{d}v_{X_0}(tZ). \tag{10}$$

Then L_2^t is a formally self-adjoint elliptic operator with respect to $\|\cdot\|_{t,0}^2$, and is a smooth family of differential operators with parameter $x_0\in X$ and coefficients in $\mathrm{End}(\mathbf{E}_{x_0})=\mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E)_{x_0}$. Let $\pi:TX\times_X TX\to X$ be the natural projection from the fiberwise product of TX on X.

Let $P_{0,t}$ be the orthogonal projection from $C^\infty(X_0,\mathbf{E}_{x_0})$ to the kernel of L_2^t with respect to $\|\cdot\|_{t,0}$. Set

$$F_u\big(L_2^t\big) = \mathrm{e}^{-uL_2^t} - P_{0,t} = \int_u^{+\infty} L_2^t\, \mathrm{e}^{-u_1 L_2^t}\,\mathrm{d}u_1. \tag{11}$$

Let $P_{0,t}(Z,Z')$, $\mathrm{e}^{-uL_2^t}(Z,Z')$, $F_u(L_2^t)(Z,Z')$ be the smooth kernels of the operators $P_{0,t}$, $\mathrm{e}^{-uL_2^t}$, $F_u(L_2^t)$ with respect to $\mathrm{d}v_{TX}(Z')$. Then we can view these kernels as smooth sections of $\pi^*(\mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E))$ on $TX\times_X TX$. In (12), $|\cdot|_{C^m(X)}$ is the C^m-norm for the parameter $x_0\in X$.

From (7), (11), we can get the following key estimate by introducing a family of Sobolev norm on $C^\infty(X_0,\mathbf{E}_{x_0})$, and by extending the functional analysis techniques in [2, §11],

Theorem 3.1. *There exists $C''>0$ such that for any $k,m,m'\in\mathbb{N}$, $u_0>0$, there exist $N\in\mathbb{N}$, $C>0$ such that if $t\in\,]0,1]$, $u\geqslant u_0$, $Z,Z'\in T_{x_0}X$,*

$$\begin{aligned}
&\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leqslant m}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha\partial Z'^{\alpha'}}\left(F_u\big(L_2^t\big)-\sum_{r=0}^k F_{r,u}t^r\right)(Z,Z')\right|_{C^{m'}(X)}\\
&\quad\leqslant Ct^{k+1}\big(1+|Z|+|Z'|\big)^N\exp\left(-\frac{1}{8}\mu_0 u-\sqrt{C''\mu_0}|Z-Z'|\right),\\
&\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leqslant m}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha\partial Z'^{\alpha'}}\left(\mathrm{e}^{-uL_2^t}-\sum_{r=0}^k J_{r,u}t^r\right)(Z,Z')\right|_{C^{m'}(X)}\\
&\quad\leqslant Ct^{k+1}\big(1+|Z|+|Z'|\big)^N\exp\left(\frac{1}{2}\mu_0 u-\frac{2C''}{u}|Z-Z'|^2\right).
\end{aligned}\tag{12}$$

Now there are second order differential operators $\mathcal{Q}_r$ whose coefficients are polynomials in Z with coefficients polynomials in R^{TX}, $R^{\det}$, R^E, R^L and their derivatives at x_0, such that

$$L_t^2 = L_2^0 + \sum_{r=1}^\infty \mathcal{Q}_r t^r. \tag{13}$$

We obtain the coefficients $J_{r,u}$ from the Volterra expansion of $\mathrm{e}^{-uL_2^t}$ (cf. [1, §2.4]).

By (9), for $Z,Z'\in T_{x_0}X$,

$$\begin{aligned}
&P_p^0(Z,Z') = p^n P_{0,t}(Z/t,Z'/t)\kappa^{-1}(Z'),\\
&\exp\left(-\frac{u}{p}D_p^{X_0,2}\right)(Z,Z') = p^n\,\mathrm{e}^{-uL_2^t}(Z/t,Z'/t)\kappa^{-1}(Z').
\end{aligned}\tag{14}$$

From (11), Theorem 3.1, with $Z,Z'=0$, we deduce (6), and $b_r(x_0)=J_{r,u}(0,0)-F_{r,u}(0,0)$. From Theorem 3.1, we also know that $F_{r,u}$ is estimated by the coefficient of t^{k+1} at the right-hand side of the first equation of (12). In particular, $F_{r,u}(0,0)=\mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\mu_0 u})$ as $u\to\infty$. This completes the proof of Theorems 2.1 and 2.2.

