THESE DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7

MATHÉMATIQUES

E.D. SCIENCES MATHÉMATIQUES DE PARIS - CENTRE

Gonçalo Nery Tabuada

Théorie homotopique des DG-catégories

Soutenue le 20 septembre 2007, devant le jury composé de :

M. Pierre Cartier (I.H.É.S.)	Président
M. Denis-Charles Cisinski (Université Paris 13)	
M. Bernhard Keller (Université Paris 7)	Directeur
M. Maxim Kontsevich (I.H.É.S.)	
M. Raphaël Rouquier (University of Oxford)	
M. Bertrand Toën (C.N.R.S.-Laboratoire Emile Picard)	Rapporteur

Rapporteur externe (absent à la soutenance)

M. Mikhail Kapranov (Yale University)

Remerciements

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici toute ma gratitude envers Bernhard Keller qui a dirigé cette thèse et guidé mes premiers pas dans la recherche. Il est impossible de résumer en quelques phrases tout ce que je lui dois. Il m'a soutenu dès le premier jour et m'a enseigné le métier avec beaucoup de dévouement.

'Merci'

Mes remerciements les plus chaleureux vont aussi à Denis-Charles Cisinski et Bertrand Toën. Ils m'ont fait profiter de leur immense richesse mathématique et cela m'a ouvert de nouveaux horizons de recherche. Je suis très heureux qu'ils fassent partie du jury.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude à Mikhail Kapranov et Bertrand Toën, qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse. Je remercie Mikhail Kapranov pour sa lecture et pour avoir fait le lien entre cette thèse et son travail fondateur avec Alexei Bondal. Je remercie profondément Bertrand Toën pour toutes ses corrections et suggestions qui ont permis d'améliorer énormément la qualité scientifique de ce texte.

L'un des objets mathématiques au centre de cette thèse est une dg-catégorie $\mathcal{K}$ due à Maxim Kontsevich. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté, si promptement, de siéger dans le jury.

Messieurs Pierre Cartier et Raphaël Rouquier me font un très grand honneur de siéger dans le jury. Leurs exposés au cours de ces dernières années m'ont apporté beaucoup.

La source principale d'inspiration pour cette thèse a été l'article *DG quotients of DG categories* par Vladimir Drinfeld. J'espère que cette thèse lui fera plaisir.

Pendant la préparation de la thèse j'ai profité de discussions électroniques aussi bien que de vive voix avec plusiers mathématiciens : Joseph Ayoub, Michael Batanin, Clemens Berger, Rick Jardine, Francesco Lemma, Jean-Louis Loday, Orlando Neto, Stefan Schwede et Mark Weber. Je les remercie tous, ainsi que ceux que j'ai oubliés de citer.

Je voudrait dire *'Obrigado'* à Gustavo Granja, qui depuis Lisbonne, m'a encouragé et a répondu à mes questions naïves sur la théorie d'homotopie (stable).

Dès mon arrivée à Paris, j'ai eu la chance de profiter des cours et groupes de travail organisés par Jean Barge et Fabien Morel. Je les remercie tous les deux pour l'influence qu'ils ont eue dans mes choix mathématiques.

L'excellente ambiance régnant sur le plateau des doctorants a été capitale pendant ces années. Je tiens donc à exprimer toute mon amitié à tous ceux que j'ai pu rencontrer.

Je voudrait remercier Monique Douchez et Michèle Wasse pour toute leur aide et efficacité dans la partie administrative ainsi que la *Fundação para a Ciência e Tecnologia - Portugal* pour m'avoir soutenu financièrement avec la bourse SFRH/BD/144035/2003.

Pour finir, je remercie profondément mes parents, mes oncles et Liliana pour leur amour, ainsi que mon frère Paulo Tabuada pour m'avoir enseigné à ne pas avoir peur *'des mathématiques, du futur, de la vie.'*

Contents

Introduction **6**

I À la poursuite du Motivateur des DG-catégories **23**

1 Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des DG-catégories **25**
1.1 Introduction . . . 25
1.2 Préliminaires . . . 25
1.3 Théorème principal . . . 27
1.3.1 Preuves . . . 28

2 Invariants additifs de DG-catégories **33**
2.1 Introduction . . . 33
2.2 Conventions . . . 34
2.3 DG-foncteurs quasi-équiconiques . . . 34
2.4 Additivisation . . . 42
2.5 DG-foncteurs de Morita . . . 46
2.6 Invariants . . . 55
2.6.1 Homologies de Hochschild, Cyclique, Negative, ... 56
2.6.2 K-théorie algébrique . . . 57
2.6.3 Vision globale . . . 57
2.6.4 Charactère de Chern . . . 57
2.7 DG-catégories compactes et lisses . . . 58

3 Higher K-theory via universal invariants **61**
3.1 Introduction . . . 61
3.2 Preliminaries . . . 63
3.3 Derived Kan extensions . . . 64
3.4 Localization: model categories versus derivators . . . 65
3.5 Filtered homotopy colimits . . . 70
3.6 Pointed derivators . . . 76
3.7 Small weak generators . . . 77
3.8 Stabilization . . . 79
3.9 DG quotients . . . 86
3.10 The universal localizing invariant . . . 89
3.11 A Quillen model in terms of presheaves of spectra . . . 95
3.12 Upper triangular DG categories . . . 95
3.13 Split short exact sequences . . . 99

3.14 Quasi-Additivity . . . 100
3.15 The universal additive invariant . . . 106
3.16 Concluding remarks . . . 110

II Ramifications de la théorie homotopique des DG-catégories 111

4 The Q-model for the Morita homotopy theory of DG categories 113
4.1 Introduction . . . 113
4.2 Preliminaries . . . 114
4.3 Homotopy of DG functors . . . 114
4.4 Q-model structure . . . 116
4.4.1 Morita model structure . . . 116
4.4.2 Q-model structure . . . 119
4.4.3 Q-fibrant objects . . . 123
4.5 Closed symmetric monoidal structure . . . 125
4.6 Derived internal Hom-functor . . . 126
4.7 Relation with dgcat . . . 131

5 Homotopy theory of well-generated algebraic triangulated categories 133
5.1 Introduction . . . 133
5.2 Preliminaries . . . 134
5.3 Monadic structure T on dgcat . . . 135
5.4 Quillen's lifting argument . . . 138
5.5 Homotopy theory of T-algebras . . . 140
5.6 Exact α-cocomplete dg categories . . . 141
5.7 Enhancement of well-generated algebraic triangulated categories . . . 147

III Applications à la DG-(dé)stabilisation 149

6 On the structure of Calabi-Yau categories with a cluster tilting subcategory 151
6.1 Introduction . . . 151
6.2 Preliminaries . . . 152
6.3 Embedding . . . 153
6.4 Determination of the image of G . . . 156
6.5 Alternative description . . . 159
6.6 The main theorem . . . 161
6.7 Appendix: extension of t-structures . . . 163

A Drinfeld's DG quotient 167

Introduction

Nous renvoyons à l'exposé de Keller [Kel06b] pour une présentation et motivation de la plupart des concepts mathématiques qui interviennent dans cette thèse. Nous proposons plusieurs contributions originales à l'étude :

- des dg-catégories et de leurs invariants,

- des catégories triangulées (algébriques) bien engendrées au sens de Neeman et

- de l'approche des algèbres 'cluster' au sens de Fomin-Zelevinsky par la théorie des représentations.

Cette thèse correspond aux articles [Tab05b] [Tab06] [Tab05a] [Tab07] [Tabc] [Tabb] [Taba] et à un appendice, où une preuve simple et purement homotopique d'un théorème dû à Drinfeld est presentée. Dans le résumé suivant, nous présentons les résultats principaux de cette thèse d'une façon plus détaillée.

DG-catégories

Les catégories différentielles graduées (=dg-catégories) 'enrichissent' notre comprehension des catégories triangulées qui apparaissent naturellement en algèbre et géométrie.

L'idée d'utiliser les dg-catégories pour 'enrichir' les catégories triangulées remonte aux travaux de Bondal-Kapranov [BK90]. Leur motivation principale était l'étude des collections exceptionnelles de faisceaux cohérents sur les variétés projectives. Elles ont été utilisées aussi par Keller [Kel94] dans l'étude de la théorie de Morita dérivée et de la dualité de Koszul.

Actuellement, les dg-catégories sont considérées comme des schémas non-commutatifs par Drinfeld [Dri02] [Dri04] et Kontsevich [Kon98] [Kon04] dans leur programme de géometrie algébrique non-commutative.

L'une des opérations importantes qu'on peut réaliser dans les catégories triangulées est le passage au quotient. Cette opération de quotient à été relevée au monde de dg-catégories par Keller dans [Kel94] et récemment par Drinfeld dans [Dri04].

Chapitre 1

Dans le but de réinterpreter la construction du dg-quotient de Drinfeld d'un point de vue purement homotopique afin de mieux comprendre sa propriété universelle, on construit une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées dgcat. Rappelons qu'un dg-foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une *quasi-equivalence* si :

- pour tous objets c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1), F(c_2))$ est un quasi-isomorphisme et

- le foncteur $\mathrm{H}^0(F)$ de $\mathrm{H}^0(\mathcal{C})$ vers $\mathrm{H}^0(\mathcal{D})$ est essentiellement surjectif.

Théorème 0.1 (1.8)**.** *La catégorie* dgcat *admet une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les quasi-equivalences. Les fibrations sont les dg-foncteurs* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *qui induisent des surjections de complexes* $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$ *pour tous* X*,* Y *dans* $\mathcal{A}$ *et tels que pour tout objet* $X \in \mathcal{A}$ *et tout morphisme* $v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), Z)$ *qui devient un isomorphisme dans* $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$*, il existe un morphisme* $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ *tel que* $F(u) = v$ *et qui devient un isomorphisme dans* $\mathsf{H}^0(\mathcal{A})$*.*

Remarque 0.2. Notre construction est inspirée par des arguments dans [Rez] et par la construction du dg-quotient donnée par Drinfeld dans [Dri04]. La clef pour cette construction est une certaine dg-catégorie $\mathcal{K}$ définie par Drinfeld dans [Dri04, 3.7.1] et qui est due à Kontsevich. Conceptuellement, elle joue le même role dans dgcat que l'intervalle dans la catégorie des espaces topologiques.

Remarque 0.3. Dans l'appendice, on donne une preuve simple et purement homotopique de la propriéte universelle du dg-quotient de Drinfeld [Dri04], qui est basée seulement sur le théorème 0.1.

Rappelons maintenant quelques résultats du travail fondamental de Toën [Toë07], rendus possibles par le théorème 0.1.

On note Heq la localisation de dgcat par rapport à la classe des quasi-équivalences. Les morphismes dans la localisation (de Dwyer-Kan [DK80]) sont décrits de la façon suivante: soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux dg-catégories. Si necessaire, on peut remplacer $\mathcal{A}$ par une dg-catégorie quasi-équivalente de façon que $\mathcal{A}$ soit k-plate, c'est-à-dire le foncteur $\mathcal{A}(X, Y)\otimes ?$ préserve les quasi-isomorphismes pour tous X,Y dans $\mathcal{A}$ (par exemple, on peut prendre une résolution cofibrante de $\mathcal{A}$). Soit $\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la sous catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})$ des $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodules formée des bimodules X tels que le foncteur produit tensoriel dérivé

$$? \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} X : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

envoie les $\mathcal{A}$-modules représentables vers des objets qui sont isomorphes dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ à des $\mathcal{B}$-modules représentables. D'une façon équivalente, on demande que $X(?, A)$ soit isomorphe dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ à un $\mathcal{B}$-module représentable pour tout objet A dans $\mathcal{A}$.

Théorème 0.4 ([Toë07])**.** *Les morphismes de* $\mathcal{A}$ *vers* $\mathcal{B}$ *dans* Heq *sont en bijection naturelle avec les classes d'isomorphisme de la catégorie* $\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*.*

Maintenant, soit $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et dont les morphismes sont les quasi-isomorphismes de dg-bimodules. La catégorie $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est donc une sous categorie non pleine de la catégorie des dg-bimodules $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})$.

Théorème 0.5 ([Toë07])**.** *Il existe une équivalence faible canonique d'ensembles simpliciaux entre* $\mathsf{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *et le nerf de la catégorie* $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*.*

Théorème 0.6 ([Toë07])**.** *La catégorie monoïdale* $(\mathsf{Heq}, - \overset{\mathbb{L}}{\otimes} -)$ *admet un foncteur Hom-interne* $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-, -)$*. Pour deux dg-catégories* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$*, telles que* $\mathcal{A}$ *est* k*-plate, la dg-catégorie* $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *est isomorphe dans* Heq *à la dg-catégorie* $\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*, c'est-à-dire la sous catégorie pleine de la dg-catégorie des* $\mathcal{A}$*-*$\mathcal{B}$*-bimodules, dont les objets sont ceux de* $\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *qui sont en plus cofibrants comme bimodules.*

Chapitre 2

On remarque que tous les invariants fonctoriels classiques comme la K-théorie algébrique, l'homologie de Hochschild, l'homologie cyclique, ... se prolongent naturellement des k-algèbres vers les dg-catégories. D'une façon analogue au cas des k-algèbres ordinaires, ces invariants sont préservés par les équivalences de Morita dérivées. Cela conduit au problème de donner une description explicite de la 'catégorie d'homotopie de Morita', c'est-à-dire la localisation de dgcat par rapport aux équivalences de Morita dérivées, puisque tous ces invariants descendent à cette catégorie.

On résout ce problème en utilisant le formalisme d'algèbre homotopique de Quillen. En effet, on construit une structure de catégorie de modèles de Quillen sur dgcat, dont les équivalences faibles sont les dg-foncteurs *de Morita*, c'est-à-dire les dg-foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui induisent une équivalence $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{A})$ entre catégories dérivées.

Théorème 0.7 (2.27)**.** *La catégorie* dgcat *admet une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant, dont les equivalences faibles sont les dg-foncteurs de Morita et dont les cofibrations sont les mêmes que celles du théorème 0.1.*

Remarque 0.8. Notre structure a été construite à partir de celle du théorème 0.1 en deux étapes. (On remarque qu'une quasi-equivalence est un dg-functor de Morita).

Premièrement, on a construit une structure de catégorie de modèles de Quillen intermediaire, dont les équivalences faibles sont les dg-foncteurs quasi-équiconiques, voir section 2.3. Dans cette étape, on s'est inspiré de la construction de Bondal-Kapranov de l'envelope pre-triangulée d'une dg-catégorie, voir [BK90].

Dans une deuxième étape, on a relevé la construction de la Karoubianisation d'une catégorie triangulée, voir [BS01], au monde des dg-catégories en utilisant des facteurs directs à homotopie près. Cela nous a permis de contrôler les objets compacts de la catégorie dérivée d'une dg-catégorie.

On désigne par Hmo la localisation de dgcat par rapport aux dg-foncteurs de Morita. Dans Hmo, les équivalences dérivées au sens de Rickard-Keller [Ric89] [Ric91] [Kel94] correspondent à des isomorphismes et le 'groupe de Picard dérivé' [RZ03] au sens de Rouquier-Zimmermann y apparaît comme un groupe d'automorphismes.

Proposition 0.9 (2.34)**.** *Une dg-catégorie* $\mathcal{A}$ *est Morita fibrante si est non vide et l'image essentielle du plongement* $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *est stable par suspensions, cônes et facteurs directs.*

Proposition 0.10 (2.14, 2.35)**.** *La structure de catégorie de modèles de Quillen du théorème 0.7 est une localisation de Bousfield à gauche de la structure de catégorie de modèles de Quillen du théorème 0.1.*

On note $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_{fib}$ une resolution Morita fibrante fonctorielle de $\mathcal{A}$.

Corollaire 0.11 (2.36, 2.37)**.** *Le foncteur* $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_{fib}$ *nous fournit un adjoint à droite du foncteur quotient* $\mathsf{Heq} \to \mathsf{Hmo}$ *et induit une equivalence entre* Hmo *et la sous catégorie pleine de* Heq *formée des dg-catégories Morita fibrantes.*

On désigne par $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, resp. $\mathcal{R}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, resp. $\mathcal{R}\mathsf{Hom}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ les catégories $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$, resp. $\mathcal{R}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$, resp. $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$.

La corollaire 0.11 nous permet d'étendre les résultats de Toën au cadre des dg-foncteurs de Morita. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux dg-catégories.

Corollaire 0.12 (2.39)**.**
- *Les morphismes de* $\mathcal{A}$ *vers* $\mathcal{B}$ *dans* Hmo *sont en bijection naturelle avec les classes d'isomorphime de la catégorie* $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.
- *On dispose d'une équivalence faible canonique d'ensembles simpliciaux entre* $\mathsf{Map}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *et le nerf de la catégorie* $\mathcal{R}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.
- *La catégorie monoïdale symétrique* $(\mathsf{Hmo}, -\overset{\mathbb{L}}{\otimes}-)$ *admet un foncteur* Hom*-interne* $\mathcal{R}\mathsf{Hom}_{mor}(-,-)$.

Rappelons que tous les invariants habituels comme la K-théorie algébrique, l'homologie de Hochschild, l'homologie cyclique, ... descendent à la catégorie Hmo. Ces invariants dépendent en fait de moins de structure, voir l'exemple 0.16. Cela motive la construction suivante.

Soit Hmo_0 la catégorie qui a pour objets les petites dg-catégories et telle que $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hmo}_0}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. La composition est induite par celle de Hmo. On dispose d'un foncteur canonique $\mathsf{Hmo} \to \mathsf{Hmo}_0$.

Lemme 0.13 (2.41)**.** *La catégorie* Hmo_0 *est additive et le produit tensoriel* $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ *de* Hmo *induit une structure monoïdale symétrique sur* Hmo_0.

Soit maintenant $F : \mathsf{Hmo} \to \mathsf{C}$ un foncteur à valeurs dans une catégorie additive C.

Théorème 0.14 (2.43)**.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le foncteur F est composé d'un foncteur additif* $\mathsf{Hmo}_0 \to \mathsf{C}$ *et du foncteur canonique* $\mathsf{Hmo} \to \mathsf{Hmo}_0$.

2) *Pour toutes dg-catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, l'identité* $F([X])+F([Z]) = F([Y])$, *est vérifiée dans* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(F(\mathcal{A}), F(\mathcal{B}))$ *pour tout triangle* $X \to Y \to Z \to X\,[1]$ *de* $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

3) *Pour toute dg-catégorie $\mathcal{A}$, le morphisme*

$$F(\mathcal{A}) \oplus F(\mathcal{A}) \xrightarrow{[F(i_1)\,,\,F(i_2)]} F(\,T(\mathcal{A}))$$

est un isomorphisme dans C.

4) *Pout toute dg-catégorie prétriangulée $\mathcal{A}$ munie de sous-dg-catégories pleines prétriangulées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui donnent lieu à une décomposition semi-orthogonale* $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}) = (\mathrm{H}^0(\mathcal{B}), \mathrm{H}^0(\mathcal{C}))$, *voir [BLL04], le morphisme*

$$F(\mathcal{B}) \oplus F(\mathcal{C}) \to F(\mathcal{A})$$

induit par les inclusions est un isomorphisme dans C.

Remarque 0.15. Toute équivalence dérivée, voir [Ric89], donne un isomorphisme dans Hmo et donc dans Hmo_0. Cependant, il existe d'autres isomorphismes dans Hmo_0 : si k est un corps algébriquement clos et A une k-algèbre (ordinaire) de dimension finie sur k et de dimension globale finie, alors A est isomorphe à son plus grand quotient semisimple $A/\mathrm{rad}(A)$ dans Hmo_0 (voir [Kel98, 2.5]) mais dans Hmo, A est isomorphe à $A/\mathrm{rad}(A)$ seulement si A est semisimple.

On appelle un foncteur $F : \mathsf{Hmo} \to \mathsf{C}$ qui satisfait aux conditions du théorème 0.14 un *invariant additif.*

Exemple 0.16.

- **K-théorie** Soit $\mathcal{A}$ une petite dg-catégorie. On definit la K-théorie de $\mathcal{A}$ comme la K-théorie de Waldhausen associé à la catégorie des dg-modules cofibrants et parfaits dont les cofibrations sont les monomorphismes (scindées dans la catégorie graduée) et les équivalences faibles les quasi-isomorphismes. Cette construction nous fournit un foncteur K de dgcat vers la catégorie homotopique des spectres (symétriques). Par des résultats dus à Waldhausen [Wal85] le foncteur K est un invariant additif.

- **Homologie de Hochschild, cyclique,** ... Soit $\mathcal{A}$ une petite dg-catégorie (qu'on peut supposer cofibrante). On associe à $\mathcal{A}$ son complexe mixte $C(\mathcal{A})$ au sens de Kassel [Kas87], voir aussi [Kel99]. Cela nous fournit un foncteur C de dgcat vers $\mathcal{D}(\Lambda)$, où Λ est la dg-algèbre $k[B]/(B^2)$, avec B de degré -1 et $\partial B = 0$. Toutes les variantes de l'homologie cyclique dépendent seulement de $C(\mathcal{A})$ considéré comme un object dans $\mathcal{D}(\Lambda)$. Par des résultats dus à Keller [Kel98] [Kel99], le foncteur C est un invariant additif.

Maintenant on remarque que les théorèmes 0.7 et 0.14 nous fournissent une construction explicite de 'l'invariant additif universel', c'est-à-dire un foncteur

$$\mathcal{U}_a : \mathsf{dgcat} \to \mathsf{Hmo}_0$$

à valeurs dans une catégorie additive qui rend inversibles les dg-foncteurs de Morita, transforme les décompositions semi-orthogonales au sens de Bondal-Orlov [BO] en sommes directes et qui est universel pour ces propriétés.

Cette construction a été reliée récemment à la théorie des motifs par Kontsevich dans [Kon, 4] :

Triangulated categories of the type $D(X)$ where X is a smooth projective variety over a field $\mathbf{k}$ *belong to a larger class of smooth proper triangulated* $\mathbf{k}$*-linear dg-categories (another name is 'saturated categories'), see [KS], [TV]. We see that the above quotient category of pure motives is a full subcategory of* K_0*-decategorification (with* $\mathbb{Q}$ *coefficients) of the* 2*-category of smooth proper* $\mathbf{k}$*-linear dg-categories. This construction was descibed recently (without mentioning the relation to motives) in [Tab05a].*

Analogously, if one takes the quotient of the Voevodsky triangulated category of mixed motives by the endofunctor $\mathbb{Q}(1)[2]\otimes .$*, the resulting triangulated category seems to be similar to a full subcategory of the full decategorification of the* 2*-category of smooth proper* $\mathbf{k}$*-linear dg-categories.*

Un exemple d'un invariant additif est le groupe de Grothendieck K_0. Nous observons que dans Hmo_0, le foncteur K_0 devient coreprésentable. Soit $\underline{k}$ la dg-catégorie avec un seul object et dont la dg-algèbre d'endomorphismes est k.

Lemme 0.17 (2.45)**.** *On a un isomorphisme naturel de groupes abéliens*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}_0}(\underline{k},\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{C})\,.$$

Ce lemme nous fournit immédiatement les caractères de Chern. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et HC_n le n-ième groupe d'homologie cyclique. Comme HC_n est un foncteur additif, on dispose d'un foncteur

$$\mathrm{HC}_n : \mathsf{Hmo}_0 \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}\,.$$

Maintenant, à partir de l'isomorphisme

$$\mathrm{HC}_*(k) \simeq k\,[u]\,,\;\; |u| = 2\,,$$

et du lemma de Yoneda, on obtient les caractères de Chern

$$ch_{2n} : \mathrm{K}_0 \to \mathrm{HC}_{2n}\,.$$

Dans une tentative de construction d'une *mesure motivique*, Bondal-Larsen-Lunts ont introduit dans [BLL04] un anneau de Grothendieck $\mathcal{PT}$. On remarque que l'anneau $\mathcal{PT}$ s'annule si on n'impose pas des conditions de finitude. On le modifie en définissant $\mathcal{PT}^{cl}_{kar}$ comme le groupe abélien engendré par les classes de quasi-équivalences $[\mathcal{A}]$ de petites dg-catégories $\mathcal{A}$ Morita-fibrantes qui sont en outre compactes et lisses au sens de Kontsevich, voir [Kon04], soumis aux relations qui proviennent des décompositions semi-orthogonales au sens de Bondal-Orlov [BO]. On relie $\mathcal{PT}^{cl}_{kar}$ à notre construction de la catégorie Hmo_0.

Soit $\mathrm{K}_0(\mathsf{Hmo}^{cl}_0)$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie additive $(\mathsf{Hmo}^{cl}_0, \oplus)$ où l'on se restreint aux dg-catégories compactes et lisses, voir [Kon04]

Proposition 0.18 (2.49)**.** *On a un morphisme surjectif d'anneaux commutatifs*

$$\mathcal{PT}^{cl}_{kar} \to K_0(\mathsf{Hmo}^{cl}_0)\,.$$

Chapitre 3

Dans ce chapitre en utilisant le formalisme des dérivateurs de Grothendieck, on construit 'l'invariant localisant universel des dg-catégories'. On entend par cela un morphisme $\mathcal{U}_l$ du dérivateur pointé $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ associé à la théorie homotopique de Morita des dg-catégories vers un derivateur triangulé fort $\mathcal{M}^{loc}_{dg}$, tel que $\mathcal{U}_l$ commute aux colimites homotopiques filtrantes, préserve le point, envoie chaque suite exacte courte de dg-catégories vers un triangle et est universel pour ces proprietés.

À cause de cette propriété universelle *motivique*, *cf.* section 4.1 de [Kon], on appelle $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$ *le motivateur localisant* (stable) des dg-catégories. Par exemple, la construction du complexe mixte [Kel99] et la K-théorie non-connective [Sch06] sont des invariants localisants et se factorisent donc par $\mathcal{U}_l$.

On construit aussi 'l'invariant additif universel des dg-catégories', c'est-à-dire le morphisme universel de dérivateurs $\mathcal{U}_a$ du derivateur $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ vers un dérivateur triangulée fort $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ qui satisfait les deux premières propriétés et la troisième seulement pour les suites exactes scindées. On appelle $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ le *motivateur additif* (stable) des dg-catégories.

On montre que le spectre de K-théorie de Waldhausen apparaît comme un spectre de morphismes dans la catégorie de base $\mathcal{M}_{dg}^{add}(e)$ du motivateur additif. Cela est la première caractérisation conceptuelle de la K-théorie de Quillen-Waldhausen [Qui67] [Wal85] et nous donne une toute nouvele façon de penser la K-théorie.

La coreprésentation du spectre de K-théorie de Waldhausen comme un spectre de morphismes étend le lemme 0.17. La différence essentielle est qu'on considère des morphismes de dérivateurs à valeurs dans des dérivateurs triangulées forts au lieu des foncteurs à valeurs dans des catégories additives.

Afin de construire les motivateurs $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$ et $\mathcal{M}_{dg}^{add}$, on a été amené à développer plusieurs outils originaux et à établir de nouveaux liens entre la théorie des dérivateurs de Grothendieck [Gro90] et la théorie des catégories de modèles de Quillen [Qui67]. Le formalisme des dérivateurs de Grothendieck nous permet d'énoncer et de démontrer des proprietés universelles rigoureuses et de nous débarasser de plusieurs problèmes techniques présents dans l'approche de Quillen.

Notre construction se décompose en plusieurs parties. On commence par developper les idées de Cisinski sur la localisation des dérivateurs. Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur et S une classe de morphismes de $\mathbb{D}(e)$, où e designe la catégorie terminale.

Definition 0.19 (3.6 Cisinski)**.** Le derivateur $\mathbb{D}$ admet une *localisation de Bousfield à gauche* par rapport à S s'il existe un morphisme de derivateurs

$$\gamma : \mathbb{D} \to \mathsf{L}_S\mathbb{D}\,,$$

qui commute aux colimites homotopiques, envoie les elements de S vers des isomorphismes dans $\mathsf{L}_S\mathbb{D}(e)$ et satisfait à la propriété universelle suivante : pour chaque dérivateur $\mathbb{D}'$, le morphisme γ induit une équivalence de catégories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_S\mathbb{D}, \mathbb{D}') \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')\,,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ désigne la catégorie des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques et envoient les éléments de S vers des isomorphismes dans $\mathbb{D}(e)$.

Soient maintenant $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles de Quillen cellulaire et propre à gauche, S un ensemble de morphismes de $\mathcal{M}$ et $\mathsf{L}_S\mathcal{M}$ la localisation de Bousfield à gauche, *cf.* la section 3 de [Hir03]. On demontre le théorème clef suivant.

Théorème 0.20 (3.8 Cisinski)**.** *Le morphisme de dérivateurs*

$$\gamma : \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{L}Id} \mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M})$$

est la localisation de Bousfield à gauche de $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$ *par l'image de l'ensemble* S *dans* $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$.

Remarque 0.21. Ce théorème nous permet de caractériser le dérivateur associé à la localisation de Bousfield à gauche $\mathsf{L}_S\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ par une propriété universelle.

La preuve de ce théorème est basée sur une description constructive des S-équivalences locales, voir proposition 3.5.

On développe ensuite une théorie des 'ind-objets'. Supposons que $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles de Quillen cellulaire qui satisfait certaines conditions de finitude, voir section 3.5. A partir de $\mathcal{M}$, on construit une petite sous-catégorie $\mathcal{M}_f$ de $\mathcal{M}$ telle que le dérivateur $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$ correspond aux 'ind-objets' du prédérivateur associé à la localisation de $\mathcal{M}_f$ par rapport aux équivalences faibles.

Théorème 0.22 (3.21)**.** *Le morphisme de dérivateurs*

$$\mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}} \mathsf{L}_\Sigma \mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}\,,$$

induit une équivalence de catégories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})\,,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$ *désigne la catégorie des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques filtrantes.*

Remarque 0.23. Les conditions de finitude sur $\mathcal{M}$ nous permettent de construire une petite catégorie génératrice $\mathcal{M}_f$ à l'interieur de $\mathcal{M}$. On obtient alors $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$ en considérant une localisation de Bousfield à gauche de la catégorie des pré-faisceaux simpliciaux sur $\mathcal{M}_f$.

La preuve de ce théorème fait intervenir la théorie des extensions dérivées de Kan, au sens de Cisinski [Cisc], théorème 0.20 et des résultats dus à Toën-Vezzosi [TV05].

Afin de mieux comprendre les contextes stables on réinterprète les différentes constructions de stabilisation existant dans la littérature. On établit le lien entre la stabilisation de Heller et la stabilisation de Hovey/Schwede en démontrant que si on commence avec une catégorie de modèles de Quillen pointée $\mathcal{M}$, qui satisfait quelques hypothèses de génération, alors les deux constructions nous fournissent des résultats équivalents. On démontre le théorème de comparaison suivant.

Théorème 0.24 (3.31)**.** *Le morphisme induit entre les dérivateurs triangulés*

$$\varphi : \mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$$

est une équivalence, où $\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))$ *désigne la stabilisation au sens de Heller.*

Remarque 0.25. Les conditions de génération sur $\mathcal{M}$ nous permettent d'avoir une description explicite de l'espace des morphismes de $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M})$ et de réduire l'analyse du morphisme φ à la catégorie terminale e. Une analyse de l'espace des morphismes entre les générateurs dans $\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))$ et un argument sur les catégories triangulées à engendrement compact nous permettent alors de démontrer le théorème.

Ce théorème nous permet de caractériser la construction de Hovey/Schwede par une propriété universelle

En appliquant tous les outils déjà developpés à la théorie d'homotopie de Morita des dg-catégories, on construit un morphisme de dérivateurs

$$\mathcal{U}_t : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \rightarrow \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})$$

à valeurs dans un dérivateur triangulé fort. Le morphisme $\mathcal{U}_t$ est caractérisé par la propriété universelle suivante. Soit $\mathbb{D}$ un derivateur triangulé fort.

Proposition 0.26 (3.34)**.** *On dispose d'une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}), \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathcal{U}_t^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$ *désigne la catégorie des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques filtrantes et qui préservent le point.*

Pour chaque inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ d'une sous dg-catégorie pleine, on dispose d'un morphisme induit

$$S_K : \mathsf{cone}(\mathcal{U}_t(\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B})) \to \mathcal{U}_t(\mathcal{B}/\mathcal{A})$$

dans $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}(e)$, où $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ désigne le dg-quotient de Drinfeld. On démontre que tous les morphismes S_K peuvent être inversés, ce qui nous permet d'obtenir finalement *l'invariant localisant universel des dg-catégories*

$$\mathcal{U}_l : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}^{loc}_{dg}\,.$$

Definition 0.27 (3.42)**.** Un morphisme de dérivateurs F de $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ vers $\mathbb{D}$ satisfait la *condition Dr)* si:

- pour chaque inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ d'une sous dg-catégorie pleine, le morphisme induit

$$S_K : \mathsf{cone}(F(\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B})) \to F(\mathcal{B}/\mathcal{A})$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.

Théorème 0.28 (3.45)**.** *Le morphisme $\mathcal{U}_l$ induit une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}^{loc}_{dg}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathcal{U}_l^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,Dr,\,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,Dr\,,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$ désigne la catégorie des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques filtrantes, satisfont la condition Dr) et préservent le point.

Remarque 0.29. La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs propositions et théorèmes. On commence par construire un ensemble $\mathcal{E}$ d'inclusions $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$, avec $\mathcal{H}$ une I-cellule strictement finie. Cela nous permet d'exprimer chaque inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ d'une sous dg-catégorie pleine comme la colimite homotopique d'un diagramme filtrant où chaque terme appartient à $\mathcal{E}$. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 0.30 (3.40)**.** *Si*

$$G : \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}) \to \mathbb{D}$$

est un morphisme de dérivateurs triangulés qui commute aux colimites homotopiques et tel que $G(e)(S_L)$ est inversible pour chaque L dans $\mathcal{E}$, alors $G(e)(S_K)$ est inversible pour chaque inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ d'une sous dg-catégorie pleine.

Finalement, en utilisant les téchniques de localisation des dérivateurs développées jusqu'ici et le fait que le dérivateur $\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})$ admet un modèle de Quillen stable, on construit le motivateur localisant des dg-catégories $\mathcal{M}^{loc}_{dg}$.

On établit aussi un lien entre la construction $S_\bullet$ de Waldhausen et le foncteur de suspension dans la catégorie triangulée $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$. Soit Δ la catégorie simpliciale et $p : \Delta \to e$ le foncteur de projection.

Proposition 0.31 (3.52)**.** *On dispose d'un isomorphisme canonique dans $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$*

$$p_!\mathcal{U}_l(S_\bullet\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_l(\mathcal{A})[1]\,.$$

On montre aussi que le derivateur $\mathcal{M}^{loc}_{dg}$ admet un modèle de Quillen stable donné par une localisation de Bousfield à gauche d'une certaine catégorie de pré-faisceaux en spectres.

Proposition 0.32 (3.56)**.** *On dispose d'une équivalence de dérivateurs*

$$\mathsf{HO}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{st}},G}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(Sset_\bullet))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{loc}_{dg}\,.$$

Ensuite, afin d'étudier les suites exactes courtes scindées on introduit la notion de *dg-catégorie triangulaire supérieure*. Une dg-catégorie triangulaire supérieure $\underline{\mathcal{B}}$ est donnée par une matrice

$$\underline{\mathcal{B}} \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ sont des petites dg-catégories et $\mathcal{B}$ est un $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodule. Un morphisme de dg-catégories triangulaires supérieures $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ est donné par $\underline{F} := (F_{\mathcal{A}}, F_{\mathcal{C}}, F_X)$, où $F_{\mathcal{A}}$, resp. $F_{\mathcal{C}}$, est un dg-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}'$, resp. de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et F_X est un morphisme de $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodules de X vers X'. On désigne par dgcat^{tr} la catégorie des petites dg-catégories triangulaires supérieures. On dispose d'une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{dgcat}^{tr} \arrow[d, shift right, "|-|"'] \\ \mathsf{dgcat} \arrow[u, shift right, "I"'] \end{tikzcd} ,$$

où

$$I(\mathcal{B}') \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}' & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}'}(-,-) \\ 0 & \mathcal{B}' \end{pmatrix} .$$

Théorème 0.33 (3.65)**.** *La catégorie* dgcat^{tr} *admet une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les morphismes* $\underline{F}$ *tels que* $F_{\mathcal{A}}$ *et* $F_{\mathcal{B}}$ *sont des dg-foncteurs de Morita et* F_X *est un quasi-isomorphisme de $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodules.*

Proposition 0.34 (3.67)**.** *Si* $\underline{\mathcal{B}}$ *est une I-cellule strictement finie dans* dgcat^{tr}*, alors $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ et* $|\underline{\mathcal{B}}|$ *sont des I-cellules strictement finies dans* dgcat*.*

On démontre le résultat 'd'approximation' suivant, qui est un engrédient important dans la preuve du théorème de corepresentabilitée de la K-théorie de Waldhausen, voir théorème 0.40.

Proposition 0.35 (3.69)**.** *Chaque suite exacte courte scindée de dg-catégories est faiblement équivalente à une colimite homotopique filtrante de suites exactes courtes scindées dont les composantes sont des I-cellules strictement finies dans* dgcat*.*

Remarque 0.36. Notre preuve est basée sur le lien entre dg-catégories triangulaires supérieures et suites exactes courtes scindées. On utilise les propriétées de finitude de la catégorie de modèles de Quillen du théorème 0.33 et la proposition 0.34.

En utilisant les techniques de localisation du théorème 0.20, on construit le morphisme universel de dérivateurs

$$\mathcal{U}_u : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}_{dg}^{unst}$$

qui commute aux colimites homotopiques filtrantes, preserve le point et envoie chaque suite exacte scindée vers une cofibration homotopique. Le dérivateur $\mathcal{M}_{dg}^{unst}$ est le *motivateur unstable des dg-catégories*. Il admet un modèle de Quillen et l'espace de K-théorie de Waldhausen y apparaît comme un espace de morphismes.

Proposition 0.37 (3.81)**.** *On dispose d'une équivalence faible d'ensembles simpliciaux*

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} |N.wS.\mathcal{A}_f| .$$

En particulier, on dispose des isomorphismes

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathcal{A}), \, \forall i \geqslant 0 .$$

Finalement on stabilise le dérivateur $\mathcal{M}_{dg}^{unst}$ et on obtient l'invariant additif universel des dg-catégories

$$\mathcal{U}_a : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}_{dg}^{add}\,.$$

On appelle $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ le *motivateur additif des dg-catégories.*
Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé fort.

Definition 0.38 (3.82)**.** Un morphisme de dérivateurs F de $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ vers $\mathbb{D}$ satisfait la *condition A)* si:

- pour chaque suite exacte courte scindée (voir definition 3.68)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "i_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift right, "R"'] \arrow[r, shift right, "P"'] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "i_{\mathcal{C}}"'] \arrow[r] & 0\,, \end{tikzcd}$$

les dg-foncteurs $i_{\mathcal{A}}$ et $i_{\mathcal{C}}$ induisent un isomorphisme

$$\mathcal{U}_a(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{U}_a(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_a(\mathcal{B})$$

dans $\mathbb{D}(e)$.

Théorème 0.39 (3.85)**.** *Le morphisme $\mathcal{U}_a$ induit une équivalence de catégories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}_{dg}^{add}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathcal{U}_a^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,A),\,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,A)\,,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$ désigne la catégorie des morphismes de dérivateurs qui commutent aux colimites homotopiques filtrantes, satisfont la condition A) et préservent le point.

La K-théorie connective de Waldhausen est un invariant additif et descend donc à $\mathcal{M}_{dg}^{add}$. En utilisant le fait que le dérivateur $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ admet un modèle de Quillen enrichi sur les spectres, on démontre le théorème de corépresentabilitée suivant.

Théorème 0.40 (3.91)**.** *On dispose d'une équivalence faible de spectres*

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))\,,$$

où $K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ désigne le spectre de K-théorie connective de Waldhausen de $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
En particulier, on dipose d'une équivalence faible d'ensembles simpliciaux

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})|$$

et des isomorphismes

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(A), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})),\ \ \forall i \geqslant 0\,.$$

Remarque 0.41. Notre preuve est constituée de deux parties. Premièrement, on montre que le spectre de K-théorie connective de Waldhausen est un objet fibrant par rapport à notre modèle de Quillen de $\mathcal{M}_{dg}^{add}$. Pour cela, on utilise proposition 0.35 et le théorème de fibration de Waldhausen, voir [Wal85].
Dans une deuxième partie, on construit un morphisme naturel de $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1]$ vers la K-théorie connective et on montre qu'il est une équivalence faible en utilisant inductivement certaines suites exactes courtes scindées.

Remarque 0.42. Si dans le théorème précédent, on prend $\mathcal{A} = k$, on obtient

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(k), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathcal{B})\,.$$

Le spectre de K-théorie connective de Waldhausen devient donc corepresentable dans $\mathcal{M}_{dg}^{add}$.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, k désigne un corps.

Le problème suivant a été formulé par Toën dans [Toë07] :

The model category dgcat *together with the symmmetric monoidal structure* $-\otimes-$ *is not a symmetric monoidal model category, as the tensor product of two cofibrant objects in* dgcat *is not cofibrant in general. A direct consequence of this fact is that the internal Hom object between cofibrant-fibrant objects in* dgcat *can not be invariant by quasi-equivalences, and thus does not provide internal Hom's for the homotopy categories* Heq. *This fact is the main difficulty in computing the mapping spaces in* dgcat*, as the naive approach simply does not work.*

Clairement ce problème est analogue pour la catégorie homotopique Hmo. Rappelons que Toën dans [Toë07], a construit le foncteur Hom-interne $\mathsf{rep}_{dg}(-,-)$ pour Heq en utilisant une certaine dg-catégorie de bimodules quasi-représentables à droite, voir le théorème 0.6. On a étendu cet object Hom-interne à Hmo, voir le lemme 0.12.

Pour résoudre le problème posé par Toën, on construit une nouvelle catégorie de modèles de Quillen Lp en utilisant les concepts de *paire de localisation* et la construction explicite du dg-quotient donnée par Drinfeld dans [Dri04].

Rappelons qu'une paire de localisation $\mathcal{A}$ est donnée par une petite dg-catégorie $\mathcal{A}_1$ et une sous dg-catégorie pleine $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$. On désigne par Lp la catégorie des paires de localisation. Un morphisme de paires de localisation $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une *Q-équivalence faible* si le dg-foncteur induit

$$\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$$

entre les dg-quotients de Drinfeld est un dg-foncteur de Morita.

Théorème 0.43 (4.18)**.** *La catégorie* Lp *admet une structure de catégorie de modèles de Quillen dont les équivalences faibles sont les Q-équivalences faibles.*

Remarque 0.44. Notre construction est constituée de plusieurs parties et est inspirée par plusieurs arguments presents dans la construction de la catégorie homotopique stable des spectres au sens de Bousfield-Friedlander [BF78]. Rappelons que dans [Dri04], Drinfeld a donné une construction explicite du dg-quotient d'une dg-catégorie $\mathcal{A}$ modulo une sous dg-catégorie pleine $\mathcal{B}$ en imposant certaines conditions de platitude, qui sont automatiquement verifiées si on travaille sur un corps k. Notre preuve repose fortement sur cette construction explicite.

Dans section 4.5, on construit un produit tensoriel $-\otimes-$ sur Lp et un foncteur $\mathsf{Hom}(-,-)$.

Proposition 0.45 (4.32)**.** *La catégorie* Lp *munie des foncteurs* $-\otimes-$ *et* $\mathsf{Hom}(-,-)$ *est une catégorie monoïdale symétrique fermée.*

Proposition 0.46 (4.38)**.** *Le produit tensoriel* $-\otimes-$ *admet un foncteur dérivé total à gauche*

$$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}- : \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}) \times \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}) \longrightarrow \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})\,.$$

Théorème 0.47 (4.37)**.** *Le foncteur* $\mathsf{Hom}(-,-)$ *admet un foncteur dérivé total à droite*

$$\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-) : \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp}) \longrightarrow \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})\,.$$

Remarque 0.48. Notre preuve est basée sur une analyse profonde de la notion d'homotopie entre dg-foncteurs. Pour cela, on ré-interprète une construction d'une certaine dg-catégorie de morphismes donnée par Drinfeld dans [Dri04, 2.9], comme un objet de chemins fonctoriel pour la structure de modèles de Quillen du théorème 0.1. Cela nous permet d'obtenir une description plus simple de la notion d'homotopie entre dg-foncteurs et de démontrer le théorème.

Rappelons qu'on dispose d'une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Lp} \arrow[d, shift left, "Ev_1"] \\ \mathsf{dgcat} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd},$$

où Ev_1 est le foncteur d'évaluation dans la première composante et le foncteur F associe à une dg-catégorie $\mathcal{A}$ la paire de localisation $(\emptyset \subset \mathcal{A})$.

Proposition 0.49 (4.40)**.** *Si on considère dans* dgcat *la structure de modèles de Quillen du théorème 0.7 et dans* Lp *la structure de modèles de Quillen du théorème 0.43, l'adjonction précédente est une équivalence de Quillen.*

Proposition 0.50 (4.41)**.** *Les foncteurs dérivés totaux* $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}-$ *et* $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ *dans* $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$ *correspondent par l'équivalence*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}) \arrow[d, shift left, "\mathcal{R}Ev_1"] \\ \mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat}) \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

aux foncteurs $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}-$ *et* $\mathsf{rep}_{dg}^{mor}(-,-)$ *du corollaire 0.12*

Ces résultats nous permettent de ré-interpreter le foncteur $\mathsf{rep}_{dg}^{mor}(-,-)$ comme un foncteur dérivé total à droite $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ dans $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$. Cela donne une solution au problème formulé par Toën au début de ce chapitre.

Chapitre 5

Dans son livre [Nee01b], Neeman introduit une classe importante de catégories triangulées appelées *bien engendrées*. Rappelons qu'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est bien engendrée si elle est à engendrement α-compact, pour un cardinal régulier α, voir [Kra01] [Nee01b]. Neeman montre le théorème de représentabilité de Brown pour les catégories triangulées bien engendrées et aussi que cette classe de catégories triangulées est stable par localisations et passage à des sous-catégories localisantes engendrées par un ensemble d'objets.

Exemple 0.51. Soit $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne de Grothendieck, par exemple la catégorie des modules sur un espace annelé. Par le théorème de Popescu-Gabriel [PG64], $\mathcal{B}$ est une localisation de la catégorie $\mathrm{Mod}\, A$ des A-modules sur un anneau A. On déduit de cela [Nee01a] que la catégorie derivée non bornée de la catégorie abélienne $\mathcal{B}$ est une localisation de $\mathcal{D}(A)$ et est donc bien engendrée.

Keller [Kel06b] introduit la notion de catégorie triangulée algébrique afin de résumer les propriétés de toutes les catégories triangulées qui apparaissent naturellement en algèbre et géométrie algébrique. Rappelons qu'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est *algébrique* si elle est équivalente au sens triangulé à la catégorie stable $\underline{\mathcal{E}}$ d'une catégorie de Frobenius $\mathcal{E}$. Cela revient à demander que $\mathcal{T}$ soit équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes à homotopie près sur une catégorie additive.

Afin de mieux comprendre cette classe importante de catégories triangulées d'un point de vue homotopique, on construit, pour chaque cardinal régulier α, une catégorie $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ dont les objets sont essentiellement les dg-catégories qui sont stables par suspensions, cosuspensions, cônes et sommes α-petites. On procède en deux étapes.

Proposition 0.52 (5.7, 5.9)**.** *On dispose d'une monade* T_α *sur la catégorie* dgcat *dont les algèbres sont les dg-catégories qui admettent tous les coproduits* α*-petits.*

Remarque 0.53. En utilisant la théorie des ordinaux et son arithmétique, on construit la monade T_α en adaptant au monde des dg-catégories la monade Fam, voir [CJ95] et [KL97].

On montre ensuite que les propriétées d'unité et d'associativité d'une T_α-algèbre correspondent à l'existence de coproduits α-petits.

On désigne par $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$ la catégorie des T_α-algèbres. On dispose d'une adjonction naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{dgcat}\,. \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

Théorème 0.54 (5.16)**.** *La catégorie $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$ est munie d'une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant, telle qu'un morphisme $F : A \to B$ de T_α-algèbres est une équivalence faible, resp. fibration, si et seulement si $U(F)$ est une équivalence faible, resp. fibration, dans la structure de modèles de Quillen du théorème 0.1.*

Remarque 0.55. Notre preuve est inspirée d'un argument de relèvement dû à Quillen [Qui67]. Cet argument nous permet d'éviter une analyse des sommes amalgamées dans la catégorie $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$. On montre, en effet, qu'un objet de chemins fonctoriel dont on dispose dans dgcat (voir la preuve du théorème 0.47) admet une structure d'algèbre sur la monade T_α.

Dans une deuxième étape, on construit une catégorie $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ en considérant certains diagrammes dans la catégorie $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$. On dispose d'un foncteur d'oubli

$$U_1 : \mathsf{dgcat}_{ex,\alpha} \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}\,.$$

Proposition 0.56 (5.21)**.** *Le foncteur U_1 admet un adjoint à gauche.*

Proposition 0.57 (5.22)**.** *Le foncteur U_1 est monadique.*

Théorème 0.58 (5.26)**.** *La catégorie $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ est munie d'une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant, dont un morphisme $F : \underline{A} \to \underline{B}$ dans $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ est une équivalence faible, resp. fibration, si et seulement si $U_1(F)$ est une équivalence faible, resp. fibration, dans la structure de modèles de Quillen du théorème 0.54.*

Finalement, on definit un foncteur $\mathcal{D}_\alpha$ de $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ vers la catégorie Tri_α des catégories triangulées algébriques à engendrement α-compact, qui par [Por] [KjwMP] vérifie les conditions suivantes :

- toute catégorie dans Tri_α est équivalente à $\mathcal{D}_\alpha(\underline{A})$, pour $\underline{A}$ dans $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ et
- un morphisme F dans $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ est une equivalence faible si et seulement si $\mathcal{D}_\alpha(F)$ est une équivalence de catégories triangulées.

Cela nous montre que les catégories triangulées algébriques bien engendrées admettent un enrichissement homotopique donné par notre structure de modèles de Quillen du théorème 0.58.

Chapitre 6

Dans ce chapitre, on propose une description d'une certaine classe de catégories de Calabi-Yau en utilisant le formalisme des dg-catégories et la notion de 'stabilisation' au sens de la description de la catégorie d'orbites triangulée suivant Keller, voir [Kel05]. On fixe un corps k.

Soit $d \geqslant 2$ et $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée algébrique d-Calabi-Yau munie d'une sous-catégorie $\mathcal{T}$ qui est d-amas-basculante (d-cluster-tilting), voir section 6.2.

Ces catégories apparaissent (pour $d = 2$) naturellement dans

- l'approche conceptuelle des algèbres amassées (cluster algebras) au sens de Fomin-Zelevinsky,

- dans l'étude des modules de Cohen-Macaulay sur certaines singularitées isolées et dans l'étude des résolutions crépantes non-commutatives.

À partir de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$, on construit le carré commutatif cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{T} \arrow[r, hook] & \underline{\mathcal{E}} = \mathcal{C}\,, \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}$ est un 'modèle algébrique' de la catégorie $\mathcal{C}$, c'est-à-dire une catégorie de Frobenius k-linéaire où les idempotents se scindent et telle que la catégorie stable $\underline{\mathcal{E}}$ est équivalente à $\mathcal{C}$ en tant que catégorie triangulée.

D'après [Pal], on dispose d'une suite exacte courte de catégories triangulées

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0\,,$$

où $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ désigne la catégorie homotopique des complexes bornés sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{E}$-acycliques. Maintenant, soit $\mathcal{B}$ la sous dg-catégorie pleine de $\mathcal{C}^b(\mathcal{M})_{dg}$ formée des complexes $\mathcal{E}$-acycliques.

On definit un foncteur $G : \mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$, qui envoie un complexe borné à droite X sur le dg-module

$$B \mapsto \mathsf{Hom}^\bullet_{\mathcal{M}}(X, B)\,,$$

où B appartient à $\mathcal{B}$.

Cette construction induit un foncteur

$$G : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}\,.$$

Proposition 0.59 (6.2)**.** *Le foncteur G est pleinement fidèle.*

Remarque 0.60. La démonstration consiste à factoriser le foncteur G comme le foncteur composé suivant

$$\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \overset{\Upsilon}{\hookrightarrow} \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}-ac}(\mathcal{M}) \overset{\Psi}{\to} \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \overset{\Phi}{\to} \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}\,.$$

On montre ensuite que les foncteurs Υ et Ψ sont pleinement fidèles et que Φ l'est aussi lorsqu'on le restreint à l'image essentielle de Ψ.

Afin de caracteriser l'image essentielle du foncteur G, on introduit de nouvelles catégories et foncteurs résumés dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & & & \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} & \mathcal{B} \arrow[d] \\ \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \arrow[r, hook, "\Upsilon"] & \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{D}(\mathcal{B}'^{op})^{op} \arrow[u, "\sim"'] \arrow[d, "R'"] & \mathcal{B}' \\ & & \mathcal{D}^-(\underline{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\Gamma"'] & \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op} & \underline{\mathcal{M}} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Definition 0.61 (6.18)**.** Soit $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ dont les objets sont les Y tels que $\tau_{\geqslant -n}Y$ appartient à $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $R'(Y)$ appartient à $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$.

Proposition 0.62 (6.19)**.** *Un objet Y dans $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ appartient à l'image essentielle du foncteur G : $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ si et seulement s'il appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_f$.*

Remarque 0.63. Pour la preuve de cette proposition, on caractérise d'abord l'image essentielle du foncteur $\Psi \circ \Upsilon$. En effet, un objet Y dans $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ appartient à l'image essentielle de $\Psi \circ \Upsilon$ si et seulement si $\tau_{\geqslant -n}Y$ appartient à $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $L(Y)$ appartient à $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}})$. En utilisant le fait que la t-structure canonique sur $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ se restreint à $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ et l'équivalence $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$, on étend cette t-structure à $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$.

