Operator Theory:
Advances and Applications, Vol. 145, 395–418

Formes de torsion analytique et fibrations singulières

Xiaonan Ma

Abstract. In this paper, we generalize to a relative situation a result of Bismut [**B2**] on the Quillen metric associated to a singular fibration. To establish our results, we make essential use of the immersion theorem of Bismut for analytic torsion forms [**B3**].

Résumé. L'objet de cet article est d'étudier des formes de torsion analytique au voisinage de fibres dégénérant en diviseurs à croisements normaux. On calcule la partie finie de la renormalisation à l'aide des formes de torsion analytique sur la normalisée de ces fibres. Ce résultat étend une formule de Bismut [**B2**] à une situation en famille.

Introduction

Les formes de torsion analytique de Bismut-Köhler sont l'extension de la torsion analytique de Ray-Singer pour une submersion holomorphe. Ces formes sont contenues dans la définition de l'image directe de Gillet et Soulé [**GS**] en géométrie d'Arakelov.

Soit $\pi : X \to S$ un morphisme de variétés compactes complexes qui est une submersion sur le complémentaire d'une sous variété Σ de codimension 2, où π a des singularités ordinaires. Soit $\Delta = \pi(\Sigma)$. Soit ξ un fibré holomorphe sur X. On pose $\lambda(j^*\xi) = \det(R^\bullet \pi \xi)^{-1}$. Dans [**B2**], Bismut a calculé le comportement de la métrique de Quillen sur $\lambda(j^*\xi)$ près de Δ. Après extraction d'une divergence logarithmique, il a décrit la métrique limite en fonction de la métrique de Quillen sur la normalisation des fibres singulières.

Le but de cet article est de généraliser un résultat de Bismut [**B2**, Théorème 0.2] à une situation en famille. On le donne comme le Théorème 2.1. Pour montrer le Théorème 2.1, on procède comme en [**B2**]. C'est à dire, on utilise la technique de la déformation du cône normal [**BaFM**], et le théorème d'immersion de [**B3**, Théorème 0.1]. Comme tous les calculs sont presque les mêmes que dans [**B2**], on omit toujours les détails des calculs. On se concentre souvent de vérifier que les cohomologies intermédiaires soient localement libres, et les relations des classes de Bott-Chern correpondantes.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans la Section 1, en utilisant le résultat de [**B3**], on calcule le comportement des formes de torsion analytique près des fibres singulières. Dans la Section 2, on énonce le Théorème 2.1 qui, à l'aide des formes de torsion analytique sur la normalisée de ces fibres, calcule sa renormalisation. Dans la Section 3, on montre le Théorème 2.1 dans le cas $Z = Z^1 \cup_\Sigma Z^2$. Dans la Section 4, on montre le Théorème 2.1 dans le cas général. Dans la Section 5, on vérifie la compatibilité du Théorème 2.1 et [**BerB**, Théorème 3.1].

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur J.M. Bismut pour ses encouragements et pour d'utiles discussions. Je voudrais remercier aussi ICTP, Trieste, spécialement Professeur M.S. Narasimhan pour hospitalité.

1. La divergence logarithmique des formes de torsion analytique près des fibres singulières

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans a), on définit une fibration singulière. Dans b), on donne des hypothèses et des notations. Dans c), on applique le Théorème d'immersion de [**B3**] à notre situation. Dans d), on calcule la partie divergente des formes de torsion analytique près des fibres singulières. Dans e), on indique les formules d'anomalie pour la renormalisation des formes de torsion analytique.

a) Une fibration singulière

Soit V, B deux variétés complexes compactes Kählériennes. Soit S une variété complexe de dimension 1. Soit Σ une sous variété complexe de V de codimension 2, soit Δ un ensemble de points isolés dans S. Soit $\pi : V \to B \times S$ une application holomorphe de fibre compacte Y. Soit $p_1 : B \times S \to B$ et $p_2 : B \times S \to S$ les projections naturelles. On note $\pi_1 = p_1 \circ \pi$ et $\pi_2 = p_2 \circ \pi$.

On suppose que $\pi : V \setminus \Sigma \to B \times S$ (resp. $\pi : \Sigma \to B \times \Delta$) est une submersion et que si $x \in \Sigma$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(x^1, \dots, x^n)$ près de x, une coordonnée (s^1) près de $\pi_2(x)$, un système de coordonnées holomorphes $(b^1, \dots, b^m)$ près de $\pi_1(x)$ tels que localement

$$\begin{aligned}
&\Sigma = (x^1 = 0, x^2 = 0), \\
&\Delta = (s^1 = 0), \\
&\pi_1(x^1, \dots, x^n) = (x^3, \dots, x^{m+2}), \\
&\pi_2(x^1, \dots, x^n) = x^1 x^2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour $b \in B, s \in S$, soit $X_b = \pi_1^{-1}(b)$, $Z_s = \pi_2^{-1}(s)$. Alors $\pi_1 : V \to B$ est une submersion holomorphe de fibre compacte X.

On note aussi $Z = \pi_2^{-1}(\Delta)$, on considère les immersions $i : \Sigma \to V, j_s : Z_s \to V, j : Z \to V$. Soit V_Σ l'éclaté de V le long de Σ, et soit $\overline{p} : V_\Sigma \to V$ la projection canonique. Soit $\rho : \widehat{Z} \to Z$ la normalisée de Z. Alors $\widehat{Z}$ est un diviseur lisse de V_Σ. On pose $\widehat{\Sigma} = \rho^{-1}(\Sigma)$. Alors $\rho : \widehat{\Sigma} \to \Sigma$ est un revêtement double. Soit κ le

$\mathbf{Z}_2$ -fibré sur Σ, $\kappa = \det \rho_* \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}$. Alors Z, $\widehat{Z}$, $\widehat{\Sigma}$ et Σ se fibrent sur $B \times \Delta$ de fibres compactes Z_B, $\widehat{Z}_B, \widehat{\Sigma}_B$ et Σ_B. Pour $b \in B, s \in \Delta$, si on note $\widehat{Y}_{(b,s)}$ la normalisée de $Y_{(b,s)}$, on a $\widehat{Z}_B = \widehat{Y}_{(b,s)}$.

b) Hypothèses et notations

Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur V.

Dans la suite, on suppose que les images directes $R^\bullet \pi_* \xi$, $R^\bullet(\pi j \rho)_*(j\rho)^*\xi$, $R^\bullet(\pi i)_* i^*\xi$, $R^\bullet(\pi i \rho)_*(i\rho)^*\xi$ et $R^\bullet(\pi i)_*(i^*\xi \otimes \kappa)$ sont localement libres sur $B \times S$, $B \times \Delta$, $B \times \Delta$, $B \times \Delta$ et $B \times \Delta$. Soit $H(Y, \xi_{|Y})$ la cohomologie de $\xi_{|Y}$ le long des fibres Y. Alors ils sont des fibrés holomorphes $\mathbf{Z}$-gradués. Plus exactement $R^\bullet \pi_* \xi = H(Y, \xi_{|Y})$.

Soit g^{TV} une métrique Kählérienne sur TV, soient g^{TX}, g^{TY} et g^{TZ_s} les métriques induites par g^{TV} sur TX, TY et TZ_s sur V, $V \setminus \Sigma$ et $V \setminus Z$. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. On munit la métrique triviale sur κ. De plus, les variétés $\widehat{Z}$ et Σ sont lisses, la métrique g^{TV} induite donc des métriques $g^{T\widehat{Z}_B}, g^{T\Sigma_B}$ sur $T\widehat{Z}/B \times \Delta, T\Sigma/B \times \Delta$.

Pour $b \in B \times (S \setminus \Delta)$, soit $\Omega(Y_b, \xi_{|Y_b})$ le complexe de Dolbeault des formes $\mathcal{C}^\infty$ sur la fibre Y_b à valeur dans ξ. On munit $\Omega(Y, \xi_{|Y})$ de la métrique hermitienne L_2 associée à g^{TY}, h^ξ [**B3**, §2.6]. On identifie $H(Y, \xi_{|Y})$ aux formes harmoniques dans le complexe de Dolbeault relatif $\Omega(Y, \xi_{|Y})$. Soit $h^{R\pi_*\xi}$ la métrique L_2 associée sur $R^\bullet \pi_* \xi$ sur $B \times (S \setminus \Delta)$ [**B3**, §2.6], [**BerB**, §1c)]. De même, on note $h^{R(\pi i)_*(i^*\xi \otimes \kappa)}$ et $h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi}$ les métriques L_2 sur $R^\bullet(\pi i)_*(i^*\xi \otimes \kappa)$ et $R^\bullet(\pi j \rho)_*(j\rho)^*\xi$ sur $B \times \Delta$ induites par $g^{T\widehat{Z}_B}, g^{T\Sigma_B}$ et h^ξ.

Si K est un fibré vectoriel holomorphe avec une métrique g^K sur B, si Q est un polynôme caractéristique, on désigne par $Q(K, g^K) \in P^B$ la forme de Chern-Weil associée à la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur K.

Soit P^B l'espace des formes réelles $\mathcal{C}^\infty$ sur B qui sont la somme de formes de type (p,p). Soit $P^{B,0}$ l'espace de $\alpha \in P^B$ qui s'écrivent $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$ où β, γ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur B.

Comme B est compacte Kählérienne, $P^{B,0}$ est un sous espace vectoriel fermé de P^B pour la convergence uniforme [**B3**, §6.5].

Définition 1.1. *Soit* $\|.\|_k (k \in \mathbf{N})$ *la norme sur* $P^B/P^{B,0}$ *définie de la manière suivante: pour* $\alpha \in P^B$, *on pose*

$$\|\alpha\|_k = \inf_{\beta \in P^{B,0}} |\alpha - \beta|_{\mathcal{C}^k} = \inf_{\beta \in P^{B,0}} \sup_{x \in B, |a| \leq k} |\frac{\partial^a}{\partial x^a}(\alpha - \beta)(x)|. \tag{1.2}$$

Pour $s \in S \setminus \Delta$, soient ω^{Z_s}, ω^V, $\omega^{\widehat{Z}}$ et ω^Σ les $(1,1)$-formes réelles fermées sur Z_s V, $\widehat{Z}$ et Σ associées aux métriques g^{TZ_s}, g^{TV}, $g^{T\widehat{Z}}$ et $g^{T\Sigma}$.

Soit $T(\omega^{Z_s}, h^\xi) \in P^B$, $T(\omega^V, h^\xi) \in P^{B \times (S \setminus \Delta)}$, $T(\omega^{\widehat{Z}}, h^\xi) \in P^{B \times \Delta}$ et $T(\omega^\Sigma, h^{i^*\xi \otimes \kappa}) \in P^{B \times \Delta}$ les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [**BK**] sur B, $B \times (S \setminus \Delta)$, $B \times \Delta$ et $B \times \Delta$ associées à $(\pi j_s, \omega^{Z_s}, h^\xi)$, (π, ω^V, h^ξ),

$(\pi j\rho, \omega^{\widehat{Z}}, h^{\xi})$ et $(\pi i, \omega^{\Sigma}, h^{i^*\xi\otimes\kappa})$. Les formes $T(\omega^V, h^{\xi})$ vérifient l'équation

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T(\omega^V, h^{\xi}) = \mathrm{ch}(R^{\bullet}\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) - \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, g^{\xi}). \tag{1.3}$$

et les formes $T(\omega^{Z_s}, h^{\xi})$, etc, vérifient des équations analogues.