If (X,ω) is Kähler and $\mathbf{J}=J$, then $\mathcal{Q}_1=0$ and

$$J_{2,u} = -\int_0^u \mathrm{e}^{-(u-u_1)L_2^0}\mathcal{Q}_2\,\mathrm{e}^{-u_1L_2^0}\,\mathrm{d}u_1. \tag{15}$$

Now $b_1(x_0)=\lim_u J_{2,u}(0,0)$. Thus we derive (5). We also establish Theorem 2.4 from Theorem 3.1 by using finite propagation speed on orbifolds as in [10].

Acknowledgements

We thank Professors Jean-Michel Bismut, Jean-Michel Bony and Johannes Sjöstrand for useful conversations. We also thank Xiaowei Wang for interesting discussions.

References

[1] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Springer-Verlag, 1992.
[2] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Publ. Math. IHES 74 (1991) 1–297.
[3] J.-M. Bismut, E. Vasserot, The asymptotics of the Ray–Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle, Commun. Math. Phys. 125 (1989) 355–367.
[4] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Astérisque 34–35 (1976) 123–164.
[5] D. Catlin, The Bergman kernel and a theorem of Tian, in: Analysis and Geometry in Several Complex Variables (Katata, 1997), in: Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 1–23.
[6] X. Dai, K. Liu, X. Ma, On the asymptotic expansion of Bergman kernel, math.DG/0404494.
[7] S.K. Donaldson, Scalar curvature and projective embeddings. I, J. Differential Geom. 59 (3) (2001) 479–522.
[8] T. Kawasaki, The Riemann–Roch theorem for V-manifolds, Osaka J. Math. 16 (1979) 151–159.
[9] Z. Lu, On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian–Yau–Zelditch, Amer. J. Math. 122 (2) (2000) 235–273.
[10] X. Ma, Orbifolds and analytic torsions, Preprint.
[11] X. Ma, G. Marinescu, The spin^c Dirac operator on high tensor powers of a line bundle, Math. Z. 240 (3) (2002) 651–664.
[12] W. Ruan, Canonical coordinates and Bergman metrics, Comm. Anal. Geom. 6 (1998) 589–631.
[13] G. Tian, On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, J. Differential Geom. 32 (1990) 99–130.
[14] X. Wang, Thesis, 2002.
[15] S. Zelditch, Szegö kernels and a theorem of Tian, Internat. Math. Res. Notices 6 (1998) 317–331.

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 493–498

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Differential Geometry

Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds

Xiaonan Ma [a], George Marinescu [b,*]

[a] *Centre de mathématiques, UMR 7640 du CNRS, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France*
[b] *Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Rudower Chaussee 25, 12489 Berlin, Germany*

Received and accepted 12 July 2004

Available online 12 September 2004

Presented by Jean-Michel Bismut

Abstract

We study the asymptotic of the generalized Bergman kernels of the renormalized Bochner–Laplacian on high tensor powers of a positive line bundle on compact symplectic manifolds. ***To cite this article: X. Ma, G. Marinescu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Résumé

Noyaux de Bergman généralisés sur les variétés symplectiques. On étudie le développement asymptotique du noyau de Bergman généralisé du Laplacien de Bochner renormalisé associé à une puissance tendant vers l'infini d'un fibré en droites positif sur une variété symplectique compacte. ***Pour citer cet article : X. Ma, G. Marinescu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Version française abrégée

Dans [4] nous avons étudié le développement asymptotique du noyau de Bergman de l'opérateur de Dirac spin^c associé à une puissance tendant vers $+\infty$ d'un fibré en droites positif sur une variété symplectique, et nous l'avons relié au développement asymptotique du noyau de la chaleur correspondant. Cette approche est inspirée de la théorie de l'indice locale, en particulier de [1, §10, 11]. Dans [4], nous avons aussi étudié le développement asymptotique en dehors de la diagonale [4, Théorème 3.18], qui est nécessaire pour étudier le noyau de Bergman sur un orbifold. On y trouve également une introduction brève au noyau de Bergman sur les variétés projectives.