Finalement, on démontre que le foncteur $\Phi : \mathcal{D}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ est exact par rapport à ces t-structures, lorsqu'on se restreint à l'image essentielle de Ψ.

On désigne par M un objet de $\mathcal{M}$ ainsi que le complexe associé dans $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})$. Puisque la catégorie $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$ est engendrée par les objets $M \in \mathcal{M}$ et que le foncteur G est pleinement fidèle, on remarque que la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_f$ s'identifie avec la sous catégorie triangulée de $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ engendrée par les objets de $G(M)$.

En utilisant un argument dû à M. Van den Bergh, on caractérise les objets $G(M)$, $M \in \mathcal{M}$ de la façon suivante: soit P_M le $\underline{\mathcal{M}}$-module $\underline{\mathcal{M}}(?, M)$ projectif associé à $M \in \mathcal{M}$ et X_M l'image de M par le foncteur $\Psi \circ \Upsilon$.

Lemme 0.64 (6.20)**.** *On dispose d'un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}\,\underline{\mathcal{M}}}(P_M, \mathrm{H}^0(Y))\,,$$

pour tous $Y \in \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$.

On commence par caractériser les objets $G(M) = \Phi(X_M)$, $M \in \mathcal{M}$, dans la catégorie triangulée $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$, c'est-à-dire, on caractérise le foncteur :

$$R_M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(?, \Phi(X_M)) : \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} \to \mathrm{Mod}\, k\,.$$

Pour cela on considére le foncteur

$$F_M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})}(\mathrm{H}^0(?), \Phi(P_M)) : \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op} \to \mathrm{mod}\, k$$

et le foncteur DF_M obtenue en composent F_M avec le foncteur de dualité $D = \mathrm{Hom}(?, k)$.

Lemme 0.65 (6.23)**.** *On dispose d'un isomorphisme de foncteurs*

$$DF_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi(X_M), ?[d+1])\,.$$

On désigne par E_M l'extension de Kan à gauche de DF_M par l'inclusion $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$. On remarque que le foncteur E_M est homologique et préserve les coproduits et donc DE_M est cohomologique et transforme coproduits en produits. Puisque $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ est une catégorie triangulée à engendrement compact, le théorème de représentabilité de Brown, *cf.* [Nee01b], nous fournit un objet $Z_M \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ tel que

$$DE_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(?, Z_M)\,.$$

On dispose de la caractérisation suivante des objets $G(M)$, $M \in \mathcal{M}$.

Théorème 0.66 (6.25)**.** *On dispose d'un isomorphisme*

$$G(M) \xrightarrow{\sim} Z_M\,.$$

Jusqu'ici on a construit à partir de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ une dg-catégorie $\mathcal{B}$ et une t-structure $\mathcal{U}$ sur $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ qui satisfont certaines conditions de finitude. On retrouve alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ en utilisant le processus de 'stabilisation' suivant, voir section 6.6 :

- Soit $\mathcal{Q}$ la catégorie des projectifs du coeur $\mathcal{H}$ de la t-structure sur $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$. On construit un morphisme $\mathcal{Q} \xrightarrow{j} \mathcal{B}$ dans la catégorie homotopique des dg-catégories qui induit un foncteur de restriction $j^* : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}(\mathcal{Q})$.
- Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}_f$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}$ formée des objets Y tels que $\tau_{\geqslant -n}$ appartient à $\mathrm{per}(\mathcal{A}^{op})^{op}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $j^*(Y)$ appartient à $\mathrm{per}(\mathcal{Q}^{op})^{op}$.
- La catégorie stable est le quotient triangulé

$$\mathrm{stab}(\mathcal{B},\mathcal{U}) := \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_f / \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op} .$$

Théorème 0.67 (6.27)**.** *Le foncteur G induit une équivalence de catégories*

$$\widetilde{G} : \mathcal{C} \to \mathrm{stab}(\mathcal{B},\mathcal{U}) .$$

Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée à engendrement compact et $\mathcal{T}_c$ la sous-catégorie de ses objets compacts. Dans l'appendice on montre comment étendre une t-structure $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{T}_c$ en une t-structure sur $\mathcal{T}$.

Proposition 0.68 (6.28)**.** *a) L'aile gauche $\mathcal{U}$ admet une extension minimale en une aile gauche $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ dans $\mathcal{T}$.*

b) Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_c$ est non degeneré (c'est-à-dire que $f : X \to Y$ est inversible si et seulement si $\mathsf{H}^p(f)$ est inversible pour tout $p \in \mathbb{Z}$) et pour chaque X dans $\mathcal{T}_c$, il existe un entier N tel que $\mathsf{Hom}(X, S^N\mathcal{U}) = 0$ pour tout U dans $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ est encore non degéneré.

Part I

À la poursuite du Motivateur des DG-catégories

Chapter 1

Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des DG-catégories

Ce chapitre correspond à l'article [Tab05b].

1.1 Introduction

Nous construisons une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant sur la catégorie des petites catégories différentielles graduées.

1.2 Préliminaires

Dans toute la suite, k désigne un anneau commutatif avec $\mathbf{1}$. Le produit tensoriel $\otimes$ désigne toujours le produit tensoriel sur k. Nous commençons par introduire les définitions de base de la théorie des dg-catégories suivant [Kel06b].

Définition 1.1. - Une *dg-catégorie* $\mathcal{A}$ est la donnée d'une classe d'objets $\mathrm{obj}(\mathcal{A})$, d'un dg k-module $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ pour tous $X, Y \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$, et d'applications de composition associatives

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z) \otimes \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z),\ (f,g) \mapsto fg$$

qui admettent des unités $\mathbf{1}_X \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X)$.

- Un *dg-foncteur* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est donné par une application $F : \mathrm{obj}(\mathcal{A}) \to \mathrm{obj}(\mathcal{A}')$ et par des morphismes de dg k-modules

$$F(X,Y) : \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}'}(FX,FY),\ X,Y \in \mathrm{obj}(\mathcal{A}),$$

compatibles avec la composition et les unités.

Une dg-catégorie $\mathcal{A}$ est *petite* si $\mathrm{obj}(\mathcal{A})$ est un ensemble. On désigne par dgcat la catégorie des petites dg-catégories.

Exemple 1.2. Soit B une k-algèbre et $\mathcal{C}(B)$ la catégorie des complexes de B-modules à droite

$$\cdots \to M^p \overset{d_M}{\to} M^{p+1} \to \cdots,\ p \in \mathbb{Z}\,.$$

Pour deux complexes L, M et un entier $n \in \mathbb{Z}$, on définit $\mathsf{Hom}^n(L, M)$ comme le k-module des morphismes $f : L \to M$ d'objets gradués de degré n, c'est-à-dire des familles $f = (f^p)$ de morphismes $f^p : L^p \to M^{p+n}$, $p \in \mathbb{Z}$, de B-modules. On définit $\mathsf{Hom}(L, M)$ comme le k-module gradué à composantes $\mathsf{Hom}^n(L, M)$ et dont la différentielle est le commutateur

$$d(f) = d_M \circ f - (-1)^n f \circ d_L \, .$$

La *dg-catégorie* $\mathcal{C}_{dg}(B)$ a pour objets tous les complexes de B-modules et les morphismes sont définis par

$$\mathcal{C}_{dg}(B)(L, M) = \mathsf{Hom}(L, M) \, .$$

La composition est la composition des applications graduées.

Soit $\mathcal{A}$ une dg-catégorie. La *dg-catégorie opposée* $\mathcal{A}^{op}$ a les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et ses espaces de morphismes sont définis par

$$\mathcal{A}^{op}(X, Y) = \mathcal{A}(Y, X) \, ;$$

la composition de $f \in \mathcal{A}^{op}(Y, X)^p$ avec $g \in \mathcal{A}^{op}(Z, Y)^q$ est donnée par $(-1)^{pq} gf$.

Définition 1.3. Un *dg $\mathcal{A}$-module à droite* est un dg-foncteur

$$M : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{C}_{dg}(k) \, .$$

Si L et M sont des dg $\mathcal{A}$-modules et n est un entier, un *morphisme gradué f de degré n* de L dans M est la donnée de morphismes fA, $A \in \mathcal{A}$, appartenant à

$$\mathsf{Hom}(LA, MA)^n$$

tels que $(fA)(La) = (Ma)(fB)$ pour tous morphismes $a : A \to B$ de $\mathcal{A}$. La *différentielle* $d(f)$ est alors donnée par les morphismes $d(fA)$, $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathsf{Hom}(L, M)$ le complexe ainsi obtenu. La *composition* de morphismes gradués est définie de la façon naturelle.

Définition 1.4. La *dg-catégorie des $\mathcal{A}$-modules à droite*, notée $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ ou $\mathrm{Mod}\,\mathcal{A}$ est la dg-catégorie dont les objets sont les dg $\mathcal{A}$-modules et les complexes de morphismes les complexes $\mathsf{Hom}(L, M)$. Le *dg-foncteur de Yoneda* est défini par

$$\widehat{\ }: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A}) \, , \; X \mapsto \widehat{X} := \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(?, X).$$

Définition 1.5.

- La *catégorie* $\mathsf{Z}^0(\mathcal{A})$ a les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et ses morphismes sont définis par

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Z}^0(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathsf{Z}^0 \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \, ,$$

  où Z^0 est le noyau de $d : \mathsf{Hom}^0_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathsf{Hom}^1_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

- La *catégorie* $\mathsf{H}^0(\mathcal{A})$ a les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et ses espaces de morphismes sont définis par

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{H}^0(\mathcal{A})}(X, Y) = \mathsf{H}^0(\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)) \, ,$$

  où H^0 désigne la cohomologie en degré zéro du complexe $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Définition 1.6. Un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une *quasi-équivalence* si:

- pour tous objects c_1 et c_2 de $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1), F(c_2))$ est un quasi-isomorphisme et
- le foncteur $\mathrm{H}^0(F)$ de $\mathrm{H}^0(\mathcal{C})$ vers $\mathrm{H}^0(\mathcal{D})$ est essentiellement surjectif.

Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [Hov99]. On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans dgcat dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences.

1.3 Théorème principal

Suivant [Dri04, 3.7.1], nous définissons $\mathcal{K}$ comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par $f \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(1,2)$, $g \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{K}}(2,1)$, $r_1 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(1,1)$, $r_2 \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}}(2,2)$ et $r_{12} \in \mathrm{Hom}^{-2}_{\mathcal{K}}(1,2)$ soumis aux relations $df = dg = 0$, $dr_1 = gf - \mathbf{1}_1$, $dr_2 = fg - \mathbf{1}_2$ et $dr_{12} = fr_1 - r_2 f$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "r_1"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend left=70, "r_{12}"] & 2 \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "r_2"] \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{B}$ une petite dg-catégorie.

Proposition 1.7. *On a une bijection naturelle entre* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{K}, \mathcal{B})$ *et l'ensemble des couples* (s,h)*, où* s *est un morphisme de degré* 0 *dans* $\mathcal{B}$ *tel que* $d(s) = 0$ *et* h *est une contraction du cône de* $\widehat{s}$ *dans* $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$.

Démonstration. Soit F un dg-foncteur de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{B}$. Notons que l'image de f par F est un morphisme $s : X \to Y$ de degré 0 dans $\mathcal{B}$ tel que $d(s) = 0$. On remarque que le cône de $\widehat{s}$ dans $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$, qu'on note cone$(s)$, est le $\mathcal{B}$-module gradué

$$\widehat{Y} \oplus \widehat{X}[1]\,,$$

muni de la différentielle

$$\begin{bmatrix} d_Y & \widehat{s} \\ 0 & -d_X \end{bmatrix}.$$

Un morphisme h dans $\mathsf{Hom}^{-1}_{\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})}(\mathrm{cone}(\widehat{s}), \mathrm{cone}(\widehat{s}))$ correspond donc à une matrice

$$\begin{bmatrix} r_2 & r_{12} \\ g & r_1 \end{bmatrix},$$

où $g \in \mathsf{Hom}^0_{\mathcal{B}}(Y,X)$, $r_1 \in \mathsf{Hom}^{-1}_{\mathcal{B}}(X,X)$, $r_2 \in \mathsf{Hom}^{-1}_{\mathcal{B}}(Y,Y)$ et $r_{12} \in \mathsf{Hom}^{-2}_{\mathcal{B}}(X,Y)$. Finalement on observe que h est une contraction de cone$(\widehat{s})$ si et seulement si l'équation suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} r_2 & r_{12} \\ g & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_Y & s \\ 0 & -d_X \end{bmatrix} - (-1)^{-1} \begin{bmatrix} d_Y & s \\ 0 & -d_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 & r_{12} \\ g & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_1 \end{bmatrix},$$

où, pour améliorer la lisibilité, nous avons omis tous les 'chapeaux'. On récupère donc les relations imposées dans la définition de la dg-catégorie $\mathcal{K}$.

Cela montre la proposition. □

Soit $\mathcal{A}$ la dg-catégorie avec un seul object 3 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3) = k$. Soit F le dg-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{K}$ qui envoie 3 sur 1. Soit $\mathcal{B}$ la dg-catégorie avec deux objects 4 et 5 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,4) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,5) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(4,5) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(5,4) = 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note S^{n-1} le complexe $k[n-1]$ et D^n le cône sur le morphisme identique de S^{n-1}. On note $\mathcal{P}(n)$ la dg-catégorie avec deux objets 6 et 7 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,6) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,7) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(7,6) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(n)}(6,7) = D^n$. Soit $R(n)$ le dg-foncteur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{P}(n)$ qui envoie 4 sur 6 et 5 sur 7. On considère la dg-catégorie $\mathcal{C}(n)$ avec deux objects 8 et 9 telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,8) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,9) = k$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(9,8) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(n)}(8,9) = S^{n-1}$. Soit $S(n)$ le dg-foncteur de $\mathcal{C}(n)$ vers $\mathcal{P}(n)$ qui envoie 8 sur 6, 9 sur 7 et S^{n-1} dans D^n par l'identité sur k en degré $n-1$. Soit finalement Q le dg-foncteur de la dg-catégorie vide $\mathcal{O}$, qui est l'objet initial dans dgcat, vers $\mathcal{A}$.

Théorème 1.8. *Si on considère pour catégorie* $\mathcal{C}$ *la catégorie* dgcat*, pour classe* W *la sous-catégorie de* dgcat *des quasi-équivalences, pour classe* J *les dg-foncteurs* F *et* $R(n)$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, et pour classe* I *les dg-foncteurs* Q *et* $S(n)$*,* $n \in \mathbb{Z}$*, alors les conditions du théorème [Hov99, 2.1.19] sont satisfaites.*

À la proposition 1.13 après la démonstration du théorème, nous allons donner une description explicite des fibrations de la structure de catégorie de modèles obtenue ainsi.

Remarque 1.9. Un résultat analogue pour les catégories simpliciales a été obtenu dans [Ber07]. Notre construction est inspirée par le résultat principal de [Rez] montré d'abord dans [JT91] et par la construction des dg-quotients dans [Dri04].

En s'appuyant sur le théorème 1.8 B.Toën a décrit la localization de Dwyer-Kan [DK80] de dgcat dans [Toë07].

1.3.1 Preuves

Rappelons d'abord les conditions du théorème 2.1.19 de [Hov99] :

(i) La classe W possède la propriété 2 sur 3 et est stable par rétracts.

(ii) Les domaines des morphismes de I sont petits par rapport à $I-$ cell.

(iii) Les domaines des morphismes de J sont petits par rapport à $J-$ cell.

(iv) On a $J-\text{cell} \subseteq W \cap I-\text{cof}$.

(v) On a $I-\text{inj} \subseteq W \cap J-\text{inj}$.

(vi) On a $W \cap I-\text{cof} \subseteq J-\text{cof}$ ou $W \cap J-\text{inj} \subseteq I-\text{inj}$.

On observe facilement que la classe W possède la propriété 2 sur 3 et est stable par rétracts. On observe aussi que les domaines des morphismes de I et de J sont petits dans la catégorie dgcat. Ils le sont donc en particulier relativement aux classes $I-$cell et $J-$cell. Ainsi, les trois premières conditions sont vérifiées.

Lemme 1.10. *On a $J-$ cell $\subseteq W$.*

Proof. On montre d'abord que la classe W est stable par compositions transfinies (voir [Hir03] pour la définition de cette construction). En effet, le foncteur $\mathsf{H}^0(-)$ commute aux compositions transfinies et la classe des foncteurs essentiellement surjectifs est stable par compositions transfinies. Puisque la classe des quasi-isomorphismes de complexes de k-modules est aussi stable par compositions transfinies, la classe W satisfait la condition.

Soient maintenant $n \in \mathbb{Z}$ et $T : \mathcal{B} \to \mathcal{J}$ un dg-foncteur quelconque dans dgcat. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R(n)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{J} \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\ \mathcal{P}(n) \arrow[r] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

dans dgcat. Il s'agit de vérifier que inc est une quasi-équivalence. La dg-catégorie $\mathcal{U}$ s'obtient à partir de la dg-catégorie $\mathcal{J}$ en rajoutant un nouveau morphisme l de $T(4)$ vers $T(5)$ de degré $n-1$ et un nouveau morphisme j de $T(4)$ vers $T(5)$ de degré n tels que $dl = j$. Pour des objets X et Y de $\mathcal{J}$, on a donc une décomposition de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y)$ en somme directe de complexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{Hom}^{(m)}_{\mathcal{U}}(X,Y)$$

avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}^{(m)}(X,Y) = \underbrace{(T(5),Y) \otimes D^n \otimes (T(5),T(4)) \otimes D^n \otimes \cdots \otimes D^n \otimes (X,T(4))}_{m \text{ facteurs } D^n},$$

où l'on écrit $(\,,)$ pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(\,,)$. Puisque le complexe D^n est contractile, l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(X,Y)$$

est un quasi-isomorphisme. Comme le dg-foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, c'est une quasi-équivalence. Soit maintenant $N : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ un dg-foncteur quelconque dans dgcat. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{L} \arrow[d, "\mathrm{inc}"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, "N'"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

dans dgcat. Il s'agit de montrer que inc est une quasi-équivalence. La dg-catégorie $\mathcal{M}$ s'obtient à partir de la dg-catégorie $\mathcal{L}$ en rajoutant la dg-catégorie $\mathcal{K}$ à $\mathcal{L}$ en identifiant les objets $N(3)$ et $F(3)$. Nous allons maintenant donner une autre description de $\mathcal{M}$: soit $\mathcal{L}_0$ la dg-catégorie $\mathcal{L}$ à laquelle on rajoute un morphisme s avec $ds = 0$ de $N(3)$ vers un nouvel objet H. Notons $\mathrm{Mod}\,\mathcal{L}_0 = \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{L}_0)$ la dg-catégorie des dg-modules (à droite) sur $\mathcal{L}_0$. On considère le plongement de Yoneda

$$\mathcal{L}_0 \hookrightarrow \mathrm{Mod}\,\mathcal{L}_0\,,\ X \mapsto \widehat{X}.$$

Soit $\mathcal{L}_1$ la sous-dg-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{L}_0$ dont les objets sont le cône C sur $\widehat{s}$ et les dg-foncteurs représentables. Soit $\mathcal{L}_2$ la dg-catégorie obtenue en rajoutant dans $\mathcal{L}_1$ un morphisme h de degré -1 à l'anneau d'endomorphismes de C tel que dh est égal à l'identité de C. Résumons les notations pour les objets dans le diagramme suivant (où nous avons omis les 'chapeaux') :

$$\begin{tikzcd} N'(2) \arrow[r, shift left, "N'(g)"] & N'(1) \arrow[l, shift left, "N'(f)"] \arrow[r, "s"'] & H \arrow[r] & C \arrow[loop right, "h"] \end{tikzcd} .$$

Soit $\mathcal{L}_3$ la sous-dg-catégorie pleine de $\mathcal{L}_2$ dont les objets sont les images dans $\mathcal{L}_2$ des objets de $\mathcal{L}_0$. Nous allons montrer que notre dg-catégorie $\mathcal{M}$ s'identifie naturellement à $\mathcal{L}_3$. En effet, la démonstration de la proposition 1.7 montre que le dg-foncteur naturel $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_3$ admet un unique prolongement en un dg-foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{L}_3$ qui envoie $N'(2)$ sur H (plus précisément : l'image de H dans $\mathcal{L}_3 \ldots$), $N'(f)$ sur s et $N'(g)$, $N'(r_1)$, $N'(r_2)$ et $N'(r_{12})$ sur les quatre composantes de la contraction h. Nous affirmons que ce dg-foncteur est un isomorphisme. Pour le montrer, construisons un inverse : tout d'abord, la définition de $\mathcal{L}_0$ montre qu'il existe un dg-foncteur $\mathcal{L}_0 \to \mathcal{M}$ qui prolonge l'inclusion de $\mathcal{L}$ et qui envoie H sur $N'(2)$ et s sur $N'(f)$. Ce dg-foncteur admet un prolongement $\mathcal{L}_1 \to \mathrm{Mod}\,\mathcal{M}$ qui envoie le cône C sur $\widehat{s}$ sur le cône $C_{\mathcal{M}}$ sur l'image de $N'(f)$ par le foncteur de Yoneda. Par la proposition 1.7, le cône $C_{\mathcal{M}}$ est muni d'une contraction naturelle $h_{\mathcal{M}}$. Par la définition de $\mathcal{L}_2$, nous obtenons un unique dg-foncteur $\mathcal{L}_2 \to \mathrm{Mod}\,\mathcal{M}$ qui prolonge $\mathcal{L}_1 \to \mathrm{Mod}\mathcal{M}$ et qui envoie h sur $h_{\mathcal{M}}$. On vérifie facilement que la restriction de $\mathcal{L}_2 \to \mathrm{Mod}\,\mathcal{M}$ à $\mathcal{L}_3$ prend ses valeurs dans $\mathcal{M}$ et est inverse du dg-foncteur naturel $\mathcal{M} \to \mathcal{L}_3$.

Soient X et Y des objets de $\mathcal{L}$. On a alors une décomposition de k-modules gradués comme dans [Dri04, 3.1]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X},\widehat{Y})\,,$$

où

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}^{(n)}(\widehat{X},\widehat{Y}) = \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C,\widehat{Y}) \otimes S^1 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(C,C) \otimes S^1 \otimes \cdots \otimes S^1 \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\widehat{X},C)}_{n \text{ facteurs } S^1}.$$

Mais dans cette situation, on n'a pas une somme directe de complexes. Soit $g_{n+1}\cdot h\cdot g_n \cdot h \cdots h\cdot g_1 \in \mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$. Comme on a $dh = \mathbf{1}$, l'image par d de cet élément est égale à

$$d(g_{n+1})\cdot h\cdot g_n\cdot h \cdots h\cdot g_1 + \underbrace{(-1)^{|g_{n+1}|}\cdot g_{n+1}\cdot \mathbf{1}\cdot g_n\cdot h \cdots h\cdot g_1}_{(n-1)\text{ facteurs } h} + \cdots \quad .$$

On remarque que, pour tout $m \geqslant 0$, la somme

$$\bigoplus_{n\geqslant 0}^{m} \mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$$

est un sous-complexe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$ et on dispose donc d'une filtration exhaustive de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$. Le n-ième sous-quotient s'identifie à $\mathrm{Hom}^{(n)}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$. Le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(\widehat{X},C)$ s'identifie au cône sur l'isomorphisme

$$s_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_0}(X, N(3)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_0}(X, H).$$

Il est donc contractile et l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_2}(\widehat{X},\widehat{Y})$$

est un quasi-isomorphisme. Comme s devient un isomorphisme dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{M})$ et que le dg-foncteur d'inclusion est l'identité au niveau des objets, il est bien une quasi-équivalence. □

Démontrons maintenant que $J - \mathrm{inj} \cap W = I - \mathrm{inj}$. Pour cela, on considère la classe **Surj** formée des foncteurs $G : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$ dans dgcat qui vérifient:

- G induit une surjection de l'ensemble des objets de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des objets de $\mathcal{I}$ et
- G induit des quasi-isomorphismes surjectifs dans les complexes de morphismes.

Lemme 1.11. *On a $I - inj =$* **Surj**.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et $\mathcal{V}$ une classe quelconque de morphismes dans $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{V}-\mathrm{drt}$ la classe de morphismes qui ont la propriétè de relèvement à droite par rapport à $\mathcal{V}$. La classe $Q - \mathrm{drt}$ est formée des foncteurs qui sont surjectifs au niveau des objets. La classe $S(n) - \mathrm{drt}$, $n \in \mathbb{Z}$ est formée des foncteurs qui sont des quasi-isomorphismes surjectifs au niveau des complexes de morphismes. En effet, un carré commutatif dans dgcat

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(n) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "S(n)"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{P}(n) \arrow[r, "E"] & \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

correspond à la donnée d'un carré commutatif dans la catégorie des complexes

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "D"] \arrow[d, hook, "i_n"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D(8), D(9)) \arrow[d, "G"] \\ D^n \arrow[r, "E"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(E(6), E(7)) \end{tikzcd}$$

où $D(8)$ et $D(9)$ sont des objets quelconques dans $\mathcal{H}$. La propriété résulte de la caractérisation des quasi-isomorphismes surjectifs dans la catégorie des complexes sur k. Voir [Hov99, 2.3.5]. □

Lemme 1.12. *On a* $J - inj \cap W = \mathbf{Surj}$.

Démonstration. Montrons l'inclusion $\supseteq$. Soit H un foncteur de $\mathcal{N}$ vers $\mathcal{E}$ dans la classe **Surj**. Comme H est surjectif au niveau des objets et un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de morphismes, on a $H \in W$.

La classe $R(n) - \mathrm{drt}$ est formée des foncteurs surjectifs aux niveau des complexes de morphismes. Il suffit donc de montrer que $H \in F - \mathrm{drt}$. La donnée d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "H"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, "U"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

correspond à la donnée de la partie inférieure gauche du diagramme

$$\begin{tikzcd} P(3) \arrow[r, dashed, "\overline{U(f)}"] \arrow[d, mapsto, "H"'] & D \arrow[d, mapsto, "H"] \\ U(1) \arrow[r, "U(f)"] & U(2) \end{tikzcd}$$

dans les dg-catégories $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}$ et à la donné d'une contraction h du cône C_1 de $\widehat{U(f)}$ dans $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{E})$. Comme H est surjectif au niveau des objets, il existe $D \in \mathcal{N}$ telle que $H(D) = U(2)$. Le foncteur H est un quasi-isomorphisme surjectif au niveau des complexes de morphismes. Donc on peut relever $U(f)$ en $\overline{U(f)}$. Dans les catégories des dg-modules respectives, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \widehat{P(3)} \arrow[r, dashed, "\widehat{\overline{U(f)}}"] \arrow[d, mapsto, "\widehat{H}"'] & \widehat{D} \arrow[r] \arrow[d, mapsto, "\widehat{H}"] & C_2 \arrow[d, mapsto, "\widehat{H}"] \arrow[loop right, "h^{\star}"] \\ \widehat{U(1)} \arrow[r, "\widehat{U(f)}"] & \widehat{U(2)} \arrow[r] & C_1 \arrow[loop right, "h"] \end{tikzcd}$$

où C_1 et C_2 désignent les cônes sur les morphismes respectifs et h est la contraction de C_1. Puisque H est un quasi-isomorphisme surjectif au niveau des complexes de morphismes et C_1 et C_2 sont des cônes sur des morphismes entre répresentables, le dg-foncteur $\widehat{H}$ induit aussi un quasi-isomorphisme surjectif de l'algèbre d'endomorphismes de C_2 sur celle de C_1. On peut relever h en une contraction h^* de C_2 par application du lemme [Hov99, 2.3.5] au couple $(h, 1)$.

Montrons maintenant l'inclusion $\subseteq$. Soit L un foncteur de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{S}$ qui appartient à $J - \mathrm{inj} \cap W$. La classe $R(n) - \mathrm{drt}$ est formée des foncteurs surjectifs au niveau des complexes de morphismes. Comme $L \in W$, il suffit de montrer que L est surjectif au niveau des objets. Soit $E \in \mathcal{S}$ un objet quelconque. Comme $L \in W$, il existe $C \in \mathcal{D}$ et un morphisme $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(L(C), E)$ qui devient un isomorphisme dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{S})$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, mapsto, "L"'] & \\ L(C) \arrow[r, "q"] & E. \end{tikzcd}$$

Ainsi, q est l'image de f par un dg-foncteur de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{S}$. Comme on a $L \in J - \mathrm{inj}$, on peut relever le morphisme q et par conséquence l'objet E. Le foncteur L est donc bien surjectif au niveau des objets. $\square$

Nous avons vérifié que $J - \mathrm{cell} \subseteq W$ (lemme 1.10) et que $I - \mathrm{inj}$ est égal à $J - \mathrm{inj} \cap W$ (lemmes 1.11 et 1.12). Ainsi les trois dernières conditions du théorème 2.1.19 de [Hov99] sont aussi verifiées. Cela demontre le théorème 1.8.

Proposition 1.13. *Un dg-foncteur G de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est une fibration, pour la structure de catégorie de modèles de Quillen du théorème 1.8, si et seulement si:*

1) *pour tous objets c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(c_1), G(c_2))$ est surjectif en chaque composante et*

2) *pour tout objet $c_1 \in \mathcal{C}$ et tout morphisme $v \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(G(c_1), d)$ qui devient un isomorphisme dans $\mathsf{H}^0(\mathcal{D})$, il existe un morphisme $u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ tel que $G(u) = v$ et qui devient un isomorphisme dans $\mathsf{H}^0(\mathcal{C})$.*

Remarque 1.14. Puisque l'objet final dans dgcat est la dg-catégorie nulle, cette proposition implique que tout objet est fibrant.

Démonstration. Le dg-foncteur G est une fibration si et seulement s'il a la propriété de rélèvement à droite par rapport à l'ensemble des cofibrations génératrices $J = \{F, R(n),\, n \in \mathbb{N}\}$. Clairement un dg-foncteur satisfait la condition 1) si et seulement s'il a la propriété de rélèvement à droite par rapport à l'ensemble $\{R(n),\, n \in \mathbb{Z}\}$.

Notons que pour tout isomorphisme $[v]$ dans $\mathsf{H}^0(\mathcal{D})$ on dispose d'une contraction du cône de $\widehat{v}$ dans $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{D})$. Par la proposition 1.7, cela nous fournit un dg-foncteur T de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{D}$ tel que $T(f) = v$. Il est donc clair que si un dg-foncteur a la propriété de relèvement à droite par rapport à F alors il satisfait la condition 2). Montrons maintenant qu'un dg-foncteur qui satisfait conditions 1) et 2) a la propriété de relèvement à droite par rapport à F.

Pour cela, on utilise un argument analogue à celui de la démontration de l'inclusion $\supseteq$ du lemme 1.12 ci-dessus. On remarque que la condition 2) nous fournit le relèvement $\overline{U(f)}$ et implique que la dg-algèbre d'endomorphismes de C_2 est acyclique. Par la condition 1) le dg-foncteur $\widehat{H}$ induit donc un quasi-isomorphisme surjectif de l'algèbre d'endomorphismes de C_2 sur celle de C_1 et l'affirmation suit.

Cela demontre la proposition. $\square$

Chapter 2

Invariants additifs de DG-catégories

Ce chapitre correspond aux articles [Tab06] et [Tab05a].

2.1 Introduction

Dans cet article, nous poursuivons l'étude [Tab05b] [Toë07] de la catégorie des petites catégories différentielles graduées (= dg-catégories) du point de vue des catégories de modèles de Quillen [Qui67]. Plus précisément, nous munissons la catégorie des petites dg-catégories d'une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont exactement les dg-foncteurs *de Morita*, c'est-à-dire les dg-foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui induisent une équivalence $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{A})$ entre catégories dérivées. Dans la catégorie homotopique Hmo obtenue ainsi, les équivalences dérivées au sens de [Ric89] [Ric91] [Kel94] correspondent à des isomorphismes et le 'groupe de Picard dérivé' de [RZ03] y apparaît comme un groupe d'automorphismes.

La catégorie Hmo est fortement reliée à la catégorie des petites catégories triangulées mais s'en distingue par sa structure plus riche. Elle donne un cadre commode pour formuler des propriétés universelles comme celles du dg-quotient de [Dri04], de l'envelope prétriangulée de [BK90] ou des catégories d'orbites de [Kel05].

Une autre motivation pour son étude provient de la géométrie algébrique non commutative au sens de Drinfeld [Dri02] et Kontsevich [Kon04] [Kon98], c'est-à-dire l'étude des dg-catégories et de leurs invariants homologiques. Dans cette veine, nous construisons 'l'invariant additif universel', c'est-à-dire un foncteur

$$\mathcal{U}_a : \mathsf{dgcat} \to \mathsf{Hmo}_0$$

à valeurs dans une catégorie additive qui rend inversibles les dg-foncteurs de Morita, transforme les décompositions semi-orthogonales [BO] en sommes directes et qui est universel pour ces propriétés. Par exemple, la K-théorie et l'homologie cyclique sont des invariants additifs et se factorisent donc par $\mathcal{U}_a$. Nous observons que dans Hmo_0, le foncteur K_0 devient coreprésentable, ce qui donne immédiatement les caractères de Chern.

La catégorie Hmo_0 est étroitement reliée au anneau de Grothendieck $\mathcal{PT}_{kar}$ des dg-catégories prétriangulées Karobiennes de [BLL04]. Nous précisons ce lien en exhibant une surjection

$$\mathcal{PT}^{cl}_{kar} \to \mathrm{K}_0(\mathsf{Hmo}^{cl}_0)$$

après avoir imposé des conditions de finitude convenables.

2.2 Conventions

Dans toute la suite, k désigne un anneau commutatif avec $\mathbf{1}$. Le produit tensoriel $\otimes$ désigne toujours le produit tensoriel sur k. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note S^{n-1} le complexe $k[n-1]$ et D^n le cone sur le morphisme identique de S^{n-1}. Par une *dg-catégorie*, nous entendons une k-catégorie différentielle graduée, voir definition 1.1. Soit dgcat la catégorie des petites dg-catégories. Pour la construction des foncteurs $\mathbb{Z}$ et pre-tr, voir [Kel99] [BK90]. Pour une dg-catégorie $\mathcal{A}$, on note $\hat{}\colon \mathcal{A} \to \operatorname{Mod}\mathcal{A}$ le dg-foncteur de Yoneda et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée, voir [Dri04] [Kel94]. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et $\mathcal{V}$ une classe quelconque de morphismes dans $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{V}-\mathrm{drt}$, $\mathrm{gch}-\mathcal{V}$, la classe de morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite, repectivement à gauche, par rapport à $\mathcal{V}$. On note $\mathrm{cof}(\mathcal{V})$ la classe $\mathrm{gch}-(\mathcal{V}-\mathrm{drt})$. Pour les catégories de modèles de Quillen, nous renvoyons à [Hov99] [Qui67]. Rappelons seulement théorème 2.1.19 dans [Hov99].

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet toutes les petites limites inductives et projectives. Soit $\mathcal{W}$ une classe de morphismes de $\mathcal{C}$ et I et J des ensembles de morphismes de $\mathcal{C}$. Alors, il existe une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dans $\mathcal{C}$, avec I les cofibrations génératrices, J les cofibrations acycliques génératrices et $\mathcal{W}$ les équivalences faibles si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) La classe $\mathcal{W}$ est stable par retracts et dans tout triangle commutatif de $\mathcal{C}$, si deux flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième en est une.

(ii) Les sources de l'ensemble I sont petites par rapport à la classe $I-\mathit{cell}$.

(ii) Les sources de l'ensemble J sont petites par rapport à la classe $J-\mathit{cell}$.

(iv) $J-\mathit{cell} \subset \mathcal{W} \cap \mathit{cof}(I)$.

(v) $I-\mathit{drt} \subset \mathcal{W} \cap J-\mathit{drt}$.

(vi) $\mathcal{W} \cap \mathit{cof}(I) \subset \mathit{cof}(J)$ ou $\mathcal{W} \cap J-\mathit{drt} \subset I-\mathit{drt}$.

2.3 DG-foncteurs quasi-équiconiques

Un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est *quasi-équiconique* si:

(i) pour tous objets c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ vers $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c_1), F(c_2))$ est un quasi-isomorphisme et

(ii) le foncteur $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(F))$ de $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{C}))$ vers $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{D}))$ est essentiellement surjectif.

On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans dgcat dont les équivalences faibles sont les dg-foncteurs quasi-équiconiques. Pour cela, on se servira du théorème 2.1. Nous définissons $\mathcal{K}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, comme la dg-catégorie avec deux objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par $f \in \operatorname{Hom}^n_{\mathcal{K}(n)}(1,2)$, $g \in \operatorname{Hom}^{-n}_{\mathcal{K}(n)}(2,1)$, $r_1 \in \operatorname{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}(n)}(1,1)$, $r_2 \in \operatorname{Hom}^{-1}_{\mathcal{K}(n)}(2,2)$ et $r_{12} \in \operatorname{Hom}^{n-1}_{\mathcal{K}(n)}(1,2)$ soumis aux relations $df = dg = 0$, $dr_1 = gf - \mathbf{1}_1$, $dr_2 = fg - \mathbf{1}_2$ et $dr_{12} = fr_1 - r_2 f$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "r_1"] \arrow[r, bend left=20, "f"] \arrow[r, bend left=70, "r_{12}"] & 2 \arrow[l, bend left=20, "g"] \arrow[loop right, "r_2"] \end{tikzcd}$$

On pose $\mathcal{K} = \mathcal{K}(0)$. Soit $\mathcal{A}$ la dg-catégorie avec un seul object 3 et telle que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3) = k$. Soit $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, le dg-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{K}(n)$ qui envoie 3 sur 1. Pour un entier $n > 0$ et des entiers $k_0, \ldots, k_n$, soit $\mathcal{M}_n(k_0, \dots, k_n)$ la dg-catégorie avec $n+1$ objets $0, \dots, n$ et dont les morphismes sont engendrés par des morphismes $q_{i,j}$ définis pour $0 \leqslant j < i \leqslant n$, de source j et de but i, de degré $k_i - k_j + 1$ et soumis aux relations

$$d(Q) + Q^2 = 0\,,$$

où Q est la matrice strictement triangulaire inférieure de coefficients $q_{i,j}$ pour $0 \leqslant j < i \leqslant n$.

Soit $\mathrm{cone}_n(k_0, \dots, k_n)$ la sous-dg-catégorie pleine de la dg-catégorie des dg-modules (à droite) sur $\mathcal{M}_n(k_0, \dots, k_n)$ dont les objets sont les $\hat{l}$, $0 \leqslant l \leqslant n$, et le *cône itéré* X_n, qui a le même module gradué sous-jacent que le dg-module

$$X = \bigoplus_{l=0}^{n} \hat{l}\,[k_l]$$

et dont la différentielle est $d_X + \widehat{Q}$.

Soit $L : \mathcal{A} \to \mathrm{cone}_n(k_0, \dots, k_n)$ le dg foncteur qui envoie 3 sur X_n. On considère la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{cone}_n(k_0, \dots, k_n) \arrow[d] \\
\mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{cone}_n(k_0, \dots, k_n) \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K}
\end{tikzcd}$$

et on définit $\mathrm{coneh}_n(k_0, \dots, k_n)$ comme la sous-dg-catégorie pleine de la somme amalgamée dont les objets sont les images des objets $\hat{l}$, $0 \leqslant l \leqslant n$, de $\mathrm{cone}_n(k_0, \dots, k_n)$ et l'image Xh_n de l'object 2 de $\mathcal{K}$. On note $I_n(k_0, \dots, k_n)$ le dg foncteur fidèle, mais non plein, de $\mathcal{M}_n(k_0, \dots, k_n)$ dans $\mathrm{coneh}_n(k_0, \dots, k_n)$.

Théorème 2.2. *Si on considère pour catégorie $\mathcal{C}$ la catégorie* dgcat*, pour classe W la sous-catégorie de* dgcat *des dg-foncteurs quasi-équiconiques, pour classe J les dg-foncteurs F et $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, (voir section 1.3), $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, et $I_n(k_0, \dots, k_n)$ et pour classe I les dg-foncteurs Q et $S(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, (voir section 1.3) alors les conditions du théorème 2.1 sont satisfaites.*

À la proposition 2.10 après la démonstration du théorème, nous allons donner une description explicite des objets fibrants de la structure de catégorie de modèles obtenue ainsi.

On observe facilement que les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* du théorème 2.1 sont verifiées.

Démontrons maintenant que $J - \mathrm{inj} \cap W = I - \mathrm{inj}$. Pour cela, on considère la classe **Surj** formée des foncteurs $G : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$ dans dgcat qui vérifient :

- G induit une surjection de l'ensemble des objets de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble des objets de $\mathcal{I}$ et

- G induit des quasi-isomorphismes surjectifs dans les complexes de morphismes.

Lemme 2.3. *On a* **Surj** $= I -$ *inj.*

Démonstration. La classe $Q - \mathrm{drt}$ est formée des foncteurs qui sont surjectifs au niveau des objets. La classe $S(n) - \mathrm{drt}$, $n \in \mathbb{Z}$ est formée des foncteurs qui sont des quasi-isomorphismes surjectifs au niveau des complexes de morphismes. En effet, un carré commutatif dans dgcat

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(n) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "S(n)"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{P}(n) \arrow[r, "E"] & \mathcal{I}
\end{tikzcd}$$

correspond à la donnée d'un carré commutatif dans la catégorie des complexes

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "D"] \arrow[d, hook, "i_n"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(D(8), D(9)) \arrow[d, "G"] \\ D^n \arrow[r, "E"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(E(6), E(7)) \end{tikzcd}$$

où $D(8)$ et $D(9)$ sont des objets quelconques dans $\mathcal{H}$. La propriété résulte de la caractérisation des quasi-isomorphismes surjectifs dans la catégorie des complexes sur k. Voir [Hov99, 2.3.5]. □

Lemme 2.4. *On a* **Surj** $\supseteq J - inj \cap W$.

Démonstration. Soit L un dg-foncteur de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{S}$ qui appartient à $J -$ inj $\cap W$. La classe $R(n) -$ drt est formée des dg-foncteurs surjectifs au niveau des complexes de morphismes. Comme $L \in W$, il suffit de montrer que L est surjectif au niveau des objets. Soit $E \in \mathcal{S}$ un object quelconque. Comme $L \in W$, il existe $C \in$ pre-tr$(\mathcal{D})$ et un morphisme fermé q de pre-tr$(\mathcal{S})$ qui fournit un isomorphisme entre l'image par pre-tr(L) de C et E dans H^0(pre-tr$(\mathcal{S})$). On identifie les dg-catégories $\mathcal{D}$ et $\mathbb{Z}\mathcal{D}$ avec leurs images dans pre-tr$(\mathcal{D})$. Il existe alors trois possibilités :

1. l'objet C appartient à la dg-catégorie $\mathcal{D}$. Alors on est dans les conditions de l'inclusion $\subseteq$ du lemme 1.12.

2. l'objet C appartient à la dg-catégorie $\mathbb{Z}\mathcal{D}$. Alors C est de la forme $C = (\overline{C}, n)$, où $\overline{C} \in \mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a la situation suivante

$$\begin{tikzcd} C = ((\overline{C}), n) \arrow[d, "\mathbb{Z}(L)"] & \\ \mathbb{Z}(L)(C) = (L(\overline{C}), n) \arrow[r, "q"] & (E, 0). \end{tikzcd}$$

Ainsi, q est l'image de f par un dg-foncteur de $\mathcal{K}(-n)$ vers $\mathcal{S}$. Comme on a $L \in J -$ inj, on peut relever le morphisme q et par conséquence l'objet E.

3. l'objet C appartient à la dg-catégorie pre-tr$(\mathcal{D})$ mais non pas à la dg-catégorie $\mathbb{Z}\mathcal{D}$. On sait d'après [BK90] que, dans pre-tr$(\mathcal{D})$, l'objet C s'écrit d'une façon canonique comme un cône itéré sur des morphismes de $\mathcal{D}$. Comme le dg-foncteur pre-tr(L) préserve les cônes, l'object pre-tr$(L)(C)$ s'identifie au cône itéré sur leurs images par L. On peut donc construire le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r] \arrow[dd, hook, "can"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "L"] \\ & \mathcal{S} \arrow[d] \\ \mathrm{cone}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "H"] & \text{pre-tr}(\mathcal{S}) . \end{tikzcd}$$

Ainsi, q est l'image de f par un dg-foncteur de $\mathcal{K}$ vers pre-tr$(\mathcal{S})$ qui envoie l'object 1 sur $H(X_n)$ et l'object 2 sur l'object E. Le dg-foncteur H s'étend donc en un dg-foncteur $\overline{H}$ de $\mathrm{cone}_n(k_0, \ldots, k_n)\amalg_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{K}$ vers pre-tr$(\mathcal{S})$. On observe que la restriction de $\overline{H}$, qu'on note $\widetilde{H}$, à la dg-catégorie pleine $\mathrm{coneh}_n(k_0, \ldots, k_n)$, a son image dans la dg-catégorie $\mathcal{S}$. Cela permet de construire le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M}_n \arrow[rr] \arrow[dl, "can"'] \arrow[dr, "I_n"] & & \mathcal{D} \arrow[d, "L"] \\
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{cone}_n \arrow[dr] \arrow[drrr, "H"] & & \mathrm{coneh}_n \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[ur, dotted] \arrow[dl, hook] & \mathcal{S} \arrow[d] \\
 & \mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{cone}_n \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \arrow[rr, "\overline{H}"'] & & \mathrm{pre\text{-}tr}(\mathcal{S})\,.
\end{tikzcd}
$$

Comme L appartient à $J-\mathrm{inj}$, l'objet E est bien l'image d'un objet de $\mathcal{D}$.

□

Soit $\mathcal{B}$ une dg-catégorie et C un dg-foncteur de $\mathcal{M}_n(k_0,\dots,k_n)$ vers $\mathcal{B}$.

Remarque 2.5. Le dg-foncteur C se prolonge en un dg-foncteur

$$C_! : \mathrm{Mod}\,\mathcal{M}_n(k_0,\dots,k_n) \to \mathrm{Mod}\,\mathcal{B}$$

adjoint à gauche de la restriction le long de C. Le dg-foncteur C *admet un cône* Y dans $\mathcal{B}$ si $C_!(X_n)$ est représentable par un objet Y de $\mathcal{B}$. C'est le cas ssi le foncteur C se prolonge en un dg-foncteur

$$\widetilde{C} : \mathrm{cone}_n(k_0,\dots,k_n) \to \mathcal{B}\,.$$

Si $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ est un dg-foncteur et C admet le cône Y dans $\mathcal{B}$, alors $G \circ C$ admet le cône $G(Y)$ dans $\mathcal{B}'$. Si C se factorise par la sous-dg-catégorie pleine $\mathcal{B}\backslash\{Y\}$ et admet le cône Y dans $\mathcal{B}$, alors le carré

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{B}\backslash\{Y\} \arrow[d, hook] \\
\mathrm{cone}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

est cocartésien.

Ces remarques impliquent le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Le carré commutatif*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r, "I_n(k_0,\dots,k_n)"] \arrow[d, hook, "can"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{coneh}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{cone}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r] & \mathrm{cone}_n(k_0,\dots,k_n) \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K}
\end{tikzcd}
$$

est cocartésien.

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un dg-foncteur.

Remarque 2.7. Rappelons de [BK90] [Dri04, 2.4] que les objets de pre-tr($\mathcal{A}$) sont des expressions formelles $C = (\bigoplus_{i=0}^{n} C_i[r_i], q)$, où $C_i \in \mathcal{A}$, $r_i \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, $q = (q_{ij})$, $q_{ij} \in \mathsf{Hom}^1_{\mathcal{A}}(C_j, C_i)[r_i - r_j]$, $q_{ij} = 0$ pour $i \geqslant j$, $dq + q^2 = 0$ et le complexe de morphismes $\mathsf{Hom}_{\mathrm{pre\text{-}tr}(\mathcal{A})}(C, C')$ est un espace de matrices formelles $f = (f_{ij})$, $f_{ij} \in \mathsf{Hom}(C_j, C'_i)[r'_i - r_j]$, voir [BK90]. Le dg-foncteur pre-tr(F) envoie donc les expressions formelles en expressions formelles. Cela implique que la classe **Surj** est stable par application du foncteur pre-tr($-$) et qu'un objet de pre-tr($\mathcal{A}$) dont l'image par pre-tr(F) est dans $\mathcal{B}$ est en fait dans $\mathcal{A}$.

Lemme 2.8. *On a* $\mathbf{Surj} \subseteq J - inj \cap W$.

Démonstration. Soit H un dg-foncteur de $\mathcal{N}$ vers $\mathcal{E}$ dans la classe **Surj**. Comme H est surjectif au niveau des objets et un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de morphismes, on a $H \in W$. La classe $R(n) - \mathrm{drt}$ est formée des dg-foncteurs surjectifs au niveau des complexes de morphismes. Il suffit de montrer que H a la propriété de relèvement à droite par rapport à F, $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, et $I_n(k_0, \ldots, k_n)$. On considère ces trois cas :

1. on sait par le lemme 1.12 que $H \in F - \mathrm{drt}$;
2. en effet, on a $H \in F(n) - \mathrm{drt}$, $n \in \mathbb{Z}$, par un argument complètement analogue au cas précédent;
3. on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r] \arrow[d, "I_n(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "H"] \\
\mathrm{coneh}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "L"'] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Le lemme 2.6 permet d'étendre le dg-foncteur L en un dg-foncteur $\overline{L}$ de $\mathrm{cone}_n(k_0, \ldots, k_n) \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K}$ vers pre-tr$(\mathcal{E})$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{M}_n \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathcal{N} \arrow[dl, hook] \arrow[dd, "H"] \\
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[dd, "F"'] \arrow[ddr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{cone}_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & \text{pre-tr}(\mathcal{N}) \arrow[dd] & \\
 & & \mathrm{coneh}_n \arrow[rr, "L"] \arrow[dl] & & \mathcal{E} \arrow[dl, hook] \\
\mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{cone}_n \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \arrow[rr, "\overline{L}"] & & \text{pre-tr}(\mathcal{E}) &
\end{tikzcd}$$

Puisque H appartient à la classe **Surj** et cette classe est stable par application du foncteur pre-tr$(-)$, voir remarque 2.7, on peut relever le dg-foncteur $\overline{L}$ vers pre-tr$(\mathcal{N})$. Finalement, par la remarque 2.7, la restriction du relèvement du dg-foncteur $\overline{L}$ à la sous-dg-catégorie pleine $\mathrm{coneh}_n(k_0, \ldots, k_n)$ nous fournit un relèvement du dg-foncteur L vers la dg-catégorie $\mathcal{N}$.

$\square$

Lemme 2.9. *On a* $J - cell \subset W$.

Démonstration. On sait déjà par le lemme 1.10 que les classes $F - \mathrm{cell}$ et $R(n) - \mathrm{cell}$ sont formées des quasi-équivalences et donc contenues dans la classe W. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{J}$ un dg-foncteur quelconque. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F(n)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{J} \arrow[d, "inc"] \\
\mathcal{K}(n) \arrow[r] & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

dans dgcat. Il s'agit de vérifier que $inc \in W$. Il faut verifier deux conditions:

1. L'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(inc(X), inc(Y))$ est un quasi-isomorphisme pour tous $X, Y \in \mathcal{J}$. Pour cela, on raisonne comme dans le cas où on a le dg-foncteur F au lieu de $F(n)$, voir lemme 1.10.

2. Le foncteur $\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}(inc)) : \mathrm{H}^0(\mathbb{Z}\,\mathcal{J}) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{Z}\mathcal{U})$ est essentiellement surjectif. En effet, la dg-catégorie $\mathcal{U}$ s'obtient à partir de $\mathcal{J}$ en rajoutant un nouvel objet S homotopiquement équivalent à un décalé de l'objet $T(3)$. Plus précisément, l'object $(S, 0)$ devient isomorphe à $(T(3), -n)$ dans $\mathrm{H}^0(\mathbb{Z}\mathcal{U})$.

Soit maintenant $T : \mathcal{M}_n(k_0, \dots, k_n) \to \mathcal{J}$ un dg-foncteur quelconque. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I_n(k_0,\dots,k_n)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{J} \arrow[d, "inc"] \\ \mathrm{coneh}_n(k_0,\dots,k_n) \arrow[r] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

dans dgcat. Il s'agit de vérifier que $inc \in W$. Il faut verifier deux conditions:

1. L'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(inc(X), inc(Y))$ est un quasi-isomorphisme pour tous $X, Y \in \mathcal{J}$. Dans le diagramme commutatif suivant, la dg-catégorie $\mathcal{N}$ est la somme amalgamée de $\mathcal{J}$ et cone_n, et $\mathcal{E}$ est la somme amalgamée de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{K}$.

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{M}_n \arrow[rr, "T"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathcal{J} \arrow[dl, "L"] \arrow[dd, "inc"] \\ \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[dd, "F"'] \arrow[ddr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{cone}_n \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{N} \arrow[dd, "H"] & \\ & & \mathrm{coneh}_n \arrow[rr] \arrow[dl, hook] & & \mathcal{U} \arrow[dl, hook] \\ \mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{cone}_n \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \arrow[rr] & & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

On peut identifier la dg-catégorie $\mathcal{N}$ à la sous-dg-catégorie pleine des dg-modules (à droite) sur $\mathcal{J}$ dont les objets sont les dg-modules representées et le n-ième cône itéré sur l'image de la famille $T(q_{i,j})$ par le foncteur de Yoneda. Le dg-foncteur L s'identifie alors au plongement de Yoneda et il est donc pleinement fidèle. Le dg-foncteur H s'identifie au dg-foncteur de $\mathcal{N}$ vers la somme amalgamée avec $\mathcal{K}$. On sait d'après le lemme 1.10 que H est donc une quasi-équivalence. Notons maintenant que la dg-catégorie $\mathcal{U}$ s'identifie à la sous-dg-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont ceux dans l'image du dg-foncteur

$$\mathrm{coneh}_n \hookrightarrow \mathrm{cone}_n \amalg_{\mathcal{A}} \mathcal{K} \to \mathcal{E}\,.$$

Cela implique que inc satisfait la condition.