Pour $s \in S$, soit $\tau_s : B \to B \times S$ l'application de $y \in B$ à $(y, s) \in B \times S$. Alors pour $s \in S \setminus \Delta$, on a

$$\tau_s^* T(\omega^V, h^{\xi}) = T(\omega^{Z_s}, h^{\xi}) \quad \text{dans} \quad P^B/P^{B,0}. \tag{1.4}$$

c) Théorème d'immersion pour les formes de torsion analytique

Soit $\mathrm{Gr}(\pi_2)$ le graphe de π_2 dans $V \times S$. Alors $\mathrm{Gr}(\pi_2)$ est un diviseur lisse dans $V \times S$. Soit $[\mathrm{Gr}(\pi_2)]$ le fibré en droite sur $V \times S$ associé à $\mathrm{Gr}(\pi_2)$. Soit l l'identification $x \in V \to l(x) = (x, \pi_2(x)) \in \mathrm{Gr}(\pi_2)$. Soit m l'immersion $\mathrm{Gr}(\pi_2) \to V \times S$. Soit $n : V \times S \to V, n' : V \times S \to S$ les projections canoniques. On déduit facilement que

$$[\mathrm{Gr}(\pi_2)]_{|\mathrm{Gr}(\pi_2)} = n'^* TS_{|\mathrm{Gr}(\pi_2)}, \quad N_{\mathrm{Gr}(\pi_2)/V\times S} = n'^* TS_{|\mathrm{Gr}(\pi_2)}. \tag{1.5}$$

Soit j_s l'immersion $Z_s \to V$. Soit $[Z_s]$ le fibré en droite sur V associé à Z_s. Soient $\sigma_{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}$, $\sigma_{[Z_s]}$ les sections canoniques des fibrés en droite $[\mathrm{Gr}(\pi_2)]$, $[Z_s]$. Si $s \in S$, alors $[\mathrm{Gr}(\pi_2)]_{V\times\{s\}} = [Z_s]$ et $\sigma_{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]_{V\times\{s\}}} = \sigma_{[Z_s]}$. Sur $V \times S$, on a une suite exacte de faisceaux

$$\begin{aligned} 0 \to &\mathcal{O}_{V\times S}(n^*\xi \otimes [-\mathrm{Gr}(\pi_2)]) \\ &\overset{\sigma_{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{V\times S}(n^*\xi) \to m_*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(\pi_2)}((nm)^*\xi) \to 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pour $s \in S$, la restriction de (1.6) à $V \times \{s\}$ est exactement

$$0 \to \mathcal{O}_V(\xi \otimes [-Z_s]) \overset{\sigma_{[Z_s]}}{\to} \mathcal{O}_V(\xi) \to j_{s*}\mathcal{O}_{Z_s}(j_s^*\xi) \to 0. \tag{1.7}$$

On note (η, v) le complexe sur $V \times S$,

$$(\eta, v) : 0 \to n^*\xi \otimes [-\mathrm{Gr}(\pi_2)] \overset{\sigma_{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}}{\longrightarrow} n^*\xi \to 0. \tag{1.8}$$

Rappelle que l'application $(\pi_1 \circ n, n') : V \times S \to B \times S$ est une submersion de fibre compacte X. Soit $H(X, \eta_{|X})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_{X_b\times\{s\}}(\eta_{|X_b\times\{s\}}), v)$. Alors par (1.6), $H(X, \eta_{|X})$ est isomorphe à $H(Y, \xi_{|Y}) = R^{\bullet}\pi_*\xi$, et $H(X, \eta_{|X})$ est un fibre vectoriel sur $B \times S$.

Soit g^{TS} une métrique hermitienne sur TS. Soit $g^{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}$ une métrique hermitienne sur $[\mathrm{Gr}(\pi_2)]$. Soit $g^{-[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}$ la métrique hemitienne sur $[-\mathrm{Gr}(\pi_2)]$ induite par $g^{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}$. Soit $h^{\eta} = h^{\xi} \otimes g^{[-\mathrm{Gr}(\pi_2)]} \oplus h^{\xi}$ la métrique sur $\eta = n^*\xi \otimes [-\mathrm{Gr}(\pi_2)] \oplus n^*\xi$.

Soit $h^{H(X,\eta_{|X})}$ la métrique L_2 sur $H(X, \eta_{|X})$ associée aux métriques g^{TX}, h^{η} définie par [**B3**, §3.2] et $\widetilde{\mathrm{ch}}(H(X, \eta_{|X}), h^{R\pi_*\xi}, h^{H(X,\eta_{|X})}) \in P^{B\times(S\setminus\Delta)}/P^{B\times(S\setminus\Delta),0}$

la classe de Bott-Chern associée à [**BGS1**, §1f)]. Par [**B3**, §3.2], on peut construire des formes de torsion analytique $T(n^*\omega^V, h^\eta) \in P^{B\times S}/P^{B\times S,0}$, telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T(n^*\omega^V, h^\eta) = \mathrm{ch}(H(X,\eta_{|X}), h^{H(X,\eta_{|X})}) - \int_{X\times\{s\}} \mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\eta, h^\eta). \tag{1.9}$$

Sur $V \setminus \Sigma$, on a une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes

$$0 \to TY \to TX \to \pi_2^* TS \to 0.$$

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, \pi_2^* g^{TS})$ la classe de Bott-Chern associée à la suite exacte ci-dessus, on a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, \pi_2^* g^{TS}) = \mathrm{Td}(TX, g^{TX}) - \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\pi_2^*\mathrm{Td}(TS, g^{TS}).$$

Pour $s \in S \setminus \Delta$, on pose

$$I_s = \tau_s^*\Big[T(n^*\omega^V, h^\eta) - T(\omega^V, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(H(X,\eta_{|X}), h^{H(X,\eta_{|X})}, h^{R\pi_*\xi})\Big]. \tag{1.10}$$

On a l'analogue de [**B2**, Théorème 5.6], **Théorème 1.2**. *Pour $s \in S \setminus \Delta$, l'identité suivante est vraie dans $P^B/P^{B,0}$:*

$$I_s = \int_{X\times\{s\}} \frac{\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)}{\mathrm{Td}([\mathrm{Gr}(\pi_2)], g^{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]})}\log(\|\sigma_{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]}\|^2) \tag{1.11}$$
$$- \int_{Y_s} \frac{\widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, \pi_2^* g^{TS})}{\mathrm{Td}([\mathrm{Gr}(\pi_2)], g^{[\mathrm{Gr}(\pi_2)]})}\mathrm{ch}(\xi, h^\xi).$$

Preuve. En appliquant la formule de [**B3**, Théorème 0.1] à l'immersion $j_s : Z_s \to V$ ($s \in S \setminus \Delta$) qui est exactement l'immersion $\mathrm{Gr}(\pi_2) \cap V \times \{s\} \to V \times \{s\}$, et à la suite exacte de faisceaux (1.6) sur $V \times \{s\}$. En procédant comme en [**B2**, Théorème 5.6], on a (1.11). □

d) La divergence logarithmique des formes de torsion analytique près des fibres singulières

On pose

$$E(x) = \frac{x - \sinh(x)}{2x(1-\cosh(x))}. \tag{1.12}$$

Alors si $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann,

$$E(x) = -\sum_{n\geq 0, n \text{ pair}} \frac{(n+2)\zeta(-n-1)x^n}{(n+1)!}, \quad E(0) = \frac{1}{6}. \tag{1.13}$$

On identifie E au genre additif correspondant.

Soit $h'^{R\pi_*\xi}$ une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur $R^\bullet\pi_*\xi$ sur $B\times S$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^{B\times(S\setminus\Delta)}/P^{B\times(S\setminus\Delta),0}$ la classe de Bott-Chern de [**BGS1**, §1f)] telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi}) = \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}). \tag{1.14}$$

Soit $\sigma_{[\Delta]}$ la section canonique du diviseur $[\Delta]$. Soit $g^{[\Delta]}$ une métrique sur $[\Delta]$.

Théorème 1.3. *Pour $s_0 \in \Delta$, la limite*

$$\lim_{S\setminus\Delta\ni s\to s_0}\Big\{\tau_s^*\Big[T(\omega^V, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi})\Big] + \frac{1}{2}\log(\|\sigma_{[\Delta]}\|_s^2)\int_{\Sigma_B}\mathrm{Td}(T\Sigma_B)E(N_{\Sigma/V})\mathrm{ch}(\xi)\Big\}. \tag{1.15}$$

existe dans $P^B/P^{B,0}$. On note cette limite comme $T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$.

On considère $T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$ comme les formes de torsion analytique de $Z_{s_0} \to B$.

Avant démontrer le Théorème 1.3, on vérifie que ce Théorème est compatible à [**B2**, Théorème 5.9], [**BerB**, Théorème 3.1].

Soit $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$ les fibrés en droite sur S qui sont les inverses des déterminants de $H(Z,\xi_{|Z})$ et $H(B, R^\bullet\pi_*\xi_{|B})$. Alors par [**KM**], le fibré en droite $\lambda(\xi)\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)$ a une section canonique non nulle σ sur S. Soit $\|\ \|_{\lambda(\xi)}$ et $\|\ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)}$ les métriques de Quillen sur $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$ sur $S\setminus\Delta$ associées à g^{TZ_s}, h^ξ et $g^{TB}, h^{R\pi_*\xi}$. Soit $\|\ \|_{\lambda(\xi)\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)}$ la métrique correspondante sur $\lambda(\xi)\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)$ sur $S\setminus\Delta$. Alors pour $s\in S\setminus\Delta$, en appliquant [**BerB**, Théorème 3.1], on a

$$\begin{aligned}\log\|\sigma\|^2_{\lambda(\xi)\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_*\xi)} = &-\textstyle\int_{B\times\{s\}}\mathrm{Td}(TB, g^{TB})T(\omega^V, h^\xi)\\ &+\textstyle\int_{Z_s}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TB, g^{TZ}, g^{TB})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ici, comme en (1.11), la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{Td}}(\cdot,\cdot)$ correspond à la suite exacte

$$0\to TY\to TZ\to\pi_1^*TB\to 0.$$

En utilisant [**B2**, Théorèmes 2.1 et 5.9] et [**BGS2**, Théorème 1.23] (se réferer aussi à §5), quand $s\in S\setminus\Delta\to s_0\in\Delta$,

$$-\int_{B\times\{s\}}\mathrm{Td}(TB, g^{TB})\Big[T(\omega^V, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi})\Big]$$

$$-\frac{1}{2}\log(\|\sigma_{[\Delta]}\|_s^2)\int_\Sigma\mathrm{Td}(T\Sigma)E(N_{\Sigma/V})\mathrm{ch}(\xi)$$

a une limite. C'est à dire, le Théorème 1.3 est compatible à [**BerB**], [**B2**]. □

Preuve du Théorème 1.3. Dans notre cas, par une modification simple de l'argument de [**B2**], on sait que les résultats analogues de [**B2**, Théorèmes 2.2 et 3.3] sont aussi vrais.

En procédant comme en [**B2**, Théorème 5.7], quand $s \in S \setminus \Delta \to s_0 \in \Delta$, l'asymptotique du terme à droite de (1.11) dans $P^B/P^{B,0}$ est exactement la même formule que celle de [**B2**, (5.20)].

Comme $T(n^*\omega^V, h^\eta) \in P^{B\times S}$, on a montré le Théorème 1.3. □

Par le Théorème 1.3, dans $P^B/P^{B,0}$, on pose

$$I_\lambda = \lim_{s\to s_0} \Big[I_s - \frac{1}{2}\log(\|\sigma_{[\Delta]}\|_s^2) \int_{\Sigma_B} \mathrm{Td}(T\Sigma_B)E(N_{\Sigma/V})\mathrm{ch}(\xi) \Big]. \tag{1.17}$$

e) Formules d'anomalie pour des formes de torsion analytique

Soit $g'^{TV}, h'^{\xi}, h''^{R\pi_*\xi}$ des métriques sur $TV, \xi, R^\bullet\pi_*\xi$. Pour $s_0 \in \Delta$ fixé, on peut construire aussi $T(\omega'^Z, h'^\xi, h''^{R\pi_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$ comme dans le Théorème 1.3.

