ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

DEA de Mathématiques

1999-2000

Algébroïdes de Lie et algèbres de Batalin-Vilkovisky

Yves Guiraud

Jury : G. LAFFAILLE
J.P. DUFOUR
D. GUIN
D. NGUYEN TIEN

Le but de ce travail est de prouver que la donnée d'un algébroïde de Lie au-dessus d'une variété différentielle induit une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur l'algèbre graduée composée des sections lisses des puissances extérieures de l'algébroïde.

Pour être plus précis, introduisons les notations qui seront utilisées de la seconde partie à la fin de ce travail :

on considère : . une variété différentielle M

. un fibré vectoriel A de rang n au-dessus de M

. $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma(\Lambda^k A)$ et $\mathcal{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma(\Lambda^k A^*)$, que l'on munit du produit extérieur.

Le résultat à démontrer devient alors : toute structure d'algébroïde de Lie sur A induit une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur $\mathcal{A}$.

Nous procéderons comme suit :

- la première partie contient les définitions et des exemples des objets qui seront manipulés.
- la seconde partie prouve essentiellement que l'on peut travailler localement, et donc faire des calculs explicites.
- les troisième et quatrième parties établissent des équivalences entre les structures d'algébroïdes de Lie sur A, les crochets de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$ et les différentielles sur $\mathcal{A}^*$, ainsi que des formules locales pour exprimer les uns en fonction des autres.

- enfin, la cinquième partie exhibe, pour une structure d'algébroïde de Lie fixée sur A, une famille d'opérateurs qui engendrent localement le crochet de Gerstenhaber associé, et prouve qu'il en existe un global de carré nul, ce qui donne le résultat cherché.

1 définitions et exemples

<u>définition</u> : une <u>algèbre de Gerstenhaber</u> est un triplet $(A, \wedge, [\cdot,\cdot])$ tel que :

(i) $(A, \wedge)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre graduée associative et commutative graduée, c'est-à-dire : il existe une suite de $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels $(A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de A tels que :

$$\begin{cases} A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i \quad \text{en tant que } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel} \\ \forall a_i \in A^i, \forall a_j \in A^j, \quad a_i \wedge a_j \in A^{i+j} \\ \forall a_i \in A^i, \forall a_j \in A^j, \quad a_j \wedge a_i = (-1)^{ij} . a_i \wedge a_j \end{cases}$$

(ii) $\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^{i+1}, [\cdot,\cdot]\right)$ est une algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire : . $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire

. $\forall a_i \in A^i, \forall a_j \in A^j, \quad [a_i, a_j] \in A^{i+j-1}$

. $\forall a_i \in A^i, \forall a_j \in A^j, \quad [a_j, a_i] = (-1)^{(i-1)(j-1)+1} . [a_i, a_j]$

. $\forall a_i \in A^i, \forall a_j \in A^j, \forall a_k \in A^k, \quad \oint_{ijk} (-1)^{(i-1)(k-1)} . [[a_i, a_j], a_k] = 0$

(iii) pour tout $a_i \in A^i$, $[a_i, \cdot]$ est une dérivation de degré $(i-1)$ pour $\wedge$, c'est-à-dire : $\forall a_j \in A^j, \forall a_k \in A^k, \quad [a_i, a_j \wedge a_k] = [a_i, a_j] \wedge a_k + (-1)^{(i-1)j} . a_j \wedge [a_i, a_k]$.

<u>définition</u> : soient $\begin{cases} (A, \wedge, [\cdot,\cdot]) \text{ une algèbre de Gerstenhaber} \\ D : A \to A \text{ un opérateur } \mathbb{R}\text{-linéaire de degré } -1 \end{cases}$

on dit que <u>D engendre le crochet de Gerstenhaber de A</u>

si $\forall a \in A^i, \forall b \in A^j, \quad [a, b] = (-1)^i . D(a \wedge b) - (-1)^i . Da \wedge b - a \wedge Db$.

si, de plus, $D^2 = 0$, on dit que D est <u>un opérateur générateur sur A</u>

dans ce cas, on dit que l'algèbre est <u>exacte</u> ou <u>de Batalin-Vilkovisky</u> (ou <u>BV-algèbre</u> en abrégé).

<u>définition</u> : soit $(A, \wedge)$ une $\mathbb{R}$-algèbre graduée associative et commutative graduée.

on dit que A est une <u>algèbre graduée différentielle</u>

s'il existe $d : A \to A$ $\mathbb{R}$-linéaire qui est une différentielle et une dérivation de degré 1, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} d^2 = 0 \\ \forall a \in A^i, \ da \in A^{i+1} \\ \forall a \in A^i, \forall b \in A^j, \quad d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^i a \wedge db \end{cases}$$

<u>notation</u>: soient $\begin{cases} M & \text{une variété différentielle} \\ E \to M & \text{un fibré vectoriel au-dessus de } M \end{cases}$

on notera $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections lisses du fibré $E \to M$.

<u>exemple</u>: soit (M, π) une variété de Poisson.

on pose $A = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma(\Lambda^k TM)$ l'ensemble des k-vecteurs, $k \in \{0-n\}$, sur M.

alors: * A muni du produit extérieur $\wedge$ et du crochet de Schouten $[.,.]$ est une algèbre de Gerstenhaber.

* si M est orientable, on choisit une forme volume Ω.

on pose alors, pour $a \in \Gamma(\Lambda^k TM)$, $Da = (-1)^k . D_\Omega a$

où D_Ω est le rotationnel par rapport à Ω.

alors D engendre le crochet de Schouten, et, comme $D^2 = 0$, A est une BV-algèbre.

* enfin, la différentielle de Poisson $d_\pi = [\pi, .]$ munit A d'une structure d'algèbre graduée différentielle.

<u>définition</u>: soit M une variété différentielle

un <u>algébroïde de Lie au-dessus de M</u> est un triplet $(A, a, [.,.])$ tel que:

(i) A est un fibré vectoriel au-dessus de M

(ii) $[.,.]$ est un crochet de Lie sur l'espace $\Gamma(A)$ des sections lisses de $A \to M$

(iii) $a : \Gamma(A) \to \Gamma(TM)$ est un morphisme d'algèbres de Lie $C^\infty(M)$-linéaire qui vérifie: (AL) $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \Gamma(A)$, $[X, fY] = a(X)(f).Y + f.[X,Y]$.

a est appelé <u>ancre</u> de l'algébroïde.

<u>exemples</u>:

(i) soit M une variété différentielle

alors $\begin{cases} TM & \text{le fibré tangent à } M \\ a = id_{TM} & \\ [.,.] & \text{le crochet usuel des champs de vecteurs sur } M \end{cases}$

vérifient clairement les trois axiomes ci-dessus

donc $(TM, id_{TM}, [.,.])$ est un algébroïde de Lie au-dessus de M.

(ii) soit A une algèbre de Lie

on regarde A comme fibré vectoriel au-dessus d'un point $\{*\}$.

on a alors $C^\infty(\{*\}) = \mathbb{R}$, $\Gamma(A) = A$ et $T\{*\} = \{0\}$.

on pose $a : A \longrightarrow \{0\}$ l'application nulle et on munit $\{0\}$ du crochet nul

(AL) est alors simplement la $\mathbb{R}$-linéarité à droite du crochet de Lie de A,

donc : une algèbre de Lie est un algébroïde de Lie au-dessus d'un point.

(iii) soit (M,π) une variété de Poisson, on note $\{.,.\}$ le crochet de Poisson sur $C^\infty(M)$.

on définit une application $\# : \Gamma(T^*M) \longrightarrow \Gamma(TM)$ par $\#\alpha = i_\alpha \pi$ pour $\alpha \in \Gamma(T^*M)$

puis le crochet des 1-formes $[.,.]^*$ par :

$$\text{si } \alpha,\beta \in \Gamma(T^*M), \quad [\alpha,\beta]^* = L_{\#\alpha}\beta - L_{\#\beta}\alpha - d(\pi(\alpha,\beta))$$

où $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ si X est un champ de vecteurs.

alors $(T^*M, \#, [.,.]^*)$ est un algébroïde de Lie au-dessus de M :

* $\#$ est clairement $C^\infty(M)$-linéaire et $[.,.]^*$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique.
* soient $\alpha,\beta \in \Gamma(T^*M)$ et $f \in C^\infty(M)$:

on a :
$$[\alpha, f\beta]^* = L_{\#\alpha} f\beta - L_{f\#\beta}\alpha - d(f.\pi(\alpha,\beta))$$
$$= i_{\#\alpha} d(f\beta) + d(f.i_{\#\alpha}\beta) - f.i_{\#\beta}d\alpha - d(f.i_{\#\beta}\alpha)$$
$$- df.\pi(\alpha,\beta) - f.d\pi(\alpha,\beta)$$
$$= i_{\#\alpha}(df\wedge\beta) + f.i_{\#\alpha}d\beta + df.i_{\#\alpha}\beta + f.di_{\#\alpha}\beta - f.i_{\#\beta}d\alpha$$
$$- df.i_{\#\beta}\alpha - f.di_{\#\beta}\alpha - df.\pi(\alpha,\beta) - f.d\pi(\alpha,\beta)$$
$$= f.[\alpha,\beta]^* + i_{\#\alpha}df.\beta + i_{\#\alpha}\beta.df - i_{\#\beta}\alpha.df - \pi(\alpha,\beta).df - df.i_{\#\alpha}\beta$$

or $i_{\#\alpha}df = \#\alpha(f)$ et $i_{\#\alpha}\beta = \pi(\alpha,\beta)$

donc
$$[\alpha, f\beta]^* = f.[\alpha,\beta]^* + \#\alpha(f).\beta + \pi(\alpha,\beta).df + \pi(\alpha,\beta).df - \pi(\alpha,\beta).df$$
$$- \pi(\alpha,\beta).df$$

on a donc bien la relation voulue.