2. Le foncteur $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(inc)) : \mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{J})) \to \mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{U}))$ est essentiellement surjectif. En effet, la dg-catégorie $\mathcal{U}$ possède un object de plus que la dg-catégorie $\mathcal{J}$, à savoir l'image de Xh_n. Soit $T(X_n)$, dans pre-tr$(\mathcal{J})$, le n-ième cône itéré associé au dg-foncteur T. Alors le lemme 2.6 nous montre que l'image de $T(X_n)$ par le dg-foncteur pre-tr(inc) et Xh_n sont homotopiquement équivalents dans pre-tr$(\mathcal{U})$.

□

Nous avons vérifié que $J - \mathrm{cell} \subseteq W$ (lemme 2.9) et que $I - \mathrm{inj}$ est égal à $J - \mathrm{inj} \cap W$ (lemmes 2.3, 2.4 et 2.9). Ces conditions impliquent celles du théorème 2.1.

Proposition 2.10. *Les objets fibrants, pour la structure de catégorie de modèles de Quillen du théorème 2.2, sont les dg-catégories $\mathcal{B}$ telles que l'image essentielle du plongement $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est stable par suspensions et cônes.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{B}$ une dg-catégorie fibrante. Soit $X \in \mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ et $X[n] \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ la n-ième suspension de X dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. L'objet X correspond à un dg-foncteur $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et puisque $\mathcal{B}$ est fibrante on dispose du diagram commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F(n)"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{K}(n) \arrow[ur, dashed, "\overline{L}"'] & \end{tikzcd} .$$

Notons que l'objet $\overline{L}(2)$ correspond à la n-ième suspension de X dans la catégorie $\mathsf{H}^0(\mathrm{Mod}(\mathcal{B}))$ et donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Les objets $\overline{L}(2)$ et $X[n]$ sont donc isomorphes dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$.

Soit maintenant $[f]$ un morphisme dans $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ et $\mathrm{cone}([f])$ le cône de $[f]$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Le morphisme $f \in \mathsf{Z}^0(\mathcal{B})$ correspond à un dg-foncteur $L : \mathrm{cone}_0(0) \to \mathcal{B}$ et puisque $\mathcal{B}$ est fibrante on dispose du diagram commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cone}_0(0) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "I_0(0)"'] & \mathcal{B} \\ \mathrm{coneh}_0(0) \arrow[ur, dashed, "\overline{L}"'] & \end{tikzcd} .$$

Notons maintenant que l'objet $\overline{L}(Xh_0)$ correspond au cône de $[f]$ dans $\mathsf{H}^0(\mathrm{Mod}(\mathcal{B}))$ et donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Les objets $\overline{L}(Xh_0)$ et $\mathrm{cone}([f])$ sont donc isomorphes dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Cela montre que l'image essentielle du plongement $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est stable par suspensions et cônes.

Soit maintenant $\mathcal{B}$ une dg-catégorie telle que l'image essentielle du plongement $\mathrm{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est stable par suspension et cônes. On considére les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F(n)"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{K}(n) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "I_n(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathcal{B} \\ \mathrm{cone}h_n(k_0, \ldots, k_n) & \end{tikzcd} .$$

Puisque la suspension dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ des $\mathcal{B}$-modules representables s'identifie à la suspension dans $\mathsf{H}^0(\mathrm{Mod}(\mathcal{B}))$, il existe un dg-foncteur $\overline{L} : \mathcal{K}(n) \to \mathcal{B}$ tel que $\overline{L} \circ F(n) = L$. D'une façon analogue les cônes itérés dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ entre $\mathcal{B}$-modules representables s'identifient à les cônes itérés dans $\mathsf{H}^0(\mathrm{Mod}(\mathcal{B}))$. Il existe donc un dg-foncteur $\overline{S} : \mathrm{cone}h_n(k_0, \ldots, k_n) \to \mathcal{B}$ tel que $\overline{S} \circ I_n(k_0, \ldots, k_n) = S$. Cela montre que $\mathcal{B}$ est une dg-catégorie fibrante et la proposition est démontrée. □

Remarque 2.11. On remarque que les conditions de la proposition 2.10 sont équivalents à ce que le dg-foncteur $\mathcal{B} \hookrightarrow \text{pre-tr}(\mathcal{B})$, voir [BK90], soit une quasi-équivalence.

Notation 2.12. On note $\mathcal{Q}eq$ la classe des quasi-équivalences, voir definition 1.6, et $\mathcal{Q}ec$ la classe plus large des dg-foncteurs quasi-équiconiques. On note par Heq et Hec les catégories homotopiques de dgcat par rapport à ces classes et par $\mathcal{B}_{fib}$ un remplacement fibrant de la dg-catégorie $\mathcal{B}$ par rapport à la structure de catégorie de modèles de Quillen quasi-équiconique.

Lemme 2.13. *Les dg-catégories $\mathcal{B}_{fib}$ et pre-tr$(\mathcal{B})$ sont isomorphes dans* Heq.

Démonstration. On considère le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d, tail, "F"'] & \text{pre-tr}(\mathcal{B}) \arrow[d, "pre-tr(F)"] \\ \mathcal{B}_{fib} \arrow[r, hook] & \text{pre-tr}(\mathcal{B}_{fib})\,. \end{tikzcd}$$

Le dg-foncteur F appartient à la classe $\mathcal{Q}ec$ et donc par definition pre-tr(F) appartient à la classe $\mathcal{Q}eq$. Puisque la dg-catégorie $\mathcal{B}_{fib}$ est fibrante, la proposition 2.10 implique que le dg-foncteur $\mathcal{B}_{fib} \hookrightarrow$ pre-tr$(\mathcal{B}_{fib})$ appartient à la classe $\mathcal{Q}eq$. Cela implique le lemme. □

Proposition 2.14. *La structure de catégorie de modèles de Quillen quasi-équiconique est la localisation de Bousfield à gauche, voir [Hir03, 3.3.1], de celle du théorème 1.8, par rapport à l'ensemble*

$$S := \{F(1), F(-1), I_0(0)\}\,.$$

Démonstration. On commence par montrer qu'une dg-catégorie $\mathcal{B}$ est S-locale, voir [Hir03, 3.4], si et seulement si elle est fibrante pour la structure quasi-équiconique. Notons que puisque les deux structures de modèles de Quillen sur dgcat ont les mêmes cofibrations, et donc les mêmes fibrations triviales, le foncteur de remplacement cofibrant simplicial Γ^*, voir [Hir03], est le même dans les deux situations. Puisque S est formé de foncteurs quasi-équiconiques, cela implique que si $\mathcal{B}$ est fibrante pour la structure quasi-équiconique, alors pour tout dg-foncteur $L : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ dans S, le morphisme induit

$$\mathsf{Map}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Soit maintenant $\mathcal{B}$ un objet S-local dans dgcat. Montrons qu'il est fibrant. Par la proposition 2.10, il s'agit de montrer que l'image essentielle du plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est stable par suspensions et cônes. On considére maintenant le cas des cônes (l'argument pour le cas des suspensions est analogue). La donnée d'un morphisme fermé f de degré 0 de $\mathcal{B}$ fournit un morphisme $\mathcal{M}_0(0) \to \mathcal{B}$ et donc un objet de $\mathsf{rep}(\mathcal{M}_0(0), \mathcal{B})$. Par la description de $\mathsf{Map}(-,-)$ dans [Toë07] et l'hypothèse sur $\mathcal{B}$, le foncteur

$$\mathsf{rep}(\text{coneh}_0(0), \mathcal{B}) \to \mathsf{rep}(\mathcal{M}_0(0), \mathcal{B})$$

est une équivalence. Cela implique qu'il existe bien dans $\mathcal{B}$ un objet $C'(f)$ qui, dans $\mathcal{DB}$, devient isomorphe au cône sur l'image de f par le foncteur de Yoneda.

On montre maintenant qu'un dg-foncteur est quasi-équiconique si et seulement s'il est une S-équivalence locale, voir [Hir03, 3.1.4]. Un dg-foncteur F est une S-équivalence locale ssi $\mathsf{Map}(F, \mathcal{C})$ est une équivalence faible pour tout $\mathcal{C}$ S-locale, ssi $\mathsf{Map}(F, \mathcal{C})$ est une équivalence faible pour tout $\mathcal{C}$ fibrant pour la structure quasi-équiconique. Une fois que les foncteurs $\mathsf{Map}(-, \mathcal{C})$ sont équivalents pour les deux structures, avec $\mathcal{C}$ fibrante (pour la structure quasi-équiconique), F est quasi-équiconique ssi est une S-équivalence locale. □

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des dg-catégories et $\text{can}_1 : \mathsf{Heq} \to \mathsf{Hec}$ le foncteur canonique.

Corollaire 2.15. *On a une adjonction*

$$\text{Hom}_{\mathsf{Hec}}(can_1(\mathcal{A}), \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{fib})\,.$$

Notation 2.16. On note Heq_{ex} la sous-catégorie pleine de Heq dont les objets sont les dg-catégories exactes, voir [Kel99]. On note inc : $\mathsf{Heq}_{ex} \hookrightarrow \mathsf{Heq}$ l'inclusion.

On remarque que le corollaire 2.15 et le lemme 2.13 nous fournissent une équivalence de catégories entre Hec et Heq_{ex}. On a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Heq} \arrow[d, "can_1"'] & \mathsf{Heq}_{ex} \arrow[l, hook', "inc"'] \\ \mathsf{Hec} \arrow[ur, "\sim", "\text{pre-tr}(-)"'] & \end{tikzcd} .$$

On note $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op}\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{B})$, voir [Dri04] [Kel94], dont les objets sont les dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodules X tels que $X(?,A)$ est isomorphe dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ à un objet de l'image du dg-foncteur canonique $\text{pre-tr}(\mathcal{B}) \to \operatorname{Mod}\mathcal{B}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$. On note $[X]$ la classe d'isomorphisme de X dans $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Pour une catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$, on note $\operatorname{Iso}(\mathcal{C})$ l'ensemble de ses classes d'isomorphisme.

Corollaire 2.17. *On a une bijection*

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Hec}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Iso}(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.15 et le lemme 2.13, $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Hec}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A},\text{pre-tr}(\mathcal{B}))$. Par [Toë07] on sait que cet ensemble s'identifie à $\operatorname{Iso}(\mathsf{rep}(\mathcal{A},\text{pre-tr}(\mathcal{B}))$. On montre maintenat que la catégorie $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\text{pre-tr}(\mathcal{B}))$. Le dg-foncteur canonique $\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B} \to \mathcal{A}^{op}\otimes \text{pre-tr}(\mathcal{B})$ est pleinement fidèle et le foncteur induit

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}^{op}\otimes \text{pre-tr}(\mathcal{B}))$$

envoie l'ensemble des dg-modules strictement representables dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})$ vers un ensemble de petits générateurs. Ce foncteur est donc une équivalence triangulée. Via cette équivalence la sous-catégorie $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\text{pre-tr}(\mathcal{B}))$.

Cela montre le corollaire. □

Remarque 2.18. On sait que les structures de catégorie de modèles de Quillen dans dgcat du théorème 1.8 et du théorème 2.2 ont les mêmes cofibrations et donc les mêmes fibrations acycliques. Cela a pour consequence que

- Le foncteur de remplacement cofibrant simplicial Γ^*, voir [Hov99], dans dgcat est le même dans les deux situations. Cela implique que les corollaires 2.15, et 2.17 sont encore vrais si on remplace Hom par l'espace de morphismes, $\underline{\operatorname{Map}}$, voir [Hov99], et $\operatorname{Iso}(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$, dans le corollaire 2.17, par le nerf de la sous-catégorie de $\operatorname{Mod}(\mathcal{A}^{op}\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{B})$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ et dont les morphismes sont les quasi-isomorphismes.
- Le produit tensoriel $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ de Heq descend à la localisée Hec. La catégorie monoïdale symétrique $(\mathsf{Hec}, -\otimes^{\mathbb{L}}-)$ est fermée, voir [Hov99], et l'espace de morphismes interne de Hec, $\mathbb{R}\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathsf{Hec}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\mathbb{R}\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A},\text{pre-tr}(\mathcal{B}))$, voir [Toë07].

2.4 Additivisation

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des dg-catégories. La composition dans Hec est induite par le bifoncteur

$$\begin{aligned} -\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}- : \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})\times\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{B},\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \\ (X,Y) &\longmapsto X_{cof}\otimes_{\mathcal{B}} Y\,, \end{aligned}$$

où X_{cof} est un remplacement cofibrant de X dans la catégorie $\operatorname{Mod}(\mathcal{A}^{op}\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{B})$, par rapport à sa structure de catégorie de modèles de Quillen, voir [Toë07].

Remarque 2.19. Le bifoncteur $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ est bi-triangulé, puisqu'il est induit par le dg-bifoncteur produit tensoriel de bimodules.

Soit Hec_0 la catégorie qui a pour objets les petites dg-catégories et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hec}_0}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. L'operation de composition est induite par le bifoncteur $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ d'après la remarque 2.19. On dispose d'un foncteur canonique $\mathrm{add}_1 : \mathsf{Hec} \rightarrow \mathsf{Hec}_0$.

Lemme 2.20. *La catégorie* Hec_0 *est additive et le foncteur canonique* $\mathsf{Hec} \rightarrow \mathsf{Hec}_0$ *transforme les produits finis et les coproduits finis en sommes directes.*

Démonstration. Par construction, les ensembles de morphismes de Hec_0 sont des groupes abéliens et la composition est $\mathbb{Z}$-bilinéaire. Il reste à verifier que Hec_0 possède des sommes directes. En effet, montrons que la somme directe et le produit direct dans Hec_0 sont les mêmes que dans dgcat. Puisque l'on a

$$\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}, \mathcal{C}) \backsimeq \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \times \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$$

et que le groupe de Grothendieck préserve les produits, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hec}_0}(\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}, \mathcal{C}) \backsimeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Hec}_0}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathsf{Hec}_0}(\mathcal{B}, \mathcal{C})\,.$$

Un argument analogue montre aussi que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est bien le produit dans Hec_0. □

Lemme 2.21. *Le produit tensoriel* $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ *de* Hec*, voir remarque 2.18, induit une structure monoïdale symétrique sur* Hec_0*.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des dg-catégories. Comme dans la remarque 2.19, le bifoncteur

$$\begin{array}{rcl} -\otimes^{\mathbb{L}}_k - : \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \times \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{C},\mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}, \mathcal{B}\otimes\mathcal{D}) \\ (X,Y) & \longmapsto & X_{cof} \otimes_k Y\,, \end{array}$$

où X_{cof} est un remplacement cofibrant de X dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{op}\otimes^{\mathbb{L}}\mathcal{B})$, par rapport à sa structure de catégorie de modèles de Quillen, est bi-triangulé puisqu'il provient aussi d'un dg-bifoncteur. □

Remarque 2.22. Soit Heq_{ex_0} la sous-catégorie pleine de Hec_0 dont les objets sont les dg-catégories exactes. L'équivalence entre Hec et Heq_{ex} permet d'établir une équivalence entre Hec_0 et Heq_{ex_0}.

Soit $\mathcal{I}$ la dg-catégorie avec objets 1, 2 et dont les morphismes sont engendrés par $m_{12} \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{I}}(1,2)$ soumis à la relation $dm_{12} = 0$. Pour une dg-catégorie $\mathcal{A}$, on note $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ la dg-catégorie $\mathcal{I}\otimes\mathcal{A}$. On dispose de deux inclusions canoniques $\mathcal{A} \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathrm{T}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathrm{T}(\mathcal{A})$ et d'une projection canonique $\mathrm{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$.

Remarque 2.23. La donnée d'un $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodule X est équivalente à la donnée d'un dg-foncteur X : $\mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Mod}$-$\mathcal{B}$. Puisque la catégorie monoïdale symétrique $(\mathsf{dgcat}, \otimes)$ est fermée, un $\mathcal{A}$-$\mathrm{T}(\mathcal{B})$-bimodule X s'identifie à la donnée d'un morphisme de $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodules.

On note également i_1 et i_2 les morphismes de Hec associés respectivement aux inclusions i_1 et i_2. Soit $F : \mathsf{Hec} \rightarrow \mathsf{C}$ un foncteur à valeurs dans une catégorie additive C.

Théorème 2.24. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le foncteur* F *est composé d'un foncteur additif* $\mathsf{Hec}_0 \rightarrow \mathsf{C}$ *et du foncteur canonique* $\mathsf{Hec} \rightarrow \mathsf{Hec}_0$*.*

2) *Pour toutes dg-catégories* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, *l'identité* $F([X])+F([Z]) = F([Y])$, *est vérifiée dans* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(F(\mathcal{A}), F(\mathcal{B}))$ *pour tout triangle* $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ *de* $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A},\mathcal{B})$*.*

3) *Pour toute dg-catégorie $\mathcal{A}$, le morphisme*

$$F(\mathcal{A}) \oplus F(\mathcal{A}) \xrightarrow{[F(i_1)\,,\,F(i_2)]} F(\,T(\mathcal{A}))$$

est un isomorphisme dans C.

4) *Pout toute dg-catégorie prétriangulée $\mathcal{A}$ munie de sous-dg-catégories pleines prétriangulées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui donnent lieu à une décomposition semi-orthogonale* $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}) = (\mathrm{H}^0(\mathcal{B}), \mathrm{H}^0(\mathcal{C}))$, *voir [BLL04], le morphisme*

$$F(\mathcal{B}) \oplus F(\mathcal{C}) \to F(\mathcal{A})$$

induit par les inclusions est un isomorphisme dans C.

Démonstration. Les conditions 1) et 2) sont équivalentes par construction du groupe de Grothendieck d'une catégorie triangulée. Clairement la condition 4) implique la condition 3). Montrons maintenant que la condition 3) entraîne la condition 2). Pour une dg-catégorie $\mathcal{E}$, notons $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathcal{E}$ la sous-catégorie des objets cofibrants de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{E}$. Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{B}$ est cofibrant en tant que dg-catégorie. La catégorie $\mathrm{Mod}\,\mathrm{T}(\mathcal{B})$ s'identifie à la catégorie des morphismes (fermés de degré 0)

$$M_2 \xrightarrow{f} M_1$$

de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}$. Les objets cofibrants correspondent aux cofibrations entre objets cofibrants de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}$. Pour un objet cofibrant M, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to M_2 \xrightarrow{f} M_1 \to \mathrm{Cok} f \to 0$$

de $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}$ fonctorielle en M. Notons

$$0 \to P_2 \to P_1 \to P_1/P_2 \to 0$$

la suite de dg-foncteurs de $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathrm{T}(\mathcal{B})$ dans $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathcal{B}$ obtenue ainsi. Clairement, les foncteurs P_2, P_1, P_1/P_2 envoient les dg-modules représentables sur des dg-modules représentables et donnent donc lieu à des objets dans $\mathsf{rep}(\mathrm{T}(\mathcal{B}), \mathcal{B})$. Soit

$$X \to Y \to Z \to X\,[1]$$

un triangle de $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Il est isomorphe dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$ au triangle associé à une suite exacte courte

$$0 \to X' \xrightarrow{i} Y' \to Z' \to 0$$

de bimodules cofibrants. Nous pouvons considérer le morphisme $M = (X' \xrightarrow{i} Y')$ comme un dg-foncteur de $\mathrm{Mod}_{cf}(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathrm{T}(\mathcal{B})$. Clairement, il donne lieu à un objet de $\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathrm{T}(\mathcal{B}))$. Nous avons

$$P_2(M) = X', \quad P_1(M) = Y', \quad (P_1/P_2)(M) = Z'$$

dans Hec. Pour montrer que l'on a $F(X') + F(Z') = F(Y')$, il suffit donc de vérifier que

$$F(P_2) + F(P_1/P_2) = F(P_1)\,.$$

Notons

$$I_1 : L \longmapsto (0 \to L)$$
$$I_2 : L \longmapsto (L \xrightarrow{\mathbf{1}} L)$$

les dg-foncteurs de $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathcal{A}$ dans $\mathrm{Mod}_{cf}\,\mathrm{T}(\mathcal{A})$ induits par i_1 et i_2. Clairement, nous avons

$$(P_1/P_2)\circ I_1 = \mathbf{1},\;\; (P_1/P_2)\circ I_2 = 0,\;\; P_2\circ I_1 = 0,\;\; P_2\circ I_2 = \mathbf{1}$$

dans Hec. Il s'ensuit que dans la catégorie additive C, nous avons

$$\begin{bmatrix} F(P_1/P_2) \\ F(P_2) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} F(I_1) & F(I_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

et donc

$$(F(P_1/P_2) + F(P_2)) \circ \begin{bmatrix} F(I_1) & F(I_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\,.$$

De l'autre côté, nous avons

$$P_1\circ I_1 = \mathbf{1},\;\; P_1\circ I_2 = \mathbf{1}$$

dans Hec et donc

$$F(P_1)\circ \begin{bmatrix} F(I_1) & F(I_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

dans C. Comme $\begin{bmatrix} F(I_1) & F(I_2) \end{bmatrix}$ est inversible, il s'ensuit que l'on a bien

$$F(P_1/P_2) + F(P_2) = F(P_1)\,.$$

Montrons maintenant que la condition 1) implique la condition 3). Ecrivons F comme composé d'un foncteur additif $\overline{F} : \mathsf{Hec}_0 \to \mathsf{C}$ et du foncteur canonique $\mathsf{Hec} \to \mathsf{Hec}_0$. Nous avons

$$\overline{F}\,\mathcal{A} \oplus \overline{F}\,\mathcal{A} \simeq \overline{F}(\mathcal{A}\oplus\mathcal{A})\,.$$

Il suffit donc de montrer que dans Hec_0, le morphisme canonique

$$\mathcal{A}\oplus\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{T}(\mathcal{A})$$

devient inversible. Par le lemme de Yoneda, il suffit de montrer que pour toute dg-catégorie $\mathcal{U}$, l'application

$$\mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathcal{A})) \oplus \mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathcal{A})) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathrm{T}(\mathcal{A})))$$

est bijective. Ceci résulte du fait que la catégorie triangulée $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathrm{T}(\mathcal{A}))$ admet une décomposition semi-orthogonale en deux sous-catégories équivalentes à $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathcal{A})$. En effet, si X est un objet de $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathrm{T}(\mathcal{A}))$ qui est cofibrant dans

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{U}^{op}\otimes\mathrm{T}(\mathcal{A})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\mathrm{T}(\mathcal{U}^{op}\otimes\mathcal{A}))\,,$$

nous pouvons l'identifier avec une cofibration $X_2 \xrightarrow{i} X_1$ entre objets cofibrants appartenant à $\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U},\mathcal{A})$. Alors le triangle associé à X par la décomposition semi-orthogonale est induit par la suite exacte de morphismes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "i"'] & X_1 \arrow[r] & X_1/X_2 \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Un argument analogue au précédent montre que la condition 1) implique la condition 4). $\square$

2.5 DG-foncteurs de Morita

Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. On note $\mathcal{T}^{\natural}$ sa complétion idempotente, voir [BS01]. Ici, l'exposant représente la moitié du symbole $\oplus$. Un dg-foncteur F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}$ est *de Morita* s'il satisfait l'une des conditions $(M1)$ ou $(M2)$:

(M1) – la dg-catégorie $\mathcal{C}$ est vide et tous les objects de la dg-catégorie $\mathcal{E}$ sont contractiles.

(M2) - pour tous objets c_1 et c_2 dans $\mathcal{C}$, le morphisme de complexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F(c_1), F(c_2))$$

est un quasi-isomorphisme et

- le foncteur $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(F))^{\natural}$ de $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{C}))^{\natural}$ vers $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{E}))^{\natural}$ est essentiellement surjectif.

Remarque 2.25. Les dg-foncteurs H vérifiant $(M1)$ ne vérifient pas $(M2)$ si $\mathcal{E}$ est non vide puisque pre-tr$(\emptyset) = \emptyset$. La notion de dg-foncteur de Morita est importante car un dg-foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ est de Morita si et seulement s'il induit une équivalence

$$F^* : \mathcal{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{C})$$

dans les catégories dérivées, voir [Kel94].

On introduira une structure de catégorie de modèles de Quillen à engendrement cofibrant dans dgcat dont les équivalences faibles sont les dg-foncteurs de Morita. Pour cela, on se servira du théorème 2.1.

Soit idem la dg-catégorie avec un seul object 0 et dont les morphismes sont engendrés par l'endomorphisme e de degré 0 tel que $de = 0$ et $e^2 = e$. Pour un entier $n > 0$ et des entiers $k_0, \ldots, k_n$, soit $\mathrm{idem}_n(k_0, \ldots, k_n)$ la dg-catégorie obtenue à partir de la dg-catégorie $\mathcal{M}_n(k_0, \ldots, k_n)$ en rajoutant de nouveaux generateurs et relations : on rajoute, pour tous $0 \leqslant i, j \leqslant n$, des morphismes $e_{i,j}$ de source j et de but i de degré $k_i - k_j$ soumis aux relations

$$d(E) = 0 \quad \text{et} \quad E^2 = E\,,$$

où E est la matrice de coefficients $e_{i,j}$.

Pour $n \geqslant 0$, soit $\mathrm{fact}_n(k_0, \ldots, k_n)$ la sous-dg-catégorie pleine de la dg-catégorie des dg-modules (à droite) sur $\mathrm{idem}_n(k_0, \ldots, k_n)$ dont les objets sont les $\hat{l}$, $0 \leqslant l \leqslant n$ et le facteur directe X_n associé à l'idempotent $\widehat{E}$ du cône itéré qui a le même module gradué sous-jacent que le dg-module

$$X = \bigoplus_{l=0}^{n} \hat{l}\,[k_l]$$

et dont la différentielle est $d_X + \widehat{Q}$.

On note $L_n(k_0, \ldots, k_n)$ le dg-foncteur naturel et pleinement fidèle, de $\mathrm{idem}_n(k_0, \ldots, k_n)$ dans $\mathrm{fact}_n(k_0, \ldots, k_n)$. On considère $L_n(k_0, \ldots, k_n)$ comme un objet de la catégorie des morphismes de dgcat munie de sa structure de catégorie de modèles canonique (où une équivalence faible est une quasi-équivalence en chaque composante). On choisit, une fois pour toutes, un remplacement cofibrant $Lh_n(k_0, \ldots, k_n)$ de cet objet :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{idem}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[d, "L(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathrm{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[l, two heads, "\sim"'] \arrow[d, tail, "Lh_n(k_0,\ldots,k_n)"] \\
\mathrm{fact}_n(k_0, \ldots, k_n) & \mathrm{facth}_n(k_0, \ldots, k_n)\,. \arrow[l, two heads, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Notation 2.26. On note par idem, resp. idemh, la dg-catégorie $\mathrm{idem}_0(0)$, resp. $\mathrm{idemh}_0(0)$ et par fact, resp. facth, la dg-catégorie $\mathrm{fact}_0(0)$, resp. $\mathrm{facth}_0(0)$.

Nous définissons $\mathcal{B}$ comme la dg-catégorie avec un seul object 7 et dont les morphismes sont engrendrés par l'endomorphisme $\underline{h}$ de degrée -1 soumis à la relation $d(\underline{h}) = \mathbf{1}_7$. Soit C l'unique dg-foncteur de la dg-catégorie vide $\mathcal{O}$ vers $\mathcal{B}$.

Théorème 2.27. *Si on considère pour catégorie $\mathcal{C}$ la catégorie* dgcat*, pour classe W la sous-catégorie de* dgcat *des dg-foncteurs de Morita, pour classe J les dg-foncteurs F et $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, (voir section 1.3), $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $I_n(k_0, \ldots, k_n)$, $Ih_n(k_0, \ldots, k_n)$ et C et pour classe I les dg-foncteurs Q et $S(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, (voir section 1.3), alors les conditions du théorème 2.1 sont satisfaites.*

À la proposition 2.34 après la démonstration du théorème, nous allons donner une description explicite des objets fibrants de la structure de catégorie de modèles obtenue ainsi.

Une fois que tous les objets dans dgcat sont petits, voir [Hir03, 10.4.1], les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* du théorème 2.1 sont verifiées. Pour vérifier les autres conditions, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes.

Lemme 2.28. *Soit $\mathcal{A}$ une petite dg-catégorie.*

a) Soit e un endomorphisme idempotent d'un objet A de $H^0(\mathcal{A})$. Alors il existe un isomorphisme $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dans Heq *et un idempotent fermé $\tilde{e}$ dans $\mathcal{A}'(FA, FA)$ tel que l'image de e par $H^0(F)$ est égale à la classe de $\tilde{e}$.*

b) Tout foncteur idem $\to H^0(\mathcal{A})$ *se relève en un morphisme* idemh $\to \mathcal{A}$ *de* dgcat.

Démonstration. a) Dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, les idempotents se scindent puisque $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée aux coproduits dénombrables. L'idempotent e donne donc lieu à une décomposition

$$\widehat{A} \xrightarrow{\sim} P \oplus Q$$

dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ telle que e corresponde à l'endomorphisme $\mathbf{1}_P \oplus 0$. On peut, et on va, supposer que P et Q sont des dg-modules cofibrants et que nous avons un quasi-isomorphisme surjectif $p : P \oplus Q \to \widehat{A}$. Notons $\mathcal{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ dont les objets sont $P \oplus Q$ et les foncteurs représentables autres que $\widehat{A}$. Notons $\mathcal{A}'$ la sous-catégorie non pleine de $\mathcal{B}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{B}$ et telle que pour tout X dans $\mathcal{A}'$, on a

$$\mathcal{A}'(X, P \oplus Q) = \mathcal{B}(X, P \oplus Q)$$

et $\mathcal{A}'(P \oplus Q, X) \subset \mathcal{B}(P \oplus Q, X)$ est formé des morphismes qui s'annulent sur le noyau de p. On a des dg-foncteurs canoniques

$$\mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$$

et il n'est pas difficile de constater que ce sont des quasi-équivalences (bijectives sur les objets). Dans Heq, ces dg-foncteurs donnent lieu a l'isomorphisme annoncé $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Pour $\tilde{e}$, on prend l'endomorphisme $\mathbf{1}_P \oplus 0$.

b) La donnée d'un foncteur idem $\to H^0(\mathcal{A})$ donne lieu à un idempotent e d'un objet A de $\mathcal{A}$. Grâce à a), on obtient un isomorphisme $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ dans Heq et un morphisme idem $\to \mathcal{B}$ dans dgcat tels que le foncteur composé

$$H^0(\mathrm{idem}) \to H^0(\mathcal{B}) \to H^0(\mathcal{A})$$

est le foncteur donné. Considérons la composition

$$\mathrm{idemh} \to \mathrm{idem} \to \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

dans Heq. Puisque idemh est cofibrant, cette composition se relève en un vrai morphisme idemh $\to \mathcal{A}$ dans dgcat. La construction montre qu'il a la propriété requise. $\square$

Lemme 2.29. *Soit $U : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un dg-foncteur entre petites dg-catégories. Supposons donné un carré commutatif de catégories*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{idem} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{A}) \arrow[d, "H^0(U)"] \\ \mathrm{fact} \arrow[r] & H^0(\mathcal{B}). \end{tikzcd}$$

Alors il existe un carré commutatif de dg-catégories

$$\begin{tikzcd} \mathrm{idemh} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[d, "U"] \\ \mathrm{facth} \arrow[r] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont des relevés (stricts) des flèches du diagramme donné.

Démonstration. Notons A l'image de l'objet de idem, $B = UA$ l'image du 'grand' objet de fact et B' l'image de l'objet 'facteur direct' de fact. Notons e le morphisme de $H^0(\mathcal{A})$ qui est l'image du morphisme e_0 de idem. Comme dans le lemme ci-dessus, nous choisissons une décomposition $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} P \oplus Q$ dans la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$ telle que P est une image pour e et P et Q sont cofibrants. Relevons l'isomorphisme $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} P \oplus Q$ en un morphisme dans $\mathcal{C}_{dg}(A)$ (qui sera donc une équivalence d'homotopie). Le foncteur U s'étend en un foncteur $U_!$ de $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ vers $\mathcal{C}_{dg}(B)$ (adjoint à gauche de la restriction le long de U) et nous pouvons supposer que $U_!(\widehat{A}) = \widehat{UA} = \widehat{B}$ et que, plus généralement, l'image par $U_!$ d'un module représentable $\widehat{A''}$ est le module représentable $\widehat{UA''}$. Nous obtenons ainsi un morphisme $U_!(P \oplus Q) \to \widehat{B}$ dans $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$ (qui est une équivalence d'homotopie) et nous choisissons une équivalence d'homotopie $U_!(P) \to \widehat{B'}$ compatible avec les données provenant du carré commutatif de départ. Nous définissons $\mathcal{A}'$ comme la sous-dg-catégorie pleine de la dg-catégorie $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A}))$ (voir definition 4.1) dont les objets sont les équivalences d'homotopie identiques

$$\widehat{A''} \to \widehat{A''}$$

pour tous objets A'' de $\mathcal{A}$ distincts de A et l'équivalence d'homotopie

$$\widehat{A} \to P \oplus Q.$$

Le foncteur naturel $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ (projection sur la première composante) est alors bijectif au niveau des objets et induit des quasi-isomorphismes surjectifs dans les espaces de morphismes. De façon analogue, nous définissons $\mathcal{B}'$ comme la sous-dg-catégorie pleine de $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B}))$ dont les objets sont les équivalences d'homotopie identiques

$$\widehat{B''} \to \widehat{B''}$$

pour tous objets B'' de $\mathcal{B}$ distincts de B et B', et les équivalences d'homotopie construites

$$\widehat{B} \to U_!(P \oplus Q) \text{ et } \widehat{B'} \to U_!(P).$$

Par construction, le dg-foncteur $U_!$ induit un dg-foncteur $U' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$. Finalement, nous définissons $\mathcal{A}''$ comme la sous-dg-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ dont les objets sont les images de ceux de $\mathcal{A}'$ par la deuxième projection et de façon analogue pour $\mathcal{B}''$. Le foncteur U' induit un foncteur $U'' : \mathcal{A}'' \to \mathcal{B}''$. Les deux projections définissent alors des morphismes de morphismes de dg-catégories

$$U \longleftarrow U' \longrightarrow U''$$

et ces morphismes ont pour composantes des quasi-équivalences (bijectives au niveau des objets). Notons U_0 le morphisme de (dg-)catégories idem $\rightarrow$ fact. Nous obtenons ainsi un morphisme de $U_0 = H^0(U_0)$ vers $H^0(U'')$. Notre construction de $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$ et U'' nous permet alors de relever ce morphisme en un morphisme $U_0 \rightarrow U''$, c'est-à-dire en un carré commutatif de dg-foncteurs

$$\begin{tikzcd} \text{idem} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[d, "U"] \\ \text{fact} \arrow[r] & \mathcal{B}. \end{tikzcd}$$

Notons Uh_0 le dg-foncteur idemh $\rightarrow$ facth. Par construction, $Uh_0 \rightarrow U_0$ est un remplacement cofibrant dans la catégorie des morphismes de dgcat. Les morphismes

$$U \longleftarrow U' \longrightarrow U''$$

sont des équivalences faibles dans cette catégorie. On peut donc trouver un morphisme $Uh_0 \rightarrow U$ dans la catégorie des morphismes de dgcat tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Uh_0 \arrow[rr] \arrow[d] & & U_0 \arrow[d] \\ U & U' \arrow[l] \arrow[r] & U'' \end{tikzcd}$$

commute dans la catégorie homotopique de la catégorie des morphismes de dgcat. On vérifie facilement que le carré commutatif correspondant à $Uh_0 \rightarrow U$ a les propriétés requises dans l'énoncé.

$\square$

Lemme 2.30. **Surj** $= J - inj \cap W$.

Démonstration. Montrons l'inclusion $\supseteq$. Soit H un dg-foncteur de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{S}$ qui appartient à $J - \text{inj} \cap W$. On montre maintenant que H satisfait forcément la condition $(M2)$. Supposons que H satisfait la condition $(M1)$. Si $\mathcal{D}$ est vide, alors H satisfait $(M2)$. Supposons que $\mathcal{D}$ est non vide. Alors il existe un object X dans $\mathcal{S}$ et un morphisme h, de degrée -1 tel que $d(h) = \mathbf{1}_X$. On peut donc construire le carré naturel commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, equal] \arrow[d, "C"'] & \mathcal{D} = \mathcal{O} \arrow[d, "H"] \\ \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{S}\,. \end{tikzcd}$$

Puisque H appartient à $J - \text{inj}$, on a un dg-foncteur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{O}$. On obtient donc une contradition. Cela montre que H satisfait la condition $(M2)$.

Maintenant on montre que H est en effet un dg-foncteur quasi-équiconique. Le dg-foncteur H a la propriété de relèvement à droite par rapport aux dg-foncteurs $Lh_n(k_0, \ldots, k_n)$, $n \geqslant 0$, et donc le dg-foncteur

$$\text{pre-tr}(H) : \text{pre-tr}(\mathcal{D}) \longrightarrow \text{pre-tr}(\mathcal{S})$$

l'a par rapport au dg-foncteur idemh $\rightarrow$ facth. Puisque H est par hypothèse de Morita, le foncteur $\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(H))$ est pleinement fidèle et on dispose d'une équivalence de catégories

$$\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{D}))^{\ni} \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{S}))^{\ni}\,.$$

Soit maintenant $X \in \text{pre-tr}(\mathcal{S})$. L'objet X est donc isomorphe dans $\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{S}))$ à un facteur direct d'un objet qui est dans l'image par $\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(H))$. Cela nous permet de construire un carré commutatif de catégories

$$\begin{tikzcd} \text{idem} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{D})) \arrow[d] \\ \text{fact} \arrow[r, "F"'] & \mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(S)) \end{tikzcd}$$

tel que $F(C_0) = X$. Par le lemme 2.29 on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \text{idemh} \arrow[r] \arrow[d] & \text{pre-tr}(\mathcal{D}) \arrow[d] \\ \text{facth} \arrow[r, "F_h"'] \arrow[ur, dashed] & \text{pre-tr}(\mathcal{S}) , \end{tikzcd}$$

où F_h est un relevé strict de F. Cela implique que le foncteur $\text{pre-tr}(H)$ est essentiellement surjectif et donc H est un dg-foncteur quasi-équiconique. Puisque H a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales génératrices de la structure quasi-équiconique, le lemme 2.4 implique que H appartient à **Surj**.

Montrons maintenant l'inclusion $\subseteq$. Soit H un dg-foncteur de $\mathcal{N}$ vers $\mathcal{E}$ dans la classe **Surj**. Comme H est surjectif au niveau des objets et un quasi-isomorphisme au niveau des complexes de morphismes, on a $H \in W$. La classe $R(n)-\text{drt}$ est formée des dg-foncteurs surjectifs au niveau des complexes de morphismes. Il suffit de montrer que H a la propriété de relèvement à droite par rapport à F, $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $I_n(k_0, \ldots, k_n)$ et $Lh_n(k_0, \ldots, k_n)$ et C. On considère ces trois cas :

1. on sait par le théorème précédent que $H \in F-\text{drt}$, $H \in F(n)-\text{drt}$ et $H \in I_n(k_0, \ldots, k_n)-\text{drt}$.

2. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \text{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r] \arrow[d, tail, "Lh_n(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "H"] \\ \text{facth}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "T"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

   Puisque H est une fibration triviale et $Lh_n(k_0, \ldots, k_n)$ une cofibration, le dg-foncteur H a la propriété de relèvement à droite par rapport à $Lh_n(k_0, \ldots, k_n)$.

3. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, "C"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "H"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "T"'] & \mathcal{E} . \end{tikzcd}$$

   Soit X l'image par T de l'objet 7 de $\mathcal{B}$. Puisque H appartient à **Surj**, il existe un object Y dans $\mathcal{N}$ tel que $H(Y) = X$. Maintenant puiqu'on dispose d'un quasi-isomorphisme surjectif de dg-algèbres de $\mathsf{End}_{\mathcal{N}}(Y)$ vers $\mathsf{End}_{\mathcal{E}}(X)$, un argument classique montre qu'on peut relever le long de H une contraction de Y vers une contraction de X. Cela nous fournit le relèvement recherché.

□

Soient $\mathcal{U}$ une petite dg-catégorie et

$$T : \mathrm{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \to \mathcal{U}$$

un dg-foncteur. Soit la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} \mathrm{idemh}_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Lh_n"'] & \mathcal{U} \arrow[d, "L'"] \\ \mathrm{facth}_n \arrow[r, "T'"'] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

dans dgcat.

Lemme 2.31. *Le dg-foncteur L' est de Morita. La restriction $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U})$ le long de L' induit une équivalence de $H^0(\mathcal{V})$ sur la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ formée des foncteurs représentables et de l'image du facteur direct X_n (voir la définition de* facth_n*) par la composition*

$$\mathcal{D}(\mathrm{idem}_n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{idemh}_n) \xrightarrow{\mathbf{L}T_!} \mathcal{D}(\mathcal{U}).$$

Remarque 2.32. Le lemme montre que le carré induit

$$\begin{tikzcd} \mathrm{idem}_n \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{U}) \arrow[d] \\ \mathrm{fact}_n \arrow[r] & H^0(\mathcal{V}) \end{tikzcd}$$

est cocartésien (à isomorphisme près).

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ une petite dg-catégorie. Puisque le morphisme $\mathrm{idemh}_n \to \mathrm{facth}_n$ est une cofibration entre dg-catégorie cofibrantes, la somme amalgamée est aussi une somme amalgamée homotopique. Donc le carré

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Map}(\mathrm{idemh}, \mathcal{W}) & \mathsf{Map}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \arrow[l] \\ \mathsf{Map}(\mathrm{facth}, \mathcal{W}) \arrow[u] & \mathsf{Map}(\mathcal{V}, \mathcal{W}). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

est homotopiquement cartésien. D'après le théorème principal de [Toë07], les groupes π_0 dans ce diagramme sont en bijection avec les classes d'isomorphisme et les groupes d'homotopie supérieurs avec les espaces d'extensions supérieures dans les catégories du carré correspondant

$$\begin{tikzcd} \mathsf{rep}(\mathrm{idemh}, \mathcal{W}) & \mathsf{rep}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \arrow[l] \\ \mathsf{rep}(\mathrm{facth}, \mathcal{W}) \arrow[u] & \mathsf{rep}(\mathcal{V}, \mathcal{W}). \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Or, ici la flèche verticale de gauche s'identifie au foncteur

$$\mathsf{rep}(\mathrm{fact}, \mathcal{W}) \to \mathsf{rep}(\mathrm{idem}, \mathcal{W})$$

induit par la restriction de modules sur $\mathrm{fact}_n^{op} \otimes \mathcal{W}$ à $\mathrm{idem}_n^{op} \otimes \mathcal{W}$. Or la dg-catégorie $\mathrm{fact}_n^{op} \otimes \mathcal{W}$ est obtenue à partir de $\mathrm{idem}_n^{op} \otimes \mathcal{W}$ en rajoutant des facteurs directs de foncteurs représentables. La restriction est donc pleinement fidèle et préserve le caractère cofibrant d'un module. Elle induit donc un foncteur pleinement fidèle dans les catégorie dérivées et le foncteur

$$\mathsf{rep}(\mathrm{fact}_n, \mathcal{W}) \to \mathsf{rep}(\mathrm{idem}_n, \mathcal{W})$$

induit une injection dans les classes d'isomorphisme et des bijections dans le groupes d'extensions supérieurs. Il s'ensuit que le morphisme

$$\mathsf{Map}(\mathrm{facth}_n, \mathcal{W}) \to \mathsf{Map}(\mathrm{idemh}_n, \mathcal{W})$$

est un monomorphisme homotopique. Grâce au carré homotopiquement cartésien (2.1), le morphisme

$$\mathsf{Map}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to \mathsf{Map}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$$

est également un monomorphisme homotopique. Ainsi, le dg-foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{D}(\mathcal{V}^{op} \otimes \mathcal{W}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U}^{op} \otimes \mathcal{W}).$$

En prenant pour $\mathcal{W}$ la dg-catégorie finale, nous obtenons que $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est quasi-pleinement fidèle. Les classes d'isomorphisme d'objets de $H^0(\mathcal{V})$ proviennent de ceux de $\mathcal{U}$ et de ceux de $H^0(\mathrm{facth}_n)$, qui est équivalent à fact_n. Ceci nous donne que $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \to \mathcal{D}(\mathcal{U})$ est une équivalence et la description de l'image de $H^0(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. □

Lemme 2.33. *On a $J - cell \subset W$.*

Démonstration. On sait déjà par le théorème précédent que les classes $F - \mathrm{cell}$, $R(n) - \mathrm{cell}$, $F(n) - \mathrm{cell}$ et $I_n(k_0, \ldots, k_n) - \mathrm{cell}$ sont formées de dg-foncteurs quasi-équiconiques donc contenues dans la classe W. Il est clair que la classe C-cell est contenue dans W.

Soit maintenant $T : \mathrm{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \to \mathcal{U}$ un dg-foncteur quelconque. On considère la somme amalgamée suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{idemh}_n(k_0,\ldots,k_n) \arrow[r, "T"] \arrow[d, tail, "Lh_n(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathcal{U} \arrow[d, "inc"] \\ \mathrm{facth}_n(k_0,\ldots,k_n) \arrow[r] & \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

dans dgcat. Il résulte du lemme 2.31 que $inc \in W$. □

Nous avons vérifié que $J - \mathrm{cell} \subseteq W$ (lemme 2.33) et que $I - \mathrm{inj}$ est égal à $J - \mathrm{inj} \cap W$ (lemmes 2.3 et 2.30). Ces conditions impliquent celles du théorème 2.1.

Proposition 2.34. *Les dg-catégories Morita fibrantes, c'est-à-dire les objets fibrants pour la catégorie de modèles de Quillen du théorème 2.27, sont les dg-catégories $\mathcal{A}$ non vides telles que l'image essentielle du plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ est stable par suspensions, cônes et facteurs directs.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une dg-catégorie Morita fibrante. On montre maintenant que $\mathcal{A}$ ne peut pas être la dg-catégorie vide. Suposons que $\mathcal{A} = \emptyset$. Puisque $\mathcal{A}$ est Morita fibrante il existe un dg-foncteur E

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, equal] \arrow[d, "C"'] & \emptyset \\ \mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "E"'] & \end{tikzcd} .$$

Puisque $\mathcal{B}$ est non vide on obtient donc une contradiction. Par la proposition 2.10, le plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ est stable par suspensions et cônes. Il reste à montrer qu'il est aussi stable par facteurs directs. Soit $X \in \mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{A}))$ et e un idempotent dans $\mathsf{End}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X)$. Cela correspond à un foncteur idem $\rightarrow \mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{A})$ et par le lemme 2.28 on a un dg-foncteur L : idemh $\rightarrow$ pre-tr$(\mathcal{A})$. Puisque $\mathcal{A}$ est une dg-catégorie Morita fibrante on dispose du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{idemh} \arrow[r, "L"] \arrow[d] & \mathcal{A} \\
\mathrm{facth} \arrow[ur, dashed, "\overline{L}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Notons que le facteur direct associé à $\overline{L}$ est isomorphe dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ au facteur direct associé à l'idempotent e.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une dg-catégorie non-vide telle que l'image essentielle du plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ est stable par suspensions, cônes et facteurs directes. Par la proposition 2.10, le dg-foncteur $\mathcal{A} \rightarrow 0$ a la propriété de relèvement à droite par rapport aux dg-foncteurs $F(n), R(n)$ et $I_n(k_0, \ldots, k_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. On montre maintenant qu'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à C. Puisque $\mathcal{A}$ est non vide, il existe un objet $X \in \mathcal{A}$. On considère le diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cone}_0(0) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "I_0(0)"'] & \mathcal{A} \\
\mathrm{coneh}_0(0) \arrow[ur, dashed, "\overline{L}"'] &
\end{tikzcd}$$

où le dg-foncteur L correspond au morphisme identité de X. Alors $\overline{L}(Xh_0)$ est un objet contractile dans $\mathcal{A}$ et il existe donc un morphisme R comme dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "R"'] &
\end{tikzcd} .$$

On montre maintenant que le dg-foncteur $\mathcal{A} \rightarrow 0$ a la propriété de relevement à droite par rapport aux dg-foncteurs $Lh_n(k_0, \ldots, k_n), n \in \mathbb{Z}$. On se donne un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "L"] \arrow[d, tail, "L_n(k_0,\ldots,k_n)"'] & \mathcal{A} \\
\mathrm{facth}_n(k_0, \ldots, k_n) &
\end{tikzcd}$$

et on forme le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{idemh}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r, "L"] \arrow[d, tail, "L_n(k_0,\ldots,k_n)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{A} \arrow[d, tail] \\
\mathrm{facth}_n(k_0, \ldots, k_n) \arrow[r] & \mathcal{B} .
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 2.31, le foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est quasi-pleinement fidèle et la catégorie $H^0(\mathcal{B})$ est obtenue à partir de $H^0(\mathcal{A})$ en rajoutant un facteur direct d'une extension itérée. Or, par hypothèse, la catégorie

$H^0(\mathcal{A})$ est stable par rajout d'extensions itérées et de facteurs directs. Donc le foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une quasi-équivalence. Mais il est aussi une cofibration pour la structure dont les équivalences faibles sont les quasi-équivalences (puisque le foncteur $\mathrm{idemh}_n \to \mathrm{facth}_n$ est une telle cofibration). La dg-catégorie $\mathcal{B}$ est fibrante pour cette structure (comme toute petite dg-catégorie). Donc le foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ admet une rétraction. Cela montre la proposition. □

On note $\mathcal{M}or$ la classe des dg-foncteurs de Morita et Hmo la catégorie homotopique de dgcat par raport à cette classe.

Proposition 2.35. *La structure de catégorie de modèles de Quillen du théorème 2.27 est la localisation de Bousfield à gauche, voir [Hir03, 3.3.1], de la structure quasi-équiconique, par rapport au morphisme*

$$Lh_0 : \mathrm{idemh} \to \mathrm{facth}\,.$$

Démonstration. On commence par montrer qu'une dg-catégorie $\mathcal{B}$ est Lh_0-locale, voir [Hir03, 3.4], si et seulement si elle est Morita fibrante. Notons que puisque les deux structures de modèles de Quillen sur dgcat ont les mêmes cofibrations, et donc les mêmes fibrations triviales, le foncteur de remplacement cofibrant simplicial Γ^*, voir [Hir03], est le même dans les deux situations. Puisque Lh_0 est un dg-foncteur de Morita, cela implique que si $\mathcal{B}$ est Morita fibrante, le morphisme induit

$$\mathsf{Map}(\mathrm{facth}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Map}(\mathrm{idemh}, \mathcal{B})$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Soit maintenant $\mathcal{B}$ un objet Lh_0-local dans dgcat. Montrons qu'il est Morita fibrant. Par la proposition 2.34, il s'agit de montrer que l'image essentielle du plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est stable par suspensions, cônes et facteurs directs. Une fois que $\mathcal{B}$ est fibrante pour la structure quasi-équiconique proposition 2.10 implique que le plongement $\mathsf{H}^0(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est dejà stable par suspensions et cônes. Maintenant la donnée d'un idempotent e dans $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ se relève, par lemme 2.28, en un morphisme $\mathrm{idemh} \to \mathcal{B}$ et fournit donc une objet de $\mathsf{rep}(\mathrm{idemh}, \mathcal{B})$. Par la description de $\mathsf{Map}(-,-)$ dans [Toë07] et l'hypothèse sur $\mathcal{B}$, le foncteur

$$\mathsf{rep}(\mathrm{idemh}, \mathcal{B}) \to \mathsf{rep}(\mathrm{facth}, \mathcal{B})$$

est une équivalence. Cela implique qu'il existe bien dans $\mathcal{B}$ un objet F_e qui, dans $\mathcal{D}\mathcal{B}$, devient isomorphe au facteur directe associé à l'idempotent e.

On montre maintenant qu'un dg-foncteur est de Morita si et seulement s'il est une Lh_0-équivalence locale, voir [Hir03, 3.1.4]. Un dg-foncteur F est une Lh_0-équivalence locale ssi $\mathsf{Map}(F, \mathcal{C})$ est une équivalence faible pour tout $\mathcal{C}$ Lh_0-locale, ssi $\mathsf{Map}(F, \mathcal{C})$ est une équivalence faible pour toute $\mathcal{C}$ Morita fibrante. Une fois que les foncteurs $\mathsf{Map}(-, \mathcal{C})$ sont équivalents pour les deux structures, avec $\mathcal{C}$ Morita fibrante, F est de Morita ssi c'est une Lh_0-équivalence locale. □

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des dg-catégories et $\mathrm{can}_2 : \mathsf{Heq} \to \mathsf{Hmo}$ le foncteur canonique. La proposition 2.35 et le corollaire 2.15 impliquent :

Corollaire 2.36. *On a une adjonction*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}}(can_2(\mathcal{A}), \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{fib})\,,$$

où $\mathcal{B}_{fib}$ est un remplacement Morita fibrant de la dg-catégorie $\mathcal{B}$.

Soit Heq_{fib} la sous-catégorie pleine de Heq formée des dg-catégories Morita fibrantes. On note $\mathrm{inc} : \mathsf{Heq}_{fib} \hookrightarrow \mathsf{Heq}$ l'inclusion évidente. Le corollaire 2.36 a comme consequence le

Corollaire 2.37. *On a une équivalence de catégories*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Heq} \arrow[d, "can_2"'] & \mathsf{Heq}_{fib} \arrow[l, hook', "inc"'] \\ \mathsf{Hmo} \arrow[ur, "\sim", "(-)_{fib}"'] & \end{tikzcd}$$

Soit Heq_{kar} la sous-catégorie pleine de Heq_{ex}, voir notation 2.16, formée des dg-catégories $\mathcal{A}$ telles que l'image du plongement $h : \mathrm{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ est stable par facteurs directs.