Cette Note est une continuation de [4]. Nous étudions le développement asymptotique du noyau de Bergman généralisé de l'opérateur de Laplace–Bochner renormalisé associé à une puissance tendant vers l'infini d'un fibré en

* Corresponding author.
E-mail addresses: ma@math.polytechnique.fr (X. Ma), george@mathematik.hu-berlin.de (G. Marinescu).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2004.07.016

droites positif sur une variété symplectique compacte. Dans cette situation, ces opérateurs ont des valeurs propres petites quand la puissance tend vers l'infini (dans [4], la seule valeur propre petite est zéro, d'où nous tirons l'équation-clé [4, (3.89)]). En combinant l'estimation de la norme de Sobolev de [4] et une technique de série formelle, nous démontrons le Théorème 3.1, qui donne le développement du noyau de Bergman généralisé près de la diagonale. Nous obtenons aussi une méthode pour calculer les coefficients de ce développement.

Le détails des démonstrations et des applications de nos résultats sont donnés dans [8].

1. Introduction

In [4] we studied the asymptotic expansion of the Bergman kernel of the spin^c Dirac operator associated to a positive line bundle on compact symplectic manifolds, and related it to that of the corresponding heat kernel. This approach is inspired by local Index Theory, especially by [1, §10, 11]. In [4], we also focused on the full off-diagonal asymptotic expansion [4, Theorem 3.18] which is needed to study the Bergman kernel on orbifolds. We refer to [4] for a brief introduction to the Bergman kernel on complex projective manifolds.

This Note is a continuation of [4]. We study the asymptotic expansion of the generalized Bergman kernels of the renormalized Bochner–Laplacian on high tensor powers of a positive line bundle on compact symplectic manifolds. In this situation the operators have small eigenvalues when the power $p \to \infty$ (the only small eigenvalue is zero in [4], thus we have the key equation [4, (3.89)]) and we are interested in obtaining Theorem 3.1, the *near* diagonal expansion of the generalized Bergman kernels. This result is enough for most of applications. We will combine the Sobolev norm estimates from [4] and a formal power series trick to obtain Theorem 3.1, and in this way, we have a method to compute the coefficients, which is new also in the case of [4].

The full details and some applications of our results are given in [8].

2. Generalized Bergman kernels

Let (X, ω) be a compact symplectic manifold of real dimension $2n$. Assume that there exists a Hermitian line bundle (L, h^L) over X endowed with a Hermitian connection ∇^L with the property that $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L = \omega$, where $R^L = (\nabla^L)^2$ is the curvature of (L, ∇^L). Let (E, h^E) be a Hermitian vector bundle on X with Hermitian connection ∇^E and its curvature R^E.

Let g^{TX} be a Riemannian metric on X. Let ∇^{TX} be the Levi-Civita connection on (TX, g^{TX}) with its curvature R^{TX} and its scalar curvature r^X. Let dv_X be the Riemannian volume form of (TX, g^{TX}). The scalar product on $\mathcal{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$, the space of smooth sections of $L^p \otimes E$, is given by $\langle s_1, s_2 \rangle = \int_X \langle s_1(x), s_2(x) \rangle_{L^p \otimes E}\, dv_X(x)$.