Comme on le verra dans la deuxième partie, ces deux points prouvent que l'on peut désormais travailler localement.

* soient $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$:

- si $\alpha = df$ et $\beta = dg$, $f, g \in C^\infty(M)$: on a $\#df = X_f$ donc $i_{\#df} dg = dg(X_f)$
$= \{f,g\}$

alors $[df, dg]^* = L_{X_f}(dg) - L_{X_g}(df) - d(\pi(df, dg))$

$$= d i_{X_f}(dg) - d\, i_{X_g}(df) - d\{f,g\}$$
$$= d\{f,g\} - d\{g,f\} - d\{f,g\}$$
$$= d\{f,g\}.$$

ceci donne, directement, que :

$$\forall f,g,h \in C^\infty(M),\ [[df, dg]^*, dh]^* = d(\{\{f,g\},h\})$$

et, comme $\{.,.\}$ vérifie Jacobi, $[.,.]^*$ vérifie Jacobi sur les 1-formes exactes.

de plus, $\#[df, dg]^* = \#(d\{f,g\}) = X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g] = [\#df, \#dg]$

car $f \longmapsto X_f$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

- maintenant, si $\beta = h.dg$ $h, g \in C^\infty(M)$:

$$[df, hdg]^* = \#(df)(h).dg + h.[df, dg]^*$$
$$= \{f,h\}.dg + h.d\{f,g\}$$

donc $\#[df, hdg]^* = \{f,h\}.\#dg + h.\#(d\{f,g\})$

or, par propriété du crochet des champs de vecteurs,

on a : $[\#df, h.\#dg] = \#df(h).\#dg + h[\#df, \#dg]$
$$= \{f,h\}.\#dg + h.\#(d\{f,g\}).$$

l'antisymétrie des crochets permet de conclure que $\#$ vérifie bien :

$$\forall \alpha, \beta \in \Gamma(T^*M),\ \#[\alpha,\beta]^* = [\#\alpha, \#\beta]$$

- reste à voir Jacobi :

. on a vu que $[.,.]^*$ vérifie Jacobi sur les 1-formes exactes.

. on suppose que $\begin{cases} [[\alpha,\beta]^*, dg]^* + [[\beta, dg]^*, \alpha]^* + [[dg, \alpha]^*, \beta]^* = 0. \\ \forall g \in C^\infty(M) \end{cases}$

on a donc, en remplaçant dg par $f.dg$, $f,g \in C^\infty(M)$:

$$[[\alpha,\beta]^*, fdg]^* = \#[\alpha,\beta]^*(f).dg + f.[[\alpha,\beta]^*,dg]^*$$

$$[[\beta, fdg]^*, \alpha]^* = -[\alpha,[\beta, fdg]^*]^*$$

$$= - \#\alpha\circ\#\beta(f).dg - \#(\beta)(f).[\alpha,dg]^*$$

$$- \#(\alpha)(f).[\beta,dg]^* - f.[\alpha,[\beta,dg]^*]^*$$

et $[[f.dg,\alpha]^*,\beta]^* = [\beta,[\alpha,fdg]^*]^*$

$$= \#\beta\circ\#\alpha(f).dg + \#(\alpha)(f).[\beta,dg]^*$$

$$+ \#(\beta)(f).[\alpha,dg]^* + f.[\beta,[\alpha,dg]^*]^*$$

en additionnant, on obtient alors Jacobi pour α,β, fdg

puisque $\begin{cases} \#[\alpha,\beta]^* = [\#\alpha,\#\beta] = \#\alpha\circ\#\beta - \#\beta\circ\#\alpha \\ [[\alpha,\beta]^*,dg]^* + [[\beta,dg]^*,\alpha]^* + [[dg,\alpha]^*,\beta]^* = 0 \end{cases}$

la $\mathbb{R}$-bilinéarité de $[.,.]^*$ et la stabilité par permutation circulaire de Jacobi permettent de conclure que $[.,.]^*$ vérifie bien Jacobi.

on a donc bien un algébroïde de Lie $(T^*M, \#, [.,.]^*)$ au-dessus de M

appelé <u>algébroïde de Lie cotangent à M.</u>

2 résultats préliminaires

a passage du local au global :

soit m un point de M.

on considère alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux ouverts de M tels que $m \in \mathcal{U}'$ et $\overline{\mathcal{U}'} \subset \mathcal{U}$.

on choisit alors $f \in C^\infty(M)$ qui vaut 1 sur $\mathcal{U}'$ et 0 en dehors de $\mathcal{U}$

(on sait qu'il en existe d'après le lemme de Tietze-Urisson).

(i) on va maintenant montrer que l'ancre et le crochet d'un algébroïde de Lie, le crochet d'une algèbre de Gerstenhaber et un éventuel générateur, et la différentielle d'une algèbre graduée différentielle se "localisent" (dans le cas où l'algèbre de Gerstenhaber et l'algèbre différentielle sont composées de fibrés vectoriels) :

* on suppose que $(a, [\cdot,\cdot])$ est une structure d'algébroïde de Lie sur A :

soit $X \in \Gamma(A)$: a est $C^\infty(M)$-linéaire, donc $a(fX) = f.a(X)$

donc $a(fX)(m) = f(m).a(X)(m) = a(X)(m)$ car $f(m) = 1$

donc la valeur de $a(X)$ en m ne dépend que des valeurs de X en m,

puisque fX peut être vu comme X restreint à $\mathcal{U}$, et que a est $C^\infty(M)$-linéaire

de même, si $X, Y \in \Gamma(A)$, on a :

$$[X, fY] = a(X)(f).Y + f.[X,Y]$$

donc $[X, fY](m) = a(X)(f)(m).Y(m) + f(m).[X,Y](m) = [X,Y](m)$

car $\begin{cases} a(X) \text{ est un champ de vecteurs sur } M, \text{ donc une dérivation} \\ f \text{ est localement constante au voisinage de } m. \end{cases}$

Comme le crochet est antisymétrique, on peut faire de même avec X,

ce qui prouve que $[X,Y](m)$ ne dépend que des valeurs de X et Y autour de m.

l'ancre et le crochet peuvent donc être définis sur des sections locales du fibré $A \to M$.

* on suppose que $(\mathcal{A}, \wedge, [.,.])$ est une algèbre de Gerstenhaber.

soient $U, V \in \mathcal{A}$: on a $[U, fV] = [U,f]\wedge V + f.[U,V]$

donc $[U,fV](m) = [U,f](m)\wedge V(m) + f(m).[U,V](m) = [U,V](m)$

car $\begin{cases} [U,.] \text{ est une dérivation} \\ f \text{ est localement constante au voisinage de } m. \end{cases}$

$[.,.]$ étant antisymétrique gradué, on peut faire la même chose avec U, ce qui prouve bien que $[.,.]$ se localise.

si on a $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui engendre le crochet, on a, si $U \in \mathcal{A}$:

$$[U,f] = (-1)^u . D(U.f) - (-1)^u . DU \wedge f - U \wedge Df$$

donc $[U,f](m) = (-1)^u . D(fU)(m) - (-1)^u . f(m) . DU(m)$

car $Df \in \Gamma(\Lambda^{-1}A) = \{0\}$.

donc $D(fU)(m) = DU(m)$, donc D se localise aussi.

* on suppose que $(\mathcal{A}^*, \wedge, d)$ est une algèbre graduée différentielle.

soit $\omega \in \mathcal{A}^*$: on a $d(f\omega) = df \wedge \omega + f.d\omega$

donc $d(f\omega)(m) = df(m) \wedge \omega(m) + f(m).d\omega(m) = d\omega(m)$.

<u>Conclusion</u> : ces cinq applications, si elles existent, peuvent donc être définies sur des sections locales des fibrés correspondants.

(iii) réciproquement, si on a défini des applications locales sur tout ouvert d'un recouvrement de M, et que ces applications sont compatibles avec les changements de bases de sections de A (c'est-à-dire ne dépendent pas de la base choisie), on obtient en les recollant une application globale ayant les mêmes propriétés que celles locales.

par exemple, si on a défini sur tout ouvert $\mathcal{U}$ de M un crochet $[.,.]_{\mathcal{U}}$ de Gerstenhaber sur $A \to \mathcal{U}$ qui ne dépend pas de la base choisie :

si $U, V \in \mathcal{A}$, on pose $[U,V](m) = [U_{/\mathcal{U}}, V_{/\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}(m)$ si $\mathcal{U}$ contient m.

alors, si un autre ouvert $\mathcal{V}$ de M contient m, on a forcément :

$$[U_{/\mathcal{V}}, V_{/\mathcal{V}}]_{\mathcal{V}}(m) = [U_{/\mathcal{U}}, V_{/\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}}(m)$$

puisque le crochet local $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{U}}$ est compatible avec le changement de variables qui transforme les coordonnées de $\mathcal{U}$ en celles de $\mathcal{V}$.

on obtient donc un crochet de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$.

(iii) on peut dorénavant se contenter d'une étude locale (à condition que les formules locales utilisées ne dépendent pas des coordonnées choisies).