Lemme 2.38. *Les catégories* Heq_{kar} *et* Heq_{fib} *sont équivalentes.*

Démonstration. Soir $\mathcal{B} \in \mathsf{Heq}_{fib}$. Alors on a une quasi-équivalence

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \text{pre-tr}(\mathcal{B})\,.$$

Par proposition 2.34, pre-tr$(\mathcal{B})$ est Morita fibrante et une fois qu'elle est aussi exacte elle appartient à Heq_{kar}. □

On note $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivé $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$, voir [Dri04] [Kel94], dont les objets sont les dg $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodules X telles que $X(?,A)$ est isomorphe dans $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ à un objet de l'image du dg-foncteur canonique $\mathrm{H}^0(\text{pre-tr}(\mathcal{B}))^{\natural} \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{Mod}\,\mathcal{B})$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Corollaire 2.39. *On a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Iso}(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.36, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$. Par [Toë07] on sait que ce dernier ensemble s'identifie à $\mathrm{Iso}(\mathsf{rep}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib}))$. On sait par le lemme 2.38 que $\mathcal{B}_{fib}$ est isomorphe dans Heq à une dg-catégorie qui appartient à Heq_{kar}. Cela implique que $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$ s'identifie à $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, d'où le resultat. □

Remarque 2.40. On sait que les structures de catégorie de modèles de Quillen dans dgcat de [Tab05b] et du théorème 2.27 ont les mêmes cofibrations et les mêmes fibrations acycliques. Cela a pour consequence que

- Le foncteur de remplacement cofibrant simplicial Γ^*, voir [Hov99], dans dgcat est le même dans les deux situations. Cela implique que les corollaires 2.36, 2.37 et 2.39 sont encore vrais si on remplace Hom par l'espace de morphismes, $\underline{\mathrm{Map}}$, voir [Hov99], et $\mathrm{Iso}(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ dans le corollaire 2.39, par le nerf de la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{op} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ et dont les morphismes sont les quasi-isomorphismes.
- La catégorie monoïdale symétrique $(\mathsf{Hmo},\, -\otimes^{\mathbb{L}}-)$ est bien définie et fermée, voir [Hov99], et l'espace de morphismes interne de Hmo, $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{Hmo}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'identifie à $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A},\mathcal{B}_{fib})$, voir [Toë07].

2.6 Invariants

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des dg-catégories. Soit Hmo_0 la catégorie qui a pour objets les petites dg-catégories et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}_0}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Un argument complètement analogue à la remarque 2.19 montre que l'opération de composition dans Hmo_0 est bien définie. On dispose donc d'un foncteur canonique $\mathrm{add}_2 : \mathsf{Hmo} \rightarrow \mathsf{Hmo}_0$. Des arguments similaires aux lemmes 2.20 et 2.21 nous permettent de montrer le lemme suivant.

Lemme 2.41. *La catégorie* Hmo_0 *est additive et le produit tensoriel* $-\otimes^{\mathbb{L}}-$ *de* Hmo*, voir remarque 2.40, induit une structure monoïdale symétrique sur* Hmo_0*.*

Soit Heq_{kar_0} la sous-catégorie pleine de Hmo_0 dont les objets sont les dg-catégories exactes $\mathcal{A}$ telles que l'image du plongement $\widehat{\ }: \mathrm{H}^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ est stable par facteurs directs.

Remarque 2.42. L'équivalence entre Hmo et Heq_{kar} induit une équivalence entre Hmo_0 et Heq_{kar_0}.

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Heq}_{ex_0} \arrow[r, hook, "\sim"] & \mathsf{Hec}_0 \arrow[d] \\
\mathsf{Heq}_{kar_0} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\sim"] & \mathsf{Hmo}_0 .
\end{tikzcd}$$

La démonstration du théorème suivant est analogue à celle du théorème 2.24. Soit $F : \mathsf{Hmo} \to \mathsf{C}$ un foncteur à valeurs dans une catégorie additive C.

Théorème 2.43. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le foncteur F est composé d'un foncteur additif* $\mathsf{Hmo}_0 \to \mathsf{C}$ *et du foncteur canonique* $\mathsf{Hmo} \to \mathsf{Hmo}_0$*.*

2) *Pour toutes dg-catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, l'identité $F([X])+F([Z]) = F([Y])$, est vérifiée dans* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(F(\mathcal{A}), F(\mathcal{B}))$ *pour tout triangle $X \to Y \to Z \to X[1]$ de* $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*.*

3) *Pour toute dg-catégorie $\mathcal{A}$, le morphisme*

$$F(\mathcal{A}) \oplus F(\mathcal{A}) \xrightarrow{[F(i_1)\,,\,F(i_2)]} F(\,T(\mathcal{A}))$$

est un isomorphisme dans C*.*

4) *Pout toute dg-catégorie prétriangulée $\mathcal{A}$ munie de sous-dg-catégories pleines prétriangulées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui donnent lieu à une décomposition semi-orthogonale $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}) = (\mathrm{H}^0(\mathcal{B}), \mathrm{H}^0(\mathcal{C}))$, voir [BLL04], le morphisme*

$$F(\mathcal{B}) \oplus F(\mathcal{C}) \to F(\mathcal{A})$$

induit par les inclusions est un isomorphisme dans C*.*

Remarque 2.44. Toute équivalence dérivée, voir [Ric89] [H$\ddot{0}$7], donne un isomorphisme dans Hmo et donc dans Hmo_0. Cependant, il existe d'autres isomorphismes dans Hmo_0 : si k est un corps algébriquement clos et A un k-algèbre (ordinaire) de dimension finie sur k et de dimension globale finie, alors A est isomorphe à son plus grand quotient semisimple $A/\mathrm{rad}(A)$ dans Hmo_0 (voir [Kel98, 2.5]), mais dans Hmo, A est isomorphe à $A/\mathrm{rad}(A)$ seulement si A est semisimple.

2.6.1 Homologies de Hochschild, Cyclique, Negative, . . .

On note $\mathcal{D}$Mix la catégorie dérivée de la catégorie des complexes mixtes sur k, voir [Kel99]. Soit

$$M : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathcal{D}\mathrm{Mix}$$

le foncteur qui, à une petite dg-catégorie $\mathcal{C}$, associe son complexe mixte $M(\mathcal{C})$, vu comme un objet dans $\mathcal{D}$Mix, voir [Kel99]. D'après [Kas87], l'homologie cyclique de $\mathcal{C}$ est l'homologie cyclique du complexe mixte $M(\mathcal{C})$ et de même pour les autres variantes de la théorie (Hochschild, périodique, negative, . . .). Comme dans [Kel98], on montre que le foncteur M descend à un foncteur défini dans la localisée Hmo et que celui-ci satisfait les conditions du théorème 2.43. Il se factorise donc par le foncteur $\mathcal{U}_a : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathsf{Hmo}_0$ et donne lieu à un foncteur additif

$$M : \mathsf{Hmo}_0 \to \mathcal{D}\mathrm{Mix}\,.$$

2.6.2 K-théorie algébrique

On note $\mathsf{Ho}(\mathsf{Spt})$ la catégorie homotopique des spectres, voir [HSS00]. Soit

$$K : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathsf{Ho}(\mathsf{Spt})$$

le foncteur qui, à une petite dg-catégorie $\mathcal{C}$, associe le spectre de K-théorie de Waldhausen [Wal85] associé à la catégorie des dg-modules cofibrants et parfaits dont les cofibrations sont les monomorphismes et les équivalences faibles les quasi-isomorphismes, voir [DS04]. Comme il a été montré dans [DS04], les résultats de [Wal85] impliquent que le foncteur K rend inversibles les dg-foncteurs de Morita et descend donc en un foncteur $\mathsf{Hmo} \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Spt})$. Le théorème d'additivité de Waldhausen [Wal85, 1.4] montre que ce foncteur vérifie la condition 3) du théorème 2.43. Il induit donc un foncteur additif

$$K : \mathsf{Hmo}_0 \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Spt})\,.$$

2.6.3 Vision globale

On dispose donc du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{dgcat} \arrow[d] \arrow[ddddrr, bend left, "K"] & & \\
\mathsf{Heq} \arrow[d, "can_1"] \arrow[dd, bend right, "can_2"'] & & \\
\mathsf{Hec} \arrow[d] \arrow[dr, "add_1"] & & \\
\mathsf{Hmo} \arrow[dr, "add_2"'] & \mathsf{Hec}_0 \arrow[d] & \\
& \mathsf{Hmo}_0 \arrow[r, dotted, "K"] & \mathsf{Ho}(\mathsf{Spt})\,.
\end{tikzcd}$$

2.6.4 Charactère de Chern

On note $\mathrm{K}_0(\mathcal{C})$ le groupe de Grothendieck d'une dg-catégorie $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le groupe de Grothendieck de la catégorie des objets compacts dans $\mathcal{D}(\mathcal{C})$. Soit $\mathcal{A}$ la dg-catégorie avec un seul objet 3 et telle que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(3,3) = k$.

Lemme 2.45. *On a un isomorphisme naturel de groupes abeliens*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}_0}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{C})\,.$$

Démonstration. En effet le groupe abelien $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Hmo}_0}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est par définition égal à $\mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{C}))$. On sait que la catégorie $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ s'identifie à $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\mathcal{C}_{fib})$, où $\mathcal{C}_{fib}$ est un remplacement Morita fibrant de la dg-catégorie $\mathcal{C}$. On remarque que la catégorie $\mathsf{rep}(\mathcal{A},\mathcal{C}_{fib})$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ formée des objets compacts. $\square$

Soit $F : \mathsf{Hmo}_0 \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ un foncteur. Le lemme de Yoneda et le lemme précédent impliquent le lemme suivant.

Lemme 2.46. *On a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Nat}(K_0, F) \xrightarrow{\sim} F(\mathcal{A}) \,,$$

où $\mathrm{Nat}(K_0, F)$ *désigne le groupe abélien des transformations naturelles de* K_0 *vers* F*.*

A titre d'exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{HC}_n(\mathcal{C})$ le n-ième groupe d'homologie cyclique. On sait déjà que le foncteur

$$\mathrm{HC}_n : \mathsf{dgcat} \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$$

se factorise par $\mathsf{dgcat} \to \mathsf{Hmo}_0$. A partir de l'isomorphisme

$$\mathrm{HC}_*(k) \simeq k\,[u]\,,\ |u| = 2\,,$$

le lemme nous fournit les caractères de Chern

$$ch_{2n} : \mathrm{K}_0 \to \mathrm{HC}_{2n}\,.$$

2.7 DG-catégories compactes et lisses

Remarque 2.47. On observe facilement que la catégorie aditive $(\mathsf{Hec}_0, \oplus)$ possède des sommes infinies. Cela implique que son groupe de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathsf{Hec}_0, \oplus)$ est nul.

Suivant [Kon04], une dg-catégorie $\mathcal{A}$ est *compacte* si

1) son ensemble d'objets est fini et

2) pour tous objets X et Y dans $\mathcal{A}$, le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un objet parfait dans la catégorie dérivée des k-modules.

La condition 2) correspond à la notion de perfection locale définie dans [TV, 2.4]. La dg-catégorie $\mathcal{A}$ est *lisse* si le $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-bimodule associé à l'identité de $\mathcal{A}$, qu'on note ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}_{\mathcal{A}}$, voir remarque 2.23, est un objet compact dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$. On note Hec_0^{cl} la sous-catégorie pleine de Hec_0 dont les objets sont les dg-catégories compactes et lisses.

Lemme 2.48. *La catégorie* Hec_0^{cl} *est une sous-catégorie additive monoïdale de* Hec_0*.*

Démonstration. Pour des dg-catégories compactes et lisses $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on remarque que

$$\mathcal{D}((\mathcal{A} \amalg \mathcal{B})^{op} \otimes (\mathcal{A} \amalg \mathcal{B})) \backsimeq \mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A}) \times \mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B}) \times \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op} \otimes \mathcal{A}) \times \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op} \otimes \mathcal{B})\,.$$

Puisque le bimodule ${}_{\mathcal{A}\amalg\mathcal{B}}\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}_{\mathcal{A}\amalg\mathcal{B}}$ s'identifie à ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}_{\mathcal{A}} \times 0 \times 0 \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_{\mathcal{B}}$, il est compact. Clairement, $\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}$ est encore compacte. Le fait que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ soit lisse résulte de l'isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^{op}\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, ?) \backsimeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{op}\otimes\mathcal{B}}(\mathcal{B}, ?))\,.$$

La dg-catégorie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est encore compacte une fois que les objets parfaits dans la catégorie dérivée des k-modules sont stables par $\otimes$. $\square$

On note $\mathrm{HH}(\mathcal{A})$ le complexe de Hochschild d'une dg-catégorie $\mathcal{A}$, considéré comme un objet dans $\mathcal{D}(k)$. On dispose donc d'un foncteur additif

$$\mathrm{HH} : \mathsf{Hec}_0 \longrightarrow \mathcal{D}(k)\,.$$

En outre, si la dg-catégorie $\mathcal{A}$ est compacte et lisse, alors $\mathrm{HH}(\mathcal{A})$ est un complexe parfait sur k. On dispose du diagramme :

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{Hec}_0, \oplus) \arrow[r, "\mathrm{HH}"] & \mathcal{D}(k) \\ (\mathsf{Hec}_0^{cl}, \oplus) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{HH}"] & \mathrm{per}(k) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{per}(k)$ désigne la plus petite catégorie triangulée de $\mathcal{D}(k)$ qui contient k et est stable par facteurs directs. En applicant le foncteur K_0 on obtient

$$\mathrm{K}_0(\mathsf{Hec}_0^{cl}, \oplus) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\mathrm{HH})} \mathrm{K}_0(\mathrm{per}(k))\,.$$

En particulier, ces anneaux commutatifs, avec la structure multiplicative induite par le produit tensoriel, sont non nuls.

Soit $\mathcal{PT}$ le groupe de Grothendieck défini dans [BLL04]. Rappelons que les auteurs de [BK90], [BLL04] appelent *prétriangulées* les petites dg-catégories $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{pre-tr}(\mathcal{A})$ est une quasi-équivalence (c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est fibrante pour la structure de catégorie de modèles de Quillen quasi-équiconique décrite dans le théorème 2.2). Le groupe $\mathcal{PT}$ est par définition le groupe abélien engendré par les classes de quasi-équivalence $[\mathcal{A}]$ de petites dg-catégories prétriangulées soumises aux relations qui proviennent des décompositions semi-orthogonales.

L'argument de la remarque 2.47 montre qu'en fait le groupe $\mathcal{PT}$ s'annule. Pour obtenir un groupe non nul, il convient d'imposer des conditions de finitude : soit $\mathcal{PT}^{cl}$ le groupe abélien engendré par les classes de quasi-équivalences $[\mathcal{A}]$ de petites dg-catégories $\mathcal{A}$ compactes, lisses et prétriangulées soumises aux relations qui proviennent des décompositions semi-orthogonales. Le produit tensoriel munit $\mathcal{PT}^{cl}$ d'une structure d'anneau commutatif.

Par exemple, si X est une variété projective lisse, alors la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\mathsf{coh}X)$ est équivalent à $\mathrm{H}^0(\mathcal{D}^b(\mathsf{coh}X)_{dg})$ pour une dg-catégorie compacte, lisse, prétriangulée $\mathcal{D}^b(\mathsf{coh}X)_{dg}$ canonique à isomorphisme près dans Hmo. Par exemple, pour $\mathcal{D}^b(\mathsf{coh}X)_{dg}$, on peut prendre la dg-catégorie des complexes bornés à gauche de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs dont l'homologie est bornée et cohérente.

Proposition 2.49. *On a un morphisme surjectif d'anneaux commutatifs*

$$\mathcal{PT}^{cl} \to K_0(\mathsf{Hec}_0^{cl}, \oplus)\,.$$

Démonstration. On note $[\mathcal{A}]$ la classe de quasi-équivalence d'une dg-catégorie compacte, lisse et prétriangulée et $[[\mathcal{A}]]$ la classe d'isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans Hec_0^{cl}. On considère l'application qui, à $[\mathcal{A}]$, associe $[[\mathcal{A}]]$. Elle est clairement bien définie. Pour qu'elle induise un morphisme de $\mathcal{PT}^{cl}$ vers $\mathrm{K}_0(\mathsf{Hec}_0^{cl}, \oplus)$, il reste à verifier l'égalité

$$[[\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}]] = [[\mathcal{A}]]\ ,$$

pour toutes dg-catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui satisfont les relations dans la définition de $\mathcal{PT}^{cl}$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[d, hook, "inc"] \\ \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \text{pre-tr}(\mathcal{B} \coprod \mathcal{C}) \arrow[r, "pre-tr(\lbrack inc(\mathcal{B})\ inc(\mathcal{C})\rbrack)"] & \text{pre-tr}(\mathcal{A})\,. \end{tikzcd}$$

Le dg-foncteur inc est une quasi-équivalence et il reste à montrer que l'image du dg-foncteur $\text{pre-tr}([inc(\mathcal{B})\ inc(\mathcal{C})])$ dans Hec_0^{cl} est un isomorphisme. Par le lemme de Yoneda, il s'agit de montrer que, pour toute dg-catégorie $\mathcal{U}$, l'application

$$\mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U}, \text{pre-tr}(\mathcal{B} \amalg \mathcal{C}))) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U}, \text{pre-tr}(\mathcal{A})))$$

est bijective. En effet, la décomposition semi-orthogonale $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}) = (\mathrm{H}^0(\mathcal{B}), \mathrm{H}^0(\mathcal{C}))$, induit une décomposition semi-orthogonale

$$\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U}, \text{pre-tr}(\mathcal{A})) = (\mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U}, \text{pre-tr}(\mathcal{B})), \mathsf{rep}_{ec}(\mathcal{U}, \text{pre-tr}(\mathcal{C}))) \, .$$

La surjectivité du morphisme $\mathcal{PT}^{cl} \to \mathrm{K}_0(\mathsf{Hec}_0^{cl}, \oplus)$ est claire par construction. □

Remarque 2.50. En particulier, la proposition 2.49 montre que $\mathcal{PT}^{cl}$ est non nul. Si on définit $\mathcal{PT}^{cl}_{kar}$ de façon analogue à partir des dg-catégories compactes, lisses, prétriangulées $\mathcal{A}$ telles que $\mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ est Karoubienne, on obtient la surjection

$$\mathcal{PT}^{cl}_{kar} \to \mathrm{K}_0(\mathsf{Hmo}_0^{cl})$$

mentionnée dans l'introduction.

Chapter 3

Higher K-theory via universal invariants

Ce chapitre correspond au article [Taba].

3.1 Introduction

Differential graded categories (=dg categories) enhance our understanding of triangulated categories appearing in algebra and geometry, see [Kel06b].

They are considered as non-commutative schemes by Drinfeld [Dri04] [Dri02] and Kontsevich [Kon04] [Kon98] in their program of non-commutative algebraic geometry, i.e. the study of dg categories and their homological invariants.

In this article, using the formalism of Grothendieck's derivators, we construct 'the universal localizing invariant of dg categories' *cf.* [Kel02]. By this, we mean a morphism $\mathcal{U}_l$ from the pointed derivator $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ associated with the Morita homotopy theory of dg categories, see [Tab05b] [Tab05a] [Tab06], to a triangulated strong derivator $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$ such that $\mathcal{U}_l$ commutes with filtered homotopy colimits, preserves the point, sends each exact sequence of dg categories to a triangle and is universal for these properties. Because of its universality property reminiscent of motives, *cf.* section 4.1 of [Kon], we call $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$ the (stable) *localizing motivator* of dg categories.

Similary, we construct 'the universal additive invariant of dg categories', i.e. the universal morphism of derivators $\mathcal{U}_a$ from $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})$ to a strong triangulated derivator $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ which satisfies the first two properties but the third one only for split exact sequences. We call $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ the *additive motivator* of dg categories.

We prove that Waldhausen K-theory spectrum appears as a spectrum of morphisms in the base category $\mathcal{M}_{dg}^{add}(e)$ of the additive motivator. To the best of the author's knowledge, this is the first conceptual characterization of Quillen-Waldhausen K-theory [Qui67] [Wal85].

The co-representation of K-theory as a spectrum of morphisms extends our results in [Tab05a] [Tab06], where we co-represented K_0 using functors with values in *additive categories* rather than morphisms of derivators with values in strong *triangulated derivators*.

For example, the mixed complex construction [Kel99], from which all variants of cyclic homology are deduced, and the non-connective algebraic K-theory [Sch06] are localizing invariants and factor through $\mathcal{U}_l$ and through $\mathcal{U}_a$. The connective K-theory [Wal85] is an example of an additive invariant which is not a localizing one. We prove that it becomes co-representable in $\mathcal{M}_{dg}^{add}$, see theorem 3.91.

Our construction is similar in spirit to those of Meyer-Nest [MN06], Cortiñas-Thom [CnT] and Garkusha [Gar]. It splits into several general steps and also offers some insight into the relationship between the theory of derivators [Hel97] [Gro90] [Kel91] [Mal01] [CN] and the classical theory of Quillen model categories [Qui67]. Derivators allow us to state and prove precise universal properties and to dispense with many of the technical problems one faces in using model categories.

In chapter 3.2 we point out the connection between the notions of Grothendieck derivator and that of small homotopy theory in the sense of Heller [Hel97]. In chapter 3.3, we recall Cisinski's theory of derived Kan extensions [Cisc] and in chapter 3.4, we develop his ideas on the Bousfield localization of derivators [Cisb]. In particular, we characterize the derivator associated with a left Bousfield localization of a Quillen model category by a universal property, see theorem 3.8. This is based on a constructive description of the local weak equivalences.

In chapter 3.5, starting from a Quillen model category $\mathcal{M}$ satisfying some compactness conditions, we construct a morphism of prederivators

$$\mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}} \mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$$

which commutes with filtered homotopy colimits, has a derivator as target and is universal for these properties. In chapter 3.6 we study morphisms of pointed derivators and in chapter 3.7 we prove a general result which garantees that small weak generators are preserved under left Bousfield localizations. In chapter 3.8, we recall Heller's stabilization construction [Hel97] and we prove that this construction takes 'finitely generated' unstable theories to compactly generated stable ones. We establish the connection between Heller's stabilization and Hovey/Schwede's stabilization [Hov01] [Sch97] by proving that if we start with a pointed Quillen model category which satisfies some mild 'generation' hypotheses, then the two stabilization procedures yield equivalent results. This allows us to characterize Hovey/Schwede's construction by a universal property and in particular to give a very simple characterisation of the classical category of spectra in the sense of Bousfield-Friedlander [BF78]. In chapter 3.9, by applying the general arguments of the previous chapters to the Morita homotopy theory of dg categories [Tab05b] [Tab05a] [Tab06], we construct the universal morphism of derivators

$$\mathcal{U}_t : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})$$

which commutes with filtered homotopy colimits, preserves the point and has a strong triangulated derivator as target. For every inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ of a full dg subcategory, we have an induced morphism

$$S_K : \mathsf{cone}(\mathcal{U}_t(\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{U}_t(\mathcal{B}/\mathcal{A}) ,$$

where $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ denotes Drinfeld's dg quotient. By applying the localization techniques of section 3.4 and using the fact that the derivator $\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})$ admits a stable Quillen model, we inverse the morphisms S_K and finally obtain the universal derived invariant of dg categories

$$\mathcal{U}_l : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathcal{M}_{dg}^{loc} .$$

We establish a connection between the triangulated category $\mathcal{M}_{dg}^{loc}(e)$ and Waldhausen's K-theory by showing that Waldhausen's $S_\bullet$-construction corresponds to the suspension functor in $\mathcal{M}_{dg}^{loc}(e)$. In section 3.11, we prove that the derivator $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$ admits a stable Quillen model given by a left Bousfield localization of a category of presheaves of spectra. In section 3.12, we introduce the concept of upper triangular dg category and construct a Quillen model structure on this class of dg categories, which satisfies strong compactness conditions. In section 3.13, we establish the connection between upper triangular dg categories and split short exact sequences and use the Quillen model structure of section 3.12 to prove an 'approximation result', see proposition 3.69. In section 3.14, by applying the techniques of section 3.4, we construct the universal morphism of derivators

$$\mathcal{U}_u : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathcal{M}_{dg}^{unst}$$

which commutes with filtered homotopy colimits, preserves the point and sends each split short exact sequence to a homotopy cofiber sequence. We prove that Waldhausen's K-theory space construction appears as a fibrant object, which allows us to obtain the weak equivalence

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})[1]) \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet \mathcal{A}_f| \,.$$

in $\mathcal{M}_{dg}^{unst}$, see proposition 3.78. This implies the isomorphisms

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})[1]) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathcal{A}),\ \forall i \geqslant 0\,.$$

In section 3.15 we stabilize the derivator $\mathcal{M}_{dg}^{unst}$, using the fact that it admits a Quillen model, and finally obtain the universal additive invariant of dg categories

$$\mathcal{U}_a : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathcal{M}_{dg}^{add}\,.$$

Connective algebraic K-theory is additive and so factors through $\mathcal{U}_a$. We prove that it corresponds to a fibrant resolution of $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1]$, see theorem 3.90. Using the fact that the Quillen model for $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ is enriched over spectra, we prove the main co-representability theorem.

Theorem (3.91)**.** We have the following weak equivalence of spectra

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,,$$

where $K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ denotes Waldhausen's connective K-theory spectrum of $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

In particular, we have the following weak equivalence of simplicial sets

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})|$$

and so the isomorphisms

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(A), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})),\ \ \forall i \geqslant 0\,.$$

Remark that if in the above theorem, we consider $\mathcal{A} = k$, we have

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(k), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathcal{B})\,.$$

This shows that Waldhausen's connective K-theory spectrum becomes co-representable in $\mathcal{M}_{dg}^{add}$.

In section 3.16, we point out some questions that deserve further investigation.

3.2 Preliminaries

Our reference for the language of derivators is [CN]. The derivators in this article are always considered over the category *cat* of small categories. Let $\mathbb{D}$ and $\mathbb{D}'$ be derivators. We denote by $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ the category of all morphisms of derivators, by $\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ the category of morphisms of derivators which commute with homotopy colimits and by $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ the category of morphisms of derivators which commute with filtered homotopy colimits. We denote the terminal category by e and by $i : \ulcorner \to \square$ the inclusion of categories

$$\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1)\,. \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Associated with a small category L and a point $x : e \to L$ in L we have the following adjunction:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(L) \arrow[d, shift left, "x^*"] \\ \mathbb{D}(e) \arrow[u, shift left, "x_!"] \end{tikzcd} .$$

Definition 3.1. A derivator $\mathbb{D}$ is *strong* if for every finite free category A and every small category B, the natural functor

$$\mathbb{D}(A \times B) \longrightarrow \mathsf{Fun}(A^o, \mathbb{D}(B))$$

is full and essentially surjective.

Notice that a strong derivator is the same thing as a small homotopy theory as defined in [Hel97].

Definition 3.2. A derivator $\mathbb{D}$ is *regular* if in $\mathbb{D}$, sequential homotopy colimits commute with finite products and homotopy pullbacks.

Let $\mathcal{M}$ be a Quillen model category. By [Cis03], it is known that $\mathcal{M}$ gives rise to a derivator which we denote by $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$. Observe that proposition 2.15 in [Cisa] implies that $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$ is a strong derivator.

We denote by $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ the homotopy category of $\mathcal{M}$. By definition, it equals $\mathsf{HO}(\mathcal{M})(e)$.

Finally, for a small category A, we denote by $\underline{A}$ the pre-derivator naturally associated to A.

3.3 Derived Kan extensions

Let A be a small category and $\mathsf{Fun}(A^o, Sset)$ the Quillen model category of simplicial pre-sheaves on A, endowed with the projective model structure, see [TV05]. We have at our disposal the functor

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & \mathsf{Fun}(A^o, Sset) \\ X & \longmapsto & \mathsf{Hom}_A(?, X)\,, \end{array}$$

where $\mathsf{Hom}_A(?, X)$ is considered as a constant simplicial set.

The functor h gives rise to a morphism of pre-derivators

$$\underline{A} \xrightarrow{h} \mathsf{HO}(\mathsf{Fun}(A^o, Sset))\,.$$

Using the notation of [Cisc], we denote by Hot_A the derivator $\mathsf{HO}(\mathsf{Fun}(A^o, Sset))$. The following results are proven in [Cisc].

Let $\mathbb{D}$ be a derivator.

Theorem 3.3. *The morphism h induces an equivalence of categories*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(\underline{A}, \mathbb{D}) \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\ \underline{\mathsf{Hom}_!}(\mathsf{Hot}_A, \mathbb{D}) \arrow[u, shift right, "h^*"'] \end{tikzcd} .$$

Proof. This theorem is equivalent to corollary 3.26 in [Cisc], since we have

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{A}, \mathbb{D}) \simeq \mathbb{D}(A^o)\,.$$

$\square$

Lemma 3.4. *We have an adjunction*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Hot}_A, \mathbb{D}) \arrow[d, shift left, "\Psi"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{Hot}_A, \mathbb{D}) \arrow[u, hook, shift left, "inc"] \end{tikzcd}$$

where

$$\Psi(F) := \varphi(F \circ h)\,.$$

Proof. We construct a universal 2-morphism of functors

$$\epsilon :\, inc \circ \Psi \longrightarrow Id\,.$$

Let F be a morphism of derivators belonging to $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{Hot}_A, \mathbb{D})$. Let L be a small category and X an object of $\mathsf{Hot}_A(L)$. Recall from [Cisc] that we have the diagram

$$\begin{tikzcd} & \nabla \int X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varpi"] & \\ L^{op} & & A\,. \end{tikzcd}$$

Now, let p be the functor π^{op} and q the functor ϖ^{op}. By the dual of proposition 1.15 in [Cisc], we have the following functorial isomorphism

$$p_! q^*(h) \xrightarrow{\sim} X\,.$$

Now let $\epsilon_L(X)$ be the composed morphism.

$$\epsilon_L(X) :\, \Psi(F)(X) = p_! q^* F(h) = p_! F(q^* h) \to F(p_! q^* h) \xrightarrow{\sim} F(X)\,.$$

Now, notice using theorem 3.3 that ϵ induces an adjunction. □

3.4 Localization: model categories versus derivators

Let $\mathcal{M}$ be a left proper, cellular Quillen model category, see [Hir03].

We fix a frame on $\mathcal{M}$, see definition 16.6.21 in [Hir03]. Let D be a small category and F a functor from D to $\mathcal{M}$. We denote by $\operatorname{hocolim} F$ the object of $\mathcal{M}$, as in definition 19.1.2 of [Hir03]. Let S be a set of morphisms in $\mathcal{M}$ and denote by $\mathsf{L}_S\mathcal{M}$ the left Bousfield localization of $\mathcal{M}$ by S.

Notice that the Quillen adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, shift right, "Id"'] \\ \mathsf{L}_S\mathcal{M}\,, \arrow[u, shift right, "Id"'] \end{tikzcd}$$

induces a morphism of derivators

$$\gamma : \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{L}Id} \mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M})$$

which commutes with homotopy colimits.

Proposition 3.5. *Let $\mathcal{W}_S$ be the smallest class of morphisms in $\mathcal{M}$ satisfying the following properties:*

a) Every element in S belongs to $\mathcal{W}_S$.

b) Every weak equivalence of $\mathcal{M}$ belongs to $\mathcal{W}_S$.

c) If in a commutative triangle, two out of three morphisms belong to $\mathcal{W}_S$, then so does the third one. The class $\mathcal{W}_S$ is stable under retractions.

d) Let D be a small category and F and G functors from D to $\mathcal{M}$. If η is a morphism of functors from F to G such that for every object d in D, $F(d)$ and $G(d)$ are cofibrant objects and the morphism $\eta(d)$ belongs to $\mathcal{W}_S$, then so does the morphism

$$\mathit{hocolim}\, F \longrightarrow \mathit{hocolim}\, G\,.$$

Then the class $\mathcal{W}_S$ equals the class of S-local equivalences in $\mathcal{M}$, see [Hir03].

Proof. The class of S-local equivalences satisfies properties a), b), c) and d): Properties a) and b) are satisfied by definition, proposition 3.2.3 and 3.2.4 in [Hir03] imply property c) and proposition 3.2.5 in [Hir03] implies property d).

Let us now show that conversely, each S-local equivalence is in $\mathcal{W}_S$. Let

$$X \overset{g}{\to} Y$$

be an S-local equivalence in $\mathcal{M}$. Without loss of generality, we can suppose that X is cofibrant. Indeed, let $Q(X)$ be a cofibrant resolution of X and consider the diagram

$$\begin{tikzcd} Q(X) \arrow[d, "\pi"', "\sim"] \arrow[dr, "g\circ\pi"] & \\ X \arrow[r, "g"'] & Y\,. \end{tikzcd}$$

Notice that since π is a weak equivalence, g is an S-local equivalence if and only if $g \circ \pi$ is one.

By theorem 4.3.6 in [Hir03], g is an S-local equivalence if and only if the morphism $\mathsf{L}_S(g)$ appering in the diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j(X)"'] & Y \arrow[d, "j(Y)"] \\ \mathsf{L}_S X \arrow[r, "\mathsf{L}_S(g)"'] & \mathsf{L}_S Y \end{tikzcd}$$

is a weak equivalence in $\mathcal{M}$. This shows that it is enough to prove that $j(X)$ and $j(Y)$ belong to $\mathcal{W}_S$. Apply the small object argument to the morphism

$$X \longrightarrow *$$

using the set $\widetilde{\Lambda(S)}$, see proposition 4.2.5 in [Hir03]. We have the factorization

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "j(X)"'] & & * \\ & \mathsf{L}_S(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd} ,$$

where $j(X)$ is a relative $\widetilde{\Lambda(S)}$-cell complex.

We will now prove two stability conditions concerning the class $\mathcal{W}_S$.

S1) Consider the following push-out

$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[r] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & W_2 \arrow[d, "f_*"] \\ W_1 \arrow[r] & W_3\,, \end{tikzcd}$$

where W_0, W_1 and W_2 are cofibrant objects in $\mathcal{M}$ and f is a cofibration which belongs to $\mathcal{W}_S$. Observe that f_* corresponds to the colimit of the morphism of diagrams

$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "f"'] & W_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & W_2 \arrow[d, equal] \\ W_1 & W_0 \arrow[l, tail, "f"] \arrow[r] & W_2\,. \end{tikzcd}$$

Now, proposition 19.9.4 in [Hir03] and property $d)$ imply that f_* belongs to $\mathcal{W}_S$.

S2) Consider the following diagram

$$\mathbf{X} : X_0 \overset{f_0}{\rightarrowtail} X_1 \overset{f_1}{\rightarrowtail} X_2 \overset{f_2}{\rightarrowtail} X_3 \rightarrowtail \cdots$$

in $\mathcal{M}$, where the objects are cofibrant and the morphisms are cofibrations which belong to the class $\mathcal{W}_S$. Observe that the transfinite composition of X corresponds to the colimit of the morphism of diagrams

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "f_0"] & X_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "f_1 \circ f_0"] & \cdots \\ X_0 \arrow[r, tail, "f_0"'] & X_1 \arrow[r, tail, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, tail] & \cdots\,. \end{tikzcd}$$

Now, since $\mathbf{X}$ is a Reedy cofibrant diagram on a category with fibrant constants, see definition 15.10.1 in [Hir03], theorem 19.9.1 from [Hir03] and property $d)$ imply that the transfinite composition of $\mathbf{X}$ belongs to $\mathcal{W}_S$. Notice that the above argument can be immediatly generalized to a transfinite composition of a λ-sequence, where λ denotes an ordinal, see section 10.2 in [Hir03].

Now, the construction of the morphism $j(X)$ and the stability conditions $S1)$ and $S2)$ show us that it is enough to prove that the elements of $\widetilde{\Lambda(S)}$ belong to $\mathcal{W}_S$. By proposition 4.2.5 in [Hir03], it is sufficient to show that the set

$$\Lambda(S) = \{\tilde{\mathbf{A}} \otimes \Delta[n] \coprod_{\tilde{\mathbf{A}} \otimes \partial\Delta[n]} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n] \overset{\Lambda(g)}{\longrightarrow} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n] \,|\, (A \overset{g}{\to} B) \in S,\, n \geqslant 0\}\,,$$

of horns in S is contained in $\mathcal{W}_S$. Recall from definition 4.2.1 in [Hir03] that $\tilde{g} : \tilde{\mathbf{A}} \to \tilde{\mathbf{B}}$ denotes a cosimplicial resolution of $g : A \to B$ and $\tilde{g}$ is a Reedy cofibration. We have the diagram

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbf{A}} \otimes \partial\Delta[n] \arrow[r, "\tilde{g}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes i"'] & \tilde{\mathbf{B}} \otimes \partial\Delta[n] \arrow[d, "1\otimes i"] \\ \tilde{\mathbf{A}} \otimes \Delta[n] \arrow[r, "\tilde{g}\otimes 1"'] & \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n]\,. \end{tikzcd}$$

Observe that the morphism

$$\tilde{\mathbf{A}} \otimes \Delta[n] \xrightarrow{\tilde{g}\otimes 1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n]$$

identifies with

$$\tilde{\mathbf{A}}^n \xrightarrow{\tilde{g}^n} \tilde{\mathbf{B}}^n \,,$$

and so belongs to $\mathcal{W}_S$. Now, the morphism

$$\tilde{\mathbf{A}} \otimes \partial\Delta[n] \xrightarrow{\tilde{g}\otimes 1_{\partial\Delta[n]}} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \partial\Delta[n]$$

corresponds to the induced map of latching objects

$$\mathsf{L}_n\tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathsf{L}_n\tilde{\mathbf{B}} \,,$$

which is a cofibration in $\mathcal{M}$ by proposition 15.3.11 in [Hir03].

Now by propositions 15.10.4, 16.3.12 and theorem 19.9.1 of [Hir03], we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\underset{\partial(\overrightarrow{\Delta}\downarrow[n])}{\operatorname{hocolim}} \tilde{\mathbf{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \underset{\partial(\overrightarrow{\Delta}\downarrow[n])}{\operatorname{hocolim}} \tilde{\mathbf{B}} \arrow[d, "\sim"] \\
\mathsf{L}_n\tilde{\mathbf{A}} \arrow[r] & \mathsf{L}_n\tilde{\mathbf{B}} \,,
\end{tikzcd}$$

where the vertival arrows are weak equivalences and $\partial(\overrightarrow{\Delta}\downarrow [n])$ denotes the category of strictly increasing maps with target $[n]$. By property $d)$ of the class $\mathcal{W}_S$, we conclude that $\tilde{g} \otimes 1_{\partial\Delta[n]}$ belongs to $\mathcal{W}_S$.

We have the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{A}} \otimes \Delta[n] \underset{\tilde{\mathbf{A}}\otimes\partial\Delta[n]}{\amalg} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n] \arrow[dr, "\Lambda(g)"] & \\
\tilde{\mathbf{A}} \otimes \Delta[n] \arrow[u, "I"] \arrow[r, "\tilde{g}\otimes 1"'] & \tilde{\mathbf{B}} \otimes \Delta[n] \,.
\end{tikzcd}$$

Notice that the morphism I belongs to $\mathcal{W}_S$ by the stability condition $S1)$ applied to the morphism

$$\tilde{\mathbf{A}} \otimes \partial\Delta[n] \xrightarrow{\tilde{g}\otimes 1} \tilde{\mathbf{B}} \otimes \partial\Delta[n] \,,$$

which is a cofibration and belongs to $\mathcal{W}_S$. Since the morphism $\tilde{g} \otimes 1$ belongs to $\mathcal{W}_S$ so does $\Lambda(g)$.

This proves the proposition. □

Let $\mathbb{D}$ be derivator and S a class of morphisms in $\mathbb{D}(e)$.

Definition 3.6 (Cisinski [Cisb])**.** The derivator $\mathbb{D}$ admits a *left Bousfield localization* by S if there exists a morphism of derivators

$$\gamma : \mathbb{D} \to \mathsf{L}_S\mathbb{D} \,,$$

which commutes with homotopy colimits, sends the elements of S to isomorphisms in $\mathsf{L}_S\mathbb{D}(e)$ and satisfies the universal property: for every derivator $\mathbb{D}'$ the morphism γ induces an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_S\mathbb{D}, \mathbb{D}') \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}') \,,$$

where $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ denotes the category of morphisms of derivators which commute with homotopy colimits and send the elements of S to isomorphisms in $\mathbb{D}'(e)$.

Lemma 3.7. *Suppose that $\mathbb{D}$ is a triangulated derivator, S is stable under the loop space functor $\Omega(e) : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(e)$, see [CN], and $\mathbb{D}$ admits a left Bousfield localization $\mathsf{L}_S\mathbb{D}$ by S.*

Then $\mathsf{L}_S\mathbb{D}$ is also a triangulated derivator.

Proof. Recall from [CN] that since $\mathbb{D}$ is a triangulated derivator, we have the following equivalence

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[d, shift left, "\Omega"] \\ \mathbb{D} \arrow[u, shift left, "\Sigma"] \end{tikzcd} .$$

Notice that both morphisms of derivators, Σ and Ω, commute with homotopy colimits. Since S is stable under the functor $\Omega(e) : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(e)$ and $\mathbb{D}$ admits a left Bousfield localization $\mathsf{L}_S\mathbb{D}$ by S, we have an induced morphism

$$\Omega : \mathsf{L}_S\mathbb{D} \to \mathsf{L}_S\mathbb{D} \,.$$

Let s be an element of S. We now show that the image of s by the functor $\gamma \circ \Sigma$ is an isomorphism in $\mathsf{L}_S\mathbb{D}(e)$. For this consider the category $\ulcorner$, see section 3.2, and the functors

$$(0,0) : e \to \ulcorner \quad \text{and} \quad p : \ulcorner \to e \,.$$

Now recall from section 7 from [Hel97] that

$$\Sigma(e) := p_! \circ (0,0)_* \,.$$

This description show us that the image of s under the functor $\gamma \circ \Sigma$ is an isomorphism in $\mathsf{L}_S\mathbb{D}(e)$ because γ commutes with homotopy colimits. In conclusion, we have an induced adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{L}_S\mathbb{D} \arrow[d, shift left, "\Omega"] \\ \mathsf{L}_S\mathbb{D} \arrow[u, shift left, "\Sigma"] \end{tikzcd}$$

which is clearly an equivalence. This proves the lemma. $\square$

Theorem 3.8 (Cisinski [Cisb])**.** *The morphism of derivators*

$$\gamma : \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{L}Id} \mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M})$$

is a left Bousfield localization of $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$ by the image of the set S in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$.

Proof. Let $\mathbb{D}$ be a derivator.

The morphism γ admits a fully faithful right adjoint

$$\sigma : \mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M}) \longrightarrow \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \,.$$

Therefore, the induced functor

$$\gamma^* : \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M}), \mathbb{D}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D}) \,,$$

admits a left adjoint σ^* and $\sigma^*\gamma^* = (\gamma\sigma)^*$ is isomorphic to the identity. Therefore γ^* is fully faithful. We now show that γ^* is essentially surjective. Let F be an object of $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,S}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$. Notice that since $\mathbb{D}$ satisfies the conservativity axiom, it is sufficient to show that the functor

$$F(e) : \mathsf{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathbb{D}(e)$$

sends the images in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ of the S-local equivalences of $\mathcal{M}$ to isomorphisms in $\mathbb{D}(e)$. The morphism F then becomes naturally a morphism of derivators

$$\overline{F} : \mathsf{HO}(\mathsf{L}_S\mathcal{M}) \to \mathbb{D}$$

such that $\gamma^*(\overline{F}) = F$. Now, since F commutes with homotopy colimits, the functor

$$\mathcal{M} \to \mathsf{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathbb{D}(e)$$

sends the elements of $\mathcal{W}_S$ to isomorphisms. This proves the theorem since by proposition 3.5 the class $\mathcal{W}_S$ equals the class of S-local equivalences in $\mathcal{M}$. □

3.5 Filtered homotopy colimits

Let $\mathcal{M}$ be a cellular Quillen model category, with I the set of generating cofibrations. Suppose that the domains and codomains of the elements of I are cofibrant, $\aleph_0$-compact, $\aleph_0$-small and homotopically finitely presented, see definition 2.1.1 in [TV].

Example 3.9. Consider the Quillen model structures on dgcat constructed in theorems 1.8, 2.2 and 2.27. Recall that a dg functor F from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{E}$ is a quasi-equivalence, resp. quasi-equiconic, resp. a Morita dg functor, if it satisfies one of the following conditions $\mathsf{C}1$) or $\mathsf{C}2$):

C1) The dg category $\mathcal{C}$ is empty and all the objects of $\mathcal{E}$ are contractible.

C2) For every object c_1 and c_2 in $\mathcal{C}$, the morphism of complexes from $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2)$ to $\mathsf{Hom}_{\mathcal{E}}(F(c_1)), F(c_2))$ is a quasi-isomorphism and the functor $\mathsf{H}^0(F)$, resp. $\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(F))$, resp. $\mathsf{H}^0(\text{pre-tr}(F))^{\natural}$, is essentially surjective.

Observe that the domains and codomains of the set I of generating cofibrations in dgcat satisfy the conditions above for all the Quillen model structures.

The following proposition is a simplification of proposition 2.2 in [TV].

Proposition 3.10. *Let $\mathcal{M}$ be a Quillen model category which satisfies the conditions above. Then*

1) A filtered colimit of trivial fibrations is a trivial fibration.

2) For any filtered diagram X_i in $\mathcal{M}$, the natural morphism

$$\underset{i\in I}{\mathsf{hocolim}}\, X_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\mathsf{colim}}\, X_i$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$.

3) Any object X in $\mathcal{M}$ is equivalent to a filtered colimit of strict finite I-cell objects.

4) An object X in $\mathcal{M}$ is homotopically finitely presented if and only if it is equivalent to a rectract of a strict finite I-cell object.

Proof. The proof of 1), 2) and 3) is exactly the same as that of proposition 2.2 in [TV]. The proof of 4) is also the same once we observe that the domains and codomains of the elements of the set I are already homotopically finitely presented by hypothesis. □

In everything that follows, we fix:

- A co-simplicial resolution functor
$$(\Gamma(-) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\Delta}, i)$$
in the model category $\mathcal{M}$, see definition 16.1.8 in [Hir03]. This means that for every object X in $\mathcal{M}$, $\Gamma(X)$ is cofibrant in the Reedy model structure on $\mathcal{M}^{\Delta}$ and
$$i(X) : \Gamma(X) \xrightarrow{\sim} c^*(X)$$
is a weak equivalence on $\mathcal{M}^{\Delta}$, where $c^*(X)$ denotes the constant co-simplicial object associated with X.

- A fibrant resolution functor
$$((-)_f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \epsilon)$$
in the model category $\mathcal{M}$, see [Hir03].

Definition 3.11. Let $\mathcal{M}_f$ be the smallest full subcategory of $\mathcal{M}$ such that

- $\mathcal{M}_f$ contains (a representative of the isomorphism class of) each strictly finite I-cell object of $\mathcal{M}$ and

- the category $\mathcal{M}_f$ is stable under the functors $(-)_f$ and $\Gamma(-)^n$, $n \geqslant 0$.

Remark 3.12. Notice that $\mathcal{M}_f$ is a small category and that every object in $\mathcal{M}_f$ is weakly equivalent to a strict finite I-cell.

We have the inclusion
$$\mathcal{M}_f \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{M}\,.$$

Notation 3.13. Let S be the set of pre-images of the weak equivalences in $\mathcal{M}$ under the functor i.

Lemma 3.14. *The induced functor*
$$\mathcal{M}_f[S^{-1}] \xrightarrow{\mathsf{Ho}(i)} \mathsf{Ho}(\mathcal{M})$$
is fully faithful, where $\mathcal{M}_f[S^{-1}]$ denotes the localization of $\mathcal{M}$ by the set S.

Proof. Let X, Y be objects of $\mathcal{M}_f$. Notice that $(Y)_f$ is a fibrant resolution of Y in $\mathcal{M}$ which belongs to $\mathcal{M}_f$ and
$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X)^0 \coprod \Gamma(X)^0 \arrow[r] \arrow[d, "d^0 \coprod d^1"'] & \Gamma(X)^0 \\
\Gamma(X)^1 \arrow[ur, "s^0"'] &
\end{tikzcd}$$
is a cylinder object for $\Gamma(X)^0$, see proposition 16.1.6. from [Hir03]. Since this cylinder object also belongs to $\mathcal{M}_f$, the localized category $\mathcal{M}_f[S^{-1}]$ can be constructed inside $\mathcal{M}$.

This implies the lemma. □

We denote by $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ the Quillen model category of simplicial pre-sheaves on $\mathcal{M}_f$ endowed with the projective model structure, see section 3.3. Let Σ be the image in $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ by the functor h, see section 3.3, of the set S in $\mathcal{M}_f$. Since the category $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ is cellular and left proper, its left Bousfield localization by the set Σ exists, see [Hir03]. We denote it by $\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$. We have a composed functor that we still denote by h
$$h : \mathcal{M}_f \to \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) \xrightarrow{Id} \mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,.$$

Now, consider the functor

$$\begin{array}{rcl} \underline{h} : \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) \\ X & \longmapsto & \mathsf{Hom}(\Gamma(-), X)_{|\mathcal{M}_f} . \end{array}$$

We also have a composed functor that we still denote by $\underline{h}$

$$\underline{h} : \mathcal{M} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) \stackrel{Id}{\to} \mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) .$$

Now, observe that the natural equivalence

$$i(-) : \Gamma(-) \longrightarrow c^*(-) ,$$

induces, for every object X in $\mathcal{M}_f$, a morphism $\Psi(X)$ in $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$

$$\Psi(X) : \; h(X) = \mathsf{Hom}(c^*(-), X) \longrightarrow \mathsf{Hom}(\Gamma(-), X) =: (\underline{h} \circ i)(X) ,$$

which is functorial in X.

Lemma 3.15. *The functor $\underline{h}$ preserves weak equivalences between fibrant objects.*

Proof. Let X be a fibrant object in $\mathcal{M}$. We have an equivalence

$$\mathsf{Hom}(\Gamma(Y), X) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathsf{Map}_{\mathcal{M}}(Y, X) ,$$

see [Hir03]. This implies the lemma. □

Remark 3.16. The previous lemma implies that the functor $\underline{h}$ admits a right derived functor

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\underline{h} : \mathsf{Ho}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) \\ X & \longmapsto & \mathsf{Hom}(\Gamma(-), X_f)_{|\mathcal{M}_f} . \end{array}$$

Since the functor

$$h : \mathcal{M}_f \to \mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) ,$$

sends, by definition, the elements of S to weak equivalences, we have an induced morphism

$$\mathsf{Ho}(h) : \mathcal{M}_f[S^{-1}] \to \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) .$$

Remark 3.17. Notice that lemma 4.2.2 from [TV05] implies that for every X in $\mathcal{M}_f$, the morphism $\Psi(X)$

$$\Psi(X) : \; \mathsf{Ho}(h)(X) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{h} \circ \mathsf{Ho}(i))(X)$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset))$.

This shows that the functors

$$\mathsf{Ho}(h), \, \mathbb{R}\underline{h} \circ \mathsf{Ho}(I) : \; \mathcal{M}_f[S^{-1}] \to \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$$

are canonically isomorphic and so we have the following diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_f[S^{-1}] \arrow[r, "\mathsf{Ho}(i)"] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{Ho}(\mathcal{M}) , \arrow[dl, "\mathbb{R}\underline{h}"] \\ \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) & \end{tikzcd}$$

which is commutative up to isomorphism.

Lemma 3.18. *The functor $\mathbb{R}\underline{h}$ commutes with filtered homotopy colimits.*

Proof. Let $\{Y_i\}_{i\in I}$ be a filtered diagram in $\mathcal{M}$. We can suppose, without loss of generality, that Y_i is fibrant in $\mathcal{M}$. By proposition 3.10, the natural morphism

$$\underset{i\in I}{\mathrm{hocolim}}\, Y_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ and $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i$ is also fibrant. Since the functor

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) \xrightarrow{\mathbb{L}Id} \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset))\,,$$

commutes with homotopy colimits and in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset))$ they are calculated objectwise, it is sufficient to show that the morphism

$$\underset{i\in I}{\mathrm{hocolim}}\, \mathbb{R}\underline{h}(Y_i)(X) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{h}(\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i)(X)$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(Sset)$, for every object X in $\mathcal{M}_f$. Now, since every object X in $\mathcal{M}_f$ is homotopically finitely presented, see proposition 3.10, we have the following equivalences:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\underline{h}(\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i)(X) & = & \mathsf{Hom}(\Gamma(X), \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i) \\ & \simeq & \mathsf{Map}(\Gamma(X), \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Y_i) \\ & \simeq & \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, \mathsf{Map}(X, Y_i) \\ & \simeq & \underset{i\in I}{\mathrm{hocolim}}\, \mathbb{R}\underline{h}(Y_i)(X) \end{array}$$

This proves the lemma. □

We now denote by $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$ the derivator associated with $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ and by $\underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}]$ the pre-derivator $\underline{\mathcal{M}_f}$ localized at the set S, see [Cisc].

Observe that the morphism of functors

$$\Psi : h \longrightarrow \underline{h} \circ i$$

induces a 2-morphism of derivators

$$\overline{\Psi} :\ \mathsf{Ho}(h) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{h} \circ \mathsf{Ho}(i)\,.$$

Lemma 3.19. *The 2-morphism $\overline{\Psi}$ is an isomorphism.*

Proof. For the terminal category e, the 2-morphism $\overline{\Psi}$ coincides with the morphism of functors of remark 3.17. Since this one is an isomorphism, so is $\overline{\Psi}$ by conservativity. This proves the lemma. □

As before, we have the following diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}] \arrow[r, "\mathsf{Ho}(i)"] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{HO}(\mathcal{M})\,, \arrow[dl, "\mathbb{R}\underline{h}"] \\ \mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f} & \end{tikzcd}$$

which is commutative up to isomorphism in the 2-category of pre-derivators. Notice that by lemma 3.18, $\mathbb{R}\underline{h}$ commutes with filtered homotopy colimits.