Let $\mathbf{J} : TX \to TX$ be the skew-adjoint linear map which satisfies the relation

$$\omega(u, v) = g^{TX}(\mathbf{J}u, v) \tag{1}$$

for $u, v \in TX$. Let J be an almost complex structure which is (separately) compatible with g^{TX} and ω, especially, $\omega(\cdot, J\cdot)$ defines a metric on TX. Then J commutes also with $\mathbf{J}$. Let $\nabla^X J \in T^*X \otimes \mathrm{End}(TX)$ be the covariant derivative of J induced by ∇^{TX}. Let $\nabla^{L^p \otimes E}$ be the connection on $L^p \otimes E$ induced by ∇^L and ∇^E. Let $\{e_i\}_i$ be an orthonormal frame of (TX, g^{TX}). Let $\Delta^{L^p \otimes E} = -\sum_i [(\nabla^{L^p \otimes E}_{e_i})^2 - \nabla^{L^p \otimes E}_{\nabla^{TX}_{e_i} e_i}]$ be the induced Bochner–Laplacian acting on $\mathcal{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$. We fix a smooth Hermitian section Φ of $\mathrm{End}(E)$ on X. Set $\tau(x) = -\pi \operatorname{Tr}|_{TX}[J\mathbf{J}]$, and

$$\Delta_{p,\Phi} = \Delta^{L^p \otimes E} - p\tau + \Phi. \tag{2}$$

By [7, Cor. 1.2] there exist $\mu_0, C_L > 0$ independent of p such that the spectrum of $\Delta_{p,\Phi}$ satisfies

$$\operatorname{Spec} \Delta_{p,\Phi} \subset [-C_L, C_L] \cup [2p\mu_0 - C_L, +\infty[. \tag{3}$$

Let $P_{0,p}$ be the orthogonal projection from $(\mathcal{C}^\infty(X, L^p \otimes E), \langle\, ,\, \rangle)$ onto the eigenspace of $\Delta_{p,\Phi}$ with the eigenvalues in $[-C_L, C_L]$. We define $P_{q,p}(x,x')$, $q \geqslant 0$ as the smooth kernels of the operators $P_{q,p} = (\Delta_{p,\Phi})^q P_{0,p}$ (we set $(\Delta_{p,\Phi})^0 = 1$) with respect to $dv_X(x')$. They are called the generalized Bergman kernels of the renormalized Bochner–Laplacian $\Delta_{p,\Phi}$. Let $\det \mathbf{J}$ be the determinant function of $\mathbf{J}_x \in \mathrm{End}(T_x X)$.

Theorem 2.1. *There exist smooth coefficients $b_{q,r}(x) \in \mathrm{End}(E)_x$ which are polynomials in R^{TX}, R^E (and R^L, Φ) and their derivatives of order $\leqslant 2(r+q)-1$ (resp. $2(r+q)$) at x, and*

$$b_{0,0} = (\det \mathbf{J})^{1/2}\, \mathrm{Id}_E, \tag{4}$$

such that for any $k, l \in \mathbb{N}$, there exists $C_{k,l} > 0$ such that for any $x \in X$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{p^n} P_{q,p}(x,x) - \sum_{r=0}^{k} b_{q,r}(x) p^{-r} \right|_{\mathcal{C}^l} \leqslant C_{k,l}\, p^{-k-1}. \tag{5}$$

Moreover, the expansion is uniform in that for any $k, l \in \mathbb{N}$, there is an integer s such that if all data (g^{TX}, h^L, ∇^L, h^E, ∇^E, J and Φ) run over a bounded set in the $\mathcal{C}^s$-norm and g^{TX} stays bounded below, the constant $C_{k,l}$ is independent of g^{TX}; and the $\mathcal{C}^l$-norm in (5) *includes also the derivatives on the parameters.*

Theorem 2.2. *If $J = \mathbf{J}$, then for $q \geqslant 1$,*

$$b_{0,1} = \frac{1}{8\pi}\left[r^X + \frac{1}{2}|\nabla^X J|^2 + 2\sqrt{-1} R^E(e_j, Je_j) \right], \tag{6}$$

$$b_{q,0} = \left(\frac{1}{12}|\nabla^X J|^2 + \frac{\sqrt{-1}}{2} R^E(e_j, Je_j) + \Phi \right)^q. \tag{7}$$

Theorem 2.1 for $q = 0$ and (6) generalize the results of [3,6,9,10], to the symplectic case, and we can view (7) as an extension and refinement of the results of [2], [5, §5] about the density of states function of $\Delta_{p,\Phi}$.