Dans toute la suite, on se placera sur un ouvert $\mathcal{U}$ de M qui trivialise A; notons que, comme $A \to M$ est un fibré vectoriel, M admet un recouvrement en ouverts trivialisant le fibré.

On peut alors choisir une base $(X_1 \ldots X_n)$ en sections locales du fibré $A \to M$.

on a alors : tout $U \in \Gamma(\Lambda^k U)$ s'écrit de manière unique

$$U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k} \cdot X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k} \quad \text{où } f_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M).$$

on note $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ la base duale de $(X_1 \ldots X_n)$.

(b) notation $\frac{\partial}{\partial X_i}$:

on définit pour tout $i \in \{1 \ldots n\}$, l'application $C^\infty(M)$-linéaire

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : \Gamma(\Lambda^k A) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{k-1} A) \quad \text{par} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial X_i} = 0 \quad \text{si } f \in C^\infty(M) \\ \dfrac{\partial}{\partial X_i}(X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}) = \begin{cases} X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_{k-1}} & \text{si } i = i_k \\ 0 & \text{si } i \notin \{i_1 \ldots i_k\}. \end{cases} \end{array} \right.$$

on remarque que, si $i = i_j$, pour $j \in \{1 \ldots k\}$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}) = (-1)^{k-j} \cdot X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_{i_j}} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}.$$

lemme

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{soient } i\in\{1,\dots,n\},\ U\in\Gamma(\Lambda^u A),\ V\in\Gamma(\Lambda^v A) : \\ \text{on a: } \dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i} = U\wedge\dfrac{\partial V}{\partial X_i} + (-1)^v\cdot\dfrac{\partial U}{\partial X_i}\wedge V\end{array}}$$

preuve: par $C^\infty(M)$-linéarité de $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$, il suffit de considérer le cas où :

$U = X_{i_1}\wedge\dots\wedge X_{i_u}$, $1\leq i_1<\dots<i_u\leq n$ et $V = X_{j_1}\wedge\dots\wedge X_{j_v}$, $1\leq j_1<\dots<j_v\leq n$.

* si $i\notin\{i_1,\dots,i_u\}\cup\{j_1,\dots,j_v\}$:

alors $\dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i} = \dfrac{\partial U}{\partial X_i} = \dfrac{\partial V}{\partial X_i} = 0$

* si $i\in\{i_1,\dots,i_u\}\cap\{j_1,\dots,j_v\}$: on pose $i=i_k=j_l$.

alors $U\wedge V=0$ donc $\dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i}=0$.

or $U\wedge\dfrac{\partial V}{\partial X_i} = (-1)^{v-l}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{j_l}}\wedge\dots\wedge X_{j_v}$

$= (-1)^{v-l}\cdot(-1)^{l-1+u-k}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{i_k}}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge X_{j_v}$

en faisant passer X_{i_k} à la place de X_{j_l}

donc $U\wedge\dfrac{\partial V}{\partial X_i} = (-1)^{v+u-k-1}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{i_k}}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge X_{j_v}$

et $\dfrac{\partial U}{\partial X_i}\wedge V = (-1)^{u-k}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{i_k}}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge X_{j_v}$

donc $U\wedge\dfrac{\partial V}{\partial X_i} + (-1)^v\cdot\dfrac{\partial U}{\partial X_i}\wedge V = 0 = \dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i}$.

* si $i=i_k$ et $i\notin\{j_1,\dots,j_v\}$:

alors $\dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i} = (-1)^{v+u-k}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{i_k}}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge X_{j_v} = (-1)^v\cdot\dfrac{\partial U}{\partial X_i}\wedge V$

et $\dfrac{\partial V}{\partial X_i} = 0$.

* si $i=j_l$ et $i\notin\{i_1,\dots,i_u\}$:

alors $\dfrac{\partial(U\wedge V)}{\partial X_i} = (-1)^{v-l}\cdot X_{i_1}\wedge\dots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\dots\wedge\widehat{X_{j_l}}\wedge\dots\wedge X_{j_v} = U\wedge\dfrac{\partial V}{\partial X_i}$

et $\dfrac{\partial U}{\partial X_i} = 0$.

lemme

> soit $(Y_1 \ldots Y_n)$ une autre base de sections de $A \to \mathcal{U}$
> alors pour tout $i \in \{1 \ldots n\}$, on a : $\dfrac{\partial}{\partial Y_i} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \dfrac{\partial}{\partial X_k}$

preuve : $\dfrac{\partial}{\partial Y_i}$ et $\dfrac{\partial}{\partial X_k}$ sont $C^\infty(M)$-linéaire : il suffit donc de vérifier la formule pour les éléments génériques de $\mathcal{A}$; par récurrence :

* soit $j \in \{1 \ldots n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial X_k} = \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial X_j}{\partial X_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

* on suppose que la propriété est vraie pour tout $\mathcal{U} \in \Gamma(\Lambda^u A)$: soit $j \in \{1 \ldots n\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{U} \wedge X_j)}{\partial Y_i} &= \mathcal{U} \wedge \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_i} \wedge X_j \\ &= \mathcal{U} \wedge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial X_k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_k} \right) \wedge X_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \left(\mathcal{U} \wedge \frac{\partial X_j}{\partial X_k} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X_k} \wedge X_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial(\mathcal{U} \wedge X_j)}{\partial X_k} . \end{aligned}$$

remarque : on peut tout autant définir les opérateurs duaux $\dfrac{\partial}{\partial \alpha_i}$: il est clair que l'on obtiendra les mêmes résultats.

(c) extension locale de l'ancre d'un algébroïde de Lie :

on suppose que A est un algébroïde de Lie d'ancre a.

si $\mathcal{U} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_u \leq n} f_{i_1 \ldots i_u} \cdot X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_u}$ et $Z \in \Gamma(A)$,

on pose $a_X(Z)(\mathcal{U}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_u \leq n} a(Z)(f_{i_1 \ldots i_u}) \cdot X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_u}$.

l'extension locale de l'ancre a relativement à la base $(X_1 \ldots X_n)$.

on remarque que, comme $\underset{X}{a}(Z)$ est un champ de vecteurs sur M, c'est une dérivation de degré 0 sur les fonctions,

d'où : $$\boxed{\forall U, V \in \mathcal{A},\ \forall Z \in \Gamma(A),\ \underset{X}{a}(Z)(U \wedge V) = \underset{X}{a}(Z)(U) \wedge V + U \wedge \underset{X}{a}(Z)(V)}$$

<u>remarque</u>: de même que précédemment, on peut étendre l'ancre sur les éléments de $\mathcal{A}^*$ comme ci-dessus ; on obtiendra bien sûr la même propriété que ci-dessus.

<u>remarque</u>: notons que l'extension de l'ancre dépend de la base choisie :

soit $(Y_1 - Y_n)$ une autre base de sections locales. On notera b l'extension de l'ancre relativement à $(Y_1 - Y_n)$ et a l'extension relativement à $(X_1 - X_n)$ (cette notation sera conservée dans toute la suite).

soient $Z \in \Gamma(A)$ et $U = f.Y_{i_1} \wedge - \wedge Y_{i_u}$, $f \in C^\infty(M)$.

alors $$\begin{aligned} a(Z)(U) &= a(Z)(f.Y_{i_1} \wedge - \wedge Y_{i_u}) \\ &= a(Z)(f).Y_{i_1} \wedge - \wedge Y_{i_u} + \sum_{j=1}^{u} f.\, Y_{i_1} \wedge - \wedge a(Z)(Y_{i_j}) \wedge - \wedge Y_{i_u} \end{aligned}$$

(d'après la formule précédente).

$$\begin{aligned} &= b(Z)(U) + \sum_{j=1}^{u} f.(-1)^{j-1}.\, a(Z)(Y_{i_j}) \wedge Y_{i_1} \wedge - \wedge \hat{Y}_{i_j} \wedge - \wedge Y_{i_u} \\ &= b(Z)(U) + (-1)^{u-1}. \sum_{j=1}^{u} a(Z)(Y_{i_j}) \wedge \frac{\partial U}{\partial Y_{i_j}} \end{aligned}$$

par $\mathbb{R}$-linéarité de a et de $\frac{\partial}{\partial Y_i}$, on a donc :

$$\boxed{\forall Z \in \Gamma(A),\ \forall U \in \Gamma(\Lambda^u A),\ b(Z)(U) = a(Z)(U) + (-1)^{u}. \sum_{j=1}^{n} a(Z)(Y_j) \wedge \frac{\partial U}{\partial Y_j}}$$

lemme

Soit $(Y_1 - Y_n)$ une autre base de sections locales de $A \to \mathcal{U}$

alors $\forall i, j \in \{1 - n\}$, $[Y_i, Y_j] = a(Y_i)(Y_j) - a(Y_j)(Y_i) + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot [X_k, X_l]$

preuve : soient $i, j \in \{1 - n\}$:

$$[Y_i, Y_j] = \Big[Y_i, \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} X_l\Big]$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a(Y_i)\Big(\frac{\partial Y_j}{\partial X_l}\Big) \cdot X_l + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot [Y_i, X_l]$$

$$= a(Y_i)\Big(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot X_l\Big) - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot [X_l, Y_i]$$

$$= a(Y_i)(Y_j) - \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot a(X_l)\Big(\frac{\partial Y_i}{\partial X_k}\Big) \cdot X_k - \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot [X_l, X_k]$$

$$= a(Y_i)(Y_j) - a(Y_j)(Y_i) + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} \cdot [X_k, X_l] .$$