Let $\mathbb{D}$ be a derivator.

Lemma 3.20. *The morphism of pre-derivators*

$$\underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}] \stackrel{\mathsf{Ho}(h)}{\longrightarrow} \mathsf{L}_\Sigma \mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}\,,$$

induces an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_\Sigma \mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \stackrel{\mathsf{Ho}(h)^*}{\longrightarrow} \underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}], \mathbb{D})\,.$$

Proof. The category $\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_\Sigma \mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$ is equivalent, by theorem 3.8, to the category $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,\Sigma}(\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$. This last category identifies, under the equivalence

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \to \underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$$

given by theorem 3.3, with the full subcategory of $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$ consisting of the morphisms of pre-derivators which send the elements of S to isomorphisms in $\mathbb{D}(e)$. Now observe that this last category identifies with $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}], \mathbb{D})$, by definition of the localized pre-derivator $\underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}]$. This proves the lemma. ☐

Recall from section 9.5 in [Dug01] that the co-simplicial resolution functor $\Gamma(-)$ that we have fixed in the beginning of this section allows us to construct a Quillen adjunction:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, shift left, "\underline{h}=sing"] \\ \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,. \arrow[u, shift left, "Re"] \end{tikzcd}$$

Since the functor Re sends the elements of Σ to weak equivalences in $\mathcal{M}$, we have the following Quillen adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, shift left, "\underline{h}"] \\ \mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,, \arrow[u, shift left, "Re"] \end{tikzcd}$$

and a natural weak equivalence

$$\eta : Re \circ h \stackrel{\sim}{\longrightarrow} i\,,$$

see [Dug01].

This implies that we have the following diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_f[S^{-1}] \arrow[r, "\mathsf{Ho}(i)"] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{Ho}(\mathcal{M})\,, \arrow[dl, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}"] \\ \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) \arrow[ur, shift left, "\mathbb{L}Re"] & \end{tikzcd}$$

which is commutative up to isomorphism.

We now claim that $\mathbb{L}Re \circ \mathbb{R}\underline{h}$ is naturally isomorphic to the identity. Indeed, by proposition 3.10, each object of $\mathcal{M}$ is isomorphic in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$, to a filtered colimit of strict finite I-cell objects. Since $\mathbb{R}\underline{h}$ and $\mathbb{L}Re$ commute with filtered homotopy colimits and $\mathbb{L}Re \circ \mathsf{Ho}(h) \simeq \mathrm{Id}$, we conclude that $\mathbb{L}Re \circ \mathbb{R}\underline{h}$ is naturally isomorphic to the identity. This implies that the morphism $\mathbb{R}\underline{h}$ is fully faithful.

Now, observe that the natural weak equivalence η induces a 2-isomorphism and so we obtain the following diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{M}_f}[S^{-1}] \arrow[r, "\mathsf{Ho}(i)"] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \arrow[dl, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}"] \, , \\ \mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f} \arrow[ur, shift left, "\mathbb{L}Re"] & \end{tikzcd}$$

which is commutative up to isomorphism in the 2-category of pre-derivators. Notice that $\mathbb{L}Re \circ \mathbb{R}\underline{h}$ is naturally isomorphic to the identity (by conservativity) and so the morphism of derivators $\mathbb{R}\underline{h}$ is fully faithful.

Let $\mathbb{D}$ be a derivator.

Theorem 3.21. *The morphism of derivators*

$$\mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}} \mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}\, ,$$

induces an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})\, ,$$

where $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$ *denotes the category of morphisms of derivators which commute with filtered homotopy colimits.*

Proof. We have the following adjunction

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D}) \arrow[d, shift left, "\mathbb{L}Re^*"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})\, , \arrow[u, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}^*"] \end{tikzcd}$$

with $\mathbb{R}\underline{h}^*$ a fully faithful functor.

Now notice that the adjunction of lemma 3.4 induces naturally an adjunction

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \arrow[d, shift left, "\Psi"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})\, . \arrow[u, hook, shift left] \end{tikzcd}$$

This implies that the composed functor

$$\mathbb{R}\underline{h}^* :\, \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$$

is fully faithful.

We now show that this functor is essentially surjective.

Let F be an object of $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$. Consider the morphism

$$\mathbb{L}Re^*(F) := F \circ \mathbb{L}Re\, .$$

Notice that this morphism does not necessarily commute with homotopy colimits. Now, by the above adjunction, we have a universal 2-morphism

$$\varphi :\, \Psi(\mathbb{L}Re^*(F)) \longrightarrow \mathbb{L}Re^*(F)\, .$$

Now, consider the 2-morphism

$$\mathbb{R}\underline{h}^* : \mathbb{R}\underline{h}^*((\Psi \circ \mathbb{L}Re^*)(F)) \longrightarrow (\mathbb{R}\underline{h}^* \circ \mathbb{L}Re^*)(F) \simeq F\,.$$

We will now show that this 2-morphism is a 2-isomorphism. By conservativity, it is sufficient to show this for the case of the terminal category e. For this, observe that $\mathbb{R}\underline{h}^*(\varphi)$ induces an isomorphism

$$\Psi(\mathbb{L}Re^*(F)) \circ \mathbb{R}\underline{h} \circ \mathsf{Ho}(i) \longrightarrow F \circ \mathsf{Ho}(i)\,.$$

Now each object of $\mathcal{M}$ is isomorphic, in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$, to a filtered colimit of strict finite I-cell objects. Since F and $\Psi(\mathbb{L}Re^*(F))$ commute with filtered homotopy colimits, $\mathbb{R}\underline{h}^*(\varphi)$ induces an isomorphism. This shows that the functor $\mathbb{R}\underline{h}^*$ is essentially surjective.

This proves the theorem. □

3.6 Pointed derivators

Recall from the previous section that we have constructed a derivator $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$ associated with a Quillen model category $\mathcal{M}$ satisfying suitable compactness assumptions.

Now suppose that $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ is pointed, i.e. that the morphism

$$\emptyset \longrightarrow *\,,$$

in $\mathcal{M}$, where $\emptyset$ denotes the initial object and $*$ the terminal one, is a weak equivalence. Consider the morphism

$$P : \widetilde{\emptyset} \longrightarrow h(\emptyset)\,,$$

where $\widetilde{\emptyset}$ denotes the initial object in $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$.

Observe that, since $\mathbb{R}\underline{h}$ admits a left adjoint, $h(\emptyset)$ identifies with the terminal object in

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset))\,,$$

because

$$h(\emptyset) = \mathsf{Ho}(h)(\emptyset) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{h} \circ \mathsf{Ho}(i)(\emptyset) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{h}(*)\,.$$

We denote by

$$\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,,$$

the left Bousfield localization of $\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ at the morphism P.

Notice that the category

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset))\,,$$

is now a pointed one.

We have the following morphisms of derivators

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[d, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}"] \\ \mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f} \arrow[u, shift left, "\mathbb{L}Re"] \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}\,. \end{tikzcd}$$

By construction, we have a pointed morphism of derivators

$$\mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\Phi\circ\mathbb{R}\underline{h}} \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}\,,$$

which commutes with filtered homotopy colimits and preserves the point.

Let $\mathbb{D}$ be a pointed derivator.

Proposition 3.22. *The morphism of derivators $\Phi \circ \mathbb{R}\underline{h}$ induces an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \xrightarrow{(\Phi\circ\mathbb{R}\underline{h})^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})\,,$$

where $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$ denotes the category of morphisms of derivators which commute with filtered homotopy colimits and preserve the point.

Proof. By theorem 3.8, we have an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\Phi^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,P}(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})\,.$$

By theorem 3.21, we have an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{h}^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})\,.$$

We now show that under this last equivalence, the category $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,P}(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$ identifies with $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$. Let F be an object of $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,P}(\mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}, \mathbb{D})$. Since F commutes with homotopy colimits, it preserves the initial object. This implies that $F \circ \mathbb{R}\underline{h}$ belongs to $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}, \mathbb{D})$.

Let now G be an object of $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}), \mathbb{D})$. Consider, as in the proof of theorem 3.21, the morphism

$$\Psi(\mathbb{L}Re^*(G)) : \mathsf{L}_{\Sigma}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f} \longrightarrow \mathbb{D}\,.$$

Since $\Psi(\mathbb{L}Re^*(G))$ commutes with homotopy colimits, by construction, it sends $\widetilde{\emptyset}$ to the point of $\mathbb{D}$. Observe also that $h(\emptyset)$ is also sent to the point of $\mathbb{D}$ because

$$\Psi(\mathbb{L}Re^*(G))(h(\emptyset)) \simeq G(\emptyset)\,.$$

This proves the proposition.

□

3.7 Small weak generators

Let $\mathcal{N}$ be a pointed, left proper, compactly generated Quillen model category as in definition 2.1 of [TV]. Observe that in particular this implies that $\mathcal{N}$ is finitely generated, as in section 7.4 in [Hov99]. We denote by $\mathcal{G}$ the set of cofibers of the generating cofibrations I in $\mathcal{N}$. By corollary 7.4.4 in [Hov99], the set $\mathcal{G}$ is a set of small weak generators for $\mathsf{Ho}(\mathcal{N})$, see definitions 7.2.1 and 7.2.2 in [Hov99]. Let S be a set of morphisms in $\mathcal{N}$ between objects which are homotopically finitely presented, see [TV], and $\mathsf{L}_S\mathcal{N}$ the left Bousfield localization of $\mathcal{N}$ by S. We have an adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathcal{N}) \arrow[d, shift right, "\mathbb{L}Id"'] \\ \mathsf{Ho}(\mathsf{L}_S\mathcal{N}) \arrow[u, shift right, "\mathbb{R}Id"'] \end{tikzcd}\,.$$

Lemma 3.23. *The image of the set $\mathcal{G}$ under the functor $\mathbb{L}Id$ is a set of small weak generators in* $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_S\mathcal{N})$.

Proof. The previous adjunction is equivalent to

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathcal{N}) \arrow[d, shift right, "(-)_f"'] \\ \mathsf{Ho}(\mathcal{N})_S \arrow[u, hook, shift right] \end{tikzcd}$$

where $\mathsf{Ho}(\mathcal{N})_S$ denotes the full subcategory of $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ formed by the S-local objects of $\mathcal{N}$ and $(-)_f$ denotes a fibrant resolution functor in $\mathsf{L}_S\mathcal{N}$, see [Hir03]. Clearly, this implies that the image of the set $\mathcal{G}$ under the functor $(-)_f$ is a set of weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_S\mathcal{N})$.

We now show that the S-local objects in $\mathcal{N}$ are stable under filtered homotopy colimits. Let $\{X_i\}_{i\in I}$ be a filtered diagram of S-local objects. By proposition 3.10, we have an isomorphism

$$\underset{i\in I}{\mathrm{hocolim}}\, X_i \xrightarrow{\sim} \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, X_i$$

in $\mathsf{Ho}(\mathcal{N})$. We now show that $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, X_i$ is an S-local object. Let $g : A \to B$ be an element of S. We have at our disposal the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Map}(B, \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, X_i) \arrow[r, "g^*"] & \mathsf{Map}(A, \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, X_i) \\ \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, \mathsf{Map}(B, X_i) \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, "\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, g_i^*"'] & \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, \mathsf{Map}(A, X_i)\,. \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Now observe that since A and B are homotopically finitely presented objects, the vertical arrows in the diagram are isomorphisms in $\mathsf{Ho}(Sset)$. Since each object X_i is S-local, the morphism g_i^* is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(Sset)$ and so is $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, g_i^*$. This implies that $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, X_i$ is an S-local object. This shows that the inclusion

$$\mathsf{Ho}(\mathcal{M})_S \hookrightarrow \mathsf{Ho}(\mathcal{M})\,,$$

commutes with filtered homotopy colimits and so the image of the set $\mathcal{G}$ under the functor $(-)_f$ consists of small objects of $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_S\mathcal{N})$.

This proves the lemma. $\square$

Recall from the previous chapter that we have constructed a pointed derivator $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$. We will now construct a strictly pointed Quillen model catgory whose associated derivator is equivalent to $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f}$. Consider the pointed Quillen model category

$$* \downarrow \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) = \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)\,.$$

We have the following Quillen adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet) \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,, \arrow[u, shift left, "(-)_+"] \end{tikzcd}$$

where U denotes the forgetful functor.

We denote by $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ the left Bousfield localization of $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ by the image of the set $\Sigma \cup \{P\}$ under the functor $(-)_+$. We denote by $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_{f\bullet}}$ the derivator associated with $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$.

Remark 3.24. Since the derivators associated with $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ and $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ are caracterized by the same universal property we have a canonical equivalence of pointed derivators

$$\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f} \xrightarrow{\sim} \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_{f\bullet}}$$

Notice also that the category $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ endowed with the projective model structure is pointed, left proper, compactly generated and that the domains and codomains of the elements of the set $(\Sigma \cup \{P\})_+$ are homotopically finitely presented objects. Therefore by lemma 3.23, the set

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{F}^X_{\Delta[n]_+/\partial\Delta[n]_+} | \, X \in \mathcal{M}_f \,, n \geqslant 0\}\,,$$

of cofibers of the generating cofibrations in $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is a set of small weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))$.

3.8 Stabilization

Let $\mathbb{D}$ be a regular pointed strong derivator.

In [Hel97], Heller constructs a universal morphism to a triangulated strong derivator

$$\mathbb{D} \xrightarrow{stab} \mathsf{St}(\mathbb{D})\,,$$

which commutes with homotopy colimits.

This construction is done in two steps. First consider the following ordered set

$$\mathbf{V} := \{(i,j) | \, |i-j| \leqslant 1\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

naturally as a small category. We denote by

$$\dot{\mathbf{V}} := \{(i,j) | \, |i-j| = 1\} \subset \mathbb{V}\,,$$

the full subcategory of 'points on the boundary'.

Now, let $\mathsf{Spec}(\mathbb{D})$ be the full subderivator of $\mathbb{D}_{\mathbf{V}}$, see definition 3.4 in [CN], formed by the objects X in $\mathbb{D}_{\mathbf{V}}(L)$, whose image under the functor

$$\mathbb{D}_{\mathbf{V}}(L) = \mathbb{D}(\mathbf{V} \times L) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathbf{V}^{op}, \mathbb{D}(L))$$

is of the form

$$\begin{tikzcd}
 & & * \arrow[r] & X_{(1,1)} \cdots \\
 & * \arrow[r] & X_{(0,0)} \arrow[u] \arrow[r] & * \arrow[u] \\
\cdots X_{(-1,-1)} \arrow[ur, phantom, ""] \arrow[r] & * \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & \longrightarrow & X_{(1,1)} \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
* & \longrightarrow & X_{(0,0)} & \longrightarrow & * \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots X_{(-1,-1)} & \longrightarrow & * & & ,
\end{array}$$

see section 8 in [Hel97]. We have an evaluation functor $ev_{(0,0)} : \mathsf{Spec}(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$, which admits a left adjoint $L[0,0]$.

Finally, let $\mathsf{St}(\mathbb{D})$ be the full reflexive subderivator of $\mathsf{Spec}(\mathbb{D})$ consisting of the Ω-spectra, as defined in [Hel97].

We have the following adjunctions

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[d, shift right, "{L[0,0]}"'] \arrow[dd, bend right=60, "stab"'] \\ \mathsf{Spec}(\mathbb{D}) \arrow[u, shift right, "ev_{(0,0)}"'] \arrow[d, shift right, "loc"'] \\ \mathsf{St}(\mathbb{D}) \arrow[u, hook, shift right] \end{tikzcd}$$

in the 2-category of derivators.

Let $\mathbb{T}$ be a triangulated strong derivator. The following theorem is proved in [Hel97].

Theorem 3.25. *The morphism stab induces an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}_!}(\mathsf{St}(\mathbb{D}), \mathbb{T}) \xrightarrow{stab^*} \underline{\mathsf{Hom}_!}(\mathbb{D}, \mathbb{T}) .$$

Lemma 3.26. *Let $\mathcal{G}$ be a set of objects in $\mathbb{D}(e)$ which satisfies the following conditions:*

A1) If, for each g in $\mathcal{G}$, we have

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, X) = \{*\} ,$$

then X is isomorphic to $*$, where $*$ denotes the terminal and initial object in $\mathbb{D}(e)$.

A2) For every set K and each g in $\mathcal{G}$ the canonical map

$$\underset{\substack{S \subseteq K \\ S finite}}{colim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, \coprod_{\alpha \in S} X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, \coprod_{\alpha \in S} X_\alpha)$$

is bijective.

Then the set

$$\{\Sigma^n stab(g) \,|\, g \in \mathcal{G},\, n \in \mathbb{Z}\}$$

of objects in $\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)$, where Σ denotes the suspension functor in $\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)$, satisfies A1) and A2).

Proof. Let $\underline{X}$ be an object of $\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)$. Suppose that for each g in $\mathcal{G}$ and n in $\mathbb{Z}$, we have

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(\Sigma^n stab(g), \underline{X}) = \{*\} .$$

Then by the following isomorphisms

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(\Sigma^n stab(g), \underline{X}) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(stab(g), \Omega^n \underline{X}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, ev_{(0,0)} \Omega^n \underline{X}) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, ev_{(n,n)} \underline{X}) , \end{aligned}$$

we conclude that, for all n in $\mathbb{Z}$, we have

$$ev_{(n,n)} \underline{X} = * .$$

By the conservativity axiom, $\underline{X}$ is isomorphic to $*$ in $\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)$. This shows condition $A1$). Now observe that condition $A2$) follows from the following isomorphisms

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(\Sigma^n stab(g), \underline{\bigoplus_{\alpha\in K} X_\alpha}) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(stab(g), \Omega^n \underline{\bigoplus_{\alpha\in K} X_\alpha}) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(stab(g), \bigoplus_{\alpha\in K} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, ev_{(0,0)} \coprod_{\alpha\in K} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, \coprod_{\alpha\in K} ev_{(0,0)} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\substack{S\subseteq K\\ S finite}} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, \coprod_{\alpha\in S} ev_{(0,0)} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\substack{S\subseteq K\\ S finite}} \mathsf{Hom}_{\mathbb{D}(e)}(g, ev_{(0,0)} \coprod_{\alpha\in S} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\substack{S\subseteq K\\ S finite}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(stab(g), \bigoplus_{\alpha\in S} \Omega^n \underline{X_\alpha}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{\substack{S\subseteq K\\ S finite}} \mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathbb{D})(e)}(\Sigma^n stab(g), \underline{\bigoplus_{\alpha\in S} X_\alpha})
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.27. *Let $\mathbb{T}$ be a triangulated derivator and $\mathcal{G}$ a set of objects in $\mathbb{T}(e)$ which satisfies conditions $A1$) and $A2$) of lemma 3.26.*

Then for every small category L and every point $x : e \to L$ in L, the set

$$\{x_!(g) \,|\, g \in \mathcal{G},\, x : e \to L\}$$

satisfies conditions $A1$) and $A2$) in the category $\mathbb{T}(L)$.

Proof. Suppose that

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(L)}(x_!(g), M) = \{*\}\,,$$

for every $g \in \mathcal{G}$ and every point x in L. Then by adjunction x^*M is isomorphic to $*$ in $\mathbb{T}(e)$ and so by the conservativity axiom, M is isomorphic to $*$ in $\mathbb{T}(L)$. This shows condition $A1$). Condition $A2$) follows from the following isomorphisms

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(L)}(x_!(g), \bigoplus_{\alpha\in K} M_\alpha) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(e)}(g, x^* \bigoplus_{\alpha\in K} M_\alpha) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(e)}(g, \bigoplus_{\alpha\in K} x^* M_\alpha) \\
&\simeq \bigoplus_{\alpha\in K} \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(e)}(g, x^* M_\alpha) \\
&\simeq \bigoplus_{\alpha\in K} \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}(L)}(x_!(g), M_\alpha)\,.
\end{aligned}$$

□

Remark 3.28. Notice that if $\mathbb{D}$ is a regular pointed strong derivator and we have at our disposal of a set $\mathcal{G}$ of objects in $\mathbb{D}(e)$ which satisfies conditions $A1$) and $A2$), then lemma 3.23 and lemma 3.27 imply that $\mathsf{St}(\mathbb{D})(L)$ is a compactly generated triangulated category, for every small category L.

Relation with Hovey/Schwede's stabilization

We will now relate Heller's construction with the construction of spectra as it is done by Hovey in [Hov01] and Schwede in [Sch97].

Let $\mathcal{M}$ be a pointed, simplicial, left proper, cellular, almost finitely generated Quillen model category, see definition 4.1 in [Hov01], where sequential colimits commute with finite products and homotopy pullbacks. This implies that the associated derivator $\mathsf{HO}(\mathcal{M})$ will be regular.

Example 3.29. Consider the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ defined in section 3.7. Notice that the category of pointed simplicial pre-sheaves $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is pointed, simplicial, left proper, cellular and even finitely generated, see definition 4.1 in [Hov01]. Since limits and colimits in $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ are calculated objectwise, we conclude that sequential colimits commute with finite products. Now, by theorem 4.1.1 in [Hir03] the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is also pointed, simplicial, left proper and cellular.

Now observe that the domains and codomains of each morphism in $\Lambda((\Sigma \cup \{P\})_+)$, see definition 4.2.1 in [Hir03], are finitely presented, since the forgetful functor

$$\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{M}^o, Sset)$$

commutes with filtered colimits and homotopy pullbacks. Now, by proposition 4.2.4 in [Hir03], we conclude that a morphism $A \xrightarrow{f} B$ in $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$, with B a local object, is a local fibration if and only if it has the right lifting property with respect to the set

$$J \cup \Lambda((\Sigma \cup \{P\})_+)\,,$$

where J denotes the set of generating acyclic cofibrations in $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$. This shows that $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is almost finitely generated.

Recall from section 1.2 in [Sch97] that since $\mathcal{M}$ is a pointed, simplicial model category, we have a Quillen adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, shift right, "\Sigma(-)"'] \\ \mathcal{M} \arrow[u, shift right, "\Omega(-)"'] \end{tikzcd},$$

where $\Sigma(X)$ denotes the suspension of an object X , i.e. the pushout of the diagram

$$\begin{tikzcd} X \otimes \partial\Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes \Delta^1 \\ * & \end{tikzcd}.$$

Recall also that in [Hov01] and [Sch97] the autors construct a stable Quillen model category $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M})$ of spectra associated with $\mathcal{M}$ and the left Quillen functor $\Sigma(-)$. We have the following Quillen adjunction, see [Hov01],

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[d, shift right, "\Sigma^\infty"'] \\ \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}) \arrow[u, shift right, "ev_0"'] \end{tikzcd}$$

and thus a morphism to a strong triangulated derivator

$$\mathsf{HO}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{L}\Sigma^\infty} \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$$

which commutes with homotopy colimits.

By theorem 3.25, we have at our disposal a diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{HO}(\mathcal{M}) \arrow[d, "stab"'] \arrow[dr, "\mathbb{L}\Sigma^{\infty}"] & \\ \mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M})) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M})) \,, \end{tikzcd}$$

which is commutative up to isomorphism in the 2-category of derivators.

Now suppose also that we have a set $\mathcal{G}$ of small weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$, as in definitions 7.2.1 and 7.2.2 in [Hov01]. Suppose also that each object of $\mathcal{G}$ considered in $\mathcal{M}$ is cofibrant, finitely presented, homotopy finitely presented and has a finitely presented cylinder object.

Example 3.30. Observe that the category $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is pointed and finitely generated. By corollary 7.4.4 in [Hov99], the set

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{F}^X_{\Delta[n]_+/\partial\Delta[n]_+} \,|\, X \in \mathcal{M}_f \,, n \geqslant 0\} \,,$$

is a set of small weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))$. Since the domains and codomains of the set

$$(\Sigma \cup \{P\})_+$$

are homotopically finitely presented objects, lemma 3.23 implies that $\mathcal{G}$ is a set of small weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))$. Clearly the elements of $\mathcal{G}$ are cofibrant, finitely presented and have a finitely presented cylinder object. They are also homotopically finitely presented.

Under the hypotheses above on the category $\mathcal{M}$, we have the following comparison theorem

Theorem 3.31. *The induced morphism of triangulated derivators*

$$\varphi : \mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$$

is an equivalence.

The proof of theorem 3.31 will consist in verifying the conditions of the following general proposition.

Proposition 3.32. *Let $F : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ be a morphism of strong triangulated derivators. Suppose that the triangulated categories $\mathbb{T}_1(e)$ and $\mathbb{T}_2(e)$ are compactly generated and that there is a set $\mathcal{G} \subset \mathbb{T}_1(e)$ of compact generators, which is stable under suspensions and satisfies the following conditions :*

a) $F(e)$ induces bijections

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_1(e)}(g_1, g_2) \to \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_2(e)}(Fg_1, Fg_2), \, \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}$$

and

b) the set of objects $\{Fg \,|\, g \in \mathcal{G}\}$ is a set of compact generators in $\mathbb{T}_2(e)$.

Then the morphism F is an equivalence of derivators.

Proof. Conditions a) and b) imply that $F(e)$ is an equivalence of triangulated category, see [Nee01b].

Now, let L be a small category. We show that conditions a) and b) are also verified by $F(L)$, $\mathbb{T}_1(L)$ and $\mathbb{T}_2(L)$. By lemma 3.27 the sets

$$\{x_!(g) |\, g \in \mathcal{G}, \, x : e \to L\} \quad \text{and} \quad \{x_!(Fg) |\, g \in \mathcal{G}, \, x : e \to L\}$$

consist of compact generators for $\mathbb{T}_1(L)$, resp. $\mathbb{T}_2(L)$, which are stable under suspensions. Since F commutes with homotopy colimits $F(x_!(g)) = x_!(Fg)$ and so the following isomorphisms

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_1(L)}(x_!(g_1), x_!(g_2)) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_1(e)}(g_1, x^*x_!(g_2)) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_2(e)}(F(g_1), F(x^*x_!(g_2))) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_2(e)}(Fg_1, x^*F(x_!(g_2))) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathbb{T}_2(L)}(x_!F(g_1), x_!F(g_2))
\end{aligned}$$

imply the proposition. □

Let us now prove theorem 3.31 :

Proof. Let us first prove condition $b)$ of proposition 3.32. Since the set $\mathcal{G}$ of small generators in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$ satisfies the conditions of lemma 3.26, we have a set

$$\{\Sigma^n stab(g) \,|\, g \in \mathcal{G},\, n \in \mathbb{Z}\}$$

of compact generators in $\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))(e)$, which is stable under suspensions. We now show that the set

$$\{\Sigma^n \mathbb{L}\Sigma^\infty(g) \,|\, g \in \mathcal{G},\, n \in \mathbb{Z}\}$$

is a set of compact generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$. These objects are compact because the functor $\mathbb{R}ev_0$ in the adjunction

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[d, shift right, "\mathbb{L}\Sigma^\infty"'] \\
\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M})) \arrow[u, shift right, "\mathbb{R}ev_0"']
\end{tikzcd}$$

commutes with filtered homotopy colimits. We now show that they form a set of generators. Let Y be an object in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$, that we can suppose, without loss of generality, to be an Ω-spectrum, see [Hov01]. Suppose that

$$\mathsf{Hom}(\Sigma^n \mathbb{L}\Sigma^\infty(g_i), Y) \simeq \operatorname*{colim}_m \mathsf{Hom}(g_i, \Omega^m Y_{m+p}) = \{*\},\ n \geqslant 0\,.$$

Since Y is an Ω-spectrum, we have

$$Y_p = *\,, \forall p \geqslant 0\,.$$

This implies that Y is isomorphic to $*$ in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$.

We now show condition $a)$. Let g_1 and g_2 be objects in $\mathcal{G}$. Observe that we have the following isomorphisms, see [Hel97]

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))(e)}(stab(g_1), stab(g_2)) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, (ev_{(0,0)} \circ loc \circ L[0,0])(g_2)) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, ev_{(0,0)}(\mathrm{hocolim}\,(L[0,0](g_2) \to \Omega\sigma L[0,0](g_2) \to \ldots))) \\
&\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, \mathrm{hocolim}\, ev_{(0,0)}(L[0,0](g_2) \to \Omega\sigma L[0,0](g_2) \to \cdots)) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_j \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, \Omega^j\Sigma^j(g_2))\,.
\end{aligned}$$

Now, by corollary 4.13 in [Hov01], we have

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))}(\mathbb{L}\Sigma^\infty(g_1), \mathbb{L}\Sigma^\infty(g_2)) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))}(\Sigma^\infty(g_1), (\Sigma^\infty(g_2))_f) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_m \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, \Omega^m(\Sigma^m(g_2))_f)\,,
\end{aligned}$$

where $(\Sigma^\infty(g_2))_f$ denotes a levelwise fibrant resolution of $\Sigma^\infty(g_2)$ in the category $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M})$.

Now, notice that since g_2 is cofibrant, so is $\Sigma^m(g_2)$ and so we have the following isomorphism

$$\Omega^m(\Sigma^m(g_2))_f \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}\Omega)^m \circ (\mathbb{L}\Sigma)^m(g_2)$$

in $\mathsf{Ho}(\mathsf{SP}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$. This implies that for $j \geqslant 0$, we have an isomorphism

$$\Omega^j\Sigma^j(g_2) \xrightarrow{\sim} \Omega^j(\Sigma^j(g_2))_f$$

in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))$ and so

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))(e)}(stab(g_1), stab(g_2)) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))}(\mathbb{L}\Sigma^\infty(g_1), \mathbb{L}\Sigma^\infty(g_2))\,.$$

Let now p be an integer. Notice that

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{St}(\mathsf{HO}(\mathcal{M}))(e)}(stab(g_1), \Sigma^p stab(g_2)) = \operatorname*{colim}_j \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, \Omega^j\Sigma^{j+p}(g_2))$$

and that

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))}(\mathbb{L}\Sigma^\infty(g_1), \Sigma^p\mathbb{L}\Sigma^\infty(g_2)) = \operatorname*{colim}_m \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{M})}(g_1, \Omega^m(\Sigma^{m+p}(g_2))_f)\,.$$

This proves condition $a)$ and so the theorem is proven. □

Remark 3.33. If we consider for $\mathcal{M}$ the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$, we have equivalences of derivators

$$\varphi : \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_{f\bullet}}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))) \xleftarrow{\sim} \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathcal{M}_f})\,.$$

Let $\mathbb{D}$ be a strong triangulated derivator.

Now, by theorem 3.25 and proposition 3.22, we have the following proposition

Proposition 3.34. *We have an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}), \mathbb{D}) \xrightarrow{(stab\circ\Phi\circ\mathbb{R}\underline{h})^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,.$$

Since the category $Sset_\bullet$ satisfies all the conditions of theorem 3.31, we have the following characterization of the classical category of spectra, after Bousfield-Friedlander [BF78], by a universal property.

Proposition 3.35. *We have an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(Sset_\bullet)), \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(e)\,.$$

Proof. By theorems 3.31 and 3.3, we have the following equivalences

$$\begin{aligned}
\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(Sset_\bullet)), \mathbb{D}) &\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{HO}(Sset_\bullet), \mathbb{D}) \\
&= \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{Hot}_\bullet, \mathbb{D}) \\
&\simeq \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{Hot}, \mathbb{D}) \\
&\simeq \mathbb{D}(e)\,.
\end{aligned}$$

This proves the proposition. □

Remark 3.36. An analoguos caracterization of the category of spectra, but in the context of stable ∞-categories is proved in [Lur, 17.6].

3.9 DG quotients

Recall from theorem 2.27 that we have at our disposal a Morita Quillen model structure on the category of small dg categories dgcat. The homotopy category $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$ is pointed. In the following, we will be considering this Quillen model structure. We denote by I the set of generating cofibrations.

Notation 3.37. We denote by $\mathcal{E}$ the set of inclusions of full dg subcategories

$$\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}\,,$$

where $\mathcal{H}$ is a strict finite I-cell.

Recall that we have a morphism of derivators

$$\mathcal{U}_t := stab \circ \Phi \circ \mathbb{R}\underline{h} : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})$$

which commutes with filtered homotopy colimits and preserves the point.

Let us now make some general arguments.

Let $\mathbb{D}$ be a pointed derivator. We denote by I the category associated to the graph

$$0 \leftarrow 1\,.$$

Consider the functor $t = 1 : e \to I$. Since the functor t is an open immersion and the derivator $\mathbb{D}$ is pointed, the functor

$$t_! : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(I)$$

has a left adjoint

$$t^? : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(e)\,,$$

see [CN]. We denote it by

$$\mathsf{cone} : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(e)\,.$$

Let $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ be a morphism of pointed derivators. Notice that we have a natural transformation of functors.

$$S : \mathsf{cone} \circ F(I) \to F(e) \circ \mathsf{cone}\,.$$

Proposition 3.38. *Let $\mathcal{A} \overset{R}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ be an inclusion of a full dg subcategory and $\ulcorner_R$*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook, "R"] \arrow[d] & \mathcal{B}\,, \\ 0 & \end{tikzcd}$$

the associated object in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner)$, where 0 denotes the terminal object in $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$. Then there exists a filtered category J and an object D_R in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner \times J)$, such that

$$p_!(D_R) \xrightarrow{\sim} \ulcorner_R\,,$$

where $p : \ulcorner \times J \to \ulcorner$ denotes the projection functor. Moreover, for every point $j : e \to J$ in J the object $(1 \times j)^*$ in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner)$ is of the form

$$0 \leftarrow Y_j \overset{L_j}{\to} X_j\,,$$

where $Y_j \overset{L_j}{\to} X_j$, belongs to the set $\mathcal{E}$.

Proof. Apply the small object argument to the morphism

$$\emptyset \longrightarrow \mathcal{B}$$

using the set of generating cofibrations I and obtain the factorization

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{B} \\ & Q(\mathcal{B}) \arrow[ur, "p"', "\sim"] & \end{tikzcd},$$

where i is an I-cell. Now consider the following fiber product

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{A}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Q(\mathcal{B}) \arrow[d, "p", "\sim"'] \\ \mathcal{A} \arrow[r, hook, "J"] & \mathcal{B}. \end{tikzcd}$$

Notice that $p^{-1}(\mathcal{A})$ is a full dg subcategory of $Q(\mathcal{B})$.

Now, by proposition 3.10, we have an isomorphism

$$\operatorname*{colim}_{j \in J} X_j \xrightarrow{\sim} Q(\mathcal{B}),$$

where J is the filtered category of inclusions of strict finite sub-I-cells X_j into $Q(\mathcal{B})$.

For each $j \in J$, consider the fiber product

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X_j \arrow[d] \\ p^{-1}(\mathcal{A}) \arrow[r, hook] & Q(\mathcal{B}). \end{tikzcd}$$

In this way, we obtain a morphism of diagrams

$$\{Y_j\}_{j \in J} \hookrightarrow \{X_j\}_{j \in J},$$

such that for each j in J, the inclusion

$$Y_j \hookrightarrow X_j$$

belongs to the set $\mathcal{E}$ and J is filtered.

Consider now the diagram D_I

$$\{0 \leftarrow Y_j \hookrightarrow X_j\}_{j \in J}$$

in the category $\mathsf{Fun}(\ulcorner \times J, \mathsf{dgcat})$. Now, notice that we have the isomorphism

$$\operatorname*{\mathsf{colim}}_{j \in J} \{0 \leftarrow Y_j \hookrightarrow X_j\} \xrightarrow{\sim} \{0 \leftarrow p^{-1}(\mathcal{A}) \hookrightarrow Q(\mathcal{B})\}$$

in $\mathsf{Fun}(\ulcorner, \mathsf{dgcat})$ and the weak equivalence

$$\begin{tikzcd} \{0 \arrow[d, equal] & p^{-1}(\mathcal{A}) \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & Q(\mathcal{B})\} \arrow[d, "\sim"] \\ \{0 & \mathcal{A} \arrow[l] \arrow[r, hook] & \mathcal{B}\} \end{tikzcd}$$

in $\mathsf{Fun}(\ulcorner, \mathsf{dgcat})$, when endowed with the projective model structure, see [Hir03]. Since $\mathsf{Fun}(\ulcorner, \mathsf{dgcat})$ is clearly also compactly generated, we have an isomorphism

$$\underset{j \in J}{\mathsf{hocolim}}\,(0 \leftarrow Y_j \rightarrow X_j) \xrightarrow{\sim} \underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\,(0 \leftarrow Y_j \rightarrow X_j)\,.$$

Finally, notice that D_R is an object of $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner \times J)$ and that $p_!(D_R)$, where $p : \ulcorner \times J \rightarrow J$ denotes the projection functor, identifies with

$$\underset{i \in J}{\mathsf{hocolim}}\,(0 \leftarrow Y_j \rightarrow X_j)\,.$$

This proves the proposition. $\square$

Notation 3.39. We denote by $\mathcal{E}_{st}$ the set of morhisms S_L, where L belongs to the set $\mathcal{E}$.

Let $\mathbb{D}$ be a strong triangulated derivator.

Theorem 3.40. *If*

$$G : \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}) \rightarrow \mathbb{D}$$

is a morphism of triangulated derivators commuting with arbitrary homotopy colimits and such that $G(e)(S_L)$ is invertible for each L in $\mathcal{E}$, then $G(e)(S_K)$ is invertible for each inclusion $K : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ of a full dg subcategory.

Proof. Let $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ be an inclusion of a full dg subcategory. Consider the morphism

$$\varphi_K := \varphi(\ulcorner_K) : (i_! \circ \mathcal{U}_T)(\ulcorner_K) \longrightarrow (\mathcal{U}_T \circ i_!)(\ulcorner_K)$$

in $\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})(\square)$.

Let D_K be the object of $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner \times J)$ constructed in proposition 3.38. In particular $p'_!(D_K) \overset{\sim}{\rightarrow} \ulcorner_K$, where $p' : \ulcorner \times J \rightarrow \ulcorner$ denotes the projection functor.

The inclusion $i : \ulcorner \hookrightarrow \square$, induces a commutative square

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\square \times J) \arrow[r, "\mathcal{U}_T(\square\times J)"] \arrow[d, "(i\times 1)^*"] & \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})(\square \times J) \arrow[d, "(i\times 1)^*"] \\
\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\ulcorner \times J) \arrow[r, "\mathcal{U}_T(\square\times J)"'] & \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})(\ulcorner \times J)
\end{tikzcd}$$

and a morphism

$$\Psi : ((i \times 1)_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner \times J))(D_K) \longrightarrow (\mathcal{U}_T(\square \times J) \circ (i \times 1)_!)(D_K)\,.$$

We will now show that

$$p_!\Psi \xrightarrow{\sim} \varphi_K\,,$$

where $p : \square \times J \rightarrow \square$, denotes the projection functor.

The fact that we have the following commutative square

$$\begin{tikzcd}
\square & \square \times J \arrow[l, "p"'] \\
\ulcorner \arrow[u, "i"] & \ulcorner \times J \arrow[l, "p'"] \arrow[u, "i\times 1"']
\end{tikzcd}$$

and that the morphism of derivators $\mathcal{U}_T$ commutes with filtered homotopy colimits implies the following equivalences

$$\begin{array}{lll} p_!\Psi & & \\ = p_! \circ (i\times 1)_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner \times j)(D_K) & \to & p_! \circ \mathcal{U}_T(\square \times J) \circ (i\times 1)_!(D_k) \\ \simeq i_! \circ p'_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner \times J)(D_k) & \to & \mathcal{U}_T(\square \times J) \circ p_! \circ (i\times 1)_!(D_K) \\ \simeq i_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner) \circ p'_!(D_K) & \to & \mathcal{U}_T(\square) \circ i_! \circ p'_!(D_K) \\ \simeq (i_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner))(\ulcorner_K) & \to & (\mathcal{U}_T(\square) \circ i_!)(\ulcorner_K) \\ = \varphi_J & & \end{array}$$

This shows that

$$p_!(\Psi) \xrightarrow{\sim} \varphi_K\,.$$

We now show that Ψ is an isomorphism. For this, by conservativity, it is enough to show that for every object $j : e \to J$ in J, the morphism

$$(1\times j)^*(\Psi)\,,$$

is an isomorphism in $\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f})(\square)$. Recall from proposition 3.38 that $(1\times j)^*(D_K)$ identifies with

$$\{\, 0 \leftarrow Y_j \overset{L_j}{\hookrightarrow} X_j \,\}\,,$$

where L_j belongs to $\mathcal{E}$. We now show that $(1\times j)^*(\Psi)$ identifies with φ_{L_j}, which by hypotheses, is an isomorphism.

Now, the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "1\times j"] & \square \times J \\ \ulcorner \arrow[u, "i"] \arrow[r, "1\times j"'] & \ulcorner \times J \arrow[u, "i\times i"'] \end{tikzcd}$$

and the dual of proposition 2.8 in [Cisc] imply that we have the following equivalences

$$\begin{array}{lll} (1\times j)^*\Psi & & \\ = ((1\times j)^* \circ (i\times 1)_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner \times J))(D_K) & \to & ((1\times j)^* \circ \mathcal{U}_T(\square \times J) \circ (i\times 1)_!)(D_K) \\ \simeq (i_! \circ (1\times j)^* \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner \times J))(D_K) & \to & (\mathcal{U}_T(\square \times J) \circ (1\times j)^* \circ (i\times 1)_!)(D_K) \\ \simeq (i_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner) \circ (1\times j)^*)(D_K) & \to & (\mathcal{U}_T(\square) \circ i_! \circ (1\times j)^*)(D_K) \\ \simeq i_! \circ \mathcal{U}_T(\ulcorner)(\ulcorner_{L_j}) & \to & \mathcal{U}_T(\square) \circ i_!(\ulcorner_{L_j}) \\ = \varphi_{L_j} & & \end{array}$$

Since by hypotheses φ_{L_j} is an isomorphism and the morphism G commutes with homotopy colimits the theorem is proven. $\square$

3.10 The universal localizing invariant

Recall from theorem 3.31 and remark 3.33 that if we consider for the category $\mathcal{M}$ the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$, see example 3.30, we have an equivalence of triangulated derivators

$$\varphi : \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)))\,.$$

Now, stabilize the set $\mathcal{E}_{st}$ defined in the previous section under the functor loop space and choose for each element of this stabilized set a representative in the category $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$. We denote the set of these representatives by $\widetilde{\mathcal{E}_{st}}$. Since $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$ is a left proper, cellular Quillen model category, see [Hov01], its left Bousfield localization by $\widetilde{\mathcal{E}_{st}}$ exists. We denote it by $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{st}}}\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$. By lemma 3.7 it is a stable Quillen model category.

Remark 3.41. Since the localization morphism

$$\gamma : \mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}) \xrightarrow{\mathbb{L}Id} \mathsf{HO}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{st}}}\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)))$$

commutes with homotopy colimits and inverts the set of morphisms $\mathcal{E}_{st}$, theorem 3.40 allows us to conclude that it inverts all morphisms S_K for each inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ of a full dg subcategory.

Definition 3.42. - The *Localizing motivator of dg categories* $\mathcal{M}^{loc}_{dg}$ is the triangulated derivator associated with the stable Quillen model category

$$\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{st}}}\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))\,.$$

- The *Universal localizing invariant of dg categories* is the canonical morphism of derivators

$$\mathcal{U}_l : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}^{loc}_{dg}\,.$$

We sum up the construction of $\mathcal{M}^{loc}_{dg}$ in the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{dgcat}_f}[S^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \arrow[dl, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}"] \arrow[ddddl, bend left, "\mathcal{U}_l"] \\
\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f} \arrow[ur, shift left, "\mathbb{L}Re"] \arrow[d, "\Phi"'] & \\
\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f} \arrow[d, "stab"'] & \\
\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}) \arrow[d, "\gamma"'] & \\
\mathcal{M}^{loc}_{dg} &
\end{tikzcd}$$

Observe that the morphism of derivators $\mathcal{U}_l$ is pointed, commutes with filtered homotopy colimits and satisfies the following condition:

Dr) For every inclusion $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ of a full dg subcategory the canonical morphism

$$S_K : \mathsf{cone}(\mathcal{U}_l(\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B})) \to \mathcal{U}_l(\mathcal{B}/\mathcal{A})$$

is invertible in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$.

We now give a conceptual characterization of condition Dr). Let I be the category associated with the graph $0 \leftarrow 1$.

Lemma 3.43. *The isomorphism classes in* $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(I)$ *associated with the inclusions* $\mathcal{A} \overset{K}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ *of full dg subcategories coincide with the classe of homotopy monomorphims in* dgcat*, see section 2 in [Toë07].*

Proof. Recall from section 2 in [Toë07] that in a model category $\mathcal{M}$ a morphism $X \xrightarrow{f} Y$ is a homotopy monomorphism if for every object Z in $\mathcal{M}$, the induced morphism of simplicial sets

$$\mathsf{Map}(Z,X) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Map}(Z,Y)$$

induces an injection on π_0 and isomorphisms on all π_i for $i > 0$ (for all base points).

Now, by lemma 2.4 of [Toë07] a dg functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ is an homotopy monomorphism on the quasi-equivalent Quillen model category on dgcat if and only if it is quasi-fully faithful, i.e. for any two objects X and Y in $\mathcal{A}$ the morphism of complexes $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(FX,FY)$ is a quasi-isomorphism.

Recall that by remark 2.40 the mapping space functor $\mathsf{Map}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ in the Morita Quillen model category identifies with the mapping space $\mathsf{Map}(\mathcal{A},\mathcal{B}_f)$ in the quasi-equivalent Quillen model category, where $\mathcal{B}_f$ denotes a Morita fibrant resolution of $\mathcal{B}$. This implies that a dg functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ is a homotopy monomorphism if and only if $\mathcal{A}_f \xrightarrow{F_f} \mathcal{B}_f$ is a quasi-fully faithful dg functor.

Now, notice that an inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ of a full dg subcategory is a homotopy monomorphism. Conversely, let $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ be a homotopy monomorphism. Consider the diagram

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}_f} \arrow[r, hook] & \mathcal{B}_f \\ \mathcal{A}_f \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "F_f"] & \mathcal{B}_f \arrow[u, equal] \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd},$$

where $\widetilde{\mathcal{A}_f}$ denotes the full dg subcategory of $\mathcal{B}_f$ whose objects are those in the image by the dg functor F_f. Since F_f is a quasi-fully faithful dg functor, the dg functor π is a quasi-equivalence. This proves the lemma. □

Remark 3.44. Lemma 3.43 shows that condition Dr) is equivalent to

Dr') For every homotopy monomorphism $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(I)$ the canonical morphism

$$\mathsf{cone}(\mathcal{U}_l(\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B})) \to \mathcal{U}_l(\mathsf{cone}(F))$$

is invertible in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$.

Let $\mathbb{D}$ be a strong triangulated derivator.

Theorem 3.45. *The morphism $\mathcal{U}_l$ induces an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}^{loc}_{dg},\mathbb{D}) \xrightarrow{\mathcal{U}_l^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,Dr,\,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}),\mathbb{D}),$$

where $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\,Dr\,,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}),\mathbb{D})$ denotes the category of morphisms of derivators which commute with filtered homotopy colimits, satisfy condition Dr) and preserve the point.

Proof. By theorem 3.8, we have the following equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}^{loc}_{dg},\mathbb{D}) \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,\widetilde{\mathcal{E}_{st}}}(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet)),\mathbb{D}).$$

We now show that we have the following equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{!,\widetilde{\mathcal{E}_{st}}}(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)), \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,\mathcal{E}_{st}}(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)), \mathbb{D})\,.$$

Let G be an element of $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,\mathcal{E}_{st}}(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)), \mathbb{D})$ and s an element of $\mathcal{E}_{st}$. We show that the image of s under the functor $G(e)\circ\Omega(e)$ is an isomorphism in $\mathbb{D}(e)$. Recall from the proof of lemma 3.7 that the functor $G(e)$ commutes with $\Sigma(e)$. Since the suspension and loop space functors in $\mathbb{D}(e)$ are inverse of each other we conclude that the image of s under the functor $G(e)\circ\Omega(e)$ is an isomorphism in $\mathbb{D}(e)$. Now, simply observe that the category on the right hand side of the above equivalence identifies with $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\, Dr\,,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$ under the equivalence

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathsf{St}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}), \mathbb{D}) \overset{(stab\circ\Phi\circ\mathbb{R}\underline{h})^*}{\longrightarrow} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,,$$

of proposition 3.34.

This proves the theorem. □

Terminology 3.46. We call an object of the right hand side category of theorem 3.45 a *localizing invariant of dg categories.*

We now present some examples.

Hochschild and cyclic homology

Let $\mathcal{A}$ be a small k-flat k-category. The *Hochschild chain complex* of $\mathcal{A}$ is the complex concentrated in homological degrees $p \geqslant 0$ whose pth component is the sum of the

$$\mathcal{A}(X_p, X_0)\otimes\mathcal{A}(X_p, X_{p-1})\otimes\mathcal{A}(X_{p-1}, X_{p-2})\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}(X_0, X_1)\,,$$

where $X_0, \ldots, X_p$ range through the objects of $\mathcal{A}$, endowed with the differential

$$d(f_p\otimes\ldots\otimes f_0) = f_{p-1}\otimes\cdots\otimes f_0 f_p + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i f_p\otimes\cdots\otimes f_i f_{i-1}\otimes\cdots\otimes f_0\,.$$

Via the cyclic permutations

$$t_p(f_{p-1}\otimes\cdots\otimes f_0) = (-1)^p f_0\otimes f_{p-1}\otimes\cdots\otimes f_1$$

this complex becomes a precyclic chain complex and thus gives rise to a *mixed complex* $C(\mathcal{A})$, i.e. a dg module over the dg algebra $\Lambda = k[B]/(B^2)$, where B is of degree -1 and $dB = 0$. All variants of cyclic homology only depend on $C(\mathcal{A})$ considered in $\mathcal{D}(\Lambda)$. For example, the cyclic homology of $\mathcal{A}$ is the homology of the complex $C(\mathcal{A})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda k$, *cf.* [Kas87].

If $\mathcal{A}$ is a k-flat differential graded category, its mixed complex is the sum-total complex of the bicomplex obtained as the natural re-interpretation of the above complex. If $\mathcal{A}$ is an arbitrary dg k-category, its Hochschild chain complex is defined as the one of a k-flat (e.g. a cofibrant) resolution of $\mathcal{A}$. The following theorem is proved in [Kel99].

Theorem 3.47. *The map $\mathcal{A}\mapsto C(\mathcal{A})$ yields a morphism of derivators*

$$\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathsf{HO}(\Lambda - Mod)\,,$$

which commutes with filtered homotopy colimits, preserves the point and satisfies condition Dr).

Remark 3.48. By theorem 3.45 the morphism of derivators C factors through $\mathcal{U}_l$ and so gives rise to a morphism

$$C : \mathcal{M}_{dg}^{loc} \to \mathsf{HO}(\Lambda - Mod)\,.$$

Non-connective K-theory

Let $\mathcal{A}$ be a small dg category. Its non-connective K-theory spectrum $K(A)$ is defined by applying Schlichting's construction [Sch06] to the Frobenius pair associated with the category of cofibrant perfect $\mathcal{A}$-modules (to the empty dg category we associate 0). Recall that the conflations in the Frobenius category of cofibrant perfect $\mathcal{A}$-modules are the short exact sequences which split in the category of graded $\mathcal{A}$-modules.

Theorem 3.49. *The map $\mathcal{A} \mapsto K(\mathcal{A})$ yields a morphism of derivators*

$$\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathsf{HO}(Spt)\,,$$

to the derivator associated with the category of spectra, which commutes with filtered homotopy colimits, preserves the point and satisfies condition Dr).

Proof. Proposition 11.15 in [Sch06], which an adaption of theorem 1.9.8 in [TT90], implies that we have a well defined morphism of derivators

$$\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathsf{HO}(Spt)\,.$$

Lemma 6.3 in [Sch06] implies that this morphism commutes with filtered homotopy colimits and theorem 11.10 implies that condition Dr) is satisfied. □

Remark 3.50. By theorem 3.45, the morphism of derivators K factors through $\mathcal{U}_l$ and so gives rise to a morphism

$$K : \mathcal{M}^{loc}_{dg} \to \mathsf{HO}(Spt)\,.$$

We now establish a connection between Waldhausen's $S_\bullet$-construction, see [Wal85] and the suspension functor in the triangulated category $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$. Let $\mathcal{A}$ be a Morita fibrant dg category, see proposition 2.34. Notice that $\mathsf{Z}^0(\mathcal{A})$ carries a natural exact category structure obtained by pulling back the graded-split structure on $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ along the Yoneda functor

$$\begin{array}{rcl} h : \mathsf{Z}^0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A}) \\ A & \mapsto & \mathsf{Hom}^\bullet(?, A)\,. \end{array}$$

Notation 3.51. Remark that the simplicial category $S_\bullet\mathcal{A}$, obtained by applying Waldhausen's $S_\bullet$-construction, see [Wal85] to $\mathsf{Z}^0(\mathcal{A})$, admits a natural enrichissement over the complexes. We denote by $S_\bullet\mathcal{A}$ this simplicial Morita fibrant dg category obtained.

We denote by $S_\bullet\mathcal{A}$ the Waldhausen $S_\bullet$-construction of $\mathcal{A}$, see [Wal85]. Observe that we obtain in this way a simplicial Morita fibrant dg category. We denote by Δ the simplicial category, see [McC94], and by $p : \Delta \to e$ the projection functor.