Par [**B2**, Théorème 1.1], le fibré vectoriel TY sur $V_\Sigma \setminus P(N_{\Sigma/V}) \simeq V\setminus\Sigma$ s'étend en un sous-fibré $v(TV/B\times S)$ de $\overline{p}^*TV$ sur V_Σ. Alors sur $\widehat{Z}$, on a $T\widehat{Y} = v(TV/B\times S)$. Soit $g^{v(TV/B\times S)}$, $g'^{v(TV/B\times S)}$ les métriques induites par g^{TV}, g'^{TV} sur $v(TV/B\times S)$. Soit $g'^{T\widehat{Y}}$ la métrique sur $T\widehat{Y}$ induite par g'^{TV}. Soit

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/B\times S), g^{v(TV/B\times S)}, g'^{v(TV/B\times S)}) \in P^{V_\Sigma}/P^{V_\Sigma,0},\\ \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi) \in P^V/P^{V,0}, \quad \widetilde{\mathrm{Td}}(T\widehat{Y}, g^{T\widehat{Y}}, g'^{T\widehat{Y}}) \in P^{\widehat{Z}}/P^{\widehat{Z},0},\\ \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h'^{R\pi_*\xi}, h''^{R\pi_*\xi}) \in P^{B\times S}/P^{B\times S,0}\end{gathered}$$

les classes de Bott-Chern [**BGS1**]. On a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi) = \mathrm{ch}(\xi, h'^\xi) - \mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \tag{1.18}$$

et les autres formes ci-dessus vérifient des équations analogues.

Alors par (1.15), [**B2**, Théorème 2.1], [**BK**, Théorème 3.10], on a

Théorème 1.4. *On a l'identité suivante dans* $P^B/P^{B,0}$

$$\begin{aligned} T(\omega'^Z, h'^\xi, h''^{R\pi_*\xi}) - T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) &= \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h'^{R\pi_*\xi}, h''^{R\pi_*\xi})\\ &- \int_{\widehat{Y}} \Big(\widetilde{\mathrm{Td}}(T\widehat{Y}, g^{T\widehat{Y}}, g'^{T\widehat{Y}})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi) + \mathrm{Td}(T\widehat{Y}, g'^{T\widehat{Y}})\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi)\Big)\\ &-2\int_{\Sigma_B}\Big\{\mathrm{ch}(\xi,h^\xi)\int_{P(N_{\Sigma/V})}\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/B\times S), g^{v(TV/B\times S)}, g'^{v(TV/B\times S)})\\ &+\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi,h^\xi,h'^\xi)\int_{P(N_{\Sigma/V})}\mathrm{Td}\Big(v(TV/B\times S), g'^{v(TV/B\times S)}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

2. Comparaison des formes de torsion analytique

Pour $s\in\Delta$ fixé, soit $\widehat{Z}_s$ la normalisation de Z_s et $\rho : \widehat{Z}_s \to Z_s$ est la projection canonique. On note $k : \Sigma_s \to Z_s$ l'immersion triviale. Dans la suite, on omit l'indice s.

Alors $\rho_*\mathcal{O}_{\widehat{Z}}((j\rho)^*\xi)$ est un $\mathcal{O}_Z$-faisceau sur Z, et il existe un morphisme naturel $\mathcal{O}_Z(j^*\xi) \to \rho_*\mathcal{O}_{\widehat{Z}}((j\rho)^*\xi)$ et un morphisme de différence $\rho_*\mathcal{O}_{\widehat{Z}}((j\rho)^*\xi) \to k_*(\mathcal{O}_\Sigma(i^*\xi\otimes\kappa))$. Sur Z, on a une suite exacte de faisceaux [**B2**, (5.53)]

$$(L,v): 0 \to \mathcal{O}_Z(j^*\xi) \to \rho_*\mathcal{O}_{\widehat{Z}}((j\rho)^*\xi) \to k_*(\mathcal{O}_\Sigma(i^*\xi\otimes\kappa)) \to 0. \tag{2.1}$$

D'après (2.1), on a une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur B

$$(R^\bullet\pi_*L,v): \cdots \to R^{i-1}(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa) \to R^i(\pi j)_*\xi \to R^i(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi \to \cdots. \tag{2.2}$$

On munit $R^\bullet\pi_*L$ de la métrique $h^{R\pi_*L} = h'^{R\pi_*\xi} \oplus h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi} \oplus h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L,\, h^{R\pi_*L}) \in P^B/P^{B,0}$ la classe de Bott-Chern [**BGS1**] telle que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h^{R\pi_*L}) &= \mathrm{ch}\Big(R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi, h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi}\Big)\\ &\quad -\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - \mathrm{ch}\Big(R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa), h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}\Big).\end{aligned} \tag{2.3}$$

On rappelle que $T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$ est définie par le Théorème 1.3, et que $T(\omega^{\widehat{Z}}, h^\xi)$ et $T(\omega^\Sigma, h^{i^*\xi\otimes\kappa})$ sont définies à §1b). On pose

$$T'(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) = T(\omega^{\widehat{Z}}, h^\xi) - T(\omega^\Sigma, h^{i^*\xi\otimes\kappa}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h^{R\pi_*L}). \tag{2.4}$$

L'objet de cet article est de donner une formule pour

$$T'(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}. \tag{2.5}$$

Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann. Soit $R(x)$ la série de Gillet-Soulé [**GS**]

$$R(x) = \sum_{n\geq 0,\, n \text{ impair}} \Big(2\frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\Big)\zeta(-n)\frac{x^n}{n!}. \tag{2.6}$$

Si $f(x)$ est une série entière, on pose $f(x) = \Sigma_{k\geq 0} f^{[k]}x^k$. On définit $S(x), T(x)$ par

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n\geq 1,\, n \text{ impair}} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j C_n^j}{j}\zeta(-n)\frac{x^n}{n!},\\ T(x) &= \sum_{n\geq 2,\, n \text{ pair}} \frac{1}{(n+3)!}\Big[\frac{(1+x)^{n+1}\log(1+x)}{1+2x}\Big]^{[n]} x^n.\end{aligned} \tag{2.7}$$

On identifie $R(x), S(x), T(x)$ aux genres additifs correspondants. On pose

$$\begin{aligned} Q(x^1,x^2) &= \frac{1}{x^1-x^2}\\ &\quad\times\int_{x^1}^{x^2} \frac{\mathrm{Td}(-x^1)\mathrm{Td}(-x^2) - \mathrm{Td}(-s)\mathrm{Td}(-(x^1+x^2-s))}{\mathrm{Td}(-s)(s-x^1)(s-x^2)}ds.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors $Q(x^1,x^2)$ est une fonction symétrique de (x^1,x^2). On peut considérer Q comme une fonction ad-invariante des matrices 2×2. On identifie Q au genre correspondant. De plus $Q(x,-x)$ et $\mathrm{Td}(x)Q(x,0)$ sont des fonctions paires.

On rappelle que TY sur $V_\Sigma \setminus P(N_{\Sigma/V}) \simeq V \setminus \Sigma$ s'étend en un sous-fibré $v(TV/B \times S)$ de $\overline{p}^*TV$ sur V_Σ [**B3**, Théorème 1.1]. Soit $g^{v(TV/B\times S)}$ la métrique induite par g^{TV} sur $v(TV/B \times S)$. Soit U le fibré en droite universel sur $P(N_{\Sigma/V})$. Soit $p_\Sigma : P(N_{\Sigma/V}) \to \Sigma$ la projection canonique. Sur $P(N_{\Sigma/V})$, on a la suite exacte [**B2**, (0.10)]

$$0 \to p_\Sigma^* T\Sigma/B \times \Delta \to v(TV/B \times S) \to U \otimes p_\Sigma^* \kappa \to 0. \tag{2.9}$$

Soit $g^{N_{\Sigma/V}}$ une métrique sur $N_{\Sigma/V}$ telle que le scindement local $N_{\Sigma/V} = N_{\Sigma/Z^1} + N_{\Sigma/Z^2}$ (où N_{Σ/Z^i} représente le fibré normal dans l'une des deux branches locales de Y) soit orthogonal, et que l'isomorphisme canonique $\Lambda^2 N_{\Sigma/V} \otimes p_\Sigma^*\kappa \simeq \pi_2^*[\Delta]$ soit une isométrie [**B2**, §6.3 et §9.4]. Par [**BGS1**, §1f)], on peut associer une classe de Bott-Chern

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/B \times S), g^{v(TV/B\times S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}) \in P^{P(N_{\Sigma/V})}/P^{P(N_{\Sigma/V}),0}$$

à la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens (2.9) telle que

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/B \times S), g^{v(TV/B\times S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}) \\ &\quad = \mathrm{Td}(v(TV/B \times S), g^{v(TV/B\times S)}) \\ &\quad\quad - p_\Sigma^* \mathrm{Td}(T\Sigma/B \times \Delta, g^{T\Sigma/B\times\Delta}) \mathrm{Td}(U \otimes p_\Sigma^*\kappa, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Théorème 2.1. *On a la formule suivante dans $P^B/P^{B,0}$,*

$$\begin{aligned} &T'(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \\ &\quad = 2\int_{\Sigma_B} \mathrm{ch}(\xi, g^\xi) \int_{P(N_{\Sigma/V})} \widetilde{\mathrm{Td}}\Big(v(TV/B \times S), g^{v(TV/B\times S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}\Big) \\ &\quad\quad - \int_{\Sigma_B} \mathrm{Td}(T\Sigma_B)\Big(\mathrm{Td}(N_{\Sigma/V}) T(N_{\Sigma/V}) + 2Q(N_{\Sigma/V})\Big)\mathrm{ch}(\xi) \\ &\quad\quad + \int_{\widehat{\Sigma}_B} \mathrm{Td}(T\widehat{\Sigma}_B)\Big(\mathrm{Td}(x)\Big(\frac{R+S}{x} + Q(x,0)\Big)\Big)(N_{\widehat{\Sigma}/\widehat{Z}})\mathrm{ch}(\xi). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Remarque 2.2.

i) Si B est un point, le Théorème 2.1 est [**B2**, Théorème 0.2].

ii) Dans le Théorème 2.1, si V est projective, par l'argument de résolution acyclique, on peut supposer seulement que

$$R^\bullet \pi_*\xi,\ R^\bullet(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi \qquad \text{et} \qquad R^\bullet(\pi i)_*(i^*\xi \otimes \kappa)$$

sont localement libres sur $B \times S$, $B \times \Delta$ et $B \times \Delta$.

3. Preuve du Théorème 2.1: le cas où la fibre exceptionnelle est scindée

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans a), on introduit notre hypothèse sur Z. Dans b), on compare des formes de torsion analytique. Dans c), on montre le Théorème 2.1 sous notre hypothèse sur Z.

a) Une hypothèse simple sur Z

Dans la suite, on fixe toujours $s_0 \in \Delta$. Soit $Z = Z_{s_0}$.

On suppose qu'il existe deux diviseurs lisses Z^1 et Z^2 dans V intersectés transversalement le long de Σ tels que

$$Z = Z^1 \cup_\Sigma Z^2. \tag{3.1}$$

Alors le fibré κ sur Σ est trivial. Soit $i : \Sigma \to V$, $j^k : Z^k \to V, j : Z \to V$ les immersions naturelles. Pour $k = 1, 2$, soit $\sigma_{[Z^k]}$ la section canonique de $[Z^k]$. Alors la section canonique $\sigma_{[Z]}$ de $[Z]$ est donnée par

$$\sigma_{[Z]} = \sigma_{[Z^1]} \otimes \sigma_{[Z^2]}. \tag{3.2}$$

Par (3.2), on identifie $\Lambda^2([-Z^1] \oplus [-Z^2])$ à $[-Z]$.