3 algébroïdes de Lie et algèbres de Gerstenhaber

Théorème

il existe une bijection naturelle entre les structures d'algébroïde de Lie sur A et les crochets de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$ muni du produit extérieur.

démonstration:

(i) soit $(a, [\cdot,\cdot]_A)$ une structure d'algébroïde de Lie sur A.

soient $U, V \in \mathcal{A}$ tels que $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$ et $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$. On définit le crochet local de U et V par une formule à la Kontsevich:

$$\boxed{\begin{aligned}[U,V] = {} & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial X_i}\wedge a(X_i)(V) - (-1)^{(u-1)(v-1)}\cdot\frac{\partial V}{\partial X_i}\wedge a(X_i)(U)\right) \\ & + (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}[X_i, X_j]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial X_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial X_j}\end{aligned}}$$

on pose $[U,V]_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial X_i}\wedge a(X_i)(V) - (-1)^{(u-1)(v-1)}\cdot\frac{\partial V}{\partial X_i}\wedge a(X_i)(U)\right)$

et $[U,V]_1 = (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}[X_i,X_j]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial X_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial X_j}$

* montrons que le crochet ainsi défini ne dépend pas de la base choisie:

soit $(Y_1 - Y_n)$ une autre base de sections locales:

on a alors:

$$\begin{aligned}[U,V]'_1 = {} & (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}[Y_i,Y_j]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} \\ = {} & (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n} a(Y_i)(Y_j)\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} \\ & - (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n} a(Y_j)(Y_i)\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} \\ & + (-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial Y_j}{\partial X_l}\cdot[X_k,X_l]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j}\end{aligned}$$

or $(-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n} a(Y_i)(Y_j)\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} = (-1)^{v-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\left(\sum_{j=1}^{n} a(Y_i)(Y_j)\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge a(Y_i)(V) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge b(Y_i)(V)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge a(X_k)(V) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge b(Y_i)(V)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial X_k}\wedge a(X_k)(V) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge b(Y_i)(V).$$

de même, $(-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j=1}^{n} a(Y_j)(Y_i)\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j}$

$$= (-1)^{v}\cdot\sum_{j=1}^{n} b(Y_j)(U)\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} - (-1)^{v}\cdot\sum_{j=1}^{n} a(Y_j)(U)\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j}$$

$$= (-1)^{(u-1)(v-1)+1}\cdot\sum_{j=1}^{n} b(Y_j)(U)\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j} - (-1)^{(u-1)(v-1)+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a(X_k)(U)\wedge\frac{\partial V}{\partial X_k}$$

enfin, $(-1)^{u+v}\cdot\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial X_k}\cdot\frac{\partial Y_j}{\partial X_l}\cdot[X_k,X_l]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial Y_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial Y_j}$

$$= (-1)^{u+v}\cdot\sum_{k,l=1}^{n}[X_k,X_l]_A\wedge\frac{\partial U}{\partial X_k}\wedge\frac{\partial V}{\partial X_l}$$

donc $[U,V]'_1 = [U,V]_0 - [U,V]'_0 + [U,V]_1$ donc $[U,V]' = [U,V]$.

donc $[\cdot,\cdot]$ ne dépend pas de la base de sections choisie et s'étend donc en un crochet global défini, sur chaque ouvert trivialisant du fibré $A\to M$, par une formule du même type.

* soient $f\in C^\infty(M)$ et $X\in\Gamma(A)$:

on a : $[X,f] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial X_i}\cdot a(X_i)(f) = a\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial X_i}\cdot X_i\right)(f) = a(X)(f)$

* soient $X,Y\in\Gamma(A)$:

on a : $[X,Y]_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X}{\partial X_i}\cdot a(X_i)(Y) - \frac{\partial Y}{\partial X_i}\cdot a(X_i)(X)\right) = a(X)(Y) - a(Y)(X)$

et $[X,Y]_1 = \sum_{i,j=1}^{n}[X_i,X_j]\cdot\frac{\partial X}{\partial X_i}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X_j}$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left([X_i,\frac{\partial Y}{\partial X_j}\cdot X_j]_A - a(X_i)\left(\frac{\partial Y}{\partial X_j}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial X_i}\cdot X_j\right)$$

donc $[X,Y]_\Lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial X_i} \cdot [X_i, Y]_A - a(X)(Y)$

$= \sum_{i=1}^n \left(\left[\frac{\partial X}{\partial X_i}, Y \right]_A + a(Y)\left(\frac{\partial X}{\partial X_i}\right) \cdot X_i \right) - a(X)(Y)$

$= [X,Y]_A + a(Y)(X) - a(X)(Y)$

d'où $[X,Y] = [X,Y]_A$.

* soient $f,g \in C^\infty(M)$: $\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} = 0$ pour tout $i \in \{1-n\}$

donc $[f,g] = 0$.

* vérifions que c'est un crochet de Gerstenhaber :

- pour tout $i \in \{1-n\}$, $\frac{\partial}{\partial X_i}$ et $a(X_i)$ sont $\mathbb{R}$-linéaires, donc $[.,.]$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.
- si $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$ et $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$, on a bien $[U,V] \in \Gamma(\Lambda^{u+v-1} A)$.
- soient $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$ et $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$:

d'après l'écriture de $[.,.]_0$, il est évident que $[V,U]_0 = -(-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [U,V]_0$

de plus, $[V,U]_\Lambda = (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i,j=1}^n [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial V}{\partial X_i} \wedge \frac{\partial U}{\partial X_j}$

$= (-1)^{u+v} \cdot (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot \sum_{i,j=1}^n [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial U}{\partial X_j} \wedge \frac{\partial V}{\partial X_i}$

en échangeant les indices de sommation, et puisque $[X_j, X_i] = -[X_i, X_j]$,

on a bien $[V,U]_\Lambda = -(-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [U,V]_\Lambda$

et donc $[V,U] = -(-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [U,V]$.

- soient $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$, $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$, $W \in \Gamma(\Lambda^w A)$:

$[U, V \wedge W]_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(V \wedge W) - (-1)^{(u-1)(v+w-1)} \cdot \frac{\partial (V \wedge W)}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(U) \right)$

$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(V) \wedge W + (-1)^{(u-1)v} V \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(W)$

$-(-1)^{(u-1)(v+w-1)} V \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(U) - (-1)^{(u-1)(v+w-1)+w(u+1)} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(U) \wedge W$

$= [U,V]_0 \wedge W + (-1)^{(u-1)v} \cdot V \wedge [U,W]_0$.

et :

$$[U, V\wedge W]_\wedge = (-1)^{u+v+w} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge \frac{\partial (V\wedge W)}{\partial X_j}$$

$$= (-1)^{u+v+w} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge \left(V \wedge \frac{\partial W}{\partial X_j} + (-1)^{w} \cdot \frac{\partial V}{\partial X_j} \wedge W \right)$$

$$= (-1)^{u+v+w+uv} \cdot V \wedge \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge \frac{\partial W}{\partial X_j} + (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge \frac{\partial V}{\partial X_j} \wedge W$$

$$= (-1)^{(u-1)v} \cdot V \wedge [U, W]_\wedge + [U, V]_\wedge \wedge W$$

donc $[U, .]$ est bien une dérivation de degré $(u-1)$.

– reste à voir Jacobi gradué :

· si $f, g, h \in C^\infty(M)$: $[f, [g, h]] = 0$

· si $f, g \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(A)$: $[f, [g, X]] = [g, [X, f]] = [X, [f, g]] = 0$

· si $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(A)$:

$$[[X, Y], f] = a[X, Y](f) = a(X) \circ a(Y)(f) - a(Y) \circ a(X)(f).$$

$$[[Y, f], X] = -[X, [Y, f]] = -a(X) \circ a(Y)(f)$$

$$[[f, X], Y] = [Y, [X, f]] = a(Y) \circ a(X)(f)$$

donc $[[X, Y], f] + [[Y, f], X] + [[f, X], Y] = 0$.