Proposition 3.52. *There is a canonical isomorphism in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$*

$$p_!\mathcal{U}_l(S_\bullet\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_l(\mathcal{A})[1]\,.$$

Proof. As in [McC94, 3.3], we consider the sequence in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\Delta)$

$$0 \to \mathcal{A}_\bullet \to PS_\bullet\mathcal{A} \to S_\bullet\mathcal{A} \to 0\,,$$

where $\mathcal{A}_\bullet$ denotes the constant simplicial dg category with value $\mathcal{A}$ and $PS_\bullet\mathcal{A}$ the path object of $S_\bullet\mathcal{A}$. For each point $n : e \to \Delta$, the nth component of the above sequence is the following short exact sequence in $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{I} PS_n\mathcal{A} = S_{n+1}\mathcal{A} \xrightarrow{Q} S_n\mathcal{A} \to 0\,,$$

where I maps $A \in \mathcal{A}$ to the constant sequence

$$0 \to A \overset{Id}{\to} A \overset{Id}{\to} \cdots \overset{Id}{\to} A$$

and Q maps a sequence

$$0 \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n$$

to

$$A_1/A_0 \to \cdots \to A_n/A_0\,.$$

Since the morphism of derivators $\mathcal{U}_l$ satisfies condition Dr), the conservativity axiom implies that we obtain a triangle

$$\mathcal{U}_l(\mathcal{A}_\bullet) \to \mathcal{U}_l(PS_\bullet) \to \mathcal{U}_l(S_\bullet) \to \mathcal{U}_l(\mathcal{A}_\bullet)[1]$$

in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(\Delta)$. By applying the functor $p_!$, we obtain the following triangle

$$p_!\mathcal{U}_l(\mathcal{A}_\bullet) \to p_!\mathcal{U}_l(PS_\bullet\mathcal{A}) \to p_!\mathcal{U}_l(S_\bullet\mathcal{A}) \to p_!\mathcal{U}_l(\mathcal{A}_\bullet)[1]$$

in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$. We now show that we have natural isomorphisms

$$p_!\mathcal{U}_l(\mathcal{A}_\bullet) \overset{\sim}{\to} \mathcal{U}_l(\mathcal{A})$$

and

$$p_!\mathcal{U}_l(PS_\bullet\mathcal{A}) \overset{\sim}{\to} 0\,,$$

in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$, where 0 denotes the zero object in the triangulated category $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$. This clearly implies the proposition. Since the morphisms of derivators Φ, $stab$ and γ commute with homotopy colimits it is enough to show that we have isomorphisms

$$p_!\mathbb{R}\underline{h}(\mathcal{A}_\bullet) \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}\underline{h}(\mathcal{A})$$

and

$$p_!\mathbb{R}\underline{h}(PS_\bullet\mathcal{A}) \overset{\sim}{\to} *$$

in $\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}(e)$, where $*$ denotes the terminal object in $\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}(e)$. Notice that since $\mathcal{A}$ and $PS_n\mathcal{A}$, $n \geqslant 0$ are Morita fibrant dg categories, we have natural isomorphisms

$$\underline{h}(\mathcal{A}_\bullet) \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}\underline{h}(\mathcal{A}_\bullet)$$

and

$$\underline{h}(PS_\bullet\mathcal{A}) \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}\underline{h}(PS_\bullet\mathcal{A})$$

in $\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}(\Delta)$.

Now, since homotopy colimits in $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f, Sset)$ are calculated objectwise and since $h(\mathcal{A}_\bullet)$ is a constant simplicial object in $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f, Sset)$, corollary 18.7.7 in [Hir03] implies that we have an isomorphism

$$p_!\mathbb{R}\underline{h}(\mathcal{A}_\bullet) \overset{\sim}{\to} \mathbb{R}\underline{h}(\mathcal{A})$$

in $\mathcal{M}^{loc}_{dg}(e)$.

Notice also that since $PS_\bullet\mathcal{A}$ is a contractible simplicial object, see [McC94], so is $\underline{h}(PS_\bullet\mathcal{A})$. Since homotopy colimits in $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f, Sset)$ are calculated objectwise, we have an isomorphism

$$p_!\mathbb{R}\underline{h}(PS_\bullet\mathcal{A}) \overset{\sim}{\to} *$$

in $\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}(e)$.

This proves the proposition.

$\square$

3.11 A Quillen model in terms of presheaves of spectra

In this section, we construct another Quillen model category whose associated derivator is $\mathcal{M}_{dg}^{loc}$.

Consider the Quillen adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet) \arrow[d, shift right, "\Sigma^\infty"'] \\ \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)) . \arrow[u, shift right, "ev_0"'] \end{tikzcd}$$

Recall from section 3.7 that we have a set of morphisms $(\Sigma \cup \{P\})_+$ in the category $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. Now stabilize the image of this set by the derived functor $\mathbb{L}\Sigma^\infty$, under the functor loop space in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)))$. For each one of the morphims thus obtained, choose a representative in the model category $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$.

Notation 3.53. Let us denote this set by G and by $\mathsf{L}_G\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$ the associated left Bousfield localization.

Proposition 3.54. *We have an equivalence of triangulated strong derivators*

$$\mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))) \xrightarrow{\sim} \mathsf{HO}(\mathsf{L}_G\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))) .$$

Proof. Observe that theorems 3.8 and 3.31 imply that both derivators have the same universal property.

This proves the proposition. □

Remark 3.55. Notice that the stable Quillen model category

$$\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))$$

identifies with

$$\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(Sset_\bullet))$$

endowed with the projective model structure.

The above considerations imply the following proposition.

Proposition 3.56. *We have an equivalence of derivators*

$$\mathsf{HO}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{st}},G}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(Sset_\bullet))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{dg}^{loc} .$$

3.12 Upper triangular DG categories

In this section we study upper triangular dg categories using the formalism of Quillen's homotopical algebra. In the next section, we will relate this important class of dg categories with split short exact sequences in $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$.

Definition 3.57. An *upper triangular* dg category $\underline{\mathcal{B}}$ is given by an upper triangular matrix

$$\underline{\mathcal{B}} \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} & X \\ 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix} ,$$

where $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ are small dg categories and X is a $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodule.

A morphism $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ of upper triangular dg categories is given by a triple $\underline{F} := (F_{\mathcal{A}}, F_{\mathcal{C}}, F_X)$, where $F_{\mathcal{A}}$, resp. $F_{\mathcal{C}}$, is a dg functor from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}'$, resp. from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{C}'$, and F_X is a morphism of $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodules from X to X' (we consider X' endowed with the action induced by $F_{\mathcal{A}}$ and $F_{\mathcal{C}}$). The composition is the natural one.

Notation 3.58. We denote by dgcat^{tr} the category of upper triangular dg categories.

Let $\underline{\mathcal{B}} \in \mathsf{dgcat}^{tr}$.

Definition 3.59. Let $|\underline{\mathcal{B}}|$ be the *totalization* of $\underline{\mathcal{B}}$, i.e. the small dg category whose set of objects is the disjoint union of the set of objects of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ and whose morphisms are given by

$$\mathsf{Hom}_{|\underline{\mathcal{B}}|}(x,x') \quad := \quad \begin{cases} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(x,x') & \text{if} \quad x,\, x' \in \mathcal{A} \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x') & \text{if} \quad x,\, x' \in \mathcal{C} \\ X(x,x') & \text{if} \quad x \in \mathcal{A},\, x' \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{if} \quad x \in \mathcal{C},\, x' \in \mathcal{A} \end{cases} .$$

We have the following adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{dgcat}^{tr} \arrow[d, shift right, "|-|"'] \\ \mathsf{dgcat}\,, \arrow[u, shift right, "I"'] \end{tikzcd}$$

where

$$I(\mathcal{B}') \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}' & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}'}(-,-) \\ 0 & \mathcal{B}' \end{pmatrix} .$$

Lemma 3.60. *The category* dgcat^{tr} *is complete and cocomplete.*

Proof. Let $\{\underline{\mathcal{B}_j}\}_{j\in J}$ be a diagram in dgcat^{tr}. Observe that the upper triangular dg category

$$\begin{pmatrix} \underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, \mathcal{A}_j & \underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, |\underline{\mathcal{B}_j}|(-,-) \\ 0 & \underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, \mathcal{C}_j \end{pmatrix} ,$$

where $\underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, |\underline{\mathcal{B}_j}|(-,-)$ is the $\underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, \mathcal{A}_j$-$\underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, \mathcal{C}_j$-bimodule naturally associated with the dg category $\underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, |\underline{\mathcal{B}_j}|$, corresponds to $\underset{j\in J}{\mathsf{colim}}\, \underline{\mathcal{B}_j}$. Observe also that the upper triangular dg category

$$\begin{pmatrix} \underset{j\in J}{\mathsf{lim}}\, \mathcal{A}_j & \underset{j\in J}{\mathsf{lim}}\, X_j \\ 0 & \underset{j\in J}{\mathsf{lim}}\, \mathcal{C}_j \end{pmatrix} ,$$

corresponds to $\underset{j\in J}{\mathsf{lim}}\, \underline{\mathcal{B}_j}$. This proves the lemma. □

Notation 3.61. Let $p_1(\underline{\mathcal{B}}) := \mathcal{A}$ and $p_2(\underline{\mathcal{B}}) := \mathcal{C}$.

We have at our disposal the following adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{dgcat}^{tr} \arrow[d, shift left, "p_1 \times p_2"] \\ \mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}\,, \arrow[u, shift left, "E"] \end{tikzcd}$$

where

$$E(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}' & 0 \\ 0 & \mathcal{B}'' \end{pmatrix} .$$

Recall from theorem 2.27 that dgcat admits a structure of cofibrantly generated Quillen model category whose weak equivalences are the Morita dg functors. This structure clearly induces a componentwise model structure on $\mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}$ which is also cofibrantly generated.

Proposition 3.62. *The category* dgcat^{tr} *admits a structure of cofibrantly generated Quillen model category whose weak equivalences, resp. fibration, are the morphisms* $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ *such that* $(p_1 \times p_2)(\underline{F})$ *are weak equivalences, resp. fibrations, in* $\mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}$*.*

Proof. We show that the previous adjunction $(E, p_1 \times p_2)$ verifies conditions (1) and (2) of theorem 11.3.2 from [Hir03].

(1) Since the functor E is also a right adjoint to $p_1 \times p_2$, the functor $p_1 \times p_2$ commutes with colimits and so condition (1) is verified.

(2) Let J, resp. $J \times J$, be the set of generating trivial cofibrations in dgcat, resp. in $\mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}$. Since the functor $p_1 \times p_2$ commutes with filtered colimits it is enough to prove the following: let $\underline{G} : \underline{\mathcal{B}'} \to \underline{\mathcal{B}''}$ be an element of the set $E(J \times J)$, $\underline{\mathcal{B}}$ an object in dgcat^{tr} and $\underline{\mathcal{B}'} \to \underline{\mathcal{B}}$ a morphism in dgcat^{tr}. Consider the following push-out in dgcat^{tr} :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{B}'} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{G}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\mathcal{B}} \arrow[d, "\underline{G}_*"] \\ \underline{\mathcal{B}''} \arrow[r] & \underline{\mathcal{B}''} \coprod_{\underline{\mathcal{B}'}} \underline{\mathcal{B}} . \end{tikzcd}$$

We now prove that $(p_1 \times p_2)(\underline{G}_*)$ is a weak-equivalence in $\mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}$. Observe that the image of the previous push-out under the functors p_1 and p_2 correspond to the following two push-outs in dgcat :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d, tail, "G_{\mathcal{A}'}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{A} \arrow[d, "G_{\mathcal{A}'_*}"] \\ \mathcal{A}'' \arrow[r] & \mathcal{A}'' \coprod_{\mathcal{A}'} \mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d, tail, "G_{\mathcal{C}'}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{C} \arrow[d, "G_{\mathcal{C}'_*}"] \\ \mathcal{C}'' \arrow[r] & \mathcal{C}'' \coprod_{\mathcal{C}'} \mathcal{C} . \end{tikzcd}$$

Since $G_{\mathcal{A}'_*}$ and $G_{\mathcal{C}'_*}$ belong to J the morphism

$$(p_1 \times p_2)(\underline{G}_*) = (G_{\mathcal{A}'_*}, G_{\mathcal{C}'_*})$$

is a weak-equivalence in $\mathsf{dgcat} \times \mathsf{dgcat}$. This proves condition (2).

The proposition is proven. ☐

Let $\underline{\mathcal{B}}, \underline{\mathcal{B}'} \in \mathsf{dgcat}^{tr}$.

Definition 3.63. A morphism $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ is a *total Morita dg functor* if $F_{\mathcal{A}}$ and $F_{\mathcal{C}}$ are Morita dg functors, see section 2.5, and F_X is a quasi-isomorphism of $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodules.

Remark 3.64. Notice that if $\underline{F}$ is a total Morita dg functor then $|\underline{F}|$ is a Morita dg functor in dgcat but the converse is not true.

Theorem 3.65. *The category* dgcat^{tr} *admits a structure of cofibrantly generated Quillen model category whose weak equivalences* $\mathcal{W}$ *are the total Morita dg functors and whose fibrations are the morphisms* $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ *such that* $F_{\mathcal{A}}$ *and* $F_{\mathcal{C}}$ *are Morita fibrations, see theorem 2.27, and* F_X *is a componentwise surjective morphism of bimodules.*

Proof. The proof is based on enlarging the set $E(I \times I)$, resp. $E(J \times J)$, of generating cofibrations, resp. generating trivial cofibrations, of the Quillen model structure of proposition 3.62.

Let $\tilde{I}$ be the set of morphisms in dgcat^{tr}

$$\begin{pmatrix} k & S^{n-1} \\ 0 & k \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} k & D^n \\ 0 & k \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z},$$

where S^{n-1} is the complex $k[n-1]$ and D^n the mapping cone on the identity of S^{n-1}. The k-k-bimodule S^{n-1} is sent to D^n by the identity on k in degree $n-1$.

Consider also the set $\tilde{J}$ of morphisms in dgcat^{tr}

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} k & D^n \\ 0 & k \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}.$$

Observe that a morphism $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ in dgcat^{tr} has the right lifting property (=R.L.P.) with respect to the set $\tilde{J}$, resp. $\tilde{I}$, if and only if F_X is a componentwise surjective morphism, resp. surjective quasi-isomorphism, of $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-bimodules.

Define $I := E(I \times I) \cup \tilde{I}$ as the set of *generating cofibrations* in dgcat^{tr} and $J := E(J \times J) \cup \tilde{J}$ as the set of *generating trivial cofibrations*. We now prove that conditions (1)-(6) of theorem 2.1.19 from [Hov99] are satisfied. This is clearly the case for conditions (1)-(3).

(4) We now prove that $J{-}cell \subset \mathcal{W}$, see [Hir03]. Since by proposition 3.62 we have $E(J \times J){-}cell \subset \mathcal{W}'$, where $\mathcal{W}'$ denotes the weak equivalences of proposition 3.62, it is enough to prove that pushouts with respect to any morphism in $\tilde{J}$ belong to $\mathcal{W}$. Let n be an integer and $\underline{\mathcal{B}}$ an object in dgcat^{tr}. Consider the following push-out in dgcat^{tr} :

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \arrow[r, "\underline{T}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\mathcal{B}} \arrow[d, "\underline{R}"] \\ \begin{pmatrix} k & D^n \\ 0 & k \end{pmatrix} \arrow[r] & \underline{\mathcal{B}'}. \end{tikzcd}$$

Notice that the morphism $\underline{T}$ corresponds to specifying an object A in $\mathcal{A}$ and an object C in $\mathcal{C}$. The upper triangular dg category $\underline{\mathcal{B}'}$ is then obtained from $\underline{\mathcal{B}}$ by gluing a new morphism of degree n from A to C. Observe that $R_{\mathcal{A}}$ and $R_{\mathcal{C}}$ are the identity dg functors and that R_X is a quasi-isomorphism of bimodules. This shows that $\underline{R}$ belongs to $\mathcal{W}$ and so condition (4) is proved.

(5-6) We now show that R.L.P.(I)=R.L.P.$(J) \cap \mathcal{W}$. The proof of proposition 3.62 implies that R.L.P.$(E(I\times I))$=R.L.P.$(E(J \times J)) \cap \mathcal{W}'$. Let $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ be a morphism in R.L.P.$(\tilde{I})$. Clearly $\underline{F}$ belongs to R.L.P.$(\tilde{J})$ and F_X is a quasi-isomorphism of bimodules. This shows that R.L.P.$(I) \subset$ R.L.P.$(J) \cap \mathcal{W}$.

Let now $\underline{F} : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}'}$ be a morphism in R.L.P.$(\tilde{J}) \cap \mathcal{W}$. Clearly $\underline{F}$ belongs to R.L.P.$(\tilde{I})$ and so R.L.P.$(J) \cap \mathcal{W} \subset$ R.L.P(I). This proves conditions (5) and (6).

This proves the theorem. □

Remark 3.66. Notice that the Quillen model structure of theorem 3.65 is cellular, see [Hir03] and that the domains and codomains of I (the set of generating cofibrations) are cofibrant, $\aleph_0$-compact, $\aleph_0$-small and homotopically finitely presented, see definition 2.1.1. from [TV]. This implies that we are in the conditions of proposition 3.10 and so any object $\underline{\mathcal{B}}$ in dgcat^{tr} is weakly equivalent to a filtered colimit of strict finite I-cell objects.

Proposition 3.67. *If $\underline{\mathcal{B}}$ be a strict finite I-cell object in* dgcat^{tr}*, then* $p_1(\underline{\mathcal{B}})$*,* $p_2(\underline{\mathcal{B}})$ *and* $|\underline{\mathcal{B}}|$ *are strict finite I-cell objects in* dgcat*.*

Proof. We consider the following inductive argument :

- notice that the initial object in dgcat^{tr} is

$$\begin{pmatrix} \emptyset & 0 \\ 0 & \emptyset \end{pmatrix}$$

  and it is sent to $\emptyset$ (the initial object in dgcat) by the functors p_1, p_2 and $|-|$.

- suppose that $\underline{\mathcal{B}}$ is an upper triangular dg category such that $p_1(\underline{\mathcal{B}})$, $p_2(\underline{\mathcal{B}})$ and $|\underline{\mathcal{B}}|$ are strict finite I-cell objects in dgcat. Let $\underline{G} : \underline{\mathcal{B}'} \to \underline{\mathcal{B}''}$ be an element of the set I in dgcat^{tr}, see the proof of theorem 3.65, and $\underline{\mathcal{B}'} \to \underline{\mathcal{B}}$ a morphism. Consider the following push-out in dgcat^{tr} :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathcal{B}'} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{G}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\mathcal{B}} \arrow[d, "\underline{G}_*"] \\ \underline{\mathcal{B}''} \arrow[r] & \mathsf{PO}\,. \end{tikzcd}$$

  We now prove that $p_1(\mathsf{PO})$, $p_2(\mathsf{PO})$ and $|\mathsf{PO}|$ are strict finite I-cell objects in dgcat. We consider the following two cases :

  1) $\underline{G}$ belongs to $E(I \times I)$: observe that $p_1(\mathsf{PO})$, $p_2(\mathsf{PO})$ and $|\mathsf{PO}|$ correspond exactly to the following push-outs in dgcat :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r] \arrow[d, tail, "G_{\mathcal{A}'}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{A} \arrow[d] \\ \mathcal{A}'' \arrow[r] & p_1(\mathsf{PO}) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d, tail, "G_{\mathcal{C}'}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{C}'' \arrow[r] & p_2(\mathsf{PO}) \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A}' \coprod \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d, "G_{\mathcal{A}'} \amalg G_{\mathcal{C}'}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & |\underline{\mathcal{B}}| \arrow[d] \\ \mathcal{A}'' \coprod \mathcal{C}'' \arrow[r] & |\mathsf{PO}|\,. \end{tikzcd}$$

     Since $G_{\mathcal{A}'}$ and $G_{\mathcal{C}'}$ belong to I this case is proved.

  2) $\underline{G}$ belongs to $\tilde{I}$: observe that $p_1(\mathsf{PO})$ identifies with $\mathcal{A}$, $p_2(\mathsf{PO})$ identifies with $\mathcal{C}$ and $|\mathsf{PO}|$ corresponds to the following push-out in dgcat :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(n) \arrow[r] \arrow[d, "S(n)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & |\underline{\mathcal{B}}| \arrow[d] \\ \mathcal{P}(n) \arrow[r] & |\mathsf{PO}|, \end{tikzcd}$$

     where $S(n)$ is a generating cofibration in dgcat, see theorem 1.8. This proves this case.

The proposition is proven. $\square$

3.13 Split short exact sequences

In this section, we establish the connection between split short exact sequences of dg categories and upper triangular dg categories.

Definition 3.68. A split short exact sequence of dg categories is a short exact sequence of dg categories, see [Kel06b], which is equivalent in Hmo to one of the form

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \underset{i_{\mathcal{A}}}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \underset{P}{\overset{i_{\mathcal{C}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \longrightarrow 0\,,$$

where we have $P \circ i_{\mathcal{A}} = 0$, R is a dg functor right adjoint to $i_{\mathcal{A}}$, $i_{\mathcal{C}}$ is a dg functor right adjoint to P and we have $P \circ i_{\mathcal{C}} = Id_{\mathcal{C}}$ and $R \circ i_{\mathcal{A}} = Id_{\mathcal{A}}$ via the adjunction morphisms.

To a split short exact sequence, we can naturally associate the upper triangular dg category

$$\underline{\mathcal{B}} \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(i_{\mathcal{C}}(-), i_{\mathcal{A}}(-)) \\ 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}.$$

Conversely to an upper triangular dg category $\underline{\mathcal{B}}$ such that $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$ admit a zero object (for instance if they are Morita fibrant), we can associate a split short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \underset{i_{\mathcal{A}}}{\overset{R}{\rightleftarrows}} |\underline{\mathcal{B}}| \underset{P}{\overset{i_{\mathcal{C}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \longrightarrow 0\,,$$

where P and R are the projection dg functors. Moreover, this construction is functorial in $\underline{\mathcal{B}}$ and sends total Morita equivalences to Morita equivalent split short exact sequences. Notice also that by lemma 3.60 this functor preserves colimits.

Proposition 3.69. *Every split short exact sequence of dg categories is weakly equivalent to a filtered homotopy colimit of split short exact sequences whose components are strict finite I-cell objects in* dgcat.

Proof. Let

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \underset{i_{\mathcal{A}}}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \underset{P}{\overset{i_{\mathcal{C}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \longrightarrow 0\,,$$

be a split short exact sequence of dg categories. We can supose that $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ are Morita fibrant dg categories, see proposition 2.34. Consider the upper triangular dg category

$$\underline{\mathcal{B}} \quad := \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(i_{\mathcal{C}}(-), i_{\mathcal{A}}(-)) \\ 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}.$$

Now by remark 3.66, $\underline{\mathcal{B}}$ is equivalent to a filtered colimit of strict finite I-cell objects in dgcat^{tr}. Consider the image of this diagram by the functor, described above, which sends an upper triangular dg category to a split short exact sequence. By proposition 3.67 the components of each split short exact sequence of this diagram are strict finite I-cell objects in dgcat. Since the category dgcat satisfies the conditions of proposition 3.10, filtered homotopy colimits are equivalent to filtered colimits and so the proposition is proven. $\square$

3.14 Quasi-Additivity

Recall from section 3.10 that we have at our disposal the Quillen model category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset)$ which is *homotopically pointed*, i.e. the morphism $\emptyset \to *$, from the initial object $\emptyset$ to the terminal one $*$, is a weak equivalence. We now consider a strictly pointed Quillen model.

Proposition 3.70. *We have a Quillen equivalence*

$$\begin{tikzcd} * \downarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset) \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)\,, \arrow[u, shift left, "(-)_+"] \end{tikzcd}$$

where U denotes the forgetful functor.

This follows from the fact that the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset)$ is homotopically pointed and from the following general argument.

Proposition 3.71. *Let $\mathcal{M}$ be a homotopically pointed Quillen model category. We have a Quillen equivalence.*

$$\begin{tikzcd} * \downarrow \mathcal{M} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathcal{M}\,, \arrow[u, shift left, "(-)_+"] \end{tikzcd}$$

where U denotes the forgetful functor.

Proof. Clearly the functor U preserves cofibrations, fibrations and weak equivalences, by construction. Let now $N \in \mathcal{M}$ and $M \in * \downarrow \mathcal{M}$. Consider the following commutative diagram in $\mathcal{M}$

$$\begin{tikzcd} N \simeq \emptyset \coprod N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i \amalg \mathbf{1}"', "\sim"] & & U(M) \\ & * \coprod N \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd} ,$$

where $f^\sharp$ is the morphism which corresponds to f, considered as a morphism in $\mathcal{M}$, under the adjunction and $i : \emptyset \xrightarrow{\sim} *$. Since the morphism $i \amalg \mathbf{1}$ corresponds to the homotopy colimit of i and 1, which are both weak equivalences, proposition 3.5 implies that $i \amalg \mathbf{1}$ is a weak equivalence. Now, by the property '2 out of 3', the morphism f is a weak equivalence if and only if $f^\sharp$ is one. This proves the proposition. □

Notation 3.72. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be small dg categories. We denote by $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ the full-dg-subcategory of $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A}_c^{op} \otimes \mathcal{B})$, where $\mathcal{A}_c$ denotes a cofibrant resolution of $\mathcal{A}$, whose objects are the bimodules X such that $X(?, A)$ is a compact object in $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ for all $A \in \mathcal{A}_c$ and which are cofibrant as bimodules. We denote by $w\mathcal{A}$ the category of homotopy equivalences of $\mathcal{A}$ and by $N.w\mathcal{A}$ its nerve.

Now, consider the morphism

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat}) & \to & \mathsf{Ho}(* \downarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)) \\ \mathcal{A} & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\Gamma(?), \mathcal{A}_f)_+ \\ \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{dgcat}}(?, \mathcal{A})_+ \\ \simeq N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})_+ \end{array} \right. \end{array}$$

which by sections 3.5, 3.6 and proposition 3.70 corresponds to the component $(\Phi \circ \mathbb{R}\underline{h})(e)$ of the morphism of derivators

$$\Phi \circ \mathbb{R}\underline{h} : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f}\,,$$

see proposition 3.22. Observe that the simplicial presheaf $N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})$ is already canonically pointed.

Proposition 3.73. *The canonical morphism*

$$\Psi : N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})_+ \to N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})$$

is a weak equivalence in $* \downarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$.

Proof. Observe that $N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})$ is a fibrant object in $* \downarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset)$ and that the canonical morphism Ψ corresponds to the co-unit of the adjunction of proposition 3.70. Since this adjunction is a Quillen equivalence, the proposition is proved. □

Recall now from remark 3.24 that we have a canonical equivalence of pointed derivators

$$\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f} \xrightarrow{\sim} \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}},$$

where $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}}$ is the derivator associated with the Quillen model category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. From now on, we will consider this Quillen model. We have the following morphism of derivators

$$\Phi \circ \mathbb{R}\underline{h} : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \longrightarrow \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}},$$

which commutes with filtered homotopy colimits and preserves the point.

Notation 3.74.

- We denote by $\mathcal{E}^s$ the set of retractions of dg categories

$$\mathcal{G} \underset{i_{\mathcal{G}}}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathcal{H},$$

  where $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ are strict finite I-cell objects in dgcat, $i_{\mathcal{G}}$ is a fully faithful dg functor, R is a right adjoint to $i_{\mathcal{G}}$ and $R \circ i_{\mathcal{G}} = Id_{\mathcal{G}}$.

- We denote by $\mathcal{E}^s_{un}$ the set of morphisms S_L in $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}}(e)$, see section 3.9, where L belongs to the set $\mathcal{E}^s$.

Now choose for each element of the set $\mathcal{E}^s_{un}$ a representative in the category $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. We denote this set of representatives by $\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}$. Since $\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ is a left proper, cellular Quillen model category, see [Hir03], its left Bousfield localization by $\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}$ exists. We denote it by $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ and by $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}}$ the associated derivator. We have the following morphism of derivators

$$\Psi : \mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}} \to \mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f_\bullet}}.$$

Remark 3.75.

- Notice that by construction the domains and codomains of the set $\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}$ are homotopically finitely presented objects. Therefore by lemma 3.23 the set

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{F}^X_{\Delta[n]_+/\partial\Delta[n]_+} \,|\, X \in \mathcal{M}_f\,, n \geqslant 0\},$$

  of cofibers of the generating cofibrations in $\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet)$ is a set of small weak generators in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathcal{M}_f^o, Sset_\bullet))$.

- Notice also that proposition 3.69 implies that variants of proposition 3.38 and theorem 3.40 are also verified: simply consider the set $\mathcal{E}^s$ instead of $\mathcal{E}$ and a retraction of dg categories instead of an inclusion of a full dg subcategory. The proofs are exactly the same.

Let $\mathcal{M}$ be a left proper cellular model category, S a set of maps in $\mathcal{M}$ and $\mathsf{L}_S\mathcal{M}$ the left Bousfield localization of $\mathcal{M}$ with respect to S, see [Hir03]. Recall from [Hir03, 4.1.1.] that an object X in $\mathsf{L}_S\mathcal{M}$ is fibrant if X is fibrant in $\mathcal{M}$ and for every element $f : A \to B$ of S the induced map of homotopy function complexes $f^* : \mathsf{Map}(B, X) \to \mathsf{Map}(A, X)$ is a weak equivalence.

Proposition 3.76. *An object $F \in \mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ is fibrant if and only if it satisfies the following conditions*

1) $F(\mathcal{B}) \in Sset_\bullet$ is fibrant, for all $\mathcal{B} \in \mathsf{dgcat}_f$.

2) $F(\emptyset) \in Sset_\bullet$ is contractible.

3) For every Morita equivalence $\mathcal{B} \overset{\sim}{\to} \mathcal{B}'$ in dgcat_f the morphism $F(\mathcal{B}') \overset{\sim}{\to} F(\mathcal{B})$ is a weak equivalence in $Sset_\bullet$.

4) Every split short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}' \underset{i_{\mathcal{B}'}}{\overset{R}{\leftrightarrows}} \mathcal{B} \underset{P}{\overset{i_{\mathcal{B}''}}{\leftrightarrows}} \mathcal{B}'' \longrightarrow 0$$

in dgcat_f induces a homotopy fiber sequence

$$F(\mathcal{B}'') \to F(\mathcal{B}) \to F(\mathcal{B}')$$

in $Sset$.

Proof. Clearly condition 1) corresponds to the fact that F is fibrant in $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. Now observe that $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ is a simplicial Quillen model category with the simplicial action given by

$$\begin{array}{ccc} Sset \times \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet) & \to & \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet) \\ (K, F) & \mapsto & K_+ \wedge F\,, \end{array}$$

where $K_+ \wedge F$ denotes the componentwise smash product. This simplicial structure and the construction of the localized Quillen model category
$\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$, see section 3.7, allow us to recover conditions 2) and 3). Condition 4) follows from the construction of the set $\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}$ and from the fact that the functor

$$\mathsf{Map}(?, F) : \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)^{op} \to Sset$$

transforms homotopy cofiber sequences into homotopy fiber sequences.
This proves the proposition. □

Let $\mathcal{A}$ be a Morita fibrant dg category. Recall from notation 3.51 that $S_\bullet\mathcal{A}$ denotes the simplicial Morita fibrant dg category obtained by applying Waldhausen's $S_\bullet$-construction to the exact category $\mathsf{Z}^0(\mathcal{A})$ and remembering the enrichment in complexes.

Notation 3.77. We denote by $K(\mathcal{A}) \in \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ the following simplicial presheaf

$$\mathcal{B} \quad \mapsto \quad |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})|\,,$$

where $|-|$ denotes the fibrant realization functor of bisimplicial sets.

Proposition 3.78. *The simplicial presheaf $K(\mathcal{A})$ is fibrant in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$.*

Proof. Observe that $K(\mathcal{A})$ satisfies conditions (1)-(3). We now prove that Waldhausen's fibration theorem [Wal85, 1.6.4] implies condition (4). Apply the contravariant functor $\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})$ to the split short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}' \underset{i_{\mathcal{B}'}}{\overset{R}{\leftrightarrows}} \mathcal{B} \underset{P}{\overset{i_{\mathcal{B}''}}{\leftrightarrows}} \mathcal{B}'' \longrightarrow 0$$

and obtain a split short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}'', \mathcal{A}) \rightleftarrows \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightleftarrows \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}', \mathcal{A}) \longrightarrow 0\,.$$

Now consider the Waldhausen category $v\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) := \mathsf{Z}^0(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A}))$, where the weak equivalences are the morphisms f such that $\mathsf{cone}(f)$ is contractible. Consider also the Waldhausen category $w\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, which has the same cofibrations as $v\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ but the weak equivalences are the morphisms f such that $\mathsf{cone}(f)$ belongs to $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}'', \mathcal{A})$. Observe that we have the inclusion $v\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \subset w\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ and an equivalence $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})^w \simeq \mathsf{Z}^0(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}', \mathcal{A}))$, see section 1.6 from [Wal85]. The conditions of theorem 1.6.4 from [Wal85] are satisfied and so we have a homotopy fiber sequence

$$|N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}'', \mathcal{A})| \to |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}, \mathcal{A})| \to |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{B}', \mathcal{A})|$$

in $Sset$. This proves the proposition. □

Definition 3.79. - The *Unstable motivator of dg categories* $\mathcal{M}^{unst}_{dg}$ is the derivator associated with the Quillen model category

$$\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}} \mathsf{L}_{\Sigma,P} \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)\,.$$

- The *Universal unstable invariant of dg categories* is the canonical morphism of derivators

$$\mathcal{U}_u : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}^{unst}_{dg}\,.$$

Let $p : \Delta \to e$ be the projection functor.

Proposition 3.80. *The objects*

$$S^1 \wedge N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A}) \quad \textit{and} \quad |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})| = K(\mathcal{A})$$

are canonically isomorphic in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}} \mathsf{L}_{\Sigma,P} \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$.

Proof. As in [McC94, 3.3], we consider the sequence in $\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat})(\Delta)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{I} PS_\bullet\mathcal{A} \xrightarrow{Q} S_\bullet\mathcal{A} \longrightarrow 0\ ,$$

where $\mathcal{A}_\bullet$ denotes the constant simplicial dg category with value $\mathcal{A}$ and $PS_\bullet\mathcal{A}$ the path object of $S_\bullet\mathcal{A}$. By applying the morphism of derivators $\mathcal{U}_u$ to this sequence, we obtain the canonical morphism

$$S_I : \mathrm{cone}(\mathcal{U}_u(\mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{I} PS_\bullet\mathcal{A})) \to \mathcal{U}_u(S_\bullet\mathcal{A})$$

in $\mathcal{M}^{unst}_{dg}(\Delta)$. We now prove that for each point $n : e \to \Delta$, the nth component of S_I is an isomorphism in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}} \mathsf{L}_{\Sigma,P} \mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. For each point $n : e \to \Delta$, we have a split short exact sequence in $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \underset{I_n}{\overset{R_n}{\rightleftarrows}} PS_n\mathcal{A} = S_{n+1}\mathcal{A} \underset{Q_n}{\overset{S_n}{\rightleftarrows}} S_n\mathcal{A} \longrightarrow 0\,,$$

where I_n maps $A \in \mathcal{A}$ to the constant sequence

$$0 \to A \xrightarrow{Id} A \xrightarrow{Id} \cdots \xrightarrow{Id} A\,,$$

Q maps a sequence

$$0 \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_n$$

to

$$A_1/A_0 \to \cdots \to A_n/A_0\,,$$

S_n maps a sequence

$$0 \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_{n-1}$$

to

$$0 \to 0 \to A_0 \to \cdots \to A_{n-1}$$

and R_n maps a sequence

$$0 \to A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_{n-1}$$

to A_0. Now, by construction of $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ the canonical morphisms

$$S_{I_n} : \mathrm{cone}(\mathcal{U}_u(\mathcal{A} \stackrel{I_n}{\to} PS_n\mathcal{A})) \to \mathcal{U}_u(S_n\mathcal{A}),\ n \in \mathbb{N}\,,$$

are isomorphisms in $\mathcal{M}_{dg}^{unst}(e)$. Since homotopy colimits in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ are calculated objectwise the nth component of S_I identifies with S_{I_n} and so by the conservativity axiom S_I is an isomorphism in $\mathcal{M}_{dg}^{unst}(\Delta)$. This implies that we obtain the homotopy cocartesian square

$$\begin{tikzcd}
p_!\mathcal{U}_u(\mathcal{A}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & p_!(\mathcal{U}_u(PS_\bullet\mathcal{A})) \arrow[d] \\
* \arrow[r] & p_!(\mathcal{U}_u(S_\bullet\mathcal{A}))\,.
\end{tikzcd}$$

As in the proof of proposition 3.52, we show that $p_!\mathcal{U}_u(\mathcal{A}_\bullet)$ identifies with $N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A}) = \mathcal{U}_u(\mathcal{A})$ and that $p_!(\mathcal{U}_u(PS_\bullet\mathcal{A}))$ is contractible. Since we have the equivalence

$$p_!(\mathcal{U}_u(S_\bullet\mathcal{A})) = p_!(N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, S_\bullet\mathcal{A})) \stackrel{\sim}{\to} |N.wS_\bullet\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})|$$

and $N.w\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})$ is cofibrant in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ the proposition is proven. □

Proposition 3.81. *We have the following weak equivalence of simplicial sets*

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})) \stackrel{\sim}{\to} |N.wS_\bullet\mathcal{A}_f|$$

in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$*. In particular, we have the following isomorphism*

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})) \stackrel{\sim}{\to} K_i(\mathcal{A}),\ \forall i \geqslant 0\,.$$

Proof. This follows from propositions 3.78, 3.80 and from the following weak equivalences

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{Map}(\mathcal{U}_u(k), S^1 \wedge \mathcal{U}_u(\mathcal{A})) & \simeq & \mathsf{Map}(\mathbb{R}\underline{h}(k), K(\mathcal{A})) \\
& \simeq & (K(\mathcal{A}))(k) \\
& \simeq & |N.wS_\bullet\mathcal{A}_f|\,.
\end{array}$$

□

3.15 The universal additive invariant

Consider the Quillen model category $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet)$ constructed in the previous section. The definition of the set $\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}$ and the same arguments as those of example 3.29 and example 3.30 allows us to conclude that $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet)$ satisfies the conditions of theorem 3.31. In particular we have an equivalence of triangulated derivators

$$\mathsf{St}(\mathcal{M}^{unst}_{dg}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{HO}(\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet)))\,.$$

Definition 3.82. - The *Additive motivator of dg categories* $\mathcal{M}^s_{dg}$ is the triangulated derivator associated with the stable Quillen model category

$$\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_\mathsf{f}, \mathsf{Sset}_\bullet))\,.$$

- The *Universal additive invariant of dg categories* is the canonical morphism of derivators

$$\mathcal{U}_a : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathcal{M}^{add}_{dg}\,.$$

Remark 3.83. Observe that remark 3.75 and remark 3.28 imply that $\mathcal{M}^{add}_{dg}$ is a compactly generated triangulated derivator.

We sum up the construction of $\mathcal{M}^{add}_{dg}$ in the following diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{dgcat}_f}[S^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{Ho}(h)"'] & \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \arrow[dl, shift left, "\mathbb{R}\underline{h}"] \arrow[dddl, bend left, "\mathcal{U}_u"] \arrow[ddddl, bend left=60, "\mathcal{U}_a"] \\
\mathsf{L}_\Sigma\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_f} \arrow[ur, shift left, "\mathbb{L}Re"] \arrow[d, "\Phi"'] & \\
\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f\bullet}} \arrow[d, "\Psi"'] & \\
\mathcal{M}^{unst}_{dg} \arrow[d, "\varphi"'] & \\
\mathcal{M}^{add}_{dg} &
\end{tikzcd}$$

Observe that the morphism of derivators $\mathcal{U}_a$ is pointed, commutes with filtered homotopy colimits and satisfies the following condition :

A) For every split short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \underset{i_\mathcal{A}}{\overset{R}{\leftrightarrows}} \mathcal{B} \underset{P}{\overset{i_\mathcal{C}}{\leftrightarrows}} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

in $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$, we have a split triangle

$$\mathcal{U}_a(\mathcal{A}) \underset{i_\mathcal{A}}{\overset{R}{\leftrightarrows}} \mathcal{U}_a(\mathcal{B}) \underset{P}{\overset{i_\mathcal{C}}{\leftrightarrows}} \mathcal{U}_a(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1]$$

in $\mathcal{M}_{dg}^{add}(e)$. (This implies that the dg functors $i_{\mathcal{A}}$ and $i_{\mathcal{C}}$ induce an isomorphism

$$\mathcal{U}_a(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{U}_a(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_a(\mathcal{B})$$

in $\mathcal{M}_{dg}^{add}(e)$).

Remark 3.84. Since the dg category $\mathcal{B}$ in the above split short exact sequence is Morita equivalent to the dg category $E(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, see section 1.1 from [Wal85], condition A) is equivalent to the additivity property stated by Waldhausen in [Wal85, 1.3.2].

Let $\mathbb{D}$ be a strong triangulated derivator.

Theorem 3.85. *The morphism $\mathcal{U}_a$ induces an equivalence of categories*

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}_{dg}^{add}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\mathcal{U}_a^*} \underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\, A),\, p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})\,,$$

where $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\, A)\, ,p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$ *denotes the category of morphisms of derivators which commute with filtered homotopy colimits, satisfy condition A) and preserve the point.*

Proof. By theorem 3.25, we have an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}_{dg}^{add}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}_{dg}^{unst}, \mathbb{D})\,.$$

By theorem 3.8, we have an equivalence of categories

$$\underline{\mathsf{Hom}}_!(\mathcal{M}_{dg}^{unst}, \mathbb{D}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Hom}}_{!,\mathcal{E}_{un}^s}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f\bullet}}, \mathbb{D})\,.$$

Now, we observe that since $\mathbb{D}$ is a strong triangulated derivator, the category $\underline{\mathsf{Hom}}_{!,\mathcal{E}_{un}^s}(\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Hot}_{\mathsf{dgcat}_{f\bullet}}, \mathbb{D})$ identifies with $\underline{\mathsf{Hom}}_{flt,\, A),\, p}(\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}), \mathbb{D})$. This proves the theorem. □

Terminology 3.86. We call an object of the right hand side category of theorem 3.85 an *additive invariant* of dg categories.

Example 3.87.

- The Hochschild and cyclic homology and the non-connective K-theory defined in section 3.10 are examples of additive invariants.
- Another example is given by Waldhausen's connective K-theory spectrum

$$K^c : \mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \to \mathsf{HO}(Spt)\,,$$

see [Wal85].

Remark 3.88. By theorem 3.85, the morphism of derivators K^c factors through $\mathcal{U}_a$ and so gives rise to a morphism

$$K^c : \mathcal{M}_{dg}^{add} \to \mathsf{HO}(Spt)\,.$$

We now will prove that this morphism of derivators is co-representable in $\mathcal{M}_{dg}^{add}$.

Let $\mathcal{A}$ be a small dg category.

Notation 3.89. We denote by $K(\mathcal{A})^c \in \mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}_{un}^s}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$ the spectrum such that

$$K(\mathcal{A})_n^c := |N.wS_\bullet^{(n+1)}\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})|,\ n \geqslant 0\,,$$

endowed with the natural structure morphisms

$$\beta_n : S^1 \wedge |N.wS_\bullet^{(n+1)}\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})| \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet^{(n+2)}\mathsf{rep}_{mor}(?, \mathcal{A})|,\ n \geqslant 0\,,$$

see [Wal85].

Notice that $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})$ identifies in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M}_{dg}^{add})$ with the suspension spectrum given by

$$(\Sigma^\infty |N.w\mathsf{rep}_{mor}(?,\mathcal{A})|)_n := S^n \wedge |N.w\mathsf{rep}_{mor}(?,\mathcal{A})|\,.$$

Now proposition 3.80 and the fact that the morphism of derivators φ commutes with homotopy colimits implies that we have an isomorphism

$$\mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1] \xrightarrow{\sim} p_! \mathcal{U}_a(S_\bullet \mathcal{A})\,.$$

In particular, we have a natural morphism

$$\eta : \mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1] \to K(\mathcal{A})^c$$

in $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$ induced by the identity in degree 0.

Theorem 3.90. *The morphism η is a fibrant resolution of $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})[1]$.*

Proof. We prove first that $K(\mathcal{A})^c$ is a fibrant object in $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$. By [Hov99][Sch97] we need to show that $K(\mathcal{A})^c$ is an Ω-spectrum, i.e. that $K(\mathcal{A})^c_n$ is a fibrant object $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ and that the induced map

$$K(\mathcal{A})^c_n \to \Omega K(\mathcal{A})^c_{n+1}$$

is a weak equivalence. By Waldhausen's additivity theorem, see [Wal85], we have weak equivalences

$$K(\mathcal{A})^c_n \xrightarrow{\sim} \Omega K(\mathcal{A})^c_{n+1}$$

in $\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. Now observe that for every integer n, $K^c(\mathcal{A})_n$ satisfies conditions (1)-(3) of proposition 3.78. Condition (4) follows from Waldhausen's fibration theorem, as in the proof of proposition 3.80, applied to the $S_\bullet$-construction. This shows that $K(\mathcal{A})^c$ is an Ω-spectrum.

We now prove that η is a (componentwise) weak equivalence in $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet))$. For this, we prove first that the structural morphisms

$$\beta_n : S^1 \wedge N.wS_\bullet^{(n+1)}\mathsf{rep}_{mor}(?,\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet^{(n+2)}\mathsf{rep}_{mor}(?,\mathcal{A})|,\ n \geqslant 0\,,$$

see notation 3.89, are weak equivalences in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. By considering the same argument as in the proof of proposition 3.80, using $S_\bullet^{(n+1)}\mathcal{A}$ instead of $\mathcal{A}$, we obtain the following homotopy cocartesian square

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{A})^c_n \arrow[r] \arrow[d] & p_!(\mathcal{U}_u(PS_\bullet^{(n+2)}\mathcal{A})) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & K(\mathcal{A})^c_{n+1} \end{tikzcd}$$

in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$ with $p_!(\mathcal{U}_u(PS_\bullet^{(n+2)}\mathcal{A}))$ contractible. Since $K(\mathcal{A})^c_{n+1}$ is fibrant, proposition 1.5.3 in [Wal85], implies that the previous square is also homotopy cartesian and so the canonical morphism

$$\beta_n^\sharp : K(\mathcal{A})^c_n \to \Omega K(\mathcal{A})^c_{n+1}$$

is a weak equivalence in $\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}_f^o, Sset_\bullet)$. We now show that the structure morphism β_n, which corresponds to $\beta_n^\sharp$ by adjunction, see [Wal85], is also a weak equivalence. The derived adjunction $(S^1 \wedge -, \mathbb{R}\Omega(-))$ induces the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} S^1 \wedge K(\mathcal{A})^c_n \arrow[r] \arrow[dr, "S^1 \wedge^{\mathbb{L}} \beta_n^\sharp"'] & K(\mathcal{A})^c_{n+1} \\ & S^1 \wedge^{\mathbb{L}} \Omega K(\mathcal{A})^c_{n+1} \arrow[u, "\sim"] \end{tikzcd}$$

in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet))$ where the vertical arrow is an isomorphism since the previous square is homotopy bicartesian. This shows that the induced morphism

$$S^1 \wedge K(\mathcal{A})^c_n \longrightarrow K(\mathcal{A})^c_{n+1}$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet))$ and so β_n is a weak equivalence.

Now to prove that η is a componentwise weak equivalence, we proceed by induction : observe that the zero component of the morphism η is the identity. Now suppose that the n-component of η is a weak equivalence. The $n+1$-component of η is the composition of β_{n+1}, which is a weak equivalence, with the suspension of the n-component of η, which by proposition 3.5 is also a weak equivalence.

This proves the theorem. $\square$

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be small dg categories. We denote by $\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(-,-)$ the spectrum of morphisms in $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet))$.

Theorem 3.91. *We have the following weak equivalence of spectra*

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,,$$

where $K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ denotes Waldhausen's connective K-theory spectrum of $\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

In particular, we have the following weak equivalence of simplicial sets

$$\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} |N.wS_\bullet \mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})|$$

and so the isomorphisms

$$\pi_{i+1}\mathsf{Map}(\mathcal{U}_a(A), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B})),\ \ \forall i \geqslant 0\,.$$

Proof. Suppose first that $\mathcal{A}$ belongs to dgcat_f. In this case $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})$ identifies with the suspension spectrum

$$\Sigma^\infty |N.w\mathsf{rep}_{mor}(?,\mathcal{A})|$$

which is cofibrant in $\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathsf{L}_{\widetilde{\mathcal{E}^s_{un}}}\mathsf{L}_{\Sigma,P}\mathsf{Fun}(\mathsf{dgcat}^o_f, Sset_\bullet))$. Since $\mathcal{A}$ belongs to dgcat_f and by theorem 3.90 we have the following equivalences

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) & \simeq \mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(\mathcal{A}), K^c(\mathcal{B})) \\ & \simeq K^c(\mathcal{B})(\mathcal{A}) \\ & \simeq K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,. \end{aligned}$$

Now, for a dg category $\mathcal{A}$ we have an equivalence

$$\operatorname*{hocolim}_{i\in I} \mathcal{A}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\,,$$

where I is a filtered category and $\mathcal{A}_i$ belongs to dgcat_f. Since $\mathcal{U}_a$ commutes with filtered homotopy colimits, we have

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(A), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) & \simeq \mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\operatorname*{hocolim}_{i\in I} \mathcal{U}_a(\mathcal{A}_i), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \\ & \simeq \operatorname*{holim}_{i\in I} \mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(A), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \\ & \simeq \operatorname*{holim}_{i\in I} K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A}_i,\mathcal{B})) \\ & \simeq K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\operatorname*{hocolim}_{i\in I} \mathcal{A}_i,\mathcal{B})) \\ & \simeq K^c(\mathsf{rep}_{mor}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,. \end{aligned}$$

This proves the theorem. $\square$

Remark 3.92. Remark that if in the above theorem, we consider $\mathcal{A} = k$, we have

$$\mathsf{Hom}^{\mathsf{Sp}^{\mathbb{N}}}(\mathcal{U}_a(k), \mathcal{U}_a(\mathcal{B})[1]) \xrightarrow{\sim} K^c(\mathcal{B}) .$$

This shows that Waldhausen's connective K-theory spectrum becomes co-representable in $\mathcal{M}_{dg}^{add}$.

3.16 Concluding remarks

By the universal properties of $\mathcal{U}_u$, $\mathcal{U}_a$ and $\mathcal{U}_l$, we obtain the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{HO}(\mathsf{dgcat}) \arrow[r, "\mathcal{U}_u"] \arrow[dr, "\mathcal{U}_a"] \arrow[ddr, "\mathcal{U}_l"'] & \mathcal{M}_{dg}^{unst} \arrow[d, dotted] \\
& \mathcal{M}_{dg}^{add} \arrow[d, dotted, "\Phi"] \\
& \mathcal{M}_{dg}^{loc} .
\end{tikzcd}$$

Notice that Waldhausen's connective K-theory is an example of an additive invariant which is NOT a localizing one, see [Kel06b]. Waldhausen's connective K-theory becomes co-representable in $\mathcal{M}_{dg}^{add}$ by theorem 3.91.

To the best of the author's knowledge, this is the first conceptual characterization of Quillen-Waldhausen K-theory [Qui67] [Wal85].

An analoguous result should be true for non-connective K-theory and the morphism Φ should be thought of as co-representing *'the passage from additivity to localization'*.

Part II

Ramifications de la théorie homotopique des DG-catégories

Chapter 4

The Q-model for the Morita homotopy theory of DG categories

Ce chapitre correspond à l'article [Tabc].

4.1 Introduction

A differential graded (=dg) category is a category enriched in the category of complexes of modules over some commutative base ring k. Dg categories (and their close cousins: A_∞-categories) provide a framework for 'homological geometry' and for 'non commutative algebraic geometry' in the sense of Drinfeld, Manin, Kontsevich, ... This has motivated much foundational work (*cf.* [Kel06b] for a survey) and notably Toën's construction [Toë07] of an internal Hom-functor for the homotopy category of dg categories with respect to the class of quasi-equivalences (i.e. the dg functors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ which induce quasi-isomorphisms in the morphism complexes and equivalences $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \to \mathsf{H}^0(\mathcal{B})$). This construction was extended in [Tab05a] [Tab06] to the class of Morita dg functors (i.e. the functors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ which induce an equivalence $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \overset{\sim}{\to} \mathcal{D}(\mathcal{B})$ between derived categories).

One of the main problems which Toën had to overcome in [Toë07] was the fact that the natural model structure [Tab05b] on the category of dg categories is not compatible with the tensor product : In fact, the tensor product of two cofibrant dg categories is not cofibrant in general, in the same way as the tensor product of two noncommutative free algebras is not noncommutative free, in general. As a consequence, the category of dg categories is not a monoidal model category in the sense of [Hov99] and its Hom-functor cannot be derived to yield the internal Hom-functor for the homotopy category.

In this paper, we propose a new model for the Morita homotopy category of dg categories (for the case where the ground ring k is a field). Its objects are the localization pairs [Kel99], i.e. the inclusions $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$ of full dg subcategories. Morphisms are defined in the natural way. By definition, a morphism $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ is a weak equivalence iff it induces a Morita dg functor $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}'_1/\mathcal{A}'_0$ in the Drinfeld *dg quotients* [Dri04]. We therefore call this model category the *Q-model*. We show that it admits a natural closed monoidal structure which induces the correct tensor product in the homotopy category. The Q-model is not a monoidal model category, either. Our main theorem (4.37) states that nevertheless, its internal Hom-functor admits a derived functor which yields the correct closed structure in the homotopy category. We thus obtain a new description of Toën's internal Hom-objects. It is expected that it will help to clarify their links with the A_∞-formalism, *cf.* [Kel06a], and in a future 'derived deformation theory' *cf.* [Low], analogous to the deformation theory for abelian categories as developed in [LVdB06].