Les complexes de Koszul $(\Lambda([-Z^k], \sigma_{[Z^k]})$, $(\Lambda[-Z], \sigma_{[Z]})$, $(\Lambda([-Z^1] \oplus [-Z^2]), \sigma_{[Z^1]} \oplus \sigma_{[Z^2]})$ sont des résolutions des $\mathcal{O}_V$-faisceaux $j^k_*\mathbf{C}, j_*\mathbf{C}, i_*\mathbf{C}$ sur V. On a le complexe de faisceaux sur V

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
0 \to & i_*\mathbf{C} \longrightarrow & 0 \to & 0 \to & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
0 \to & \mathbf{C} \longrightarrow & \mathbf{C} \to & 0 \to & 0 \\
 & {\scriptstyle i_{\sigma_{[Z^1]}} \oplus (-i_{\sigma_{[Z^2]}})} \uparrow & {\scriptstyle e} \uparrow & \uparrow & \\
0 \to & [-Z^1] \oplus [-Z^2] \xrightarrow{\sigma_{[Z^1]} \oplus \sigma_{[Z^2]}} & \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \to & j^1_*\mathbf{C} \oplus j^2_*\mathbf{C} \to & 0 \\
 & {\scriptstyle i_{\sigma_{[Z^1]}} \oplus (-i_{\sigma_{[Z^2]}})} \uparrow & {\scriptstyle e} \uparrow & {\scriptstyle e} \uparrow & \\
0 \to & [-Z] \xrightarrow{\sigma_{[Z]}} & \mathbf{C} \to & j_*\mathbf{C} \to & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{array} \tag{3.3}$$

Dans (3.3), $e : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ est le complexe diagonal $f \to (f, f)$ et $e : \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est donné par $(f, g) \to (f - g)$, et $j^1_*\mathbf{C} \oplus j^2_*\mathbf{C} = (j\rho)_*\mathbf{C}$, $e : j_*\mathbf{C} \to j^1_*\mathbf{C} \oplus j^2_*\mathbf{C} = (j\rho)_*\mathbf{C}$ est induit par le morphisme de $\mathcal{O}_Z$-faisceaux sur Z, $\mathbf{C} \to \rho_*\mathbf{C}$ considéré dans (2.1).

Dans (3.3), les trois premières lignes (à partir du bas) sont des suites exactes de faisceaux. Les deux premières lignes correspondent aux complexes de Koszul pour les diviseurs Z, Z^1 et Z^2 dans V. Les deux premières colonnes dans (3.3) sont aussi des suites exactes de faisceaux. La première colonne correspond au complexe de Koszul associée à $\Sigma = Z^1 \cap Z^2$.

Par un argument de suite spectrale, la cohomologie totale du bicomplexe (3.3) est exactement $i_*\mathbf{C}$.

Bien sûr, tous les complexes de $\mathcal{O}_Z$-faisceaux peuvent être tensorisés par ξ. Donc on a un bicomplexe de fibrés holomorphes sur V,

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & \xi \longrightarrow & & \xi \to & 0 \\ & \mu\uparrow & & \mu\uparrow & \\ 0 \to & ([-Z^1] \oplus [-Z^2]) \otimes \xi \xrightarrow{v} & & \xi \oplus \xi \to & 0 \\ & \mu\uparrow & & \mu\uparrow & \\ 0 \to & [-Z] \otimes \xi \xrightarrow{v} & & \xi \to & 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & 0 & & 0 & \end{array} \tag{3.4}$$

Dans (3.4), on numérote les lignes de haut en bas par $(\xi^i_\bullet)(i = 0, 1, 2)$ et les colonnes de droite à gauche par $(\xi^\bullet_i)(i = 0, 1)$. Par (1.8), on sait que

$$(\xi^2_\bullet, v) = (\eta, v)_{|V \times \{s_0\}}. \tag{3.5}$$

b) Comparaison des formes de torsion analytique

Pour $k = 1, 2$, soit $g^{[Z^k]}$ une métrique hermitienne sur $[Z^k]$. On munit $[Z]$ de la métrique $g^{[Z]} = g^{[Z^1]} \otimes g^{[Z^2]}$. On munit aussi $[Z^1] \oplus [Z^2]$ de la métrique $g^{[Z^1] \oplus [Z^2]} = g^{[Z^1]} \oplus g^{[Z^2]}$. Alors $\Lambda([-Z^k]), \Lambda([-Z]), \Lambda([-Z^1] \oplus [-Z^2])$ sont munis naturels des métriques hermitiennes $g^{\Lambda([-Z^k])}, g^{\Lambda([-Z])}, g^{\Lambda([-Z^1] \oplus [-Z^2])}$.

Soit $H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_X(\xi^\bullet_{\bullet|X}), \mu + v)$. Soient $H(X, \xi^i_{\bullet|X})$ et $H(X, \xi^\bullet_{i|X})$ les hypercohomologies de $(\mathcal{O}_X(\xi^i_{\bullet|X}), v)$ et $(\mathcal{O}_X(\xi^\bullet_{i|X}), \mu)$. Comme dans [**B3**, §3.2], par la théorie de Hodge, on peut équiper des métriques L_2, $h^{H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X})}$, $h^{H(X, \xi^i_{\bullet|X})}$ et $h^{H(X, \xi^\bullet_{i|X})}$ $(i = 0, 1, 2)$ sur $H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X})$, $H(X, \xi^i_{\bullet|X})$ et $H(X, \xi^\bullet_{i|X})$ sur B associées à $g^{\Lambda([-Z^k])}, g^{\Lambda([-Z])}$, $g^{\Lambda([-Z^1] \oplus [-Z^2])}$, h^ξ et g^{TX}. D'après (3.3), sur B, on a

$$\begin{aligned} & H(X, \xi^0_{\bullet|X}) = H(X, \xi^\bullet_{0|X}) = 0, \\ & H^p(X, \xi^1_{\bullet|X}) = R^p(\pi j \rho)_*(j\rho)^*\xi), \\ & H^p(X, \xi^2_{\bullet|X}) = H^p(X, \eta_{|X}) = R^p\pi_*\xi, \\ & H^{p-1}(X, \xi^\bullet_{\bullet|X}) = H^p(X, \xi^\bullet_{1|X}) = R^p(\pi i)_* i^*\xi, \\ & h^{H(X, \xi^\bullet_{1|X})} = h^{H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X})}, \quad h^{H(X, \xi^2_{\bullet|X})} = h^{H(X, \eta_{|X})}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Par [**B3**, §3.2], on peut construire des formes de torsion analytique $T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_\bullet})$, $T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_i})$ et $T(\omega^V, h^{\xi^i_\bullet}) \in P^B$, telles que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_\bullet}) = \mathrm{ch}(H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X}), h^{H(X, \xi^\bullet_{\bullet|X})}) - \int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX}) \mathrm{ch}(\xi^\bullet_\bullet, h^{\xi^\bullet_\bullet}). \tag{3.7}$$

et les formes $T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_i}), T(\omega^V, h^{\xi^i_\bullet})$ vérifient des équations analogues. Remarque aussi $\mathrm{ch}(\xi^i_\bullet, h^{\xi^i_\bullet}) = \sum (-1)^j \mathrm{ch}(\xi^i_j, h^{\xi^i_j})$. Alors, par (1.9), on a

$$i^*_{s_0} T(n^*\omega^V, h^\eta) = T(\omega^V, h^{\xi^2_\bullet}). \tag{3.8}$$

On rappelle que le complexe L est défini en (2.1). Soit $h'^{R\pi_*L} = h^{H(X,\xi^2_{\bullet|X})} \oplus h^{H(X,\xi^1_{\bullet|X})} \oplus h^{H(X,\xi^\bullet_{\bullet|X})}$ la métrique sur $R^\bullet\pi_*L = R\pi_*\xi \oplus R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi \oplus R(\pi i)_* i^*\xi$. Comme en (2.3), soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h'^{R\pi_*L}) \in P^B/P^{B,0}$ la classe de Bott-Chern pour le complexe (2.2).

Théorème 3.1. *On a l'identité suivante dans* $P^B/P^{B,0}$,

$$-T(\omega^V, h^{\xi_1^\bullet}) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^i T(\omega^V, h^{\xi_\bullet^i}) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h'^{R\pi_*L}). \tag{3.9}$$

Preuve. Pour le bicomplexe $E = (\Omega(X, \xi^\bullet_\bullet), \overline{\partial}^X + v, \mu)$, si on le filtre par μ, alors le premier terme de la suite spectrale associée est $E_1^{p,i} = H^p(X, \xi^i_{\bullet|X})$. D'où le suite spectrale (E_r, d_r) dégénére à E_2. D'après l'argument de [**Ma1**, Théorème 11.1], [**B3**, Théorème 0.2], pour le complexe (3.4), dans $P^B/P^{B,0}$, on a

$$\begin{aligned} T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_\bullet}) &= \textstyle\sum_{i=0}^2(-1)^i T(\omega^V, h^{\xi^i_\bullet}) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h'^{R\pi_*L}),\\ T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_\bullet}) &= \textstyle\sum_{i=0}^1(-1)^i T(\omega^V, h^{\xi^\bullet_i}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

On vérifie facilement qu'on a

$$T(\omega^V, h^{\xi_0^\bullet}) = 0, \qquad T(\omega^V, h^{\xi^0_\bullet}) = 0. \tag{3.11}$$

Par (3.10), (3.11), on a (3.9). □

c) Preuve du Théorème 2.1

Soit

$$\begin{aligned} I_{\lambda'} &= T(\omega^V, h^{\xi_1^\bullet}) - T(\omega^\Sigma, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(X, \xi^\bullet_{1|X}), h^{H(X,\xi^\bullet_{1|X})}, h^{R(\pi i)_*(i^*\xi)}\Big),\\ I_{\lambda''} &= T(\omega^V, h^{\xi^1_\bullet}) - T(\omega^{\widehat{Z}}, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(X, \xi^1_{\bullet|X}), h^{H(X,\xi^1_{\bullet|X})}, h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi}\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Alors en utilisant [**B3**, Théorème 0.1] et en procédant comme en [**B2**, Théorème 6.1], on sait que dans $P^B/P^{B,0}$, $I_{\lambda'}, I_{\lambda''}$ sont égaux formellement aux mêmes formules que les termes à droite de [**B2**, (6.11)].

On rappelle que I_λ est défini en (1.17). Par [**BGS1**, Théorème 1.20], [**Ma1**, (10.7)], dans $P^B/P^{B,0}$, on a

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h'^{R\pi_*L}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h^{R\pi_*L})\\ &= \widetilde{\mathrm{ch}}\Big(R(\pi i)_* i^*\xi, h^{H(X,\xi^\bullet_{1|X})}, h^{R(\pi i)_*(i^*\xi)}\Big)\\ &-\widetilde{\mathrm{ch}}\Big(R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi, h^{H(X,\xi^1_{\bullet|X})}, h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi}\Big)\\ &+\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{H(X,\xi^2_{\bullet|X})}, h'^{R\pi_*\xi}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Par (1.10), (1.15), (3.7), (3.9) et (3.13), dans $P^B/P^{B,0}$, on a

$$T'(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) = I_\lambda + I_{\lambda'} - I_{\lambda''}. \tag{3.14}$$

Par (3.14), en procédant comme dans [**B2**, §6 et §7], on a le Théorème 2.1. □

4. Preuve du Théorème 2.1: le cas général

Dans cette section, on montre le Théorème 2.1 dans le cas général. On ne suppose donc plus que $Z = Z^1 \cup_\Sigma Z^2$. L'idée principale de la preuve est d'utiliser la technique de la déformation du cône normal [**BaFM**], [**BGS4**]. Elle réduit notre problème à un problème analytique naturellement localisé sur $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$, auquel la technique de [**B2**, §4 et §6] peut être appliquée.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans a), soit W l'éclaté de $V \times \mathbf{P}^1$ le long de $\Sigma \times \{\infty\}$, on relève le diviseur Z à un diviseur D dans W. Dans b), on calcule l'asymptotique des formes de torsion analytique sur $B \times \mathbf{P}^1$. Dans c), en utilisant les résultats de la Section 3, on sait que le problème peut être localisé sur $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$. Et on établit un résultat analogue de [**B2**, Théorème 9.16]. Dans d), on montre le Théorème 2.1 dans le cas général.