· si $X, Y, Z \in \Gamma(A)$: Jacobi gradué revient ici à Jacobi sur $\Gamma(A)$

· supposons que Jacobi gradué est vrai pour tous $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$, $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$, $W \in \Gamma(\Lambda^w A)$ où $u, v, w \in \{0 - k\}$; soit $X \in \Gamma(A)$:

$$[[U, V], W \wedge X] = [[U, V], W] \wedge X + (-1)^{(u+v)w} \cdot W \wedge [[U, V], X]$$

$$[[V, W\wedge X], U] = [[V, W] \wedge X, U] + (-1)^{(v-1)w} \cdot [W \wedge [V, X], U]$$

$$= -(-1)^{(u-1)(v+w-1)} \cdot [U, [V, W] \wedge X] - (-1)^{(u-1)(v+w-1) + (v-1)w} \cdot [U, W \wedge [V, X]]$$

$$= -(-1)^{(u-1)(v+w-1)} \cdot [U, [V, W]] \wedge X - [V, W] \wedge [U, X]$$

$$- (-1)^{(u-1)(v+w-1) + w(v-1)} \cdot [U, W] \wedge [V, X] - (-1)^{(v-1)(u+w-1)} \cdot W \wedge [U, [V, X]].$$

et : $[[W\wedge X, U], V] = -(-1)^{(u-1)w} \cdot [[U, W\wedge X], V]$

d'où, par symétrie :

$$[[W\wedge X, U], V] = (-1)^{(v-1)(u+w-1)+(u-1)w} \cdot [V,[U,W]]\wedge X + (-1)^{(u-1)w} \cdot [U,W]\wedge[V,X]$$
$$+ (-1)^{(v-1)(u+w-1)} \cdot [V,W]\wedge[U,X] + (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot W\wedge[V,[U,X]].$$

on a donc :

$$(-1)^{(u-1)w} \cdot [[U,V], W\wedge X] + (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [[V, W\wedge X], U] + (-1)^{(v-1)w} \cdot [[W\wedge X, U], V]$$
$$= (-1)^{(u-1)w} \cdot [[U,V],W]\wedge X + (-1)^{(v-1)w} \cdot W\wedge[[U,V],X] - (-1)^{w(u-1)} \cdot [U,[V,W]]\wedge X$$
$$- (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [V,W]\wedge[U,X] - (-1)^{w(u+v)} \cdot [U,W]\wedge[V,X] - (-1)^{w(v-1)} \cdot W\wedge[U,[V,X]]$$
$$+ (-1)^{(u-1)(v+w-1)} \cdot [V,[U,W]]\wedge X + (-1)^{(u+v)w} \cdot [U,W]\wedge[V,X] + (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [V,W]\wedge[U,X]$$
$$+ (-1)^{(v-1)(u+w-1)} \cdot W\wedge[V,[U,X]]$$
$$= (-1)^{u} \cdot \Big((-1)^{(v-1)(w-1)} \cdot [W,[U,V]] + (-1)^{(u-1)(w-1)} \cdot [U,[V,W]] + (-1)^{(u-1)(v-1)} \cdot [V,[W,U]] \Big)\wedge X$$
$$+ (-1)^{(v-1)w+1} \cdot W\wedge \Big([X,[U,V]] + [U,[V,X]] + (-1)^{(v-1)(u-1)} \cdot [V,[X,U]] \Big) = 0$$

donc Jacobi est vérifié pour W élément générique de $\Gamma(\Lambda^{w+1}A)$

en effectuant les mêmes calculs pour $W\in\Gamma(\Lambda^{w+1}A)$ élément générique et en remplaçant X par f, on obtient Jacobi gradué pour tout $W\in\Gamma(\Lambda^{w+1}A)$;

or U, V, W occupent des places équivalentes dans Jacobi gradué, donc on a aussi le résultat pour tous $U\in\Gamma(\Lambda^{u+1}A)$ et $V\in\Gamma(\Lambda^{v+1}A)$.

* on connaît donc un crochet de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$ qui vérifie

$\forall f\in C^\infty(M), \forall X, Y\in\Gamma(A)$, $[X,f] = a(X)(f)$; $[X,Y] = [X,Y]_A$

or $[U, V\wedge W] = [U,V]\wedge W + (-1)^{(u-1)v} V\wedge[U,W]$ est imposé pour tout crochet de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$, ce qui implique qu'il ne peut y en avoir qu'un qui vérifie les deux relations ci-dessus ; en d'autres termes, a et $[\cdot,\cdot]_A$ induisent un unique crochet de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$ tel que $\begin{cases} [X,f] = a(X)(f) \\ [X,Y] = [X,Y]_A \end{cases}$.

(ii) réciproquement, on suppose que $[.,.]$ est un crochet de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}$.

on pose pour $X,Y\in\Gamma(A)$, $\begin{cases} a(X)=[X,.] \\ [X,Y]_A=[X,Y] \end{cases}$

* $[.,.]$ est un crochet de Lie gradué, donc $[.,.]$ est un crochet de Lie.
* si $X\in\Gamma(A)$ et $f,g\in C^\infty(M)$, on a:

$$a(X)(fg)=[X,fg]=[X,f]g+f.[X,g]=a(X)(f).g+f.a(X)(g)$$

donc $a(X)$ est une dérivation de degré 0 sur les fonctions

donc $a(X)$ est bien un champ de vecteurs sur M.

de plus, $a(fX)(g)=[fX,g]=-[g,fX]=-[g,f].X-f.[g,X]$

$$=f.[X,g]=f.a(X)(g)$$

donc a est $C^\infty(M)$-linéaire.

* soient $X,Y\in\Gamma(A)$ et $f\in C^\infty(M)$:

on a: $[[X,Y],f]+[[Y,f],X]+[[f,X],Y]=0$

donc $a([X,Y])(f)-a(X)\circ a(Y)(f)+a(Y)\circ a(X)(f)=0$

donc a est un morphisme d'algèbres de Lie $\Gamma(A)\longrightarrow\Gamma(TM)$

enfin, $[X,fY]_A=[X,fY]=[X,f]\wedge Y+f.[X,Y]=a(X)(f).Y+f.[X,Y]_A$

donc $(A,a,[.,.]_A)$ est bien un algébroïde de Lie.

* remarquons que $[.,.]$ est un crochet de Gerstenhaber qui vérifie:

$$[X,f]=a(X)(f) \text{ et } [X,Y]=[X,Y]_A$$

donc il s'écrit forcément localement $[.,.]=[.,.]_0+[.,.]_1$ comme dans le (i),

Ce qui achève de prouver que l'on a bien une bijection entre les structures d'algébroïde de Lie sur A et les crochets de Gerstenhaber sur $\mathcal{A}=\bigoplus_{k=0}^{n}\Gamma(\Lambda^k A)$ muni du produit extérieur.

4 algébroïdes de Lie et algèbres graduées différentielles

Théorème

il existe une bijection naturelle entre les structures d'algébroïde de Lie sur A et les différentielles sur $\mathcal{A}^*$ muni du produit extérieur.

démonstration:

(i) on suppose que $(a, [.,.])$ est une structure d'algébroïde de Lie sur A.

Soit $\omega \in \Gamma(\Lambda^k A^*)$. On définit la différentielle locale de ω par la formule :

$$\boxed{d\omega = (-1)^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a(X_i)(\omega) \wedge \alpha_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} C^i_{uv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v \right)} \quad \text{où } C^i_{uv} = \alpha_i([X_u, X_v])$$

on pose $d_0\omega = (-1)^k \cdot \sum_{i=1}^{n} a(X_i)(\omega) \wedge \alpha_i$

et $d_1\omega = (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} C^i_{uv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v = (-1)^k \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq u < v \leq n} C^i_{uv} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v$.

* montrons que cette expression ne dépend pas de la base choisie :

soient $(Y_1 - Y_n)$ une autre base de sections locales et $(\beta_1 - \beta_n)$ sa base duale.

on a $d'_1\omega = \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_i([Y_u, Y_v]) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \wedge \beta_u \wedge \beta_v$

$$= \frac{(-1)^k}{2} \cdot \sum_{i,u,v,r,s,t=1}^{n} \frac{\partial Y_u}{\partial X_r} \cdot \frac{\partial Y_v}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_t}{\partial Y_i} \cdot \alpha_t([X_r, X_s]) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \wedge \beta_u \wedge \beta_v$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2} \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_i\big(a(Y_u)(Y_v) - a(Y_v)(Y_u) \big) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \wedge \beta_u \wedge \beta_v$$

$$= d_1\omega + (-1)^k \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_i(a(Y_u)(Y_v)) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \wedge \beta_u \wedge \beta_v$$

$$= d_1\omega + (-1)^k \cdot \sum_{i,j,u,v=1}^{n} a(Y_u)\left(\frac{\partial Y_v}{\partial X_j}\right) \cdot \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta_i} \wedge \beta_u \wedge \beta_v$$

$$= d_1\omega + \sum_{u,j=1}^{n} b(Y_u)(\alpha_j) \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_j} \wedge \beta_u$$

$$= d_1\omega + (-1)^k \sum_{u=1}^{n} \big(a(Y_u)(\omega) - b(Y_u)(\omega) \big) \wedge \beta_u$$

$$= d_1\omega + (-1)^k \cdot \sum_{u,i=1}^{n} a(X_i)(\omega) \wedge \frac{\partial Y_u}{\partial X_i} \beta_u - d'_0\omega$$

donc $d'_1\omega = d_1\omega + d_0\omega - d'_0\omega$ donc $d'\omega = d\omega$.