4.2 Preliminaries

In what follows, k will denote a field. The tensor product $\otimes$ will denote the tensor product over k. Let $\mathsf{Ch}(k)$ denote the category of complexes over k. By a *dg category*, we mean a differential graded k category, see definition 1.1. For a dg category $\mathcal{A}$, we denote by $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ the dg category of right $\mathcal{A}$ dg modules and by $\widehat{\ }: \mathcal{A} \to \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ the Yoneda dg functor. We write dgcat for the category of small dg categories. It is proven in theorem 2.27, that the category dgcat admits a structure of cofibrantly generated model category whose weak equivalences are the Morita dg functors (i.e. the dg functors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ which induce an equivalence $\mathcal{D}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{A})$ between derived categories). We have at our disposal an explicit set $I = \{Q, S(n)\}$ of generating cofibrations and an explicit set $J = \{R(n), F(n), I_n(k_0, \ldots, k_n), Lh_n(k_0, \ldots, k_n), C\}$ of generating trivial cofibrations.

4.3 Homotopy of DG functors

Let $\mathcal{B}$ be a dg category.

Definition 4.1. Let $P(\mathcal{B})$ be the dg category, see [Dri04, 2.9], whose objects are the closed morphisms of degree zero in $\mathcal{B}$

$$X \xrightarrow{f} Y\,,$$

that become invertible in $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$. We define the complex of morphisms

$$\mathsf{Hom}_{P(\mathcal{B})}(X \xrightarrow{f} Y, X' \xrightarrow{f'} Y')$$

as the homotopy pull-back in $\mathsf{Ch}(k)$ of the diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y') \arrow[d, "f^*"] \\ \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X, X') \arrow[r, "f'_*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y')\,. \end{tikzcd}$$

By this homotopy pull-back we mean the complex

$$\{u \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})}(\mathrm{cone}(\widehat{f}), \mathrm{cone}(\widehat{f}))|\; \pi' u i = 0\}\,,$$

where $i : \widehat{Y} \to \mathrm{cone}(\widehat{f})$ and $\pi' : \mathrm{cone}(\widehat{f'}) \to X'[1]$ are the natural morphisms in $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$, see [Dri04, 2.9].

Remark 4.2. We have a natural commutative diagram in dgcat

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{B} \times \mathcal{B} \\ & P(\mathcal{B}) \arrow[ur, "p_0 \times p_1"'] & \end{tikzcd}\,,$$

where i is the dg functor that associates to an object B of $\mathcal{B}$ the morphism $B \xrightarrow{Id} B$ and p_0, resp. p_1, is the dg functor that sends a closed morphism $X \xrightarrow{f} Y$ to X, resp. Y.

Lemma 4.3. *The dg category $P(\mathcal{B})$ is a path object for $\mathcal{B}$, see [Hir03], in the Quillen model structure described in theorem 1.8.*

Proof. We prove that the dg functor i is a quasi-equivalence. Clearly the dg functor i induces a quasi-isomorphism in $\mathsf{Ch}(k)$

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{P(\mathcal{B})}(i(X), i(Y))\,,$$

for every object $X, Y \in \mathcal{B}$. Remark that the functor $\mathsf{H}^0(i)$ is also essentially surjective. In fact, let $X \xrightarrow{f} Y$ be an object of $P(\mathcal{B})$. Consider the following morphism in $P(\mathcal{B})$ from $i(X)$ to $X \xrightarrow{f} Y$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Id"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "h=0"] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y\,, \end{tikzcd}$$

where h denotes the zero homotopy. Remark that it becomes an isomorphism in $\mathsf{H}^0(P(\mathcal{B}))$ simply because f becomes an isomorphism in $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$. This proves that the dg functor i is a quasi-equivalence. We will now show that the dg functor $p_0 \times p_1$ is a fibration in the Quillen model structure of theorem 1.8. Remark first, that by definition of $P(\mathcal{B})$ the dg functor $p_0 \times p_1$ induces a surjective morphism in $\mathsf{Ch}(k)$

$$\mathsf{Hom}_{P(\mathcal{B})}(X \xrightarrow{f} Y, X' \xrightarrow{f'} Y') \xrightarrow{p_0 \times p_1} \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X, X') \times \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$$

for every object $X \xrightarrow{f} Y$ and $X' \xrightarrow{f'} Y$ in $P(\mathcal{B})$. We will now show that contractions lift along the dg functor $P(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_0 \times p_1} \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Let $X \xrightarrow{f} Y$ be an object of $P(\mathcal{B})$. Remark that a contraction of $X \xrightarrow{f} Y$ in $P(\mathcal{B})$ corresponds exactly to the following morphisms in $\mathcal{B}$, $c_X \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}^{-1}(X,X)$, $c_Y \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}^{-1}(Y,Y)$ and $h \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}^{-2}(X,Y)$ satisfying the relations $d(c_X) = \mathbf{1}_X$, $d(c_Y) = \mathbf{1}_Y$ and $d(h) = c_Y \circ f + f \circ c_X$. Suppose now, that we have a contraction (c_1, c_2) of (X,Y) in $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. We can lift this contraction by considering $c_X = c_1$, $c_Y = c_2$ and $h = c_2 \circ f \circ c_1$. This shows that contractions lift along the dg functor $P(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_0 \times p_1} \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. We have the following equivalence of dg categories

$$\text{pre-tr}(P(\mathcal{B})) \xrightarrow{\sim} P(\text{pre-tr}(\mathcal{B}))\,,$$

where pre-tr denotes the pre-triangulated hull of a dg category, see [Dri04, 2.4]. This implies that the dg functor $p_0 \times p_1$ is a fibration. ☐

Let $\mathcal{A}$ be a cofibrant dg category and $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dg functors. Since every dg category is fibrant in the Quillen model structure of theorem 1.8, see remark 1.14, the dg functors F and G are homotopic if and only if there exists a dg functor $H : \mathcal{A} \to P(\mathcal{B})$ that makes the following diagram commute

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"'] & P(\mathcal{B}) \arrow[u, "P_0"'] \arrow[d, "P_1"] \\ & \mathcal{B}\,, \end{tikzcd}$$

see [Hir03].

Remark 4.4. Remark that a dg functor H as above corresponds exactly, see [Kel99], to:

- a morphism $\eta A : F(A) \to G(A)$ of $Z^0(\mathcal{B})$ which becomes invertible in $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ for all $A \in \mathcal{A}$ (but which will not be functorial in A, in general) and

- a morphism of graded k-modules homogeneous of degree -1

$$h = h(A, B) : \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), G(B))\,,$$

for all $A, B \in \mathcal{A}$ such that we have

$$(\eta B)(F(f)) - (G(f)(\eta A) = d(h(f)) + h(d(f))$$

and

$$h(fg) = h(f)(F(g)) + (-1)^n (G(f))h(g)$$

for all composable morphismes f, g of $\mathcal{A}$, where f is of degree n.

It is shown in [Kel99] that if we have a dg functor H as above and the dg category $\mathcal{B}$ is stable under cones, we can construct a sequence of dg functors

$$F \to I \to G[1]\,,$$

where $I(A)$ is a contractible object of $\mathcal{B}$, for all $A \in \mathcal{B}$.

4.4 Q-model structure

Definition 4.5. A *localization pair* $\mathcal{A}$ is given by a small dg category $\mathcal{A}_1$ and a full dg subcategory $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$. A *morphism* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ of localization pairs is given by a commutative square

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_0"'] & \mathcal{A}_1 \arrow[d, "F_1"] \\ \mathcal{B}_0 \arrow[r, hook] & \mathcal{B}_1 \end{tikzcd}$$

of dg functors.

We denote by Lp the category of localization pairs.
Let $\mathcal{A}$ be a localization pair.

Definition 4.6. The *dg quotient* of $\mathcal{A}$, see [Dri04], is the dg category $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0$ obtained from $\mathcal{A}_1$ by introducing a new morphism h_X of degree -1 for every object X of $\mathcal{A}_0$ and by imposing the relation $d(h_X) = \mathbf{1}_X$.

4.4.1 Morita model structure

Let L be the category with two objects 0 and 1 and with a unique non identity morphism $0 \to 1$.

Remark 4.7. An immediate application of Theorem 11.6.1 from [Hir03] implies that the category dgcat^L, i.e. the category of morphisms in dgcat, admits a structure of cofibrantly generated model category whose weak equivalences W are the componentwise Morita dg functors and with generating cofibrations $\mathbf{F}_I^L$ and generating trivial cofibrations $\mathbf{F}_J^L$, where we use the notation of [Hir03]:

The functor $\mathbf{F}_?^i$, $i = 0, 1$, from dgcat to dgcat^L is left adjoint to the natural evaluation functor Ev_i, $i = 0, 1$, from dgcat^L to dgcat. By definition, we have $\mathbf{F}_I^L = \mathbf{F}_I^0 \cup \mathbf{F}_I^1$ and $\mathbf{F}_J^L = \mathbf{F}_J^0 \cup \mathbf{F}_J^1$.

The inclusion functor $U : \mathsf{Lp} \to \mathsf{dgcat}^L$ admits a left adjoint S which sends an object $G : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1$ to the localization pair formed by $\mathcal{B}_1$ and its full dg subcategory $\mathsf{Im}\, G$.

Proposition 4.8. *The category* Lp *admits a structure of cofibrantly generated model category whose weak equivalences* W *are the componentwise Morita dg functors and with generating cofibrations* $\mathbf{F}_I^L$ *and generating trivial cofibrations* $\mathbf{F}_J^L$*.*

Proof. We first prove that Lp is complete and cocomplete. Let $\{X_i\}_{i\in I}$ be a diagram in Lp. We remark that

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} X_i \xrightarrow{\sim} S(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(X_i))\,,$$

which implies that $\mathsf{L}p$ is cocomplete. The category Lp is also complete, since it is stable under products and equalizers in dgcat^L. We now prove that conditions (1) and (2) of Theorem 11.3.2 from [Hir03] are satisfied :

(1) Since $S(\mathbf{F}_I^L) = \mathbf{F}_I^L$ and $S(\mathbf{F}_J^L) = \mathbf{F}_J^L$ condition (1) is verified.

(2) Since the functor U clearly commutes with filtered colimits, it is enough to prove the following: let $Y \xrightarrow{G} Z$ be an element of the set $\mathbf{F}_J^L$, X an object in Lp and $Y \to X$ a morphism in Lp. Consider the following push-out in Lp:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "G_*"] \\ Z \arrow[r] & Z\coprod_Y X \end{tikzcd}$$

We prove that $U(G_*)$ is a weak equivalence in dgcat^L. We consider two situations:

- if G belongs to the set $\mathbf{F}_J^0 \subset \mathbf{F}_J^L$, then $U(G_*)$ is a weak-equivalence simply because $J-\mathrm{cell} \subset W$ in dgcat , see lemma 2.33.
- if G belongs to the set $\mathbf{F}_J^1 \subset \mathbf{F}_J^L$, then $Ev_1(U(G_*))$ is a Morita dg functor. In particular it induces a quasi-isomorphism in the Hom spaces and since the 0-component of G_* is the identity on objects, the functor $Ev_0(U(G_*))$ is also a Morita dg functor. This implies that $U(G_*)$ is a weak equivalence and so condition (2) is proven.

This proves the proposition.

□

We will now slightly modify the previous Quillen model structure on Lp.
Let σ be the morphism of localization pairs:

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "inc"'] & \mathcal{K}) \arrow[d, equal] \\ (\mathcal{K} \arrow[r, equal] & \mathcal{K})\,, \end{tikzcd}$$

where $\mathsf{End}_{\mathcal{K}}(1)$ is the dg algebra of endomorphisms of the object 1 in $\mathcal{K}$, see section 1.3, and *inc* is the natural inclusion dg-functor. Clearly σ is a componentwise Morita dg functor. We write $\tilde{\mathbf{F}}_I^L$ resp. $\tilde{\mathbf{F}}_J^L$ for the union of $\{\sigma\}$ with $\mathbf{F}_I^L$ resp. $\mathbf{F}_J^L$.

Proposition 4.9. *The category* Lp *admits a structure of cofibrantly generated model category whose weak equivalences* W *are the componentwise Morita dg functors and with generating cofibrations* $\tilde{\mathbf{F}}_I^L$ *and generating trivial cofibrations* $\tilde{\mathbf{F}}_J^L$*.*

Proof. The proof will consist in verifying that conditions (1) – (6) of Theorem 2.1.19 from [Hov99] are satisfied. Clearly the class W has the two out of three property and is closed under retracts. This shows condition (1). Since the localization pair $(\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(1) \subset \mathcal{K})$ is small in Lp, it is clear that the domains of $\tilde{\mathbf{F}}^L_I$, resp. $\tilde{\mathbf{F}}^L_J$, are small relative to $\tilde{\mathbf{F}}^L_I -$ cell, resp. $\tilde{\mathbf{F}}^L_J -$ cell and so conditions (2) and (3) are also satisfied. We have

$$\mathbf{F}^L_I - \mathrm{inj} = \mathbf{F}^L_J - \mathrm{inj} \cap W$$

and so by construction

$$\tilde{\mathbf{F}}^L_I - \mathrm{inj} = \tilde{\mathbf{F}}^L_J - \mathrm{inj} \cap W\,.$$

This shows conditions (5) and (6). We now prove that $\tilde{\mathbf{F}}^L_J -$ cell $\subset W$. Since $\mathbf{F}^L_J -$ cell $\subset W$ it is enough to prove that pushouts with respect to σ belong to W. Let $\mathcal{A}$ be a localization pair and

$$T : (\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(1) \subset \mathcal{K}) \to (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$$

a morphism in Lp. Consider the following push-out in Lp:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{End}_{\mathcal{K}}(1) \subset \mathcal{K}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1) \arrow[d, "R"] \\
(\mathcal{K} = \mathcal{K}) \arrow[r] & (\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1)\,.
\end{tikzcd}$$

We remark that the morphism T corresponds to specifying an homotopy equivalence in $\mathcal{A}_1$ from an object X to an object Y, where the object X belongs to $\mathcal{A}_0$. Clearly $\mathcal{U}_1 = \mathcal{A}_1$ and $\mathcal{U}_0$ identifies with the full dg-subcategory of $\mathcal{U}_1$ whose objects are Y and those of $\mathcal{A}_0$. Since X and Y are homotopy equivalent, the natural dg-functor $R_0 : \mathcal{A}_0 \hookrightarrow \mathcal{U}_0$ is a quasi-equivalence. This proves condition (4). The proposition is now proven. $\square$

Remark 4.10. Remark that in this new Quillen model structure on Lp we have more cofibrations and fewer fibrations than the Quillen model structure of proposition 4.8 since the weak equivalences are the same.

From now on, by Quillen model structure on Lp we mean that of proposition 4.9.

Lemma 4.11. *A localization pair $(\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$ is fibrant in Lp if and only if $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_1$ are Morita fibrant dg categories and $\mathcal{A}_0$ is stable under homotopy equivalences in $\mathcal{A}_1$.*

Proof. A localization pair $(\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$ is fibrant in Lp if and only if for every morphism F in $\tilde{\mathbf{F}}^L_J$, the following extension problem in Lp is solvable:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1) \\
Y \arrow[ur, dashed] & .
\end{tikzcd}$$

If F belongs to $\mathbf{F}^L_J$ this means that $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_1$ are fibrant and if $F = \sigma$, remark that it corresponds exactly to the statement that $\mathcal{A}_0$ is stable under homotopy equivalences in $\mathcal{A}_1$. $\square$

Lemma 4.12. *If the localization pair $\mathcal{A}$ is cofibrant in Lp then $\mathcal{A}_1$ is cofibrant in dgcat.*

Proof. We need to construct a lift to the following problem :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[d, "P", "\sim"'] \\ \mathcal{A}_1 \arrow[r] & \mathcal{B}\,, \end{tikzcd}$$

where P is a trivial fibration in dgcat, see proposition 4.9, and $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$ is a dg-functor. Consider the following diagram in Lp:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F}^0_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\mathbf{F}^0_P", "\sim"'] \\ \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathbf{F}^0_{\mathcal{B}}\,. \end{tikzcd}$$

where $\mathcal{A} \to \mathbf{F}^0_{\mathcal{B}}$ is the natural morphism of localization pairs. Remark that $\mathbf{F}^0_P$ belongs to $\sigma-\mathrm{inj}\cap\mathbf{F}^L_I-\mathrm{inj}$ and so is a trivial fibration in Lp. Since $\mathcal{A}$ is cofibrant in Lp we have a lifting $\mathcal{A} \to \mathbf{F}^0_{\mathcal{C}}$ that when restricted to the 1-component gives us the searched lift $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}$. This proves the lemma. □

4.4.2 Q-model structure

Definition 4.13. Let $Q : \mathsf{Lp} \to \mathsf{Lp}$ be the functor that sends a localization pair $\mathcal{A}$ to the localization pair

$$\overline{\mathcal{A}_0} \hookrightarrow \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0\,,$$

where $\overline{\mathcal{A}_0}$ is the full dg-subcategory of $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0$ whose objets are those of $\mathcal{A}_0$.

Remark 4.14. Remark that we have natural morphisms

$$\eta_{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1) \to (\overline{\mathcal{A}_0} \subset \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)$$

in Lp.

Definition 4.15. A morphism of localization pairs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ is a *Q-weak equivalence* if the induced morphism $Q(F)$ is a weak equivalence in the Quillen model structure of proposition 4.9.

Remark 4.16. Remark that since the objects of $\overline{\mathcal{A}_0}$ and $\overline{\mathcal{B}_0}$ are all contractible, the dg-functor $\overline{\mathcal{A}_0} \to \overline{\mathcal{B}_0}$ is clearly a Morita dg functor and so the morphism F is a Q-weak equivalence if and only if the induced dg-functor $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0$ is a Morita dg functor.

Definition 4.17. A morphism in Lp is a *cofibration* if it is one for the Quillen model structure of Proposition 4.9 and it is a *Q-fibration* if it has the right lifting property with respect to all cofibrations of Lp which are Q-weak equivalences.

Theorem 4.18. *The category Lp admits a structure of Quillen model category, the Q-*model*, whose weak equivalences are the Q-weak equivalences, whose cofibrations are the cofibrations of Lp and whose fibrations are the Q-fibrations.*

The proof will consist of adapting the general arguments from chapter X from [GJ99] to our situation. We start with some remarks:

A1 Since k is a field, every complex $X \in \mathsf{Ch}(k)$ is k-flat and so by theorem 3.4 from [Dri04] the functor Q preserves weak equivalences.

A2 The morphisms of localization pairs:

$$Q(\mathcal{A}) \underset{Q(\eta_{\mathcal{A}})}{\overset{\eta_{Q(\mathcal{A})}}{\rightrightarrows}} QQ(\mathcal{A})$$

are weak equivalences in Lp. This follows from the fact that in both cases we are introducing contractions to objects that are already contractible and that the functor Q is the identity functor on objects.

Lemma 4.19. *A morphism $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ is a fibration and a weak equivalence of* Lp *if and only if it is a Q-weak equivalence and a Q-fibration.*

Proof. Since condition **A1** is verified (i.e. the functor Q preserves weak equivalences) we can use the proof of lemma 4.3 in chapter X from [GJ99]. □

Nonexample 4.20. Remark that the Quillen model structure of proposition 4.9 is not right proper, see [Hir03].
Let $\mathcal{B}$ be your favorite Morita fibrant dg category, whose derived category $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ is not trivial. In particular the dg functor $P : \mathcal{B} \to 0$, where 0 denotes the terminal object in dgcat is a fibration. Let $\mathcal{A}$ be the dg category with one object 1 and whose dg algebra of endomorphisms of 1 is k. Consider the following diagram :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "i_0 \circ P"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "j_{\mathcal{A}}"'] & 0 \coprod \mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

Clearly $j_{\mathcal{A}}$ is a Morita dg functor and remark that the dg functor $i_0 \circ P$ is a fibration, since the object 1 in $\mathcal{A}$ is not contractible. This implies that in the fiber product

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{B} \arrow[d, "i_0 \circ P"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "j_{\mathcal{A}}"'] & 0 \coprod \mathcal{A}, \end{tikzcd}$$

the dg functor $\emptyset \to \mathcal{B}$ is not a Morita dg functor and so this Quillen model structure is not right proper. This implies that the Quillen model structure of proposition 4.9 is also not right proper. Apply the functor $\mathbf{F}^0_?$ from dgcat to Lp to the previous fiber product :

$$\begin{tikzcd} \emptyset = \mathbf{F}^0_{\emptyset} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathbf{F}^0_{\mathcal{B}} \arrow[d, "\mathbf{F}^0_{i_0 \circ P}"] \\ \mathbf{F}^0_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\mathbf{F}^0_{j_{\mathcal{A}}}"'] & \mathbf{F}^0_{0 \coprod \mathcal{A}}. \end{tikzcd}$$

We have a fiber product since the functor $\mathbf{F}^0_?$ preserves limits. Clearly $\mathbf{F}^0_{j_{\mathcal{A}}}$ is a weak equivalence in Lp and remark that the morphism $\mathbf{F}^0_{i_0 \circ P}$ belongs to $\sigma - \mathrm{inj} \cap \mathbf{F}^L_J - \mathrm{inj}$, which implies that it is a fibration in Lp.

Nevertheless we have the following lemma.

Lemma 4.21. *Let $\mathcal{A}$ be a localization pair such that the natural morphism*

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} Q(\mathcal{A})$$

is a weak equivalence in Lp. *Let $F : \mathcal{W} \to Q(\mathcal{A})$ be a fibration in* Lp. *Then the morphism*

$$\eta^*_{\mathcal{A}} : \mathcal{W} \underset{Q(\mathcal{A})}{\times} \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$$

is a weak equivalence in Lp.

Proof. We remark that each component of the morphism $\eta_{\mathcal{A}}$ is the identity functor on the objects of the dg categories involved. Since fiber products in Lp are calculated componentwise, we conclude that each component of the morphism $\eta^*_{\mathcal{A}}$ is the identity functor on the objects. Let X and Y be arbitrary objects of $\mathcal{W}_1$. We remark that we have the following fiber product in $\mathsf{Ch}(k)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_1 \underset{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}{\times} \mathcal{A}_1}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\eta^*(F_1X,F_1Y)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1}(F_1X,F_1Y) \arrow[d, "\sim"', "\eta(F_1X,F_1Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}_1}(X,Y) \arrow[r, two heads, "F_1(X,Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}(F_1X,F_1Y) .
\end{tikzcd}$$

Since F is a fibration in Lp, $F_1(X,Y)$ is a fibration in the projective model structure on $\mathsf{Ch}(k)$ and since this Quillen model structure on $\mathsf{Ch}(k)$ is right proper, $\eta^*(F_1X,F_1Y)$ is a quasi-isomorphism. We could do the same argument for X and Y objects in $\mathcal{W}_0$ instead of $\mathcal{W}_1$. This proves the lemma. $\square$

Lemma 4.22. *Suppose that $F : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}$ is a fibration in* Lp *and that $\eta_{\mathcal{A}}$ and $\eta_{\mathcal{B}}$ are weak equivalences of* Lp. *Then F is a Q-fibration.*

Proof. Consider exactly the same proof as for lemma 4.4 in chapter X from [GJ99], but use lemma 4.21 instead of the right properness assumption on Lp. $\square$

Lemma 4.23. *Any morphism $F : Q(\mathcal{A}) \to Q(\mathcal{B})$ has a factorization $F = P \circ I$ where $P : \mathcal{Z} \to Q(\mathcal{B})$ is a Q-fibration and $I : Q(\mathcal{A}) \to \mathcal{Z}$ is a cofibration and a Q-weak equivalence.*

Proof. Since lemma 4.22 and conditions **A1** and **A2** are satisfied, we consider the proof of lemma 4.5 in chapter X from [GJ99]. $\square$

Let $\mathcal{A}$ be a localization pair. By condition **A2** we know that the natural morphism:

$$\eta_{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\overline{\mathcal{A}_0} \subset \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)$$

is a Q-weak equivalence in Lp.

Lemma 4.24. *Let $F : \mathcal{Z} \to Q(\mathcal{A})$ be a fibration in* Lp. *Then the induced morphism*

$$\eta^*_{\mathcal{A}} : \mathcal{Z} \underset{Q(\mathcal{A})}{\times} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

is a Q-weak equivalence in Lp.

Proof. We need to prove that $Q(\eta^*_{\mathcal{A}})$ is a weak equivalence in Lp.

(1) We prove that the induced morphism:

$$Q(\eta_{\mathcal{A}})^* : Q(\mathcal{Z}) \underset{QQ(\mathcal{A})}{\times} Q(\mathcal{A}) \longrightarrow Q(\mathcal{Z})$$

is a weak equivalence in Lp. Remark first that since F is a fibration in Lp, the dg functors F_0 and F_1 are Morita fibrations and so they are surjective at the level of Hom-spaces. We now show that the dg functor $F_0 : \mathcal{Z}_0 \to \overline{\mathcal{A}_0}$ is surjective on objects. If $\overline{\mathcal{A}_0}$ is the empty dg category then so is $\mathcal{Z}_0$ and the claim is showed. If $\overline{\mathcal{A}_0}$ is not empty, every object X in $\overline{\mathcal{A}_0}$ is contractible and since the dg functor F_0 belongs to $C-\mathrm{inj}$ there exists an object Y in $\mathcal{Z}_0$ such that $F_0(Y) = X$. This implies that each component of the morphism

$$Q(F) : Q(\mathcal{Z}) \longrightarrow QQ(\mathcal{A})$$

is a dg functor that is surjective at the level of Hom-spaces. Since by condition **A2** the morphism

$$(Q\eta_{\mathcal{A}}) : Q(\mathcal{A}) \longrightarrow QQ(\mathcal{A})$$

is a weak equivalence an analogous argument to the proof of lemma 4.21 (we have just proved that $F_1(X,Y)$ is a fibration in the projective model structure on $\mathsf{Ch}(k)$), proves the condition (1).

(2) We prove that the induced morphism:

$$Q(\mathcal{Z} \underset{Q(\mathcal{A})}{\times} \mathcal{A}) \longrightarrow Q(\mathcal{Z}) \underset{QQ(\mathcal{A})}{\times} Q(\mathcal{A})$$

is an isomorphism in Lp. Since by construction the functor Q is the identity functor on objects, both components of the above morphism are also the identity on objects. Let us consider the 1-component of the above morphism. Let X and Y be objects of $\mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}_0$. We have the following fiber product in $\mathsf{Ch}(k)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}_0 \underset{(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)/\overline{\mathcal{A}_0}}{\times} \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}(F_1(X), F_1(Y)) \arrow[d, "Q\eta_{\mathcal{A}}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}_0}(X,Y) \arrow[r, two heads, "QF_1"] & \mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)/\overline{\mathcal{A}_0}}(F_1(X), F_1(Y))\,.
\end{tikzcd}$$

Remark that the functor $Q\eta_{\mathcal{A}}$, resp. QF_1, sends the contractions in $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0$, resp. $\mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}_0$, associated with the objects of $\mathcal{A}_0$, resp. $\mathcal{Z}_0$, to the new contractions in $(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)/\overline{\mathcal{A}_0}$ associated with the objects of $\overline{\mathcal{A}_0}$. Recall that we have the following fiber product in $\mathsf{Ch}(k)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_1 \underset{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}{\times} \mathcal{A}_1}(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1}(F_1X, F_1Y) \arrow[d, "\eta"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_1}(X,Y) \arrow[r, two heads, "F_1"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}(F_1X, F_1Y)\,.
\end{tikzcd}$$

A analysis of the above fiber products shows that the induced morphism

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{Z}_1 \underset{\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}{\times} \mathcal{A}_1)/(\mathcal{Z}_0 \underset{\overline{\mathcal{A}_0}}{\times} \mathcal{A}_0)}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}_0 \underset{(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)/\overline{\mathcal{A}_0}}{\times} \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0}(X,Y)$$

is an isomorphism in $\mathsf{Ch}(k)$. The same argument applies to the 0-component of the above morphism. This proves condition (2).

Now, conditions 1) and 2) imply that the morphism

$$Q(\mathcal{Z} \underset{Q(\mathcal{A})}{\times} \mathcal{A}) \overset{(Q\eta)^*_{\mathcal{A}}}{\longrightarrow} Q(\mathcal{Z})$$

is a weak equivalence in Lp, which is exactly the statement of the lemma. The lemma is then proved. $\square$

Lemma 4.25. *Any morphism $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ of Lp has a factorization $F = Q \circ J$ where $Q : \mathcal{Z} \to \mathcal{B}$ is a Q-fibration and $J : \mathcal{A} \to \mathcal{Z}$ is a cofibration and a Q-weak equivalence.*

Proof. Consider exactly the same proof as for lemma 4.6 in chapter X from [GJ99], but use lemma 4.24 instead of condition **A3**. $\square$

We now prove theorem 4.18.

Proof. We will prove that conditions $M1 - M5$ of definition 7.1.3 from [Hir03] are satisfied. By the proof of proposition 4.8, the category Lp is complete and cocomplete and so condition $M1$ is verified. By definition the Q-weak equivalences in Lp satisfy condition $M2$, i.e. the two out of three condition. Clearly the Q-weak equivalences and Q-fibrations in Lp are stable under retractions. Since the cofibrations are those of proposition 4.9 condition $M3$ is verified. Finally lemma 4.19 implies the lifting condition $M4$ and lemmas 4.19 and 4.25 imply the factorization condition $M5$. $\square$

4.4.3 Q-fibrant objects

We denote by $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$ the homotopy category of Lp given by theorem 4.18.

Let $\mathcal{A}$ be a localization pair.

Lemma 4.26. *If $\mathcal{A}$ is fibrant, in the Quillen model structure of proposition 4.9, and the morphism $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to Q(\mathcal{A})$ is a weak equivalence in Lp then $\mathcal{A}$ is Q-fibrant.*

Proof. We need to show that the morphism $\mathcal{A} \xrightarrow{P} 0$ is a Q-fibration, where 0 denotes the terminal object in Lp. Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "P"'] & Q(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q(P)"] \\ 0 \arrow[r, "\eta"'] & Q(0)\,. \end{tikzcd}$$

Factorize the morphism $Q(P)$ as

$$\begin{tikzcd} Q(\mathcal{A}) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "Q(P)"'] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\ & Q(0)\,, \end{tikzcd}$$

where i is a trivial cofibration and q a fibration in Lp. By the proof of lemma 4.23, q is a Q-fibration. Since the morphism $0 \to Q(0)$ is a weak equivalence, lemma 4.21 implies that the induced morphism $0 \underset{Q(0)}{\times} \mathcal{A} \to \mathcal{Z}$ is a weak equivalence. Since $\eta_{\mathcal{A}}$ is a weak equivalence the induced morphism

$$\theta : \mathcal{A} \to 0 \underset{Q(0)}{\times} \mathcal{Z}$$

is also a weak equivalence. Factorize the morphism θ as

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\theta"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\pi"] \\ & 0 \underset{Q(0)}{\times} \mathcal{Z}\,, \end{tikzcd}$$

where π is a trivial fibration of Lp and j is a trivial cofibration. Then $q_* \circ \pi$ is a Q-fibration and the lifting exists in the diagram :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{W} \arrow[r, "q_* \circ \pi"'] \arrow[ur, dotted] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Thus P is a rectract of a Q-fibration, and is therefore a Q-fibration itself. This proves the lemma. $\square$

Lemma 4.27. *If $\mathcal{A}$ is Q-fibrant, then $\mathcal{A}$ is fibrant in* Lp *and the natural morphism*

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to Q(\mathcal{A})$$

is a weak equivalence.

Proof. Since the Q-model structure on Lp has fewer fibrations than the Quillen model structure of proposition 4.9, the localization pair $\mathcal{A}$ is fibrant in Lp. Consider the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "p"'] & Q(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q(p)"] \\ 0 \arrow[r, "\eta"'] & Q(0)\,. \end{tikzcd}$$

Factorize $Q(p) = q \circ i$ as in the previous lemma. We have the following diagram :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & 0 \underset{Q(0)}{\times} \mathcal{Z} \arrow[dl, "q_*"] \\ 0 & \end{tikzcd}$$

Since p and q_* are Q-fibrations, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{Z}$ are Q-fibrant objects in Lp and θ is a Q-weak equivalence in Lp. By application of lemma 7.7.1 b) from [Hir03] to θ and using lemma 4.19 we conclude that θ is a weak equivalence. Since so is i, we conclude that $\eta_{\mathcal{A}}$ is also a weak equivalence. This proves the lemma. $\square$

Remark 4.28. By lemmas 4.26 and 4.27 a localization pair $\mathcal{A}$ is Q-fibrant if and only if it is fibrant in Lp and the natural morphism

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow Q(\mathcal{A})$$

is a weak equivalence.

We now describe explicitly the Q-fibrant objects in Lp.

Proposition 4.29. *A localization pair $\mathcal{A}$ is Q-fibrant, i.e. fibrant in the model structure of Theorem 4.18, if and only if it is isomorphic in* Lp *to a localization pair of the form :*

$$(\mathcal{B}_{contr} \subset \mathcal{B}),$$

where $\mathcal{B}$ is a fibrant dg category and $\mathcal{B}_{contr}$ is the full dg subcategory of contractible objects in $\mathcal{B}$.

Proof. Suppose first that $\mathcal{A}$ is Q-fibrant. Since it is also fibrant in Lp the dg category $\mathcal{A}_1$ is fibrant in dgcat. Since the morphism

$$\eta_{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\overline{\mathcal{A}_0} \subset \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0)$$

is a weak equivalence all the objects of $\mathcal{A}_0$ are contractible. Since $\mathcal{A}$ is fibrant in Lp by lemma 4.11 $\mathcal{A}_0$ is stable under homotopy equivalences in $\mathcal{A}_1$. This implies that $\mathcal{A}_0$ is in fact the full dg subcategory of contractible objects of $\mathcal{A}_1$. Consider now a localization pair $(\mathcal{B}_{contr} \subset \mathcal{B})$ as in the statement of the proposition. We remark that since $\mathcal{B}$ is fibrant in dgcat, then $\mathcal{B}_{contr}$ is also fibrant. Clearly $(\mathcal{B}_{contr} \subset \mathcal{B})$ satisfies the extension condition with regard to σ and the morphism

$$\eta : (\mathcal{B}_{contr} \subset \mathcal{B}) \longrightarrow (\overline{\mathcal{B}_{contr}} \subset \mathcal{B}/\mathcal{B}_{contr})$$

is a weak equivalence in Lp. This proves the proposition. □

4.5 Closed symmetric monoidal structure

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be small dg categories. Recall from [Kel06b] [Toë07] that the tensor product $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ of two dg categories has the class of objects $\mathrm{obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{obj}(\mathcal{B})$ and the morphism spaces

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((X,Y),(X',Y')) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X') \otimes \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Y')$$

with the natural compositions and units. Recall also from [Kel06b] [Toë07] that we have the the dg category of dg functors $\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{B}$. For two dg functors $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, the *complex of graded morphisms* $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B})}(F,G)$ has as its nth component the module formed by the families of morphisms

$$\phi_X \in \mathsf{Hom}^n_{\mathcal{B}}(FX, GX)$$

such that $(Gf)(\phi_X) = (\phi_Y)(Ff)$ for all $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $X, Y \in \mathcal{A}$. The differential is induced by that of $\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(FX, GX)$.

Definition 4.30. The *internal* Hom *functor* in Lp

$$\mathsf{Hom}(-,-) : \mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp} \longrightarrow \mathsf{Lp},$$

associates to the localization pairs $(\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1)$ the localization pair :

$$(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0) \subset \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0) \underset{\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_1)}{\times} \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_1, \mathsf{B}_1)).$$

Definition 4.31. The *tensor product* functor in Lp

$$- \otimes - : \mathsf{Lp} \times \mathsf{Lp} \longrightarrow \mathsf{Lp}$$

associates to the localization pairs $(\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1)$ the localization pair :

$$(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1),$$

where $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0$ is the full dg subcategory of $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ consisting of those objects $a \otimes b$ of $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ such that a belongs to $\mathcal{A}_0$ or b belongs to $\mathcal{B}_0$.

Let $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1)$ and $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1)$ be localization pairs.

Proposition 4.32. *The category* Lp *endowed with the functors* $\mathsf{Hom}(-,-)$ *and* $- \otimes -$ *is a closed symmetric monoidal category. In particular we have a natural isomorphism in* Lp*:*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Lp}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Lp}}(\mathcal{A}, \mathsf{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))\,.$$

Proof. Consider the following commutative square in dgcat :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_0) \arrow[d] \\
\mathcal{A}_1 \arrow[r] & \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0) \underset{\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_1)}{\times} \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)\,,
\end{tikzcd}$$

which corresponds exactly to an element of $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Lp}}(\mathcal{A}, \mathsf{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$. Recall from [Kel06b] that dgcat endowed with the functors $- \otimes -$ and $\mathsf{Hom}(-,-)$ is a closed symmetric monoidal category. This implies by adjunction that the commutative square above corresponds to the following commutative square in dgcat:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \underset{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0}{\times} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_0 \arrow[d] \\
\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \arrow[r] & \mathcal{C}_1\,.
\end{tikzcd}$$

This commutative square can be seen simply as a morphism in dgcat^L from

$$\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \underset{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0}{\times} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1$$

to the localization pair $(\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1)$. Remark that the morphism

$$\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \underset{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0}{\times} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1$$

of dg categories is injective on objects and that its image consists of those objects $a \otimes b$ of $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ such that a belongs to $\mathcal{A}_0$ or b belongs to $\mathcal{B}_0$. This implies that

$$\mathsf{Im}\,(\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \underset{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0}{\times} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\,,$$

and by the adjunction (S, U) from subsection 4.4.1, this last commutative square in dgcat corresponds exactly to an element of $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Lp}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})$. This proves the proposition. □

Remark 4.33. Remark that the unit object is the localization pair $(\emptyset \subset \mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is the dg category with one object and whose dg algebra of endomorphisms is k.

4.6 Derived internal Hom-functor

Let $\mathcal{A}$ be a cofibrant dg category and λ an infinite cardinal whose size is greater than or equal to the cardinality of the set of isomorphism classes of objects in the category $\mathsf{H}^0(\mathcal{A})$. Let $\mathcal{B}$ be a Morita fibrant dg category. Recall that we denote by $\widehat{\ }: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$ the Yoneda dg functor.

Definition 4.34. Let $\mathcal{B}_\lambda$ be the full dg subcategory of $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{B})$, whose objects are:

- the right $\mathcal{B}$ dg modules M such that $M \oplus D$ is representable for a contractible right $\mathcal{B}$ dg module D and
- the right $\mathcal{B}$ dg modules of the form $\widehat{B} \oplus C$, where B is an object of $\mathcal{B}$ and the right $\mathcal{B}$ dg module C is a direct factor of $\bigoplus_{i \in S} \mathsf{cone}(\mathbf{1}_{\widehat{B_i}})$, with B_i an object of $\mathcal{B}$ and S a set of cardinality bounded by λ.

Let $\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ be the dg category as in [Kel06b] [Toë07].

Remark 4.35. Remark that we have a quasi-equivalence $\mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{B}_\lambda$ and that the objects of $\mathcal{B}_\lambda$ are cofibrant and quasi-representable as right dg $\mathcal{B}$ modules, see [Toë07]. This implies that we have a natural dg functor:

$$\overline{\mathsf{Fun}}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda) := \mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda)/\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)_{contr}) \xrightarrow{\Phi} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}) .$$

Theorem 4.36. *For a cofibrant dg category $\mathcal{A}$, a Morita fibrant dg category $\mathcal{B}$ and an infinite cardinal λ as above, the natural induced dg functor:*

$$\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda)/\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)_{contr}) \xrightarrow{\Phi} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}) ,$$

is a quasi-equivalence.

Proof. We prove first that $\mathsf{H}^0(\Phi)$ is essentially surjective. We have the following composition of dg functors

$$\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{I} \overline{\mathsf{Fun}}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda) \xrightarrow{\Phi} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}) .$$

Since $\mathcal{A}$ is a cofibrant dg category, lemma 4.3 and sub-lemma 4.4 from [Toë07] imply that $\mathsf{H}^0(\Phi \circ I)$ is essentially surjective and so we conclude that so is $\mathsf{H}^0(\Phi)$.

We now prove also that the functor $\mathsf{H}^0(I)$ is essentially surjective. Let $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_\lambda$ be a dg functor. Since $\mathcal{A}$ is a cofibrant dg category and h is a quasi-equivalence, there exists a dg functor $F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ such that F and $h \circ F'$ are homotopic in the Quillen model structure constructed in theorem 1.8. Remark that since $\mathcal{B}$ is a Morita fibrant dg category so is $\mathcal{B}_\lambda$. In particular $\mathcal{B}_\lambda$ is stable under cones up to homotopy, see proposition 2.34. Since a cone can be obtained from a cone up to homotopy, by adding or factoring out contractible modules, we conclude that by definition, $\mathcal{B}_\lambda$ is also stable under cones. By remark 4.4 we dipose of a sequence of dg functors

$$F \longrightarrow I \longrightarrow h \circ F'[1] ,$$

such that I belongs to $\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)_{contr})$. This implies that F and $h \circ F'$ become isomorphic in $\mathsf{H}^0(\overline{\mathsf{Fun}}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda))$. This proves that the functor $\mathsf{H}^0(I)$ is essentially surjective.

Let us now prove that the functor $\mathsf{H}^0(\Phi)$ is fully faithful. Let F belong to $\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda)$. Since $\mathsf{H}^0(I)$ is essentially surjective, we can consider F as belonging to $\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. We will construct a morphism of dg functors

$$F' \xrightarrow{\mu} F ,$$

where μ becomes invertible in $\mathsf{H}^0(\overline{\mathsf{Fun}}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}_\lambda))$ and F' belongs to the left-orthogonal of the category $\mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)_{contr}))$, i.e.

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)))}(F',G) = 0 ,$$

for every $G \in \mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A},(\mathcal{B}_\lambda)_{contr}))$. Consider the $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodule X_F naturally associated to F. Consider X_F as a left $\mathcal{A}$-module and let $\mathbf{P}X_F$ denote the bar resolution of X_F. Remark that $\mathbf{P}X_F$ is naturally a right $\mathcal{B}$-module and that it is cofibrant in the projective model structure on the category of $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodules. Let A be an object of $\mathcal{A}$. Since the dg category $\mathcal{A}$ is cofibrant in dgcat, $(\mathbf{P}X_F)(?,A)$ is cofibrant as a $\mathcal{B}$-module. We have the following homotopy equivalence

$$(\mathbf{P}X_F)(?,A) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mu_A}} X_F(?,A) ,$$

since both $\mathcal{B}$-modules are cofibrant. This implies that the $\mathcal{B}$-module $(\mathbf{P}X_F)(?, A)$ is isomorphic to a direct sum $X_F(?, A) \oplus C$, where C is a contractible and cofibrant $\mathcal{B}$-module. The $\mathcal{B}$-module C is in fact isomorphic to a direct factor of a $\mathcal{B}$-module

$$\bigoplus_{i \in S} (\mathsf{cone}\mathbf{1}_{\widehat{B_i}})[n_i],$$

where S is a set whose cardinality is bounded by λ, B_i, $i \in I$ is an object of $\mathcal{B}$ and n_i, $i \in S$ is an integer, see [Kel94].

This implies, by definition of $\mathcal{B}_\lambda$, that the $\mathcal{B}$-module

$$X_F(?, A) \oplus C$$

belongs to $\mathcal{B}_\lambda$ and so the $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodule $\mathbf{P}X_F$ is in fact isomorphic to $X_{F'}$ for a dg functor $F' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_\lambda$. Remark that the previous construction is functorial in A and so we have a morphism of dg functors

$$F' \xrightarrow{\mu} F .$$

Since for each A in $\mathcal{A}$, the morphism $\mu_A : F'A \to FA$ is a retraction with contractible kernel, the morphism μ becomes invertible in

$$\mathsf{H}^0(\overline{\mathsf{Fun}}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\lambda)) .$$

Let now G belong to $\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}, (\mathcal{B}_\lambda)_{contr})$. We remark that

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\lambda))}(F', G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})}(\mathbf{P}X_F, X_G) ,$$

where $\mathcal{H}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})$ denotes the homotopy category of $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ bimodules. Since $\mathbf{P}X_F$ is a cofibrant $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimodule and $X_G(?, A)$ is a contractible $\mathcal{B}$-module, for every object A in $\mathcal{A}$, we conclude that the right hand side vanishes and F' belongs to the left-orthogonal of $\mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}, (\mathcal{B}_\lambda)_{contr}))$. This implies that the induced functor

$$\mathsf{H}^0(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_\lambda)/\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}, (\mathcal{B}_\lambda)_{contr})) \to \mathsf{H}^0(\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$$

is fully faithful. This proves the theorem. □

Theorem 4.37. *The internal* Hom *functor*

$$\mathsf{Hom}(-, -) : \mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp} \to \mathsf{Lp} ,$$

admits a total right derived functor

$$\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-, -) : \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp}) \to \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$$

as in definition 8.4.7 *from [Hir03].*

Proof. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be localization pairs. We are now going to define $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ and the morphism ϵ as in definition 8.4.7 from [Hir03]. We denote by $\mathcal{A}_c \xrightarrow{P} \mathcal{A}$ a functorial cofibrant resolution of $\mathcal{A}$ in Lp and by $\mathcal{B} \xrightarrow{I} \mathcal{B}_f$ a functorial Q-fibrant resolution of $\mathcal{B}$ in Lp. Remember, that by proposition 4.29, $\mathcal{B}_f$ is of the form

$$\mathcal{B}_f = ((\mathcal{B}_f)_{contr} \subset \mathcal{B}_f) ,$$

where $\mathcal{B}_f$ is a Morita fibrant dg category. Let λ be an infinite cardinal whose size is greater or equal to the cardinality of the set of isomorphim classes in the category $\mathsf{H}^0((\mathcal{A}_c)_1)$. Consider now the following localization pair

$$(\mathcal{B}_f)_\lambda := (((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr} \subset (\mathcal{B}_f)_\lambda) ,$$

where $(\mathcal{B}_f)_\lambda$ is as in definition 4.34. Remark that we have a canonical weak equivalence in Lp

$$\mathcal{B}_f \xrightarrow{F} (\mathcal{B}_f)_\lambda .$$

We now define

$$\mathcal{R}\mathsf{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)$$

and we consider for morphism ϵ the image in $\mathsf{H}^0(\mathsf{Lp})$ of the following Q-equivalence in Lp

$$\eta : (\mathcal{A},\mathcal{B}) \xrightarrow{(P,I)} (\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_f) \xrightarrow{(Id,F)} (\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)$$

under the functor $\mathsf{Hom}(-,-)$.

We will now show that the dg category associated with the localization pair $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ is canonically Morita equivalent to

$$\mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0, \mathcal{B}_f) .$$

Remark that since $\mathcal{A}_c$ is a cofibrant object in Lp, by lemma 4.12, $(\mathcal{A}_c)_1$ is cofibrant in dgcat and so we have an exact sequence in the Morita homotopy category of dg categories Hmo, see [Kel06b]

$$(\mathcal{A}_c)_0 \hookrightarrow (\mathcal{A}_c)_1 \rightarrow (\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0 .$$

Since the dg category $(\mathcal{B}_f)$ is Morita fibrant, the application of the functor $\mathsf{rep}_{dg}(-,\mathcal{B}_f)$ to the previous exact sequence induces a new exact sequence in Hmo

$$\mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_0, \mathcal{B}_f) \leftarrow \mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, \mathcal{B}_f) \leftarrow \mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0, \mathcal{B}_f) .$$

Remember that:

$$\mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1 = \mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_0, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}) \underset{\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_0,(\mathcal{B}_f)_\lambda)}{\times} \mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, (\mathcal{B}_f)_\lambda) .$$

Now, since the dg categories $(\mathcal{A}_c)_1$ and $(\mathcal{B}_f)_\lambda$ satisfy the conditions of theorem 4.36, we have a natural inclusion of dg categories

$$\mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1/\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}) \longrightarrow \mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, \mathcal{B}_f) .$$

Now remark that this inclusion induces the following Morita equivalence

$$\mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1/\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0, \mathcal{B}_f) .$$

We now show that the functor $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ preserves Q-weak equivalences in $\mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp}$. Consider a Q-weak equivalence

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}) ,$$

in $\mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp}$. By construction it will induce a Morita dg functor

$$(\tilde{\mathcal{A}}_c)_1/(\tilde{\mathcal{A}}_c)_0 \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0$$

and also a Morita dg functor

$$\mathcal{B}_f \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{B}}_f .$$

This implies that the induced dg functor

$$\mathsf{rep}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1/(\mathcal{A}_c)_0, \mathcal{B}_f) \xrightarrow{\sim} \mathsf{rep}_{dg}((\tilde{\mathcal{A}}_c)_1/(\tilde{\mathcal{A}}_c)_0, \tilde{\mathcal{B}}_f)$$

is a Morita dg functor. Now, remark that we have the natural zig-zag of Q-weak equivalences in Lp:

$$
\begin{array}{c}
(\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}) \subset \mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1 \\
\downarrow \\
(\overline{\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr})} \subset \mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1/\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr})) \\
\uparrow \\
(\emptyset \subset \mathsf{Hom}(\mathcal{A}_c, (\mathcal{B}_f)_\lambda)_1/\mathsf{Fun}_{dg}((\mathcal{A}_c)_1, ((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}))
\end{array}
$$

This allow us to conclude that the the functor $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ preserves Q-weak equivalences in $\mathsf{Lp}^{op} \times \mathsf{Lp}$. This proves the proposition. □

Proposition 4.38. *Let $\mathcal{A}$ be a cofibrant object in Lp. The induced internal tensor product functor*

$$\mathcal{A} \otimes - : \mathsf{Lp} \longrightarrow \mathsf{Lp}\,,$$

preserves Q-weak equivalences.

Proof. Let $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ be a Q-weak equivalence in Lp between cofibrant objects. We prove that the induced morphism in Lp

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{F_*} \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}\,,$$

is a Q-weak equivalence. By lemma 4.12, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{C}_1$ are cofibrant dg categories in dgcat and so we have a morphism of exact sequences in Hmo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{B}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0 \arrow[d, "\sim"] \\
\mathcal{C}_0 \arrow[r, hook] & \mathcal{C}_1 \arrow[r] & \mathcal{C}_1/\mathcal{C}_0\,,
\end{tikzcd}
$$

where the last column is a Morita dg functor. Since $\mathcal{A}_1$ is cofibrant in dgcat proposition 1.6.3 in [Dri04] implies that by applying the functor $\mathcal{A} \otimes -$ we obtain the following morphism of exact sequences in Hmo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_0 \arrow[r] & \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_1 \arrow[r] & \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{C}_1/\mathcal{C}_0)\,.
\end{tikzcd}
$$

This implies that we have the following Morita dg functor:

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_0)\,.$$

Let $\mathcal{H}$ be the full dg subcategory of $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0)$, whose objects are $a \otimes b$, where a belongs to $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{P}$ the full dg subcategory of $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_0)$ whose objects are $a \otimes c$, where a belongs to $\mathcal{A}_0$. We have the following diagram:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_0) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, hook] & (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_1)/(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{C}_0)\,.
\end{tikzcd}
$$

Remark that the dg categories $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$ are Morita equivalent dg subcategories of $((\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_1)/(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_0))/\mathcal{H}$, resp. $((\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}_1)/(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}_0))/\mathcal{P}$ and so we have the commutative square:

$$\begin{tikzcd} ((\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_1)/(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_0))/\mathcal{H} \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "F^*"] \\ ((\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}_1)/(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{C}_0))/\mathcal{P} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{C} \, . \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

By the two out of three property F^* is a Q-weak equivalence. This implies the lemma. □

Remark 4.39. Since the internal tensor product $-\otimes-$ is symmetric, lemma 4.38 implies that the total left derived functor $-\otimes-$

$$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}- : \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})\times\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})\to\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$$

exists, see definition 8.4.7 of [Hir03].

4.7 Relation with dgcat

We have the following adjunction:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Lp} \arrow[d, shift left, "Ev_1"] \\ \mathsf{dgcat} \, , \arrow[u, shift left, "L"] \end{tikzcd}$$

where Ev_1 associates to a localization pair $(\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}_1)$ the dg category $\mathcal{A}_1$ and L associates to a dg category $\mathcal{A}$ the localization pair $(\emptyset\subset\mathcal{A})$.

Proposition 4.40. *If we consider on* dgcat *the Quillen model structure of theorem 2.27 and on* Lp *the Q-model structure, the previous adjunction is a Quillen equivalence, see [Hir03].*

Proof. The functor L clearly sends Morita dg functors to weak equivalences. By lemma 4.19 the evaluation functor Ev_1 preserves trivial fibrations. This shows that L is a left Quillen functor. Let $\mathcal{A}$ be a cofibrant object in dgcat and $(\mathcal{B}_{contr}\subset\mathcal{B})$ a Q-fibrant object in Lp. Let $\mathcal{A}\xrightarrow{F}\mathcal{B}$ be a dg functor in dgcat. We need to show that F is a Morita dg functor if and only if the induced morphism of localization pairs $(\emptyset\subset\mathcal{A})\to(\mathcal{B}_{contr}\subset\mathcal{B})$ is a Q-weak equivalence. But since the dg functor $\mathcal{B}\to\mathcal{B}/\mathcal{B}_{contr}$ is a Morita dg functor this automatically follows. □

Proposition 4.41. *The total derived functors, $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}-$ and $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ in the category $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$ correspond, under the equivalence:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{Lp}) \arrow[d, shift left, "\mathcal{R}Ev_1"] \\ \mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat}) \arrow[u, shift left, "L"] \end{tikzcd}$$

to the functors, $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}-$ and $\mathsf{rep}_{dg}(-,-)$, see [Kel06b][Toë07], in the category $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$.