3. Idea of the proofs

For $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, we identify the open ball $B^{T_{x_0}X}(0,\varepsilon)$ in $T_{x_0}X$ with center 0 and radius ε, with a neighborhood of $x_0 \in X$ by means of the exponential map. We also identify the fibers of (L, h^L), (E, h^E) with $(L_{x_0}, h^{L_{x_0}})$, $(E_{x_0}, h^{E_{x_0}})$, respectively, in a neighborhood of x_0, by using the parallel transport with respect to ∇^L, ∇^E along the radial direction.

We apply the strategy from the proof in [4]. First, (3) and the finite propagation speed for hyperbolic equations, allows to localize the problem. In particular, the asymptotics of $P_{q,p}(x_0, x')$ as $p \to \infty$ are localized on a neighborhood of x_0. Thus we can translate our analysis from X to the manifold $\mathbb{R}^{2n} \simeq T_{x_0}X =: X_0$.

We then extend the bundles and connections from a neighborhood of 0 to all of $T_{x_0}X$. In particular, we can extend ∇^L (resp. ∇^E) to a Hermitian connection ∇^{L_0} on $(L_0, h^{L_0}) = (X_0 \times L_{x_0}, h^{L_{x_0}})$ (resp. ∇^{E_0} on $(E_0, h^{E_0}) = (X_0 \times E_{x_0}, h^{E_{x_0}})$) on $T_{x_0}X$ in such a way so that we still have positive curvature R^{L_0}; in addition $R^{L_0} = R^L_{x_0}$ outside a compact set. We also extend the metric g^{TX_0}, the almost complex structure J_0, and the smooth section Φ_0 (resp. the connection ∇^{E_0}) in such a way that they coincide with their values at 0 (resp. the trivial connection) outside a compact set. Moreover, using a fixed unit vector $S_L \in L_{x_0}$ and the above discussion, we construct an isometry $E_0 \otimes L_0^p \simeq E_{x_0}$. Let $\Delta^{X_0}_{p,\Phi_0}$ be the renormalized Bochner–Laplacian on X_0 associated to the above data by a formula analogous to (2). Then (3) still holds for $\Delta^{X_0}_{p,\Phi_0}$ with μ_0 replaced by $\mu_0/2$.

Let dv_{TX} be the Riemannian volume form on $(T_{x_0}X, g^{T_{x_0}X})$ and $\kappa(Z)$ be the smooth positive function defined by the equation $dv_{X_0}(Z) = \kappa(Z)\, dv_{TX}(Z)$, with $k(0) = 1$. For $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$, $Z \in \mathbb{R}^{2n}$ and $t = 1/\sqrt{p}$, set $\|s\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |s(Z)|^2_{h^{E_{x_0}}}\, dv_{TX}(Z)$, and consider

$$\mathscr{L}_t = S_t^{-1} t^2 \kappa^{1/2} \Delta^{X_0}_{p,\Phi_0} \kappa^{-1/2} S_t, \quad \text{where } (S_t s)(Z) = s(Z/t). \tag{8}$$

Then $\mathscr{L}_t$ is a family of self-adjoint differential operators with coefficients in $\operatorname{End}(E)_{x_0}$. We denote by $\mathcal{P}_{0,t} : (\mathcal{C}^\infty(X_0, E_{x_0}), \|\ \|_0) \to (\mathcal{C}^\infty(X_0, E_{x_0}), \|\ \|_0)$ the spectral projection of $\mathscr{L}_t$ corresponding to the interval $[-C_{L_0}t^2, C_{L_0}t^2]$. Let $\mathcal{P}_{q,t}(Z, Z') = \mathcal{P}_{q,t,x_0}(Z, Z')$, $(Z, Z' \in X_0, q \geqslant 0)$ be the smooth kernel of $\mathcal{P}_{q,t} = (\mathscr{L}_t)^q\, \mathcal{P}_{0,t}$ with respect to $dv_{TX}(Z')$. We can view $\mathcal{P}_{q,t,x_0}(Z, Z')$ as a smooth section of $\pi^* \operatorname{End}(E)$ over $TX \times_X TX$, where $\pi : TX \times_X TX \to X$. Here we identify a section $S \in \mathcal{C}^\infty(TX \times_X TX, \pi^* \operatorname{End}(E))$ with the family $(S_x)_{x\in X}$, where $S_x = S|_{\pi^{-1}(x)}$. We denote by $|\ \ |_{\mathcal{C}^s(X)}$ a $\mathcal{C}^s$ norm on it for the parameter $x_0 \in X$. Let δ be the counterclockwise oriented circle in $\mathbb{C}$ of center 0 and radius $\mu_0/4$. By (3),