* déterminons d sur les fonctions : soit $f \in C^\infty(M)$.

$$df = \sum_{i=1}^{n} a(X_i)(f).\alpha_i \quad \text{car} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0$$

en particulier, si $X \in \Gamma(A)$, $df(X) = \sum_{i=1}^{n} a(X_i)(f).\ \alpha_i(X) = a(X)(f)$

* déterminons d sur les α_k, $k \in \{1-n\}$:

$$d\alpha_k = -\sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{uv}^{k}.\ \alpha_u \wedge \alpha_v \quad \text{car} \quad a(X_i)(\alpha_k) = 0$$

* montrons que d est une dérivation de degré 1 :

soient $\omega \in \Gamma(\Lambda^k A^*)$ et $\Theta \in \Gamma(\Lambda^\ell A^*)$:

alors $d_0(\omega \wedge \Theta) = (-1)^{k+\ell}.\ \sum_{i=1}^{n} a(X_i)(\omega \wedge \Theta) \wedge \alpha_i$

$$= (-1)^{k+\ell}.\ \sum_{i=1}^{n} \Big(a(X_i)(\omega) \wedge \Theta + \omega \wedge a(X_i)(\Theta) \Big) \wedge \alpha_i$$

$$= d_0\omega \wedge \Theta + (-1)^k.\ \omega \wedge d_0\Theta$$

et $d_1(\omega \wedge \Theta) = (-1)^{k+\ell}.\ \frac{1}{2}.\ \sum_{i,u,v=1}^{n} C_{uv}^{i}.\ \frac{\partial(\omega \wedge \Theta)}{\partial \alpha_i} \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v$

$$= (-1)^{k+\ell}.\ \frac{1}{2}.\ \sum_{i,u,v=1}^{n} C_{uv}^{i} \Big(\omega \wedge \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha_i} + (-1)^\ell.\ \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_i} \wedge \Theta \Big) \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v$$

$$= (-1)^k.\ \omega \wedge d_1\Theta + d_1\omega \wedge \Theta$$

* déterminons à présent d sur les éléments de $\Gamma(A^*)$.

on écrit $\alpha = \sum_{k=1}^{n} f_k.\alpha_k$ où $f_k \in C^\infty(M)$.

alors $d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \Big(df_k \wedge \alpha_k + f_k.\ d\alpha_k \Big) = \sum_{i,k=1}^{n} a(X_i)(f_k).\alpha_i \wedge \alpha_k$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{uv}^{k}.\ f_k.\alpha_u \wedge \alpha_v$$

d'où $d\alpha(X_u \wedge X_v) = a(X_u)(f_v) - a(X_v)(f_u) - \sum_{k=1}^{n} f_k.\ C_{uv}^{k}$

$$= a(X_u)(f_v) - a(X_v)(f_u) - \alpha([X_u, X_v])$$

maintenant, soient $X = \sum_{u=1}^{n} g_u.X_u$ et $Y = \sum_{v=1}^{n} h_v.X_v$.

Comme $d\alpha$ est $C^\infty(M)$-linéaire, on a : $d\alpha(X \wedge Y) = \sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\ d\alpha(X_u \wedge X_v)$ -

donc $d\alpha(X\wedge Y) = \sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\partial(X_u)(f_v) - \sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\partial(X_v)(f_u)$

$$- \sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\alpha([X_u, X_v])$$

or $\sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\partial(X_u)(f_v) = \sum_{v=1}^{n}\partial\left(\sum_{u=1}^{n} g_u X_u\right)(f_v).h_v = \sum_{v=1}^{n}\partial(X)(f_v).h_v$

$$= \partial(X)\left(\sum_{v=1}^{n} f_v h_v\right) - \sum_{v=1}^{n}\partial(X)(h_v).f_v$$

$$= \partial(X)(\alpha(Y)) - \sum_{v=1}^{n}\partial(X)(h_v).f_v$$

de même $\sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\partial(X_v)(f_u) = \partial(Y)(\alpha(X)) - \sum_{u=1}^{n}\partial(Y)(g_u).f_u$

et $\sum_{u,v=1}^{n} g_u h_v.\alpha([X_u, X_v]) = \alpha\left(\sum_{u=1}^{n} g_u.[X_u, Y] - \sum_{u,v=1}^{n} g_u.\partial(X_u)(h_v).X_v\right)$

$$= \alpha([X,Y]) + \sum_{u=1}^{n}\alpha\left(\partial(Y)(g_u).X_u\right) - \sum_{v=1}^{n}\alpha\left(\partial(X)(h_v).X_v\right)$$

$$= \alpha([X,Y]) + \sum_{u=1}^{n}\partial(Y)(g_u).f_u - \sum_{v=1}^{n}\partial(X)(h_v).f_v$$

d'où $d\alpha(X\wedge Y) = \partial(X)(\alpha(Y)) - \partial(Y)(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$

* montrons que $d^2=0$:

- soit $f\in C^\infty(M)$:

$$d^2 f = d\left(\sum_{i=1}^{n}\partial(X_i)(f)\wedge\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d(\partial(X_i)(f))\wedge\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\partial(X_i)(f).d\alpha_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\partial(X_j)\circ\partial(X_i)(f).\alpha_j\wedge\alpha_i - \sum_{i=1}^{n}\partial(X_i)(f).\sum_{1\le u<v\le n} C_{uv}^{i}.\alpha_u\wedge\alpha_v$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n}\partial([X_j, X_i])(f).\alpha_j\wedge\alpha_i - \sum_{u=1}^{n}\partial(X_u)(f).\sum_{1\le i<j\le n} C_{ij}^{u}.\alpha_i\wedge\alpha_j$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n}\sum_{u=1}^{n} C_{ij}^{u}.\partial(X_u)(f).\alpha_i\wedge\alpha_j - \sum_{u=1}^{n}\partial(X_u)(f).\sum_{1\le i<j\le n} C_{ij}^{u}.\alpha_i\wedge\alpha_j$$

$$=0.$$

- soit $k \in \{1 - n\}$:

$$d^2 \alpha_k = - \sum_{1 \leq u < v \leq n} d\left(C_{uv}^k . \alpha_u \wedge \alpha_v \right)$$

$$= - \sum_{1 \leq u < v \leq n} dC_{uv}^k \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v - \sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{uv}^k . d\alpha_u \wedge \alpha_v + \sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{uv}^k . \alpha_u \wedge d\alpha_v$$

$$= - \sum_{1 \leq u < v \leq n} \sum_{i=1}^n \partial(X_i)(C_{uv}^k) . \alpha_i \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v - \sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{uv}^k . d\alpha_u \wedge \alpha_v - \sum_{1 \leq u < v \leq n} C_{vu}^k . d\alpha_v \wedge \alpha_u$$

$$= - \sum_{1 \leq u < v \leq n} \sum_{i=1}^n \partial(X_i)(C_{uv}^k) . \alpha_i \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v - \sum_{u,v=1}^n C_{uv}^k . d\alpha_u \wedge \alpha_v$$

or $- \sum_{u,v=1}^n C_{uv}^k . d\alpha_u \wedge \alpha_v = \sum_{u,v=1}^n C_{uv}^k . \sum_{1 \leq r < s \leq n} C_{rs}^u . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$

et $\sum_{u=1}^n C_{uv}^k C_{rs}^u = \sum_{u=1}^n C_{rs}^u . \alpha_k [X_u, X_v] = \sum_{u=1}^n \alpha_k \left(C_{rs}^u . [X_u, X_v] \right)$

$$= \sum_{u=1}^n \alpha_k \left([C_{rs}^u X_u, X_v] \right) + \sum_{u=1}^n \alpha_k \left(\partial(X_v)(C_{rs}^u) . X_u \right)$$

$$= \alpha_k \left[[X_r, X_s], X_v \right] + \partial(X_v)(C_{rs}^k)$$

donc $d^2 \alpha_k = - \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq u < v \leq n} \cancel{\partial(X_i)(C_{uv}^k)} . \alpha_i \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v$

$$+ \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq r < s \leq n} \cancel{\partial(X_v)(C_{rs}^k)} . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$$+ \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq r < s \leq n} \alpha_k \left([[X_r, X_s], X_v] \right) . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$$= \sum_{1 \leq v < r < s \leq n} \alpha_k \left([[X_r, X_s], X_v] \right) . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$$+ \sum_{1 \leq r < v < s \leq n} \alpha_k \left([[X_r, X_s], X_v] \right) . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$$+ \sum_{1 \leq r < s < v \leq n} \alpha_k \left([[X_r, X_s], X_v] \right) . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$$= \sum_{1 \leq v < r < s \leq n} \alpha_k \left([[X_r, X_s], X_v] + [[X_s, X_v], X_r] + [[X_v, X_r], X_s] \right) . \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_v$$

$= 0$ d'après Jacobi.

- supposons que $d^2\omega=0$ pour tout $\omega\in\Gamma(\Lambda^k A)$.

alors $d^2(\omega\wedge\alpha_k) = d\left(d\omega\wedge\alpha_k + (-1)^k\omega\wedge d\alpha_k\right)$

$= d^2\omega\wedge\alpha_k + (-1)^{k+1}.\,d\omega\wedge d\alpha_k + (-1)^k.\,d\omega\wedge d\alpha_k + \omega\wedge d^2\alpha_k$

$=0$

et $d^2(f\omega) = d\left(df\wedge\omega + f d\omega\right)$

$= d^2f\wedge\omega - df\wedge\omega + df\wedge d\omega + f.\,d^2\omega$

$=0$

Ceci prouve que $\forall\omega\in\Gamma(\Lambda^{k+1}A)$, $d^2\omega=0$.

* de même que pour le crochet de Gerstenhaber, le fait que l'on ait $d(\omega\wedge\Theta) = d\omega\wedge\Theta + (-1)^k.\,\omega\wedge d\Theta$ impose l'unicité de la différentielle à partir du moment où on la connaît sur les fonctions et les éléments de $\Gamma(A^*)$.

(ii) réciproquement, supposons que l'on a $d:\Gamma(\Lambda^k A^*)\longrightarrow\Gamma(\Lambda^{k+1}A^*)$ une différentielle et dérivation de degré 1 sur $\mathcal{A}^*$.

on définit a et $[.,.]$ sur A par : (ce qui nous donne que d s'exprime comme au (i) en fonction de a et de $[.,.]$).

$$\begin{cases} a(X)(f) = df(X), & f\in C^\infty(M),\ X\in\Gamma(A) \\ \alpha([X,Y]) = a(X)(\alpha(Y)) - a(Y)(\alpha(X)) - d\alpha(X\wedge Y) & X,Y\in\Gamma(A),\ \alpha\in\Gamma(A^*) \end{cases}$$

* soient $f,g\in C^\infty(M)$ et $X\in\Gamma(A)$:

$a(X)(fg) = d(fg)(X) = df(X).g + dg(X).f = a(X)(f).g + a(X)(g).f$

donc $a(X)$ est bien un champ de vecteurs sur M

de plus, $a(fX)(g) = dg(fX) = f.\,dg(X) = f.\,a(X)(g)$.

donc a est bien $C^\infty(M)$-linéaire.