Pour simplifier les notations, on suppose toujours que $\Delta = \{s_0\}$. On utilise les même notations qu'aux Sections 1 et 2.

a) Diviseur D

Soit W l'éclaté de $V \times \mathbf{P}^1$ le long de $\Sigma \times \{\infty\}$. Soit p, q les projections $p : W \to V$, $q : W \to \mathbf{P}^1$. Pour $z \in \mathbf{P}^1$, on pose

$$W_z = q^{-1}(z). \tag{4.1}$$

Si $z \neq \infty$, l'application $p : W_z \to V$ est une identification de variétés complexes. Alors p^*Z est un diviseur sur W.

Définition 4.1. *Soit D le diviseur sur W*

$$D = p^*Z - 2P(N_{\Sigma/V} \oplus 1). \tag{4.2}$$

Par [**B3**, Proposition 9.2], D est un diviseur effectif dans W, transversaux avec W_∞, et à croisements normaux le long de $\Sigma \times \mathbf{P}^1$. On vérifie facilement que D est exactement l'éclaté de $Z \times \mathbf{P}^1$ le long de $\Sigma \times \{\infty\}$. En particulier, $W_\infty \cap D$ est l'union de la normalisation $\widehat{Z} = V_\Sigma \cap D$ de Z et de $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1) \cap D$ qui est un diviseur aux croisements normaux $P(N_{\widehat{\Sigma}/\widehat{Z}} \oplus 1)$ dans $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$, et ils sont transversaux le long de $\widehat{\Sigma}$.

Soit i_D l'immersion $D \to W$. Soit p_D, q_D les restrictions de p, q à D. Alors $p_D(D) \subset Z$. On note $\overline{q} = (\pi_1 \circ p, q) : W \to B \times \mathbf{P}^1$, $\overline{q}_D = \overline{q}_{|D}$. Pour $s \in \mathbf{P}^1$, on note aussi $D_z = p_D^{-1}(z)$. Soit D_B la fibre de la fibration $\pi \circ p : D \to B \times \{s_0\}$. Soit $H(Z_B, j^*\xi_{|Z_B})$ la cohomologie de ξ le long des fibres Z_B, alors $H(Z_B, j^*\xi_{|Z_B}) = R\pi_*\xi_{|B\times\{s_0\}}$. Par [**B2**, Proposition 9.3], on a

Proposition 4.2. *L'application linéaire $\alpha \in H(Z_B, j^*\xi_{|Z_B}) \to p_D^*\alpha \in H(D_B, (jp_D)^*\xi_{|D_B})$ induit une trivialisation de $R^\bullet\overline{q}_{D*}(jp_D)^*\xi$ sur $\mathbf{P}^1$.*

b) L'asymptotique des formes de torsion analytique sur $\mathbf{P}^1$

Soit g^{TS} une métrique sur TS. Soit $\sigma_{[\infty]}$ la section canonique de $[\infty]$ sur $\mathbf{P}^1$, soit $g^{[\infty]}$ la métrique canonique sur $[\infty] = \mathcal{O}(-1)$.

On rappelle que par (1.5), $[Z]_{|Z} = \pi_2^* TS$. Soit $g^{[Z]}$ une métrique hermitienne sur $[Z]$ telle que

$$([Z], g^{[Z]})_{|Z} = \pi_2^*(TS, g^{TS}). \tag{4.3}$$

Évidemment

$$[P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)]_{|\Sigma\times P^1} = q^*[\infty]_{|\Sigma\times P^1}. \tag{4.4}$$

Soit $g^{[P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)]}$ la métrique sur $[P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)]$ sur W telle que

$$\Big([P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)], g^{[P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)]}\Big)_{|\Sigma\times P^1} = q^*([\infty], g^{[\infty]}). \tag{4.5}$$

Par (4.2), on a

$$[D] = q^*[Z] \otimes [P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)]^{-2}. \tag{4.6}$$

Soit $g^{[D]}$ la métrique sur $[D]$ induite par $g^{[Z]}$ et $g^{[P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)]}$. Par (4.2)–(4.6), on a

$$([D], g^{[D]})_{|\Sigma\times P^1} = \Big((\pi_2 p)^* TS \otimes q^*[-2\infty], (\pi_2 p)^* g^{TS} \otimes q^* g^{[-2\infty]}\Big)_{|\Sigma\times P^1}. \tag{4.7}$$

On rappelle aussi que le complexe

$$(\xi_D, v) : 0 \to \mathcal{O}_W(p^*\xi \otimes [-D]) \overset{\sigma_{[D]}}{\to} \mathcal{O}_W(p^*\xi) \to 0. \tag{4.8}$$

est une résolution canonique de $i_{D*}\mathcal{O}_D((jp_D)^*\xi)$. Soit $H(X, \xi_{D|X})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_X(\xi_D), v)$, alors par (4.8), $H(X, \xi_{D|X}) \simeq R\overline{q}_{D*}(jp_D)^*\xi$.

Comme V est Kählérienne, W est aussi Kählérienne. Soit g^{TW} une métrique Kählérienne sur TW. Alors g^{TW} induit une métrique Kählérienne g^{TX} sur TX, et on munit les métriques hermitiennes associées sur les sous-variétés de W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

Soit $\widetilde{\pi} : W \to B \times S \times \mathbf{P}^1$ (resp. $\overline{\pi} : W \to B \times \mathbf{P}^1$) définie par

$$\widetilde{\pi} = (\pi_1 p, \pi_2 p, q) \quad (\text{resp. } \overline{\pi} = (\pi_1 p, q)). \tag{4.9}$$

Plus précisément, $\widetilde{\pi} : W \setminus (W_\infty \cup Z \times \mathbf{P}^1) \to B \times (S \setminus \Delta) \times (\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\})$ est une submersion de fibre compacte Y. Soit $p_{B\times S} : B \times S^1 \times \mathbf{P}^1 \to B \times S$ la projection naturelle. Par la Proposition 4.2, $R^\bullet\widetilde{\pi}_*\xi$ est localement libre sur $B \times S \times \mathbf{P}^1$, et $R^\bullet\widetilde{\pi}_*\xi = p^*_{B\times S} R\pi_*\xi$. Soit $h^{R\widetilde{\pi}_*\xi}$ la métrique L_2 sur $R\widetilde{\pi}_*\xi$ sur $B\times(S\setminus\Delta)\times(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\})$ associée à h^ξ, g^{TW}. Soit $h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}$ une métrique hermitienne sur $R\widetilde{\pi}_*\xi$ sur $B\times S\times\mathbf{P}^1$.

Soit $h^{H(X,\xi_{D|X})}$ la métrique L_2 sur $H(X, \xi_{D|X})$ associée aux métriques h^ξ, $h^{[D]}$, g^{TX} définie par [**B3**, §3.2] sur $B \times (\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\})$. En remplaçant formellement V par W, π par $\widetilde{\pi}$, ξ par $p^*\xi$ à la Section 1, soient

$$\begin{aligned} T(\omega^W, h^\xi) &\in P^{B\times(S\setminus\Delta)\times(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\})}/P^{B\times(S\setminus\Delta)\times(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\}),0}, \\ T(\omega^W, h^{\xi_D}) &\in P^{B\times(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\})}/P^{B\times(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\}),0} \end{aligned}$$

les formes de torsion analytique associées à $(\widetilde{\pi}, \omega^W, h^\xi)$, $(\overline{\pi}, \omega^W, h^{\xi_D})$ pour (4.8) [**BK**], [**B3**, §3.2], en particulier,

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T(\omega^W, h^{\xi_D}) = \mathrm{ch}(H(X, \xi_{D|X}), h^{H(X,\xi_{D|X})}) - \int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX}) \mathrm{ch}(\xi_D, h^{\xi_D}).$$

et

$$\mathrm{ch}(\xi_D, h^{\xi_D}) = \mathrm{ch}(p^*\xi, h^{p^*\xi}) - \mathrm{ch}(p^*\xi \otimes [-D], h^{p^*\xi\otimes[-D]}).$$

Pour $z \in \mathbf{P}^1, s \in S$, soient $\tau_{s,z} : B \to B \times S \times \mathbf{P}^1$ et $\tau_z : B \to B \times \mathbf{P}^1$ les applications de $y \in B$ à $(y, s, z) \in B \times S \times \mathbf{P}^1$ et $(y, z) \in B \times \mathbf{P}^1$.

Définition 4.3. *Pour $z \in \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$, $s_0 \in \Delta$, dans $P^B/P^{B,0}$, on pose*

$$T_z(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) = \lim_{S\setminus\Delta\ni s\to s_0} \Big\{ \tau_{s,z}^* \Big[T(\omega^W, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\widetilde{\pi}_*\xi, h^{R\widetilde{\pi}_*\xi}, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \Big] + \frac{1}{2} \log(\|\sigma_{[\Delta]}\|_s^2 \|\sigma_{[\infty]}\|_z^{-4}) \int_{\Sigma_B} \mathrm{Td}(T\Sigma_B) E(N_{\Sigma/V}) \mathrm{ch}(\xi) \Big\}. \tag{4.10}$$

En effet, pour $z \in \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$, la Définition 4.3 correspond exactement au Théorème 1.3, dans lequel V est remplacé par W_z. Comme en (1.17), $I_{\lambda,z}$ est bien défini, et dans $P^B/P^{B,0}$, on a

$$I_{\lambda,z} = \tau_z^* T(\omega^W, h^{\xi_D}) - T_z(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) - \tau_z^* \widetilde{\mathrm{ch}}(R\widetilde{\pi}_*\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}, h^{H(X,\xi_{D|X})}). \tag{4.11}$$

En procédant comme dans [**B2**, Théorème 9.9], on a

Théorème 4.4. *La fonction $z \in \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\} \to I_{\lambda,z} \in P^B/P^{B,0}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{P}^1$.*

Remarque 4.5. Si on note $I_{\lambda,\infty} = \lim_{z\to\infty} I_{\lambda,z} \in P^B/P^{B,0}$, alors $I_{\lambda,\infty}$ a une formule analogue que le terme à droite de [**B2**, (9.37)].

On rappelle que U est le fibré en droite universel sur $P(N_{\Sigma/V})$.

Théorème 4.6. *Quand $z \to \infty$*

$$\lim_{z\to\infty} \Big\{ T_z(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) - \log|z|^2 [\int_{\widehat{\Sigma}_B} \mathrm{Td}(T\widehat{\Sigma}_B) E(U) \mathrm{ch}(\xi)] \Big\} \tag{4.12}$$

a une limite dans $P^B/P^{B,0}$. On note cette limite comme $T_\infty(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$.