$$\mathcal{P}_{q,t} = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \lambda^q (\lambda - \mathscr{L}_t)^{-1}\, d\lambda. \tag{9}$$

From (3) and (9) we can apply the techniques in [4], which are inspired by [1, §11], to get the following key estimate.

Theorem 3.1. *There exist smooth sections $F_{q,r} \in \mathcal{C}^\infty(TX \times_X TX, \pi^* \operatorname{End}(E))$ such that for $k, m, m' \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, there exists $C > 0$ such that if $t \in\,]0, 1]$, $Z, Z' \in T_{x_0}X$, $|Z|, |Z'| \leqslant \sigma$,*

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'| \leqslant m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(\mathcal{P}_{q,t} - \sum_{r=0}^{k} F_{q,r} t^r \right)(Z, Z') \right|_{\mathcal{C}^{m'}(X)} \leqslant C t^k. \tag{10}$$

Let $P_{0,q,p}(Z, Z') \in \operatorname{End}(E_{x_0})$ $(Z, Z' \in X_0)$ be the analogue of $P_{q,p}(x, x')$. By (8), for $Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$P_{0,q,p}(Z, Z') = t^{-2n-2q}\, \kappa^{-1/2}(Z)\, \mathcal{P}_{q,t}(Z/t, Z'/t)\, \kappa^{-1/2}(Z'). \tag{11}$$

To complete the proof of Theorem 2.1, we finally prove $F_{q,r} = 0$ for $r < 2q$. In fact, (10) and (11) yield

$$b_{q,r}(x_0) = F_{q,2r+2q}(0, 0). \tag{12}$$

4. Evaluation of $F_{q,r}$

The almost complex structure J induces a splitting $T_\mathbb{R} X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X$, where $T^{(1,0)}X$ and $T^{(0,1)}X$ are the eigenbundles of J corresponding to the eigenvalues $\sqrt{-1}$ and $-\sqrt{-1}$, respectively. We choose $\{w_i\}_{i=1}^n$ to be an orthonormal basis of $T^{(1,0)}_{x_0}X$, such that

$$-2\pi\sqrt{-1}\mathbf{J}_{x_0} = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{End}\big(T^{(1,0)}_{x_0}X\big). \tag{13}$$

We use the orthonormal basis $e_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_j + \overline{w}_j)$ and $e_{2j} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(w_j - \overline{w}_j)$, $j = 1, \ldots, n$ of $T_{x_0}X$ to introduce the normal coordinates as in Section 3. In what follows we will use the complex coordinates $z = (z_1, \ldots, z_n)$, thus $Z = z + \bar{z}$, and $w_i = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z_i}$, $\overline{w}_i = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$. It is very useful to introduce the creation and annihilation operators b_i, b_i^+,

$$b_i = -2\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{2}a_i \bar{z}_i, \quad b_i^+ = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2}a_i z_i, \qquad b = (b_1, \ldots, b_n). \tag{14}$$

Now there are second order differential operators $\mathcal{O}_r$ whose coefficients are polynomials in Z with coefficients being polynomials in R^{TX}, $R^{\det}$, R^E, R^L and their derivatives at x_0, such that

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{O}_r t^r, \quad \text{with } \mathcal{L}_0 = \textstyle\sum_i b_i b_i^+. \tag{15}$$

Theorem 4.1. *The spectrum of the restriction of $\mathcal{L}_0$ to $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ is given by $\{2\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \colon \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ and an orthogonal basis of the eigenspace of $2\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ is given by*

$$b^\alpha \left(z^\beta \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i a_i |z_i|^2 \right) \right), \quad \textit{with } \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{16}$$