* $[.,.]$ est bien $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique.

* soient $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(A)$:

si $\alpha \in \Gamma(A^*)$, on a : $\alpha([X, fY]) = a(X)(\alpha(fY)) - a(fY)(\alpha(X)) - d\alpha(X \wedge fY)$

$$= a(X)(f) \cdot \alpha(Y) + f a(X)(\alpha(Y)) - f \cdot a(Y)(\alpha(X)) - f \cdot d\alpha(X \wedge Y)$$

donc $\alpha([X, fY]) = \alpha(a(X)(f) \cdot Y + f[X, Y])$ pour tout $\alpha \in \Gamma(A^*)$

donc $[X, fY] = a(X)(f) \cdot Y + f[X, Y]$.

de plus, $a[X, Y](f) = df[X, Y] = a(X)(df(Y)) - a(Y)(df(X)) - d^2 f(X \wedge Y)$

$$= (a(X) \circ a(Y) - a(Y) \circ a(X))(f)$$

$$= [a(X), a(Y)](f)$$

* reste à voir que $[\cdot, \cdot]$ vérifie Jacobi :

- on a vu précédemment que si $k \in \{1 - n\}$, on a :

$$d^2 \alpha_k = \sum_{1 \leq r < s < t \leq n} \alpha_k([[X_r, X_s], X_t] + [[X_s, X_t], X_r] + [[X_t, X_r], X_s]) \cdot \alpha_r \wedge \alpha_s \wedge \alpha_t$$

donc $d^2 \alpha_k(X_r \wedge X_s \wedge X_t) = \alpha_k([[X_r, X_s], X_t] + [[X_s, X_t], X_r] + [[X_t, X_r], X_s])$
$= 0$

Comme c'est vrai pour tout k, on a bien Jacobi sur les éléments de base.

- Supposons que l'on a Jacobi pour $X \in \Gamma(A)$, $Y \in \Gamma(A)$ et X_k ($\forall k \in \{1 - n\}$)

on pose $Z = \sum_{k=1}^n f_k \cdot X_k$.

alors $[[X, Y], Z] = \sum_{k=1}^n a[X, Y](f_k) \cdot X_k + \sum_{k=1}^n f_k \cdot [[X, Y], X_k]$

$$= a[X, Y](Z) + \sum_{k=1}^n f_k \cdot [[X, Y], X_k]$$

puis : $[[Y, Z], X] = -[X, [Y, Z]]$

$$= -[X, \sum_{k=1}^n a(Y)(f_k) \cdot X_k + \sum_{k=1}^n f_k [Y, X_k]]$$

$$= -\sum_{k=1}^n \Big(a(X) \circ a(Y)(f_k) \cdot X_k + a(Y)(f_k) \cdot [X, X_k] + a(X)(f_k) \cdot [Y, X_k] + f_k \cdot [X, [Y, X_k]] \Big)$$

d'où $[[Y,Z],X] = -a(X)\circ a(Y)(Z) - \sum_{k=1}^{n} a(Y)(f_k)\cdot[X,X_k]$

$$- \sum_{k=1}^{n} a(X)(f_k)\cdot[Y,X_k] - \sum_{k=1}^{n} f_k\cdot[X,[Y,X_k]]$$

puis $[[Z,X],Y] = -[[X,Z],Y]$

$$= a(Y)\circ a(X)(Z) + \sum_{k=1}^{n} a(X)(f_k)\cdot[Y,X_k]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a(Y)(f_k)\cdot[X,X_k] + \sum_{k=1}^{n} f_k\cdot[Y,[X,X_k]]$$

donc $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y]$

$$= \Big(a[X,Y] - a(X)\circ a(Y) + a(Y)\circ a(X)\Big)(Z)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f_k\cdot\Big([[X,Y],X_k] + [[Y,X_k],X] + [[X_k,X],Y]\Big)$$

$$= 0$$

en opérant de même sur X et Y, cela montre que Jacobi est vrai pour tous $X,Y,Z \in \Gamma(A)$

donc $(A, a, [\cdot,\cdot])$ est bien un algébroïde de Lie,

on a donc bien une bijection entre les structures d'algébroïde de Lie sur A et les différentielles sur $\mathcal{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma(\Lambda^k A^*)$ muni du produit extérieur.

5 structure de BV-algèbre sur $\mathcal{A}$

dans toute la suite, on suppose que $(A, a, [.,.])$ est un algébroïde de Lie
on a donc un crochet de Gerstenhaber $[.,.]$ sur $\mathcal{A}$ et une dérivation d sur $\mathcal{A}^*$ associés par les relations vues aux 3 et 4.

a BV-algèbre locale:

on se place toujours dans un ouvert trivialisant $\mathcal{U}$ avec une base $(X_1 — X_n)$ de sections locales et $(\alpha_1 — \alpha_n)$ la base duale de $(X_1 — X_n)$.

si $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$, on pose :

$$\boxed{DU = (-1)^u \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} \circ a(X_i)(U) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}}$$

on notera $D_0 U = (-1)^u \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} \circ a(X_i)(U)$

et $D_1 U = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = -\sum_{1 \leq i < j \leq n} [X_i, X_j] \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}$

remarque: ces expressions dépendent de la base choisie.

Théorème

> D engendre le crochet de Gerstenhaber local de $\mathcal{A}_{/\mathcal{U}}$

démonstration: soient $U \in \Gamma(\Lambda^u A)$ et $V \in \Gamma(\Lambda^v A)$:

* D_0 engendre $[.,.]_0$:

$$D_0(U \wedge V) = (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} \circ a(X_i)(U \wedge V)$$

$$= (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} \Big(a(X_i)(U) \wedge V + U \wedge a(X_i)(V) \Big)$$

$$= (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i=1}^{n} a(X_i)(U) \wedge \frac{\partial V}{\partial X_i} + (-1)^u \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} (a(X_i)(U)) \wedge V$$

$$+ (-1)^{u+v} \cdot \sum_{i=1}^{n} U \wedge \frac{\partial}{\partial X_i} (a(X_i)(V)) + (-1)^u \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial X_i} \wedge a(X_i)(V)$$

$$= D_0 U \wedge V + (-1)^u \cdot U \wedge D_0 V + (-1)^u \cdot [U, V]_0$$

donc $[U, V]_0 = (-1)^u D_0(U \wedge V) - (-1)^u \cdot D_0 U \wedge V - U \wedge D_0 V$.

* D_1 engendre $[.,.]_1$:

$$D_1(U\wedge V) = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}[X_i,X_j]\wedge\frac{\partial^2(U\wedge V)}{\partial X_i\partial X_j}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}[X_i,X_j]\wedge\Big(U\wedge\frac{\partial^2 V}{\partial X_i\partial X_j} + (-1)^{v-1}\cdot\frac{\partial U}{\partial X_i}\wedge\frac{\partial V}{\partial X_j}$$

$$+(-1)^{v}\cdot\frac{\partial U}{\partial X_j}\wedge\frac{\partial V}{\partial X_i}+\frac{\partial^2 U}{\partial X_i\partial X_j}\wedge V\Big)$$

$= (-1)^u\cdot U\wedge D_1V + D_1U\wedge V + (-1)^u\cdot[U,V]_1$ en réorganisant les termes.

proposition

pour tout $\alpha\in\Gamma(A^*)$, $D_\alpha = D + i_\alpha$ est un générateur local du crochet de Gerstenhaber de $\mathcal{A}$.

preuve :

* rappelons tout d'abord que i_α est défini par :

pour $U\in\Gamma(\Lambda^u A)$, $i_\alpha U\in\Gamma(\Lambda^{u-1}A)$ et, si $\omega\in\Gamma(\Lambda^{u-1}A^*)$,

on a $i_\alpha U(\omega) = U(\alpha\wedge\omega)$

* la proposition est équivalente à :

$\forall U\in\Gamma(\Lambda^u A), \forall V\in\Gamma(\Lambda^v A),\quad i_\alpha(U\wedge V) - i_\alpha U\wedge V - (-1)^u . U\wedge i_\alpha V = 0$

c'est-à-dire à : i_α est une dérivation de degré 1 sur $\mathcal{A}$.

par $C^\infty(M)$-linéarité de i_α et de $\alpha\mapsto i_\alpha$, il suffit d'étudier le cas où :

$\alpha = \alpha_i$, $U = X_{i_1}\wedge\cdots\wedge X_{i_u}$ et $V = X_{j_1}\wedge\cdots\wedge X_{j_l}$.

– si $i = i_k = j_l$: alors $U\wedge V = 0$ donc $i_\alpha(U\wedge V) = 0$

or $i_{\alpha_i}U\wedge V = (-1)^{k-1}\cdot X_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{i_k}}\wedge\cdots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\cdots\wedge X_{j_v}$

$= (-1)^{k-1}\cdot(-1)^{u-k+l-1}\cdot X_{i_1}\wedge\cdots\wedge X_{i_u}\wedge X_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_{j_l}}\wedge\cdots\wedge X_{j_v}$ car $X_{i_k} = X_{j_l}$.