Preuve. On rappelle que la fibration $W \to B \times \mathbf{P}^1$ vérifie les hypothèses de la Section 1. Comme $H(X, \xi_{D|X})$ est localement libre sur $B \times \mathbf{P}^1$, par les Théorèmes 1.2 et 1.3 et [**B2**, (9.47)], pour la fibration $\overline{q} : W \to B \times \mathbf{P}^1$, on a

$$\lim_{z\to\infty} \Big\{ \tau_z^* T(\omega^W, h^{\xi_D}) - \tau_z^* \widetilde{\mathrm{ch}}(R\widetilde{\pi}_*\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}, h^{H(X,\xi_{D|X})}) - \log|z|^2 [\int_{\widehat{\Sigma}_B} \mathrm{Td}(T\widehat{\Sigma}_B) E(U) \mathrm{ch}(\xi)] \Big\}$$

existe dans $P^B/P^{B,0}$. Par le Théorème 4.4, on a le Théorème 4.6. $\square$

Pour la fibration $\widetilde{\pi} : W \setminus W_\infty \to B \times S \times (\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\})$, $Z \times (\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\})$ sont les fibres singulières, comme en (2.4), sur $B \times \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$, on peut définir

$$T'(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \in P^{B\times(P^1\setminus\{\infty\})}/P^{B\times(P^1\setminus\{\infty\}),0}.$$

Théorème 4.7. *Quand* $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty} \Big\{\tau_z^* T'(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) - \log|z|^2[\int_{\widehat{\Sigma}_B} \mathrm{Td}(T\widehat{\Sigma}_B)E(U)\mathrm{ch}(\xi)]\Big\} \tag{4.13}$$

a une limite dans $P^B/P^{B,0}$, *qu'on le note comme* $T'_\infty(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$.

Preuve. Comme en [**B2**, (9.40)],

$$N_{\widehat{\Sigma}_\infty/D} = N_{P(N_{\Sigma/V})/W}|_{\widehat{\Sigma}_\infty} = (U \oplus U^{-1})|_{\widehat{\Sigma}}.$$

Par les Théorèmes 1.2 et 1.3, on a le Théorème 4.7. □

Remarque 4.8. Pour $(\tau_z^* T' - T_z)(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi})$, on a aussi un résultat analogue que [**B2**, Théorème 9.12].

c) Localisation du calcul à ∞ sur $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$

On a $P(N_{\Sigma/V}) \subset P(N_{\Sigma/V} \oplus 1) \subset W_\infty$, et $\widehat{\Sigma}_\infty = D \cap P(N_{\Sigma/V})$. Soit

$$D' = D \cap P(N_{\Sigma/V} \oplus 1). \tag{4.14}$$

Alors D' est un diviseur à croisements normaux le long de Σ dans $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$, et $\Sigma \subset D'$ est l'ensemble des points singuliers dans D'. Soit j' l'immersion $D' \to P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$. Soit $j'_1 : D' \to D_\infty = W_\infty \cap D$ l'immersion naturelle.

Par §4a), $\widehat{\Sigma}_\infty$ s'identifie à $\widehat{\Sigma}$ dans §1a), et $\rho : \widehat{\Sigma}_\infty \to \Sigma$ est un revêtement double et $\kappa = \det \rho_! \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}$. Soit $p_\Sigma : P(N_{\Sigma/V} \oplus 1) \to \Sigma$ la projection canonique. Sur Σ, on a une suite exacte de faisceaux

$$(K, v) : \quad 0 \to \mathcal{O}_\Sigma \xrightarrow{e} \rho_* \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \xrightarrow{f} \mathcal{O}_\Sigma(\kappa) \to 0. \tag{4.15}$$

En (4.15), e est l'application diagonale $x \to (x, x)$, f est l'application de différence $(x, y) \to x - y$. Rappelle que $i : \Sigma \to V$ est l'immersion naturelle. Par (4.15), on a un complexe acyclique de fibrés holomorphes sur B

$$(R(\pi i)_* K, v) : \cdots \to H^j(\widehat{\Sigma}_B, (\pi i \rho)^*\xi) \to H^j(\Sigma_B, i^*\xi \otimes \kappa) \to H^{j+1}(\Sigma_B, i^*\xi) \to \cdots. \tag{4.16}$$

Soit k l'immersion $\Sigma \to D'$, soit $\widehat{D}'$ la normalisation de D'. Alors $\widehat{D}'$ est l'éclaté de D' le long de Σ. Soit $\rho' : \widehat{D}' \to D'$ la projection canonique. Alors on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{D'} \to \rho'_* \mathcal{O}_{\widehat{D}'} \to k_* \mathcal{O}_\Sigma(\kappa) \to 0. \tag{4.17}$$

Sur $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1) \subset W_\infty$, le complexe

$$(\xi_{D'}, v) : 0 \to \mathcal{O}_{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)}([-D'] \otimes (ip)^*\xi) \xrightarrow{\sigma_{[D']}} \mathcal{O}_{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)}((ip)^*\xi) \to 0. \tag{4.18}$$

est une résolution canonique de $j'_* \mathcal{O}_{D'}((ipj')^*\xi)$ sur $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$, et $(\xi_{D'}, v)$ est exactement la restriction du complexe (ξ_D, v) en (4.8) à $P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$.

On note $D'_B, \widehat{D}'_B, P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B, P(N_{\Sigma/V})_B, V_{\Sigma|B}$ les fibres des fibrations de $D', \widehat{D}'$, $P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)$, $P(N_{\Sigma/V})$, V_Σ à B. Par un argument de suite spectrale, on sait que [**B3**, §9e)]

$$\begin{aligned} &H(D'_B,(ipj')^*\xi) = H(\Sigma_B, i^*\xi),\\ &H(\widehat{D}'_B,(ipj'\rho')^*\xi) = H(\widehat{\Sigma}_B,(i\rho')^*\xi),\\ &H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,[-D']\otimes(ip)^*\xi) = 0,\\ &H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,(ip)^*\xi) = H(\Sigma_B, i^*\xi). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Plus précisément, on vérifie facilement que, sous l'isomorphisme canonique de (4.19), les suites exactes longues de cohomologie associées à (4.15), (4.17) sont (4.16).

On rappelle que Σ et $P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)$ ont été équipés naturellement des métriques induites par g^{TW} comme dans §4a). La métrique g^{TW} induit aussi une métrique sur $T\widehat{D}'$. De même, tous les fibrés holomorphes considérés $(ip)^*\xi, [-D'], \dots$ sont déjà équipés des métriques hermitiennes induites, par exemple, $g^{TP(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B}, g^{T\widehat{D}'_B}$ sont les métriquess induites sur les fibrés tangents relatifs $TP(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B$, $T\widehat{D}'_B$.

Soit $H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B, \xi_{D'})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B}(\xi_{D'}), v)$. Par (4.18), on sait que

$$H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B, \xi_{D'}) = H(D'_B,(ipj')^*\xi) = H(\Sigma_B, i^*\xi). \tag{4.20}$$

Soit $h^{H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,\xi_{D'})}$, $h^{H(\widehat{D}'_B,(ipj'\rho')^*\xi)}$ les métriques L_2 sur $H(\Sigma_B, i^*\xi)$, $H(\widehat{\Sigma}_B, (i\rho')^*\xi)$ sur B induites par $(g^{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B}, h^{\xi_D})$, $(g^{T\widehat{D}'_B}, h^\xi)$ [**B3**, §3.2]. Rappelle que $h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}$ est la métrique L_2 sur $R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)$ définie à §1b). On munit $R^\bullet(\pi i)_*K$ de la métrique $h^{R(\pi i)_*K} = h^{H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,\xi_{D'})} \oplus h^{H(\widehat{D}'_B,(ipj'\rho')^*\xi)} \oplus h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}$. Alors par (4.16), il existe une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet(\pi i)_*K, h^{R(\pi i)_*K}) \in P^B/P^{B,0}$ [**BGS1**, §1f)] telle que

$$\begin{aligned} \frac{\bar\partial\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet(\pi i)_*K, h^{R(\pi i)_*K}) =&\mathrm{ch}(H(\widehat{\Sigma}_B,(i\rho')^*\xi), h^{H(\widehat{D}'_B,(ipj'\rho')^*\xi)})\\ &- \mathrm{ch}(H(\Sigma_B, i^*\xi), h^{H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,\xi_{D'})})\\ &- \mathrm{ch}(R^\bullet(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa), h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Soit $T(\omega^{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)}, h^{\xi_{D'}}) \in P^B/P^{B,0}$ les formes de torsion analytique associées au complexe (4.18) et $(\pi i p_\Sigma, h^{\xi_D})$ [**B3**, §3.2]. Soit $T(\omega^{\widehat{D}'}, h^\xi) \in P^B/P^{B,0}$ les formes de torsion analytique associées à $(ipj'\rho' : \widehat{D}' \to B\times\{s_0\}, \omega^{\widehat{D}'}, h^\xi)$. Soit

$$\begin{aligned} I_{\lambda(ipj')} = &-T(\omega^{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)}, h^{\xi_{D'}}) + T(\omega^{\widehat{D}'}, h^\xi)\\ &-T(\omega^\Sigma, h^{i^*\xi\otimes\kappa}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet(\pi i)_*K, h^{R(\pi i)_*K}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Rappelle que V_Σ est l'éclaté de V le long de Σ. Par la Section 4a) et (4.8), le complexe

$$(\xi_{D|V_\Sigma}, v) : 0 \to (p^*\xi\otimes[-D])_{|V_\Sigma} \xrightarrow{\sigma[D]} p^*\xi_{|V_\Sigma} \to 0. \tag{4.23}$$

est une résolution canonique de $\mathcal{O}_{\widehat{Z}}(p^*\xi)$ sur V_Σ. Le complexe

$$(\xi_{D|P(N_{\Sigma/V})}, v) : 0 \to (p^*\xi \otimes [-D])_{|P(N_{\Sigma/V})} \overset{\sigma_{[D]}}{\to} p^*\xi_{|P(N_{\Sigma/V})} \to 0. \tag{4.24}$$

est une résolution canonique de $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}(p^*\xi)$ sur $P(N_{\Sigma/V})$.

Soient $H(V_{\Sigma|B}, \xi_D)$ et $H(P(N_{\Sigma/V})_B,\, \xi_D)$ les hypercohomologies de

$$(\mathcal{O}_{V_{\Sigma|B}}(\xi_{D|V_\Sigma}),\ v),\ (\mathcal{O}_{P(N_{\Sigma/V})_B}(\xi_{D|P(N_{\Sigma/V})}), v).$$

Par (4.23) et (4.24), on a

$$\begin{aligned} H(V_{\Sigma|B}, \xi_D) &= H(\widehat{Z}_B, (j\rho)^*\xi) = R(\pi j \rho)_*(j\rho)^*\xi, \\ H(P(N_{\Sigma/V})_B, \xi_D) &= H(\widehat{\Sigma}_B, (i\rho)^*\xi). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Soient $h^{H(V_{\Sigma B},\xi_D)}$, $h^{H(P(N_{\Sigma/V})_B,\xi_D)}$ les métriques L_2 associées sur $H(\widehat{Z}_B, (j\rho)^*\xi)$, $H(\widehat{\Sigma}_B, (i\rho)^*\xi)$ sur B [**B3**, §3.2].

On rappelle que le complexe $(R^\bullet\pi_*L, v)$ est défini en (2.2). On munit $R^\bullet\pi_*L$ de la métrique

$$h'^{R\pi_*L} = \oplus h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi} \oplus h^{H(V_{\Sigma|B},\xi_D)} \oplus h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}.$$

Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*L, h'^{R\pi_*L}) \in P^B/P^{B,0}$ la classe de Bott-Chern [**BGS1**] telle qu'elle vérifie une équation analogue de (2.3).