Let $N^\perp$ be the orthogonal space of $N = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_0$ in $(L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}), \|\ \|_0)$. Let P^N, $P^{N^\perp}$ be the orthogonal projections from $L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$ onto N, $N^\perp$, respectively. Let $P^N(Z, Z')$ be the smooth kernel of the operator P^N with respect to $\mathrm{d}v_{TX}(Z')$. From (16), we get

$$P^N(Z, Z') = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^n a_i \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i a_i \left(|z_i|^2 + |z_i'|^2 - 2 z_i \bar{z}_i' \right) \right). \tag{17}$$

Now for $\lambda \in \delta$, we solve for the following formal power series on t, with $g_r(\lambda) \in \operatorname{End}(L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}), N)$, $f_r^\perp(\lambda) \in \operatorname{End}(L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0}), N^\perp)$,

$$(\lambda - \mathcal{L}_t) \sum_{r=0}^{\infty} \left(g_r(\lambda) + f_r^\perp(\lambda) \right) t^r = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})}. \tag{18}$$

From (9), (18), we claim that

$$F_{q,r} = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \lambda^q g_r(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \lambda^q f_r^\perp(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{19}$$

From Theorem 4.1, (19), the key observation that $P^N \mathcal{O}_1 P^N = 0$, and the residue formula, we can get $F_{q,r}$ by using the operators $\mathcal{L}_0^{-1}$, P^N, $P^{N^\perp}$, $\mathcal{O}_i$ $(i \leqslant r)$. This gives us a method to compute $b_{q,r}$ in view of Theorem 4.1 and (12). Especially, for $q > 0$, $r < 2q$,

$$\begin{aligned}
&F_{0,0} = P^N, \qquad F_{q,r} = 0, \\
&F_{q,2q} = \left(P^N \mathcal{O}_2 P^N - P^N \mathcal{O}_1 \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} \mathcal{O}_1 P^N \right)^q P^N, \\
&F_{0,2} = \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} \mathcal{O}_1 \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} \mathcal{O}_1 P^N - \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} \mathcal{O}_2 P^N + P^N \mathcal{O}_1 \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} \mathcal{O}_1 \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp} - P^N \mathcal{O}_2 \mathcal{L}_0^{-1} P^{N^\perp}.
\end{aligned} \tag{20}$$

In fact $\mathcal{L}_0$ and $\mathcal{O}_r$ are formal adjoints with respect to $\|\ \|_0$; thus in $F_{0,2}$ we only need to compute the first two terms, as the last two terms are their adjoints. This simplifies the computation in Theorem 2.2.

Acknowledgements

We thank Professors Jean-Michel Bismut, Jean-Michel Bony and Johannes Sjöstrand for useful conversations. It is a pleasure to acknowledge our intellectual debt to Xianzhe Dai and Kefeng Liu.

References

[1] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Publ. Math. IHES 74 (1991) 1–297.

[2] D. Borthwick, A. Uribe, The spectral density function for the Laplacian on high tensor powers of a line bundle, Ann. Global Anal. Geom. 21 (2002) 269–286.

[3] D. Catlin, The Bergman kernel and a theorem of Tian. Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997), in: Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 1–23.

[4] X. Dai, K. Liu, X. Ma, On the asymptotic expansion of Bergman kernel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 193–198; The full version: math.DG/0404494.

[5] V. Guillemin, A. Uribe, The Laplace operator on the nth tensor power of a line bundle: eigenvalues which are bounded uniformly in n, Asymptotic Anal. 1 (1988) 105–113.

[6] Z. Lu, On the lower order terms of the asymptotic expansion of Tian–Yau–Zelditch, Am. J. Math. 122 (2000) 235–273.

[7] X. Ma, G. Marinescu, The spin^c Dirac operator on high tensor powers of a line bundle, Math. Z. 240 (2002) 651–664.

[8] X. Ma, G. Marinescu, Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds, Preprint.

[9] X. Wang, Thesis, 2002.

[10] S. Zelditch, Szegö kernels and a theorem of Tian, Internat. Math. Res. Notices 6 (1998) 317–331.