$= (-1)^{u-1}\cdot U\wedge i_{\alpha_i}V$

donc $i_{\alpha_i}U\wedge V + (-1)^u\cdot U\wedge i_{\alpha_i}V = 0 = i_{\alpha_i}(U\wedge V)$.

– si $i=i_k$ et $i\notin\{j_1 — j_\nu\}$:

alors $i_{\alpha_i}(U\wedge V) = (-1)^{k-1}\cdot X_{i_1}\wedge — \wedge \hat{X}_{i_k}\wedge — \wedge X_{i_\mu}\wedge X_{j_1}\wedge — \wedge X_{j_\nu}$

$= i_{\alpha_i}U\wedge V$

et $i_{\alpha_i}V=0$

– si $i=j_\ell$ et $i\notin\{i_1 — i_\mu\}$:

alors $i_{\alpha_i}(U\wedge V) = (-1)^{\mu+\ell-1}\cdot X_{i_1}\wedge — \wedge X_{i_\mu}\wedge X_{j_1}\wedge — \wedge \hat{X}_{j_\ell}\wedge — \wedge X_{j_\nu}$

$= (-1)^{\mu}\cdot U\wedge i_{\alpha_i}V$

et $i_{\alpha_i}U=0$

– si $i\notin\{i_1 — i_\mu\}\cup\{j_1 — j_\nu\}$: alors $i_{\alpha_i}(U\wedge V) = i_{\alpha_i}U\wedge V = U\wedge i_{\alpha_i}V = 0$

<u>notations:</u>

(i) on considère $\Lambda = X_1\wedge — \wedge X_n$: c'est une sorte de forme volume locale.

on pose $\Lambda^\# : \Gamma(\Lambda^k A^*) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{n-k}A)$ (application locale)

$\omega \longmapsto i_\omega \Lambda$

on sait que c'est un isomorphisme, de réciproque $\Lambda^\flat$.

(ii) on pose $\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ji}^{i}\cdot \alpha_j$ section locale de A^*.

Théorème

pour tout $k\in\{0 — n-1\}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\Lambda^k A^*) \arrow[r, "\Lambda^\#"] \arrow[d, "(-1)^{k+1}d"'] \arrow[dr, phantom, "\text{©}"] & \Gamma(\Lambda^{n-k}A) \arrow[d, "D_\alpha"] \\
\Gamma(\Lambda^{k+1}A^*) \arrow[r, "\Lambda^\#"'] & \Gamma(\Lambda^{n-k+1}A)
\end{tikzcd}$$

(localement)

démonstration:

* on va d'abord montrer que $D_0 \circ \Lambda^\# = (-1)^{k+1} . \Lambda^\# \circ d_0$:

soit $\omega \in \Gamma(\Lambda^k A^*)$: par $\mathbb{R}$-linéarité de $d_0, \Lambda^\#, D_0$, on peut supposer que $\omega = f . \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$, $f \in C^\infty(M)$.

puis, quitte à permuter les X_i, que $\omega = f . \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$.

on a alors $\Lambda^\# \omega = f . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge X_n$, d'où :

$$D_0 \Lambda^\# \omega = (-1)^{n-k} . \sum_{i=k+1}^{n} a(X_i)(f) . (-1)^{n-i} . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$= (-1)^{k+1} . \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} . a(X_i)(f) . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n .$$

d'autre part, $d_0 \omega = (-1)^k . \sum_{i=k+1}^{n} a(X_i)(f) . \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_i$

d'où $\Lambda^\# d_0 \omega = (-1)^k . \sum_{i=k+1}^{n} a(X_i)(f) . (-1)^{i-1-k} . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} . a(X_i)(f) . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n$$

on a donc bien $D_0 \Lambda^\# \omega = \Lambda^\# d_0 \omega$.

* on va maintenant montrer que $(D_1 + i_\alpha) \circ \Lambda^\# = (-1)^{k+1} . \Lambda^\# \circ d_1$.

ici, tout est $C^\infty(M)$-linéaire donc, quitte à permuter les éléments de la base, on peut supposer que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$

donc $\Lambda^\# \omega = X_{k+1} \wedge \cdots \wedge X_n$, d'où :

$$D_1 \Lambda^\# \omega = - \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j+1} . [X_i, X_j] \wedge X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge \hat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$= \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} . \sum_{u=1}^{k} C_{ij}^u X_u \wedge X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge \hat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$+ \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{k+1+j} . C_{ij}^i . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$+ \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{k+i} . C_{ij}^j . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$= \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} . \sum_{u=1}^{k} C_{ij}^u . X_u \wedge X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_i} \wedge \cdots \wedge \hat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_n$$

$$+ (-1)^{k+1} . \sum_{i,j=k+1}^{n} (-1)^j . C_{ij}^i . X_{k+1} \wedge \cdots \wedge \hat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_n$$

de plus, $i_\alpha \Lambda^\# \omega = \sum_{i,j=1}^{n} C_j^i \cdot i_{\alpha_j}(X_{k+1}\wedge \dots \wedge X_n)$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} C_j^i \right) . (-1)^j . X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_j} \wedge \dots \wedge X_n$$

d'où $(D_1 + i_\alpha)\Lambda^\# \omega = \sum_{k+1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} . \sum_{u=1}^{k} C_{ij}^u . X_u \wedge X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_i} \wedge \dots \wedge \hat{X_j} \wedge \dots \wedge X_n$

$$+ (-1)^{k+1} . \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j+1} . \sum_{i=1}^{k} C_{ij}^i . X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_j} \wedge \dots \wedge X_n .$$

d'autre part, $d_1 \omega = (-1)^k . \sum_{i=1}^{k} \sum_{1 \le u < v \le n} C_{uv}^i (-1)^{k-i} . \alpha_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v .$

donc $d_1\omega = \sum_{v=k+1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^k . C_{iv}^i . \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_v$

$$+ \sum_{k+1 \le u < v \le n} \sum_{i=1}^{k} C_{uv}^i . \alpha_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_u \wedge \alpha_v$$

donc $\Lambda^\# d_1 \omega = \sum_{v=k+1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^k . C_{iv}^i . (-1)^{v-k-1} . X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_v} \wedge \dots \wedge X_n .$

$$+ \sum_{k+1 \le u < v \le n} \sum_{i=1}^{k} C_{uv}^i . (-1)^{u+v+k-1-i} . X_i \wedge X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_u} \wedge \dots \wedge \hat{X_v} \wedge \dots \wedge X_n .$$

$$= \sum_{v=k+1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{v+1} . C_{iv}^i . X_{k+1} \wedge \dots \wedge \hat{X_v} \wedge \dots \wedge X_n$$

$$+ \sum_{k+1 \le u < v \le n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1} . (-1)^{u+v} . X_i \wedge \cancel{X_{k+1}} \wedge \dots \wedge \hat{X_u} \wedge \dots \wedge \hat{X_v} \wedge \dots \wedge X_n .$$

d'où $(D_1 + i_\alpha)\Lambda^\# \omega = (-1)^{k+1} \Lambda^\# d_1 \omega .$

donc $D_\alpha \circ \Lambda^\# \omega = (-1)^{k+1} . \Lambda^\# \circ d\omega .$

(b) généralisation :

* 1er cas : le fibré $A \to M$ est trivialisable.

on peut alors trouver un élément $\Lambda_0 \in \Gamma(\Lambda^n A)$ partout non-nul.

on définit alors un opérateur $\bar{D} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de degré -1

par $\bar{D}\omega = (-1)^{k+1} . \Lambda_0^\# \circ d \circ (\Lambda_0^\#)^{-1} . \omega$

on se place alors sur un ouvert $\mathcal{U}$ de M, et on choisit une base de sections $(X_1 \ldots X_n)$: on a alors $\Lambda_0 = f.\Lambda$ où $\begin{cases} \Lambda = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \\ f \in C^\infty(M) \text{ partout non-nulle} \end{cases}$

alors $\bar{D} = (-1)^{k+1} . f.\Lambda^\# \circ d \circ \frac{1}{f}(\Lambda^\#)^{-1}$

$= D_\alpha$ où D_α est l'opérateur local défini en ②

donc $\begin{cases} \bar{D} \text{ engendre le crochet de Gerstenhaber de } \mathcal{A} \\ \bar{D}^2 = -\Lambda^\# \circ d^2 \circ (\Lambda^\#)^{-1} = 0 \end{cases}$

<u>2^e cas</u>: sinon.

on doit avoir recours aux densités : une densité est une section partout non-nulle du fibré $A/_{\{+,-\}} \to M$, fibré constitué des mêmes fibres que A mais quotientées par la relation $x \sim -x$.

Lorsqu'on relève cette densité $\bar{\Lambda}_0$ dans $A \to M$, on obtient une forme volume "au signe près". Or il existe toujours des densités, contrairement aux formes volumes. On définit alors

$$\bar{D} = (-1)^{k+1} \Lambda_0^\# \circ d \circ (\Lambda_0^\#)^{-1}$$

où Λ_0 est un des deux relèvements de $\bar{\Lambda}_0$ dans $A \to M$

(on remarque que l'on peut remplacer Λ_0 par $-\Lambda_0$ sans changer $\bar{D}$).

on retrouve alors le 1er cas, et on peut conclure dans tous les cas:

Théorème

> si $(A, a, [\cdot,\cdot]_A)$ est un algébroïde de Lie,
> alors $(\mathcal{A}, \wedge, [\cdot,\cdot])$ est une BV-algèbre.