On munit $R^\bullet(\pi i)_*K$ de la métrique

$$h'^{R(\pi i)_*K} = \oplus h^{H(P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)_B,\xi_{D'})} \oplus h^{H(V_{\Sigma|B},\xi_D)} \oplus h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}.$$

Comme en (4.21), on l'associe une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet(\pi i)_*K,\ h'^{R(\pi i)_*K})$ $\in P^B/P^{B,0}$. On a aussi [**B2**, (9.35)]

$$N_{P(N_{\Sigma/V})/W} = U \oplus U^{-1}. \tag{4.26}$$

Soit $W_{P(N_{\Sigma/V})}$ l'éclaté de W le long de $P(N_{\Sigma/V}) \subset W_\infty$ et $p_{P(N_{\Sigma/V})} : W_{P(N_{\Sigma/V})} \to W$ la projection correspondante. Alors, $\widehat{W}_\infty$ la normalisation de W_∞ est un diviseur lisse dans $W_{P(N_{\Sigma/V})}$, qui sont transversaux le long de $P(U \oplus U^{-1})$.

Soient $\widehat{D}, \widehat{D}_\infty$ les normalisations de D, D_∞. Soit $\rho_D : \widehat{D} \to D, \widehat{\rho} : \widehat{D}_\infty \to D_\infty$ les projections naturelles. Soit $i_1 : \Sigma \to D_\infty$ l'immersion naturelle.

Sur D_∞, on a un bicomplexe de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & & \mathcal{O}_{W_\infty|D_\infty} & \xrightarrow{v_1} & \rho_{D*}\mathcal{O}_{\widehat{D}|D_\infty} & \overset{v_2}{\to} & i_{1*}\rho_{D*}\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \to 0 \\ & & \mu_1\downarrow & & \mu_1\downarrow & & \mu_1\downarrow \\ 0 \to & & p_{P(N_{\Sigma/V})*}\mathcal{O}_{\widehat{W}_\infty|D_\infty} & \xrightarrow{v_1} & \widehat{\rho}_*\mathcal{O}_{\widehat{D}_\infty} & \overset{v_2}{\to} & i_{1*}\rho_{D*}\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \to 0 \\ & & \mu_2\downarrow & & \mu_2\downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & & i_{1*}\rho_*\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_\infty} & \xrightarrow{v_1} & i_{1*}\rho_*\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_\infty} & \to & 0 \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \tag{4.27}$$

Dans (4.27), on a

$$\begin{aligned} p_{P(N_{\Sigma/V})*}\mathcal{O}_{\widehat{W}_\infty|D_\infty} &= \mathcal{O}_{D_\infty\cap V_\Sigma} \oplus \mathcal{O}_{D'}, \\ \widehat{\rho}_*\mathcal{O}_{\widehat{D}_\infty} &= \mathcal{O}_{D_\infty\cap V_\Sigma} \oplus \rho'_*\mathcal{O}_{\widehat{D}'}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Les v_1, μ_1 sont des morphismes naturelles, v_2, μ_2 sont des morphismes de différence. De plus, comme $W_\infty = V_\Sigma \cup_{P(N_{\Sigma/V})} P(N_{\Sigma/V} \oplus 1)$, les v_1, μ_1 des troisièmes lignes et colonnes sont des identités.

Après avoir tensorisé (4.27) par $p^*\xi$, on note les lignes de haut en bas par $L^i_\bullet$ $(i = 0, 1, 2)$, et les colonnes de gauche à droite par $L^\bullet_i$ $(i = 0, 1, 2)$. On note aussi $R\pi_* L^i_\bullet$, $R\pi_* L^\bullet_i$ $(i = 0, 1, 2)$ les suites exactes longues de la cohomologie de $L^i_{\bullet|D_\infty|B}$, $L^\bullet_{i|D_\infty|B}$. Par (4.27), on a un bicomplexe de fibrés vectoriels sur B

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H^i(D_{\infty|B}, p^*\xi) & \xrightarrow{v_1} & X_i & \xrightarrow{v_2} & H^i(\Sigma_{|B}, i^*\xi \otimes \kappa) & \to \cdots \\
 & \mu_1 \downarrow & & \mu_1 \downarrow & & \mu_1 \downarrow & \\
\cdots \to & H^i(D_{\infty|B}, p_{P(N_{\Sigma/V})*}\mathcal{O}_{\widehat{W}_\infty} \otimes p^*\xi) & \xrightarrow{v_1} & Y_i & \xrightarrow{v_2} & H^i(\Sigma_{|B}, i^*\xi \otimes \kappa) & \to \cdots \\
 & \mu_2 \downarrow & & \mu_2 \downarrow & & \mu_2 \downarrow & \\
\cdots \to & H^i(\Sigma_{|B}, i^*\xi \otimes \kappa) & \xrightarrow{v_1} & Z_i & \xrightarrow{v_2} & 0 & \to \cdots
\end{array} \tag{4.29}$$

(avec $X_i = H^i(D_{\infty|B}, \rho_{D*}\mathcal{O}_{\widehat{D}} \otimes p^*\xi)$, $Y_i = H^i(D_{\infty|B}, \widehat{\rho}_*\mathcal{O}_{\widehat{D}_\infty} \otimes p^*\xi)$, $Z_i = H^i(\Sigma_{|B}, i^*\xi \otimes \kappa)$) dont les lignes sont exactes.

Soit $h'^{R\pi_* L^i_j}$ $(i, j = 0, 1, 2)$ une métrique hermitienne sur $R^\bullet\pi_* L^i_j$ sur B. Alors elle induit des métriques $h'^{R\pi_* L^i_\bullet}$ et $h'^{R\pi_* L^\bullet_j}$ sur $R^\bullet\pi_* L^i_\bullet$ et $R^\bullet\pi_* L^\bullet_j$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_* L^i_\bullet, h'^{R\pi_* L^i_\bullet})$ et $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_* L^\bullet_j, h'^{R\pi_* L^\bullet_j}) \in P^B/P^{B,0}$ les classes de Bott-Chern associées [**BGS1**, §1f)] qui vérifient des équations analogues à (4.21). Par (4.27), (4.29), d'après un argument de suite spectrale, en utilisant [**Ma1**, Théorème 10.7], dans $P^B/P^{B,0}$, on a

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_* L^i_\bullet, h'^{R\pi_* L^i_\bullet}) = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_* L^\bullet_j, h'^{R\pi_* L^\bullet_j}). \tag{4.30}$$

Rappelle que $p_\Sigma : P(N_{\Sigma/V} \oplus 1) \to \Sigma$ est la projection naturelle. Soient $T(\omega^{V_\Sigma}, h^{\xi_D})$, $T(\omega^{P(N_{\Sigma/V})}, h^{\xi_D}) \in P^B/P^{B,0}$ les formes de torsion analytique de (4.23), (4.24) associées à $(\pi_1\overline{p}, h^{\xi_D})$, $(\pi i p_{\Sigma|P(N_{\Sigma/V})}, h^{\xi_D})$ [**B3**, §3.2]. On pose

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_1} &= T(\omega^{V_\Sigma}, h^{\xi_D}) - T(\omega^{\widehat{Z}}, h^{\xi}) \\
&\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(\widehat{Z}_B, (j\rho)^*\xi), h^{R(\pi j\rho)_*(j\rho)^*\xi}, h^{H(X_{\Sigma B}, \xi_D)}\Big), \\
I_{\lambda_2} &= T(\omega^{P(N_{\Sigma/V})}, h^{\xi_D}) - T(\omega^{\Sigma}, h^{i^*\xi\otimes\kappa}) \\
&\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(\widehat{\Sigma}_B, (i\rho)^*\xi), h^{R(\pi i)_*(i^*\xi\otimes\kappa)}, h^{H(P(N_{\Sigma/V})_B, \xi_D)}\Big).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour les formes de torsion analytique $T(\omega^W, h^{\xi_D})$ associées à $\overline{q} : W \to B \times \mathbf{P}^1$ et le complexe (ξ_D, v) (cf. (4.8)), comme $\overline{q}$ est singulière sur $B \times \{\infty\}$, en procédant comme dans les Sections 1 et 2, on définit $T(\omega^{W_\infty}, h^{\xi_D}, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi})$ et $T'(\omega^{W_\infty}, h^{\xi_D}, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$. Comme on a fait après (2.2), on définit

$$h^{R\pi_* L^\bullet_0} = h'^{R\pi_*\xi} \oplus h^{H(D_{\infty|B}, p_{P(N_{\Sigma/V})*}\mathcal{O}_{\widehat{W}_\infty} \otimes p^*\xi)} \oplus h^{H(\Sigma_{|B}, \rho_*\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_\infty} \otimes i^*\xi)}$$

la métrique L^2 sur $R^\bullet\pi_* L_0^\bullet$ induite par h^{ξ_D}, g^{TW}. Comme $W_\infty = V_\Sigma \cup_{P(N_{\Sigma/V})} P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)$, par (2.4), on a

$$\begin{aligned} T'(\omega^{W_\infty}, h^{\xi_D}, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) = T(\omega^{V_\Sigma}, h^{\xi_D}) + T(\omega^{P(N_{\Sigma/V}\oplus 1)}, h^{\xi_D}) \\ -T(\omega^{P(N_{\Sigma/V})}, h^{\xi_D}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_* L_0^\bullet, h^{R\pi_* L_0^\bullet}). \end{aligned} \tag{4.32}$$

On rappelle aussi que $\widehat{D}$ est la normalisation de D et $\rho' : \widehat{D} \to D$ est la projection canonique. Par la Proposition 4.2, $R(\overline{q}_D\rho')_*(jp_D\rho')^*\xi$ est localement libre sur $B\times\mathbf{P}^1$. Comme dans les Sections 1 et 2, on peut définir $T(\omega^{\widehat{D}_\infty}, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi})$ et $T'(\omega^{\widehat{D}_\infty}, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \in P^B/P^{B,0}$ sur B pour la fibration $p_D\rho' : \widehat{D} \to B\{s_0\}\times\mathbf{P}^1$.

On a une équation analogue que [**B2**, (9.92)].

Proposition 4.9. *On a l'équation suivante dans $P^B/P^{B,0}$,*

$$\begin{aligned} &I_{\lambda,\infty} - I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} - (T'-T)(\omega^{\widehat{D}_\infty}, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \\ &\quad +(T'-T)(\omega^{W_\infty}, h^{\xi_D}, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) \\ &\quad = (T'_\infty - T_\infty)(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) - I_{\lambda(ipj')}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Preuve. Par [**Ma1**, (10.7)], Remarque 4.5, (4.11)–(4.13), (4.22), (4.30)–(4.32), on a (4.33). □

Théorème 4.10. *Le terme $(T'_\infty - T_\infty)(\omega^D, h^\xi, h'^{R\widetilde{\pi}_*\xi}) - I_{\lambda(ipj')} \in P^B/P^{B,0}$ est égal exactement le même terme à droite de* [**B2**, (9.69)].

Preuve. En effet, le terme $\log(\frac{\|\ \|_{\lambda((jp_D)^*\xi)}}{\|\ \|'_{\lambda((jp_D)^*\xi)}})^2(\infty)$ dans [**B2**, (9.69)] correspond à $(T'_\infty - T_\infty)$, le terme $\log(\frac{\|\ \|^{\sim}_{\lambda((ipj')^*\xi)}}{\|\ \|'_{\lambda((ipj')^*\xi)}})^2$ dans [**B2**, (9.69)] correspond à $I_{\lambda(ipj')}$. Par (4.33), et en procédant comme en [**B2**, Théorème 9.16], on a le Théorème. □

d) Preuve du Théorème 2.1

En procédant comme en [**B2**, §9f) et §9g)], et en remplaçant les métriques de Quillen par les formes de torsion analytique, on a le Théorème 2.1. □

5. Fonctorialité de la renormalisation de formes de torsion analytique

Dans cette section, on explique la compatibilité du Théorème 2.1 et [**BerB**, Théorème 3.1]. Comme ça concerne des fibrés singulières, la vérification n'est pas toujours triviale.

Cette section est organisée de la manière suivante. Dans a), on étudie des classes de Bott-Chern près des fibres singulières. Dans b), on donne une version de [**BerB**, Théorème 3.1] aux fibres singulières.

Dans cette section, on fait les mêmes hypothèses et utilise toujours les mêmes notations qu'aux Sections 1 et 2.

a) Classes de Bott-Chern près des fibres singulières

On considère la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens sur $V \setminus \Sigma$

$$0 \to TY \to TZ \to \pi_1^* TB \to 0. \tag{5.1}$$

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TB, g^{TZ}, g^{TB}) \in P^{V\setminus\Sigma}/P^{V\setminus\Sigma,0}$ la classe de Bott-Chern de [**BGS1**] telle que

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TB, g^{TZ}, g^{TY})\\ &\quad = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\mathrm{Td}(TB, g^{TB}))\mathrm{Td}(TY, g^{TY}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Par [**B2**, Théorème 1.1], le fibré verctoriel TZ sur $V_\Sigma \setminus P(N_{\Sigma/V}) \simeq V \setminus \Sigma$ s'étend en un sous-fibré $v(TV/S)$ de $\overline{p}^*TV$ sur V_Σ, de plus, le fibré $v(TV/B \times S)$ défini à §1e) est un sous-fibré de $v(TV/S)$. Sur $\widehat{Z}$, on a

$$T\widehat{Z} = v(TV/S). \tag{5.3}$$

Soit $g^{T\widehat{Z}}, g^{v(TV/S)}$ les métriques sur $T\widehat{Z}, v(TV/S)$ induites par g^{TV}. Par (2.9), on a un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes sur $P(N_{\Sigma/V})$,

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \pi_\Sigma^* \, T\Sigma/B \times \Delta & \to & v(\,TV/B \times S) & \to & U \otimes p_\Sigma^* \kappa & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \pi_\Sigma^* \, T\Sigma/S & \to & v(\,TV/S) & \to & U \otimes p_\Sigma^* \kappa & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \pi_\Sigma^* \, TB & \to & \pi_\Sigma^* \, TB & \to & 0 & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array} \tag{5.4}$$

Soient

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), g^{v(TV/S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}), \widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), TB, g^{v(TV/S)}, g^{TB})\\ &\qquad\qquad \in P^{P(N_{\Sigma/V})}/P^{P(N_{\Sigma/V}),0}\end{aligned}$$

les classes de Bott-Chern associées aux deuxièmes ligne et colonne de (5.4). Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(T\Sigma/S, TB, g^{T\Sigma/S}, g^{TB}) \in P^\Sigma/P^{\Sigma,0}$ la classe de Bott-Chern associée à la première colonne de (5.4). Par (5.4), et l'unicité de la classe de Bott-Chern [**BGS1**, Théorème 1.29], dans $P^{P(N_{\Sigma/V})}/P^{P(N_{\Sigma/V}),0}$, on a ([**B2**, (9.72)])

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), g^{v(TV/S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa})\\ &\quad -\widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/B\times S), g^{v(TV/B\times S)}, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa})\mathrm{Td}(TB, g^{TB})\\ &\quad = \widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), TB, g^{v(TV/S)}, g^{TB})\\ &\quad -\widetilde{\mathrm{Td}}(T\Sigma/S, TB, g^{T\Sigma/S}, g^{TB})\mathrm{Td}(U\otimes p_\Sigma^*\kappa, g^{U\otimes p_\Sigma^*\kappa}).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Proposition 5.1. *Pour $\mu \in P^V$ fixé, quand $s \in S \setminus \Delta \to s_0 \in \Delta$, on a*

$$\int_{Z_s} \mu \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TB, g^{TZ}, g^{TB}) = \int_{\widehat{Z}} \mu \widetilde{\mathrm{Td}}(T\widehat{Z}, TB, g^{T\widehat{Z}}, g^{TB}) \tag{5.6}$$
$$+2 \int_{P(N_{\Sigma/V})} \mu \widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), TB, g^{v(TV/S)}, g^{TB}) + O(s - s_0).$$

Preuve. Soit $\mu_1 \in P^{V_\Sigma}$, par l'argument dans [**B2**, Théorème 2.1], quand $s \in S \backslash \Delta \to s_0 \in \Delta$, on a

$$\int_{Z_s} \mu_1 = \int_{\widehat{Z}} \mu_1 + 2 \int_{P(N_{\Sigma/V})} \mu_1 + O(s - s_0). \tag{5.7}$$

On a aussi

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TB, g^{TZ}, g^{TB})_{B \times \{s\}} = \widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), TB, g^{v(TV/S)}, g^{TB})_{B \times \{s\}}. \tag{5.8}$$

Par (5.7) et (5.8), on a la Proposition. □

b) Fonctorialité des formes de torsion analytique

On rappelle que $h'^{R\pi_*\xi}$ est une métrique $\mathcal{C}^\infty$ sur $R^\bullet \pi_* \xi$ sur $B \times S$.

Soit $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet \pi_* \xi)$ les fibrés en droite sur S qui sont les inverses des déterminants de $H(Z, \xi_{|Z})$ et $H(B, R^\bullet \pi_* \xi_{|B})$. Alors par [**KM**], le fibré en droite $\lambda(\xi) \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet \pi_* \xi)$ a une section canonique non nulle σ_1 sur S. Soit $\| \ \|'_{\lambda(R^\bullet \pi_* \xi)}$ la métrique de Quillen sur $\lambda(R^\bullet \pi_* \xi)$ associées aux métriques $g^{TB}, h'^{R\pi_*\xi}$ sur TB, $R\pi_*\xi$. Soit $\| \ \|_{\lambda(\xi)_{|\Delta}}$ la métrique renormalisée définie dans [**B2**, (0.7)]. Soit $\| \ \|_{\lambda(\xi)_{|\Delta} \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet \pi_* \xi)}$ la métrique sur $\lambda(\xi)_{|\Delta} \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet \pi_* \xi)$ induite par $\| \ \|_{\lambda(\xi)_{|\Delta}}$ et $\| \ \|'_{\lambda(R^\bullet \pi_* \xi)}$.

Théorème 5.2. *On a l'identité*

$$\begin{aligned} &\log(\|\sigma_1\|^2_{\lambda(\xi)_{|\Delta} \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet \pi_* \xi)}) \\ &= \int_B \mathrm{Td}(TB, g^{TB}) T(\omega^Z, h^\xi, h'^{R\pi_*\xi}) \\ &\quad - \int_{\widehat{Z}} \widetilde{Td}(T\widehat{Z}, TB, g^{T\widehat{Z}}, g^{TB}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ &\quad -2 \int_{P(N_{\Sigma/V})} \widetilde{\mathrm{Td}}(v(TV/S), TB, g^{v(TV/S)}, g^{TB}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Preuve. Par (1.16), Théorème 1.3, Proposition 5.1, on a le Théorème 5.2. □

Soient σ_2 et σ_3 les sections canoniques non-nulles de

$$\lambda((j\rho)^*\xi) \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet (\pi j \rho)_* (j\rho)^* \xi), \quad \lambda(i^*\xi) \otimes \lambda^{-1}(R^\bullet (\pi i)_* i^* \xi).$$

Soient τ_1 et τ_2 les sections canoniques non-nulles des inverses du déterminant de cohomologie associées à (2.1) et (2.2). Pour simplifier, on note $\|\tau_i\|, \|\sigma_i\|$ les métriques de Quillen associées. Par un argument de suite spectrale [**KM**], on a

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2^{-1} \otimes \sigma_3 = \tau_1 \otimes \tau_2^{-1}. \tag{5.10}$$

Par [**BGS2**, Théorème 1.23], on a

$$\log \|\tau_2\|^2 = \int_B \mathrm{Td}(TB, g^{TB})\widetilde{ch}(R^\bullet \pi_* L, h^{R\pi_* L}). \tag{5.11}$$

Si on applique [**BerB**, Théorème 3.1] à σ_2, σ_3, [**B2**, Théorème 0.2] (ou Théorème 2.1) à la section τ_1, par le Théorème 2.1, (5.5), (5.9) et (5.11), à partir de l'équation des métriques de Quillen pou (5.10), on ramène finalement l'équation suivante

$$\int_\Sigma \widetilde{\mathrm{Td}}(T\Sigma/S, TB, g^{T\Sigma/S}, g^{TB})\Big[\int_{P(N_{\Sigma/V})_\Sigma} \mathrm{Td}(U \otimes p_\Sigma^* \kappa, g^{U\otimes p_\Sigma^* \kappa}) + \frac{1}{2}\Big] = 0. \tag{5.12}$$

Mais par [**B2**, (6.64)], on a

$$\int_{P(N_{\Sigma/V})_\Sigma} \mathrm{Td}(U \otimes p_\Sigma^* \kappa, g^{U\otimes p_\Sigma^* \kappa}) = -\frac{1}{2}. \tag{5.13}$$

Donc le Théorème 2.1 et [**BerB**, Théorème 3.1] sont compatibles.

On peut interpréter le Théorème 2.1 et la compatibilité de Théorème 2.1 et [**BerB**, Théorème 3.1] comme “la renormalisation commute à la limite adiabatique pour la métrique de Quillen”.

References

[BaFM] Baum P., Fulton W., MacPherson R., Riemann-Roch for singular varieties, *Publ. Math. IHES* 45 (1975), 106–146.

[BerB] Berthomieu A., Bismut J.-M., Quillen metric and higher analytic torsion forms, *J. Reine Angew. Math* 457, 1994, 85–184.

[BBos] Bismut J.-M., Bost J.B., Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénérecence des courbes, Acta Math. 165 (1990), 1–103.

[B2] Bismut J.-M., Quillen metrics and singular fibres in arbitrary relative dimension, *J. of. Alg. Geom.* 6 (1997), 19–149.

[B3] Bismut J.-M., *Families of immersions, and higher analytic torsion*, Astérisque 244, 1997.

[BGS1] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.I, *Comm. Math. Phys.* 115 (1988), 49–78.

[BGS2] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.III, *Comm. Math. Phys.* 115 (1988), 301–351.

[BGS4] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Complex immersions and Arakelov geometry, *Progress in Math., no. 86, Birkhäuser, Boston* 1990, 249–331.

[BK] Bismut J.-M., Köhler K., Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas, *J. of Alg. Geom.* 1 (1992), 647–684.

[Bo] Bott R., Vector fields and characteristic numbers, *Michigan Math. J.* 14 (1967), 231–244.

[GrH] Griffiths P., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, New York, Wiley 1978.

[GS] Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology* 30 (1991), 21–54.

[KM] Knudsen P.F., Mumford D., The projectivity of the moduli space of stable curves, I, Préliminaires on "det" and "div", *Math. Scand.* 39 (1976), 19–55.

[Ma1] Ma Xiaonan., Formes de torsion analytique et familles de submersions. I, *Bull. Soc. Math. France* 127 (1999), 541–621.

[Ma2] Ma Xiaonan., Formes de torsion analytique et familles de submersions. II, *Asian J. of Math.*, 4 (2000), 633–668.

[RS] Ray D.B., Singer I.M., Analytic torsion for complex manifolds, *Ann. of Math.* 98 (1973), 154–177.

Xiaonan Ma
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
D-12489 Berlin, Germany
e-mail: `xiaonan@mathematik.hu-berlin.de`