Proof. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be dg categories. Then $\mathcal{A}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathcal{B}$ identifies with $\mathcal{A}_c\otimes\mathcal{B}$, where $\mathcal{A}_c$ is a cofibrant resolution of $\mathcal{A}$ in dgcat. Since $L(\mathcal{A}_c)$ is cofibrant in Lp by lemma 4.38, we have the following zig-zag:

$$L(\mathcal{A})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}L(\mathcal{B})\xleftarrow{\sim}L(\mathcal{A}_c)\otimes L(\mathcal{B})\xrightarrow{\sim}L(\mathcal{A}_c\otimes\mathcal{B})=L(\mathcal{A}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathcal{B})\,,$$

of weak equivalences in Lp. This proves that the total left derived tensor products in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$ and $\mathsf{Ho}(\mathsf{dgcat})$ are identified. Now, $\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ identifies with $\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}_c,\mathcal{B}_f)$, where $\mathcal{B}_f$ is a fibrant resolution of $\mathcal{B}$ in dgcat. By definition

$$\mathcal{R}\mathsf{Hom}(L(\mathcal{A}),L(\mathcal{B})) = \mathsf{Hom}((L(\mathcal{A})_c,(L(\mathcal{B})_f)_\lambda)\,.$$

where λ denotes an infinite cardinal whose size is greater or equal to the cardinality of the set of isomorphism classes of objects in the category $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}_c)$. We have the following Q-weak equivalent objects in Lp:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{R}\mathsf{Hom}(L(\mathcal{A}),L(\mathcal{B}))\\
\mathsf{Hom}((L(\mathcal{A})_c,(L(\mathcal{B})_f)_\lambda)\\
\mathsf{Hom}((\emptyset\subset\mathcal{A}_c),((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr}\subset(\mathcal{B}_f)_\lambda))\\
(\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_c,((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr})\subset\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_c,(\mathcal{B}_f)_\lambda))\\
\overline{\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_c,((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr})}\subset\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_c,(\mathcal{B}_f)_\lambda))/\mathsf{Fun}_{dg}(\mathcal{A}_c,((\mathcal{B}_f)_\lambda)_{contr})\\
(\emptyset\subset\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}_c,\mathcal{B}_f))\\
L(\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A},\mathcal{B}))\,.
\end{array}$$

This proves that the total right derived functor $\mathcal{R}\mathsf{Hom}(-,-)$ in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Lp})$ corresponds to the functor $\mathsf{rep}_{dg}(-,-)$, as in [Kel06b] [Toë07]. $\square$

Chapter 5

Homotopy theory of well-generated algebraic triangulated categories

Ce chapitre correspond au article [Tabb].

5.1 Introduction

Triangulated categories appear naturally in several branches of mathematics such as algebraic geometry, algebraic analysis, K-theory, representation theory and even in mathematical physics, see for instance [Kon98] [Kon04].

In his book [Nee01b], Neeman introduces the important class of *well-generated* triangulated categories. Let us recall this concept. Let α be a regular cardinal, see section 5.3 of [Cie97]. A triangulated category $\mathcal{T}$ is α-compactly generated [Kra01] [Nee01b] if it admits arbitrary coproducts and an *α-good set of generators* $\mathcal{G}$, i.e. $\mathcal{G}$ is stable under shifts in both directions and satisfies

1) an object X of $\mathcal{T}$ vanishes if and only if $\mathcal{T}(G, X) = 0$ for each $G \in \mathcal{G}$,

2) each $G \in \mathcal{G}$ is α-small, i.e. for each family of objects X_i, $i \in I$, of $\mathcal{T}$, each morphism

$$G \to \bigoplus_{i \in I} X_i$$

factors through a subsum $\bigoplus_{i \in J} X_i$ for some subset J of I of cardinality strictly smaller than α,

3) for each family of morphisms $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$, of $\mathcal{T}$ which induces surjections

$$\mathcal{T}(G, X_i) \to \mathcal{T}(G, Y_i)$$

for all $G \in \mathcal{G}$ and all $i \in I$, the sum of the f_i induces surjections

$$\mathcal{T}(G, \bigoplus X_i) \to \mathcal{T}(G, \bigoplus Y_i)$$

for all $G \in \mathcal{G}$.

A triangulated category is well-generated if it is α-compactly generated for a regular cardinal α, see [Kra01] [Nee01b]. Clearly each compactly generated triangulated category is well-generated. Neeman proves in [Nee01b] that the Brown representability theorem holds for well-generated triangulated categories. This is one of the main reasons for studying them. Another important result of [Nee01b] is that if $\mathcal{T}$ is well generated and $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ a localization (i.e. a fully faithful triangle functor admitting a left adjoint whose kernel is generated by a set of objects) then $\mathcal{S}$ is well-generated. Thus each localization of a well-generated triangulated category is well-generated.

Example 5.1. Let $\mathcal{B}$ be a Grothendieck abelian category, e.g. the category of modules on a ringed space. Then by the Popescu-Gabriel theorem [PG64], $\mathcal{B}$ is a localization of the category of $\mathsf{Mod}\, A$ of A-modules over some ring A. One can deduce from this [Nee01a] that the unbounded derived category of the abelian category $\mathcal{B}$ is a localization of $\mathcal{D}(A)$ and thus is well-generated.

In his lecture at the international congress of mathematicians in Madrid 2006, Keller [Kel06b] defines the notion of an algebraic triangulated category in order to axiomatize the properties of all triangulated categories appearing naturally in algebra and geometry. Recall that a triangulated category $\mathcal{T}$ is *algebraic* if it is triangle equivalent to the stable category $\underline{\mathcal{E}}$ for some Frobenius category $\mathcal{E}$. This holds if and only if $\mathcal{T}$ is triangle equivalent to a full triangulated subcategory of the category up to homotopy of complexes over an additive category.

In this paper, we study the category of well-generated algebraic triangulated categories, see [Kel06b], using the tools of Quillen's homotopical algebra, [Qui67], and the formalism of dg categories, [Dri04] [Kel06b] [Kel06b] [Tabc] [Tab06] [Tab05a] [Tab05b] [Toë07]. More precisely, for a fixed regular cardinal α we construct a category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$, whose objects are essentially the dg categories which are stable under suspensions, cosuspensions, cones and α-small sums.

The construction of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is done in two steps: first we construct a monad T_α on the category of small differential graded categories dgcat and we consider the associated category T_α-alg of T_α-algebras. Then the category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$, is obtained by considering specific diagrams in T_α-alg.

In each of these two steps we have at our disposal an adjunction and by applying an argument due to Quillen to our situation, we are able to lift the Quillen model structure on dgcat, see [Tab05b], along these adjunctions to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.

Finally, we define a functor $\mathcal{D}_\alpha(-)$ from $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ to the category Tri_α of α-compactly generated algebraic triangulated categories, see [Kra01] [Nee01b], which by [KjwMP] [Por] is known to verify the following conditions:

- every category $\mathcal{T}$ in Tri_α is equivalent to $\mathcal{D}_\alpha(\underline{A})$ for some $\underline{A}$ in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and

- a morphism F in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is a weak equivalence if and only if $\mathcal{D}_\alpha(F)$ is an equivalence of triangulated categories.

This shows that well-generated algebraic triangulated categories up to equivalence admit a natural Quillen enhancement given by our model category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.

5.2 Preliminaries

In what follows α will denote a regular cardinal and k a commutative ring with unit. The tensor product $\otimes$ will denote the tensor product over k. Let $\mathsf{Ch}(k)$ denote the category of complexes over k. By a *dg category*, we mean a differential graded k category, see definition 1.1. For a dg category $\mathcal{A}$, we denote by $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ the dg category of right $\mathcal{A}$ dg modules and by $\widehat{\ }: \mathcal{A} \to \mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$ the Yoneda dg functor. We write dgcat for the category of small dg categories. By theorem 1.8 the category dgcat admits a structure of cofibrantly generated model category whose weak equivalences are the quasi-equivalences.

5.3 Monadic structure T on dgcat

In this section, we will construct a monad T_α on dgcat. The T_α-algebras will be essentially the dg categories which admit α-small sums, see proposition 5.9. This monad T_α is a variant of the well-known coproduct completion monad Fam of 'families', *cf.* [CJ95], see also [KL97].

For each ordinal β strictly smaller than α, we denote by I_β the underlying set of β, see [Cie97] [Hir03]. Let $\mathcal{A}$ be a small dg category. We denote by F_β a generic morphism from I_β to $\mathrm{obj}(\mathcal{A})$.

Definition 5.2. Let $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ be the small dg category whose objects are all the maps

$$I_\beta \xrightarrow{F_\beta} \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})\,,$$

where $\beta < \alpha$, and whose complex of morphisms between F_β and $F_{\beta'}$ is

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})}(F_\beta, F_{\beta'}) := \prod_{i \in I_\beta} \bigoplus_{j \in I_{\beta'}} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(F_\beta(i), F_{\beta'}(j))\,.$$

The composition and the identities are induced by those of $\mathcal{A}$.

Remark 5.3. Clearly $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ is a small dg category and the above construction is functorial in $\mathcal{A}$. We have a functor

$$\mathsf{T}_\alpha(-) : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathsf{dgcat}\,.$$

Definition 5.4. Let η be the natural transformation

$$\eta : Id_{\mathsf{dgcat}} \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha(-)\,,$$

whose evaluation at $\mathcal{A}$ is the dg functor

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$$

that sends an object X of $\mathcal{A}$ to the map

$$I_{\mathbf{1}} \xrightarrow{X} \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})\,,$$

where $\mathbf{1}$ denotes the first successor ordinal, see [Cie97].

Notice that $\eta_{\mathcal{A}}$ is a fully faithful dg functor.

Definition 5.5. Let $\mu_{\mathcal{A}}$ be the dg functor

$$\mu_\alpha : (\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})\,,$$

which sends an object

$$\begin{array}{ccc} I_\beta & \xrightarrow{F_\beta} & \mathrm{obj}\,(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})) \\ x & \longmapsto & (I_{\gamma_x} \xrightarrow{F_{\gamma_x}} \mathrm{obj}\,(\mathcal{A}))\,, \end{array}$$

of $(\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A})$ to the map

$$\coprod_{x \in \beta} F_{\gamma_x} := I_{\sum\limits_{x\in\beta} \gamma_x} \longrightarrow \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})\,,$$

where $\sum\limits_{x \in \beta} \gamma_x$ denotes the increasing sum of the ordinals γ_x, $x \in \beta$, along the ordinal β, see section 4.2 of [Cie97].

Remark 5.6. Observe that the ordinal $\sum_{x \in \beta} \gamma_x$ is strictly smaller than α since β and each one of the γ_x's are strictly smaller than α, which is by hypothesis a regular cardinal. The above construction is functorial in $\mathcal{A}$ and so we have a natural transformation

$$\mu : (\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(-) \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha(-)\,.$$

Proposition 5.7. *The above construction give us a monad, see [ML98],* $\mathsf{T}_\alpha = (\mathsf{T}_\alpha(-), \eta, \mu)$ *on the category* dgcat*.*

Proof. We need to prove that the diagrams of functors

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha \arrow[r, "\mathsf{T}_\alpha \mu"] \arrow[d, "\mu \mathsf{T}_\alpha"'] & \mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha \arrow[d, "\mu"] \\ \mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha \arrow[r, "\mu"'] & \mathsf{T}_\alpha \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha \arrow[r, "\eta \mathsf{T}_\alpha"] \arrow[dr, equal] & \mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha \arrow[d, "\mu"] & \mathsf{T}_\alpha \arrow[l, "\mathsf{T}_\alpha \eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & \mathsf{T}_\alpha & \end{tikzcd}$$

are commutative. The left diagram is commutative because the ordinal sum operation, see [Cie97], on the set of ordinals strictly smaller than α, is associative. The right diagram is also commutative by definition of μ.

This proves the proposition. □

Let $\mathcal{A}$ be a small dg category.

Lemma 5.8. *The dg category* $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ *admits* α*-small sums.*

Proof. Let β be a cardinal strictly smaller than α. Let J be a set of cardinality β and G a morphism

$$G : J \longrightarrow \mathrm{obj}\,(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}))\,.$$

Choose a bijection between J and I_β and consider the object

$$F_\beta : I_\beta \longrightarrow \mathrm{obj}\,(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}))$$

of $(\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)$ associated to G. Now notice that by definition of $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ and since

$$I_{\sum_{x \in \beta} \gamma_x} = \bigcup_{x \in I_\beta} I_{\gamma_x}$$

the object $\mu_{\mathcal{A}}(F_\beta)$ of $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ is in fact the β-small sum of G. □

Recall from [ML98] that by definition an algebra over this monad (=T_α-algebra) consists of a pair $A = (\mathcal{A}, R)$, where $\mathcal{A}$ is a small dg category and R is a dg functor $R : \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ which makes both diagrams

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{T}_\alpha(R)"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}"'] & \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[d, "R"] \\ \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[r, "R"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, equal] & \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[d, "R"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

commute. A morphism $F : (\mathcal{A}, R) \to (\mathcal{B}, G)$ of T_α-algebras is a dg functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ which renders commutative the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{T}_\alpha(F)"] \arrow[d, "R"'] & \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B}) \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B}\,. \end{tikzcd}$$

We denote by T_α-alg the category of T_α-algebras. By theorem 1 of chapter VI from [ML98], we have an adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{dgcat} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd},$$

where the functor U associates to a T_α-algebra A the dg category $\mathcal{A}$ and F associates to a dg category $\mathcal{B}$ the T_α-algebra $(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B}), \mu_{\mathcal{B}})$.

Proposition 5.9. *Let $A = (\mathcal{A}, R)$ be a T_α-algebra. Then the dg category $\mathcal{A}$ admits α-small sums.*

Proof. Let β be a cardinal strictly smaller than α and J a set of cardinality β. Let G be a morphism

$$G : J \longrightarrow \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})\,.$$

Choose a bijection between J and I_β and consider the object of $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$

$$F_\beta : I_\beta \longrightarrow \mathrm{obj}\,(\mathcal{A})\,,$$

associated to G. We will prove that the object $R(F_\beta)$ of $\mathcal{A}$ is the β-small sum of G. Consider the following object

$$\overline{F_\beta} := \mathsf{T}_\alpha(\eta_{\mathcal{A}})(F_\beta)\,,$$

in $(\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A})$. Notice that $F_\beta = \mu_{\mathcal{A}}(\overline{F_\beta})$ and so by lemma 5.8, F_β is the β-small sum of $\overline{F_\beta}$. In particular, we have for each $x \in I_\beta$ a closed morphism of degree zero

$$i_x : \eta_{\mathcal{A}}(F_\beta(x)) \to F_\beta$$

in $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$. Now, since A is a T_α-algebra the equality $R \circ \eta_{\mathcal{A}} = Id$ implies that $R(F_\beta)$ is a weak β-small sum of G in $\mathcal{A}$. This means that for every object Z in $\mathcal{A}$ the morphism of complexes

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(R(F_{\mathcal{B}}), Z) \longrightarrow \prod_{x \in I_\beta} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(F_\beta(x), Z)$$

induced by the closed morphisms of degree zero $R(i_x)$, $x \in I_\beta$, is surjective. We now show that it is also injective. Let H_1 and H_2 be two elements of $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(R(F_\beta), Z)$ such that

$$H_1 \circ i_x = H_2 \circ i_x,\ \forall x \in I_\beta\,.$$

We will now prove that $H_1 = H_2$.

Consider the following commutative diagram in $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} F_\beta(x) \arrow[r, "R(i_x)"] \arrow[dr, "G_x"'] & R(F_\beta) \arrow[d, shift right, "H_1"'] \arrow[d, shift left, "H_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Apply the dg functor $\eta_{\mathcal{A}}$ to the previous diagram and consider the following one in $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & F_\beta \arrow[d, dotted, "\theta"] \arrow[dd, dotted, bend left=60, "\Phi"] \\ \eta_{\mathcal{A}}(F_\beta(x)) \arrow[ur, "i_x"] \arrow[r, "\eta_{\mathcal{A}}(R(i_x))"] \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{A}}(G_x)"'] & \eta_{\mathcal{A}}(R(F_\beta)) \arrow[d, shift right, "\eta_{\mathcal{A}}(H_1)"'] \arrow[d, shift left, "\eta_{\mathcal{A}}(H_2)"] \\ & \eta_{\mathcal{A}}(Z)\,. \end{tikzcd}$$

Since F_β is the β-small sum of $\overline{F_\beta}$ there is a unique morphism θ in $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ such that

$$\theta \circ i_x = \eta_{\mathcal{A}}(R(i_x)),\ \forall x \in I_\beta$$

and a unique morphism Φ in $\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})$ such that

$$\Phi \circ i_x = \eta_{\mathcal{A}}(G_x),\ \forall x \in I_\beta\,.$$

This implies that

$$\eta_{\mathcal{A}}(H_1) \circ \theta = \eta_{\mathcal{A}}(H_2) \circ \theta\,.$$

We will show that $R(\theta) = Id$, which immediately implies the proposition. Recall that since A is a T_α-algebra, we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{T}_\alpha(R)"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}"'] & \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[d, "R"] \\
\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[r, "R"'] & \mathcal{A}\,.
\end{tikzcd}$$

Notice that since $\overline{F_\beta}$ is the β-small sum of the objects $\eta_{\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})}(\eta_{\mathcal{A}}(F_\beta(x)))$, the morphisms i_x induce a morphism

$$\Psi : \overline{F_\beta} \longrightarrow \eta_{\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A})}(F_\beta)\,,$$

in $(\mathsf{T}_\alpha \circ \mathsf{T}_\alpha)(\mathcal{A})$. Finally remark that $\mathsf{T}_\alpha(R)(\Psi) = \theta$ and $\mu_{\mathcal{A}}(\Psi) = Id$. This implies that $R(\theta) = Id$ and so the proposition is proven. □

Remark 5.10. Let $F : (\mathcal{A}, R) \to (\mathcal{B}, G)$ be a morphism of T_α-algebras. Observe that the proof of proposition 5.9 and the commutative square

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathsf{T}_\alpha(F)"] \arrow[d, "R"'] & \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B}) \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

imply that the dg functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserves α-small sums. This fact will be used in section 5.7, see definition 5.27.

5.4 Quillen's lifting argument

In this section, we consider an argument due to Quillen, see [Qui67], that allows us to lift a Quillen model structure along an adjunction.

Let $\mathcal{N}$ be a complete and cocomplete category. Consider a functor $U : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, with $\mathcal{M}$ a Quillen model category. Assume that U admits a left adjoint

$$F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}\,.$$

Definition 5.11. A morphism $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{N}$ is:

- a weak equivalence if $U(f)$ is a quasi-equivalence in $\mathcal{M}$.
- a fibration if $U(f)$ is a fibration in $\mathcal{M}$.

- a cofibration if it has the left lifting property with respect to all trivial fibrations in $\mathcal{N}$.

Theorem 5.12. *Suppose that $\mathcal{M}$ is a cofibrantly generated Quillen model category and that U commutes with α-filtered colimits for a regular cardinal α, see [Hir03].*

Then with the notions of weak equivalence, fibration and cofibration defined above, $\mathcal{N}$ is a Quillen model category provided the following assumption on cofibrations holds: every cofibration with the left lifting property with respect to fibrations is a weak equivalence. Moreover, the adjunction (F, U) becomes a Quillen adjunction.

Proof. We denote by I the set of generating cofibrations of $\mathcal{M}$ and by J the set of generating trivial cofibrations of $\mathcal{M}$. Notice that since $\mathcal{M}$ is cofibrantly generated, the domains of the elements of the sets I and J are β-small for a cardinal β, see definition 11.1.2 of [Hir03]. Since U commutes with α-small filtered colimits, the images of these domains under the functor F will be γ-small, where γ is the maximum of α and β. This shows that the sets $F(I)$ and $F(J)$ of $\mathcal{N}$ allow the small object argument.

Now the proof follows the lines of the one of theorem 4.1 from [GJ99]: We simply use the set I, respectively J, instead of the generating cofibrations of simplicial sets, respectively generating trivial cofibrations of simplicial sets and consider γ-transfinite compositions, see [Hir03], for the construction of the factorizations.

Observe also that the class of cofibrations that have the left lifting property with respect to fibrations is stable under γ-transfinite compositions. Clearly the adjunction (F, U) is a Quillen adjunction.

This proves the theorem. $\square$

Now let $\mathcal{N}$ and $\mathcal{M}$ be as at the beginning of this section and consider definition 5.11.

Proposition 5.13. *Suppose that*

- *for every object A in $\mathcal{N}$, the unique morphism $A \to *$, where $*$ denotes the terminal object in $\mathcal{N}$, is a fibration.*
- *for every object A in $\mathcal{N}$, we dispose of a factorization*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i_A"', "\sim"] & & A \times A \\ & P(A) \arrow[ur, two heads, "q_A"'] & \end{tikzcd} ,$$

where i_A is a weak equivalence and q_A is a fibration.

Then every morphism in $\mathcal{N}$ that has the left lifting property with respect to all fibrations is a weak equivalence.

Proof. Let $i : A \to B$ be a morphism in $\mathcal{N}$ that has the left lifting property with respect to all fibrations. Consider the following diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dotted, "u"] & * . \end{tikzcd}$$

By the hypotheses on i we have a morphism u such that $u \circ i = \mathrm{Id}$. We now show that the morphism $i \circ u$ is right homotopic to the identity of B. By hypothesis, we have at our disposal a factorization

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "i_B"', "\sim"] & & B \times B \\ & P(B) \arrow[ur, two heads, "q_B"'] & \end{tikzcd}$$

which allows us to construct the diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_B \circ i"] \arrow[d, "i"'] & P(B) \arrow[d, "q_B"] \\
B \arrow[ur, dotted, "H"] \arrow[r, "{[Id\,,\, i \circ u]}"'] & B \times B\,.
\end{tikzcd}$$

By the hypothesis on i, we have at our disposal a morphism H, which by definition is a right homotopy between the identity of B and $i \circ u$. Since the functor $U : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ preserves products, fibrations and weak equivalences the identity on $U(B)$ and $U(i) \circ U(u)$ are right homotopic in $\mathcal{M}$ and so they become equal in the homotopy category $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$. Since we already know that $U(u) \circ U(i)$ is the identity on $U(B)$, we conclude that the morphism $U(i)$ is an isomorphism in $\mathsf{Ho}(\mathcal{M})$. By proposition 1.14 from [GJ99], $U(i)$ is in fact a weak equivalence in $\mathcal{M}$ which implies by definition that i is a weak equivalence in $\mathcal{N}$. This proves the lemma. $\square$

5.5 Homotopy theory of T-algebras

Recall from section 5.3 that we have an adjunction

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg} \arrow[d, shift left, "U"] \\
\mathsf{dgcat}\,. \arrow[u, shift left, "F"]
\end{tikzcd}$$

Since the category dgcat is complete, proposition 4.3.1 from [Bor94] implies that T_α-alg is also complete. Now notice that the functor

$$\mathsf{T}_\alpha(-) : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathsf{dgcat}\,,$$

see definition 5.2, commutes with α-filtered colimits, see [Bor94]. This implies by proposition 4.3.2 and 4.3.6 from [Bor94] that the category T_α-alg is cocomplete and that the functor U commutes with α-filtered colimits.

From now on and until the end of this section we consider the definition 5.11 applied to our particular adjunction (F, U).

Let $\mathcal{B}$ be a small dg category.

Definition 5.14. Let $P(\mathcal{B})$ be the dg category, see [Dri04], whose objects are the closed morphisms of degree zero in $\mathcal{B}$

$$X \xrightarrow{f} Y\,,$$

that become invertible in $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$. We define the complex of morphisms

$$\mathsf{Hom}_{P(\mathcal{B})}(X \xrightarrow{f} Y, X' \xrightarrow{f'} Y')$$

as the homotopy pull-back in $\mathsf{Ch}(k)$ of the diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y') \arrow[d, "f^*"] \\
\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X, X') \arrow[r, "f'_*"] & \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y')\,.
\end{tikzcd}$$

It is proven in lemma 4.3 that $P(\mathcal{B})$ is a path object for $\mathcal{B}$ in the Quillen model structure on dgcat of theorem 1.8. Notice that the above construction is functorial in $\mathcal{B}$ and so we have at our disposal a functor

$$P(-) : \mathsf{dgcat} \to \mathsf{dgcat}\,.$$

Let $B = (\mathcal{B}, S)$ be a T_α-algebra.

Proposition 5.15. *The category $P(\mathcal{B})$ carries a natural T_α-algebra structure and so B admits a path-object $P(B)$.*

Proof. Since B is a T_α-algebra, we have the dg functor 'sum'

$$S : \mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

and we will construct a dg functor

$$\overline{S} : \mathsf{T}_\alpha(P(\mathcal{B})) \longrightarrow P(\mathcal{B})\,.$$

Observe that we have a faithful dg functor

$$\mathsf{T}_\alpha(P(\mathcal{B})) \longrightarrow P(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B}))\,.$$

Define $\overline{S}$ as the composition of this dg functor with

$$P(\mathsf{T}_\alpha(\mathcal{B})) \longrightarrow P(\mathcal{B})\,.$$

Since B is a T_α-algebra, this construction shows us that $(P(\mathcal{B}), \overline{S})$ is also a T_α-algebra. It is also clear by construction that the dg functors $\mathcal{B} \xrightarrow{i_{\mathcal{B}}} P(\mathcal{B})$ and

$$P(\mathcal{B}) \xrightarrow{q_{\mathcal{B}}} \mathcal{B} \times \mathcal{B}$$

are in fact morphisms of T_α-algebras, where $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ carries the diagonal T_α-action. This proves the proposition. $\square$

Theorem 5.16. *The category T_α-alg when endowed with the notions of weak equivalence, fibration and cofibration as in definition 5.11, becomes a cofibrantly generated Quillen model category and the adjunction (F, U) becomes a Quillen adjunction.*

Proof. Recall from theorem 1.8 that we have an explicit set $I = \{Q, S(n), n \in \mathbb{Z}\}$ of generating cofibrations and an explicit set $J = \{F, R(n), n \in \mathbb{Z}\}$ of generating trivial cofibrations for dgcat.

Now notice that all conditions of theorem 5.12 are satisfied. In particular proposition 5.15 and the fact that every object in dgcat is fibrant, see remark 1.14, imply proposition 5.13 which implies that the assumption on cofibrations of theorem 5.12 holds.

Observe that $F(I)$ is a set of generating cofibrations on T_α-alg and that $F(J)$ is a set of generating trivial cofibrations on T_α-alg. This implies that the Quillen model structure on T_α-alg is cofibrantly generated. Since the functor U preserves by definition weak equivalences and fibrations the adjunction (F, U) is a Quillen adjunction. This proves the theorem. $\square$

5.6 Exact α-cocomplete dg categories

In this section, we will construct a category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ by considering specific diagrams in T_α-alg. The objects of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ will be essentially the dg categories which are stable under suspensions, cosuspensions, cones and α-small sums, see remark 5.20.

Definition 5.17. Let $\mathcal{P}$ be the dg category with only one object X and whose dg algebra of endomorphisms is k concentrated in degree 0. Let $\mathcal{S}$, respectively $\mathcal{S}^{-1}$, be the full sub dg category of $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{P})$, whose objects are $\widehat{X}$ and $\widehat{X}[1]$, respectively $\widehat{X}$ and $\widehat{X}[-1]$. We have a fully faithful dg functor $\mathcal{P} \stackrel{S}{\to} \mathcal{S}$, respectively $\mathcal{P} \stackrel{S^{-1}}{\to} \mathcal{S}^{-1}$. Let $\mathcal{M}$ be the dg category which has two objects 0 and 1 and is generated by a morphism f from 0 to 1 that satisfies $d(f) = 0$. Let $\mathcal{C}$ be the full sub dg category of $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{M})$, whose objects are $\widehat{0}$, $\widehat{1}$ and $\mathsf{cone}(\widehat{f})$. We have a fully faithful dg functor $\mathcal{M} \stackrel{C}{\to} \mathcal{C}$.

Let $\mathcal{A}$ be a small dg category.

Remark 5.18. Notice that giving a dg functor $H : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$, respectively $H' : \mathcal{S}^{-1} \to \mathcal{A}$, corresponds exactly to specifying two objects X and Y in $\mathcal{A}$ and an isomorphism $\widehat{X}[1] \xrightarrow{\sim} \widehat{Y}$, respectively $\widehat{X}[-1] \xrightarrow{\sim} \widehat{Y}$, in $\mathcal{C}_{dg}(\mathcal{A})$. Notice also that giving a dg functor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ corresponds exactly to specifying a morphism $f : X \to Y$ of degree zero in $\mathcal{A}$ such that $d(f) = 0$, an object Z in $\mathcal{A}$ and an isomorphism $Z \xrightarrow{\sim} \mathsf{cone}(\widehat{f})$.

Recall from section 5.3 that we have at our disposal an adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{dgcat} \,. \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

Definition 5.19. Let $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ be the category whose objects are the 4-tuples $\underline{A} = (A, S_A, S_A^{-1}, C_A)$, where A is a T_α-algebra and S_A, S_A^{-1} and C_A, the structure morphisms of A, are T_α-algebra morphisms which make all diagrams

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{S}) \arrow[ur, "S_A"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{S}^{-1}) \arrow[ur, "S_A^{-1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{C}) \arrow[ur, "C_A"'] & \end{tikzcd}$$

commutative.

A morphism $G : \underline{A} \to \underline{B}$ in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ consists of a morphism of T_α-algebras $G : A \to B$ that makes the following diagrams

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "S_A"'] & \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{B}} F(\mathcal{S}) \arrow[d, "S_B"] \\ A \arrow[r, "G"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{S}^{-1}) \arrow[r] \arrow[d, "S_A^{-1}"'] & \coprod\limits_{\mathcal{P}\to\mathcal{B}} F(\mathcal{S}^{-1}) \arrow[d, "S_B^{-1}"] \\ A \arrow[r, "G"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}} F(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "C_A"'] & \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{B}} F(\mathcal{C}) \arrow[d, "C_B"] \\ A \arrow[r, "G"'] & B \end{tikzcd}$$

commutative.

Remark 5.20. Observe that an object $\underline{A}$ in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ consists of a T_α-algebra A and of a choice, in the sense of remark 5.18, for the suspensions and cosuspensions of every object of the dg category $\mathcal{A} = U(A)$ and also of a choice for the cone of every cycle of degree zero of the dg category $\mathcal{A}$. In particular $\mathcal{A}$ is stable under suspensions, cosuspensions and cones.

Observe also that a morphism G in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ consists of a morphism of T_α-algebras that commutes with all these choices.

We have a forgetful functor

$$U_1 : \mathsf{dgcat}_{ex,\alpha} \longrightarrow \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}\,,$$

that associates to an object $\underline{A}$ of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ the T_α-algebra A.

Proposition 5.21. *The functor U_1 admits a left adjoint functor F_1.*

Proof. The proof will consist in verifying the conditions of theorem 2 from section V.6. of [ML98], i.e. that $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ has small limits and satisfies the solution set condition. We will now prove that the category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ admits small limits by showing that we have products and equalizers. Then we will prove that these are preserved by the functor U_1. Let $\{\underline{A_i}\}_{i\in I}$ be a family of objects in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Endow the T_α-algebra $\prod_{i\in I} A_i$ with the structure morphisms induced by those of $\underline{A_i}$, $i \in I$. In this way, the T_α-algebra $\prod_{i\in I} A_i$ belongs naturally to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and we observe that it is the product in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ of the familly $\{\underline{A_i}\}_{i\in I}$.

Consider now morphisms $G_1, G_2 : \underline{A} \to \underline{B}$ in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Let K be the equalizer in $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$ of the pair $G_1, G_2 : A \to B$. By remark 5.20, we need to show that the dg category $U(K)$ is endowed with a choice for the suspension and cosuspension for each object and with a choice for the cone of every cycle of degree zero. Since U is a right adjoint functor, $U(K)$ identifies with the equalizer of the pair

$$U(G_1), U(G_2) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

and since G_1 and G_2 are morphisms in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$, the dg functors $U(G_1)$ and $U(G_2)$ commute with all the choices. This implies that the the non-full dg subcategory $U(K)$ of $\mathcal{A}$ is stable under all the choices of suspension, cosuspension and cones in $\mathcal{A}$. This shows us that K belongs naturally to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and that it is the equalizer in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ of the pair $G_1, G_2 : \underline{A} \to \underline{B}$. This proves that the category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ admits small limits and by construction they are preserved by the forgetful functor U_1.

We will now prove that the solution set condition is verified, see [ML98].

Let A be a T_α-algebra. Consider the following set of morphisms in $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$

$$\mathrm{Ens} := \left\{ F(\mathcal{P}) \stackrel{F(S)}{\longrightarrow} F(\mathcal{S}),\, F(\mathcal{P}) \stackrel{F(S^{-1})}{\longrightarrow} F(\mathcal{S}^{-1}),\, F(\mathcal{M}) \stackrel{F(C)}{\to} F(\mathcal{C}) \right\}.$$

Since $\mathcal{P}$ and $\mathcal{M}$ are clearly small in dgcat and the functor U commutes with α-filtered colimits, the objects $F(\mathcal{P})$ and $F(\mathcal{M})$ are α-small in $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$, see [Hir03].

Apply the small object argument, see [Hir03], to the morphism

$$A \longrightarrow 0\,,$$

where 0 denotes the terminal object in $\mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}$, using the set of morphisms Ens. We obtain a factorization

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "i"'] & & 0 \\ & \mathsf{Ex}_\alpha(A) \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd},$$

where q is a morphism of T_α-algebras that has the right lifting property with respect to all elements of Ens.

Now, for each one of the following (solid) commutative squares

$$\begin{tikzcd} F(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d, "F(S)"'] & \mathsf{Ex}_\alpha(A) \arrow[d] \\ F(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 0 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} F(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d, "F(S^{-1})"'] & \mathsf{Ex}_\alpha(A) \arrow[d] \\ F(\mathcal{S}^{-1}) \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 0 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} F(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "F(C)"'] & \mathsf{Ex}_\alpha(A) \arrow[d] \\ F(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & 0\,, \end{tikzcd}$$

choose a morphism of T_α-algebras, (here denoted by a dashed arrow), as in the proof of proposition 10.5.16 from [Hir03], that makes both triangles commutative. Notice that a set of morphisms as this one specifies structure morphisms for the T_α-algebra $\mathsf{Ex}_\alpha(A)$. This shows us that when endowed with these choices $\mathsf{Ex}_\alpha(A)$ belongs to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.

Let now $\underline{B}$ be an object of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and $Q : A \to B$ be a morphism of T_α-algebras. Observe that the structure morphisms of B and the construction of the T_α-algebra $\mathsf{Ex}_\alpha(A)$ by the small object argument, see the proof of proposition 10.5.16 in [Hir03], allow us to define, by transfinite induction, a morphism $\overline{Q}$ of T_α-algebras such that the diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathsf{Ex}_\alpha(A) \arrow[d, "\overline{Q}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

commutes. Observe also that when the T_α-algebra $\mathsf{Ex}_\alpha(A)$ is endowed with the above choices the morphism $\overline{Q}$ becomes a morphism in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. This proves the solution set condition.

The proposition is now proven. □

We have the following adjunctions

$$\begin{tikzcd} \mathsf{dgcat}_{ex,\alpha} \arrow[d, shift left, "U_1"] \\ \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg} \arrow[u, shift left, "F_1"] \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{dgcat}\,. \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

Proposition 5.22. *The functor U_1 is monadic, see [ML98].*

Proof. To prove that the functor U_1 is monadic, see section 3 of [ML98], we will verify condition (iii) of theorem 1 from section VI.7. of [ML98].

Let $G_1, G_2 : \underline{A} \to \underline{B}$ be a pair of morphisms in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Consider the following split coequalizer, see [ML98], in T_α-alg

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & B \arrow[r, "L"] \arrow[l, bend left, "R"] & D \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd},$$

where $L \circ G_1 = L \circ G_2$, $L \circ Q = Id$, $G_1 \circ R = Id$, and $G_2 \circ R = Q \circ L$.

We will now construct structure morphisms for D such that D will become an object of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and L a morphism in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Apply the functor U to the previous split coequalizer in T_α-alg and obtain

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "L"] \arrow[l, bend left, "R"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd}.$$

Now, apply the functors

$$\coprod_{\mathcal{M}\to ?} \mathcal{M}\,, \coprod_{\mathcal{M}\to ?} \mathcal{C} : \mathsf{dgcat} \to \mathsf{dgcat}$$

to the previous split coequalizer in dgcat and obtain the following diagram

$$\begin{tikzcd}
& \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}} \mathcal{C} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[ddl, "C_{\mathcal{A}}"] & & \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{B}} \mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[ddl, "C_{\mathcal{B}}"] & & \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{C}} \mathcal{C} \arrow[ddl, dotted, "C_{\mathcal{D}}"] \\
\coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}} \mathcal{M} \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{B}} \mathcal{M} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & \coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{C}} \mathcal{M} \arrow[ur] \arrow[d] & \\
\mathcal{A} \arrow[rr, shift left, "G_1"] \arrow[rr, shift right, "G_2"'] & & \mathcal{B} \arrow[rr, "L"] \arrow[ll, bend left, "R"] & & \mathcal{D} \arrow[ll, bend left, "Q"] &
\end{tikzcd}$$

Notice that since L is a split coequalizer in dgcat, the rows in the diagram are coequalizers. This implies that the dg functors $C_{\mathcal{A}}$ and $C_{\mathcal{B}}$, which correspond under the adjunction (F, U) to the structure morphisms C_A and C_B, induce a dg functor $C_{\mathcal{D}}$. Now, since L admits a right inverse Q, a diagram chasing argument shows us that the right triangle in the diagram is commutative.

Observe that under the adjunction (F, U) this commutative diagram corresponds exactly to a structure morphism C_D on D. Clearly by construction the morphism U preserves this structure morphism. Now, consider an analogous argument for the construction of structure morphisms Q_D and Q_D^{-1}.

We will now prove that L is a coequalizer in the category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Let $\underline{E}$ be an object of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and $H : \underline{B} \to \underline{E}$ a morphism such that $H \circ G_1 = H \circ G_2$. Since the morphism L is a coequalizer in T_α-alg, there exists an unique morphism of T_α-algebras R which makes the following diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "G_1"] \arrow[r, shift right, "G_2"'] & B \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "H"'] & D \arrow[d, dotted, "R"] \\
& & E
\end{tikzcd}$$

commutative. We now prove that R is a morphism in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Since $L \circ Q = Id$ we have $R = H \circ Q$. Now apply the functors

$$\coprod_{\mathcal{P}\to ?} \mathcal{S}, \coprod_{\mathcal{P}\to ?} \mathcal{S}^{-1}, \coprod_{\mathcal{M}\to ?} \mathcal{C} : \mathsf{dgcat} \longrightarrow \mathsf{dgcat},$$

to the image of the diagram above under the functor U, and use a diagram chasing argument to conclude that L belongs in fact to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. This proves the proposition. $\square$

Notice that since U_1 is monadic and the category T_α-alg is complete, proposition 4.3.1 from [Bor94] implies that $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is also complete.

Proposition 5.23. *The category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ admits α-filtered colimits and these are preserved by the functor U_1.*

Proof. Let $\{\underline{A_i}\}_{i\in I}$ be an α-filtered diagram in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Consider the colimit

$$Y := \operatorname*{colim}_{i\in I} A_i \,,$$

of the α-filtered diagram $\{A_i\}_{i\in I}$ of T_α-algebras.

We will now construct structure morphisms for Y such that Y becomes the colimit in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ of the diagram $\{\underline{A_i}\}_{i\in I}$. Since the functor U commutes with α-filtered colimits, see section 5.5, we have

$$U(Y) = \operatorname*{colim}_{i\in I} \mathcal{A}_i \,.$$

We now construct a structure morphism C_Y, see definition 5.19, for Y. We have the following α-filtered diagrams in dgcat and morphisms between them

$$\begin{tikzcd} \left\{\coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}_i} \mathcal{M}\right\}_{i\in I} \arrow[r] \arrow[d] & \{\mathcal{A}_i\}_{i\in I} \\ \left\{\coprod\limits_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}_i} \mathcal{C}\right\}_{i\in I} \arrow[ur, "C_{\mathcal{A}_i}"'] & \end{tikzcd}$$

Now notice that since we are considering α-filtered colimits, we have

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \coprod_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}_i} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \coprod_{\mathcal{M}\to \operatorname*{colim}\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i} \mathcal{M}$$

and

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} \coprod_{\mathcal{M}\to\mathcal{A}_i} \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \coprod_{\mathcal{M}\to \operatorname*{colim}\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i} \mathcal{C}\,.$$

This implies that the morphism of T_α-algebras which corresponds under the adjunction (F, U) to the dg functor $\operatorname*{colim}\limits_{i\in I} C_{\mathcal{A}_i}$ is a structure morphism C_Y of Y. Consider now an analogous argument for the construction of structure morphisms S_Y and S_Y^{-1}.

Finally since the functor U commutes with α-filtered colimits, Y is clearly the colimit in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ of the diagram $\{\underline{A_i}\}_{i\in I}$. This proves the proposition. $\square$

Proposition 5.24. *The category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is cocomplete.*

Proof. Recall that by proposition 5.22 the adjunction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{dgcat}_{ex,\alpha} \arrow[d, shift left, "U_1"] \\ \mathsf{T}_\alpha\text{-}\mathsf{alg}\,, \arrow[u, shift left, "F_1"] \end{tikzcd}$$

is monadic. Now by propositions 4.3.2 and 4.3.6 of [Bor94] we only need to show that the functor $U_1 \circ F_1$ commutes with α-filtered colimits. But this follows from the fact that F_1 is a left adjoint and that by proposition 5.23 α-filtered colimits exist in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and are preserved by U_1. This proves the proposition. $\square$

We will now construct path objects in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. For this we consider definition 5.13 applied to our particular adjunction (F_1, U_1), see theorem 5.16.

Let $\underline{A}$ be an object of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.

Proposition 5.25. *The T_α-algebra $P(A)$, see proposition 5.15, is endowed with natural structure morphisms and so $\underline{A}$ admits a path object in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.*

Proof. We will construct structure morphisms $S_{P(A)}$, $S^{-1}_{P(A)}$ and $C_{P(A)}$ for $P(A)$, see definition 5.19, in such a way that $P(A)$ becomes a path object in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Construct the structure morphism $S_{P(A)}$, respectively $S^{-1}_{P(A)}$, by applying S_A, respectively S_A^{-1}, componentwise.

By remark 5.20, to construct a structure morphism $C_{P(A)}$, we need to construct a cone in the category $P(\mathcal{A})$ for every cycle of degree zero in $P(\mathcal{A})$. Let now (m_X, m_Y, h) be a cycle of degree 0 in $P(\mathcal{A})$ between the objects $X \xrightarrow{f} Y$ and $X' \xrightarrow{f'} Y'$ of $P(\mathcal{A})$. In particular h is a morphism in $\mathcal{A}$ of degree -1 such that $d(h) = m_Y \circ f - f' \circ m_X$. Consider the following diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m_X"'] \arrow[dr, "h"] & Y \arrow[d, "m_Y"] \\
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i_X"'] \arrow[dr, dotted, "h'"] & Y' \arrow[d, "i_Y"] \\
\mathsf{cone}(m_X) \arrow[r, dotted, "\Phi"'] & \mathsf{cone}(m_Y)\,,
\end{tikzcd}$$

where $h' = 0$ and Φ is the morphism defined by the matrix

$$\begin{bmatrix} f' & h \\ 0 & S(f) \end{bmatrix}.$$

Observe that the object in $P(\mathcal{A})$

$$\mathsf{cone}(m_X) \overset{\Phi}{\dashrightarrow} \mathsf{cone}(m_Y)\,,$$

corepresents the cone of the morphism (m_X, m_Y, h) in $P(\mathcal{A})$. This shows us that $P(A)$ belongs to $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. It is also clear that the morphisms $A \xrightarrow{i_A} P(A)$ and

$$P(A) \xrightarrow{q_A} A \times A$$

are in fact morphisms in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and that i_A is a weak equivalence. This proves the proposition. $\square$

We will now prove the main result.

Theorem 5.26. *The category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ when endowed with the notions of weak equivalence, fibration and cofibration as in definition 5.11, becomes a cofibrantly generated Quillen model category and the adjunction (F_1, U_1) becomes a Quillen adjunction.*

Proof. Recall from theorem 5.16 that we have an explicit set $F(I)$ of generating cofibrations and an explicit set $F(J)$ of generating trivial cofibrations for T_α-alg.

Now notice that all conditions of theorem 5.12 are satisfied. In particular proposition 5.25 and the fact that every object in T_α-alg is fibrant imply proposition 5.13 which implies that the assumption on cofibrations of theorem 5.12 holds.

Observe that $F_1(F(I))$ is a set of generating cofibrations on $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and that $F_1(F(J))$ is a set of generating acyclic cofibrations on $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. This implies that the Quillen model structure on $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is cofibrantly generated. Since the functor U_1 preserves by definition weak equivalences and fibrations the adjunction (F_1, U_1) is a Quillen adjunction. This proves the theorem. $\square$

5.7 Enhancement of well-generated algebraic triangulated categories

In this section, we show that the category of α-compactly generated algebraic triangulated categories up to equivalence admits a natural Quillen enhancement given by our model category $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$.

Let Tri_α denote the category of α-compactly generated algebraic triangulated categories in the sense of Neeman, see [Kra01] [Nee01b].

Let $\underline{A}$ be an object of $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$, with underlying dg category $\mathcal{A}$. Recall from proposition 5.9 that $\mathcal{A}$ admits α-small sums.

Definition 5.27 ([Por])**.** The α-continuous derived category $\mathcal{D}_\alpha(\underline{A})$ of $\underline{A}$ is the classical triangle quotient, see [Nee01b] [Ver96], of the derived category $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$ by the localizing triangulated subcategory, i.e. stable under infinite sums, of $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ generated by the cones on the canonical morphisms

$$\bigoplus_{i\in I}\widehat{X_i} \longrightarrow \widehat{\bigoplus_{i\in I} X_i}\,,$$

where $(X_i)_{i\in I}$ is a family of objects of $\mathcal{A}$ and I is a set of cardinality strictly smaller than α.

Remark 5.28. By a theorem of [Por], $\mathcal{D}_\alpha(\underline{A})$ belongs to Tri_α.

Observe that this construction is functorial in A. In fact, let $F : \underline{A} \to \underline{B}$ be a morphism in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$. Since the dg functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ commutes with α-small sums, see remark 5.10, it induces a functor

$$\mathcal{D}_\alpha(F) : \mathcal{D}_\alpha(\underline{A}) \to D_\alpha(\underline{B})$$

between triangulated categories.

Thus, we have defined a functor

$$\mathcal{D}_\alpha(-) : \mathsf{dgcat}_{ex,\alpha} \longrightarrow \mathsf{Tri}_\alpha\,.$$

Observe that if $F : \underline{A} \to \underline{B}$ is a weak equivalence in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$, i.e. the dg functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induces an equivalence of categories $\mathsf{H}^0(F) : \mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \to \mathsf{H}^0(\mathcal{B})$, then the triangulated functor $\mathcal{D}_\alpha(F)$ is an equivalence of triangulated categories.

The following theorem is proven in [Por], *cf.* [KjwMP].

Theorem 5.29 ([Por])**.** *The functor $\mathcal{D}_\alpha(-)$ satisfies the conditions:*

- *every category $\mathcal{T}$ in Tri_α is equivalent to $\mathcal{D}_\alpha(\underline{A})$ for some object $\underline{A}$ in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ and*
- *a morphism F in $\mathsf{dgcat}_{ex,\alpha}$ is a weak equivalence if and only if $\mathcal{D}_\alpha(F)$ is an equivalence of triangulated categories.*

Part III

Applications à la DG-(dé)stabilisation

Chapter 6

On the structure of Calabi-Yau categories with a cluster tilting subcategory

Ce chapitre correspond à l'article [Tab07].

6.1 Introduction

In this article, we propose a description of a class of Calabi-Yau categories using the formalism of dg-categories and the notion of 'stabilization', as used for the description of triangulated orbit categories in section 7 of [Kel05]. For $d \geqslant 2$, let $\mathcal{C}$ be an algebraic d-Calabi-Yau triangulated category endowed with a d-cluster tilting subcategory $\mathcal{T}$, *cf.* [KR07] [Iya07] [Iya05], see also [Boc] [Gina] [Ginb]. Such categories occur for example,

- in the representation-theoretic approach to Fomin-Zelevinsky's cluster algebras [FZ02], *cf.* [BMRT] [CK] [GLS06] and the references given there,
- in the study of Cohen-Macaulay modules over certain isolated singularities, *cf.* [IR] [KR07] [IY], and the study of non commutative crepant resolutions [VdB02], *cf.* [IR].

From $\mathcal{C}$ and $\mathcal{T}$ we construct an exact dg category $\mathcal{B}$, which is perfectly $(d+1)$-Calabi-Yau, and a non-degenerate aisle $\mathcal{U}$, *cf.* [KV88], in $\mathrm{H}^0(\mathcal{B})$ whose heart has enough projectives. We prove, in theorem 6.27, how to recover the category $\mathcal{C}$ from $\mathcal{B}$ and $\mathcal{U}$ using a general procedure of stabilization defined in section 6.6. This extends previous results of [KR06] to a more general framework.

It follows from [Pal] that for $d = 2$, up to derived equivalence, the category $\mathcal{B}$ only depends on $\mathcal{C}$ (with its enhancement) and not on the choice of $\mathcal{T}$. In the appendix, we show how to naturally extend a t-structure, *cf.* [BBD82], on the compact objects of a triangulated category to the whole category.

Example Let k be a field, A a finite-dimensional hereditary k-algebra and $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ the cluster category of A, see [BMR$^+$06] [CCS06], i.e. the quotient of the bounded derived category of finitely generated modules over A by the functor $F = \tau^{-1}[1]$, where τ denotes the AR-translation and [1] denotes the shift functor.

Then $\mathcal{B}$ is given by the dg algebra, see section 7 of [Kel05],

$$B = A \oplus (DA)[-3]$$

and theorem 6.27 reduces to the equivalence

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{B})/\mathsf{per}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_A$$

of section 7.1 of [Kel05].

6.2 Preliminaries

Let k be a field. Let $\mathcal{E}$ be a k-linear Frobenius category with split idempotents. Suppose that its stable category $\mathcal{C} = \underline{\mathcal{E}}$, with suspension functor S, has finite-dimensional Hom-spaces and admits a Serre functor Σ, see [BK90]. Let $d \geqslant 2$ be an integer. We suppose that $\mathcal{C}$ is Calabi-Yau of CY-dimension d, *i.e.* [Kon98] there is an isomorphism of triangle functors

$$S^d \xrightarrow{\sim} \Sigma\,.$$

We fix such an isomorphism once and for all. See section 4 of [KR07] for several examples of the above situation.

For $X, Y \in \mathcal{C}$ and $n \in \mathbb{Z}$, we put

$$\mathrm{Ext}^n(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S^n Y)\,.$$

We suppose that $\mathcal{C}$ is endowed with a d-cluster tilting subcategory $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$, *i.e.*

a) $\mathcal{T}$ is a k-linear subcategory,

b) $\mathcal{T}$ is functorially finite in $\mathcal{C}$, i.e. the functors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X)|\mathcal{T}$ and $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, ?)|\mathcal{T}$ are finitely generated for all $X \in \mathcal{C}$,

c) we have $\mathrm{Ext}^i(T, T') = 0$ for all $T, T' \in \mathcal{T}$ and all $0 < i < d$ and

d) if $X \in \mathcal{C}$ satisfies $\mathrm{Ext}^i(T, X) = 0$ for all $0 < i < d$ and all $T \in \mathcal{T}$, then T belongs to $\mathcal{T}$.

Let $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ be the preimage of $\mathcal{T}$ under the projection functor. In particular, $\mathcal{M}$ contains the subcategory $\mathcal{P}$ of the projective-injective objects in $\mathcal{M}$. Note that $\mathcal{T}$ equals the quotient $\underline{\mathcal{M}}$ of $\mathcal{M}$ by the ideal of morphisms factoring through a projective-injective.

We have the following commutative square:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathcal{E} \arrow[d, two heads] \\ \mathcal{T} \arrow[r, hook] & \underline{\mathcal{E}} = \mathcal{C}\,. \end{tikzcd}$$

We use the notations of [Kel06b]. In particular, for an additive category $\mathcal{A}$, we denote by $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, ...) the category of unbounded (resp. right bounded, resp. bounded, ...) complexes over $\mathcal{A}$ and by $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{H}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{H}^b(\mathcal{A})$, ...) its quotient modulo the ideal of nullhomotopic morphisms. By [KV87], *cf.* also [Ric91], the projection functor $\mathcal{E} \to \underline{\mathcal{E}}$ extends to a canonical triangle functor $\mathcal{H}^b(\mathcal{E})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \underline{\mathcal{E}}$. This induces a triangle functor $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \underline{\mathcal{E}}$. It is shown in [Pal] that this functor is a localization functor. Moreover, the projection functor $\mathcal{H}^b(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$ induces an equivalence from the subcategory $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ of bounded $\mathcal{E}$-acyclic complexes with components in $\mathcal{M}$ onto its kernel. Thus, we have a short exact sequence of triangulated categories

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0\,.$$

Let $\mathcal{B}$ be the dg (=differential graded) subcategory of the category $\mathcal{C}^b(\mathcal{M})_{dg}$ of bounded complexes over $\mathcal{M}$ whose objects are the $\mathcal{E}$-acyclic complexes. We denote by $G : \mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ the functor which takes a right bounded complex X over $\mathcal{M}$ to the dg module

$$B \mapsto \operatorname{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{M}}(X, B)\,,$$

where B is in $\mathcal{B}$.

Remark 6.1. By construction, the functor G restricted to $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ establishes an equivalence

$$G : \mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}\,.$$

Recall that if P is a right bounded complex of projectives and A is an acyclic complex, then each morphism from P to A is nullhomotopic. In particular, the complex $\operatorname{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{M}}(P, A)$ is nullhomotopic for each P in $\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$. Thus G takes $\mathcal{H}^-(P)$ to zero, and induces a well defined functor (still denoted by G)

$$G : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}\,.$$

6.3 Embedding

Proposition 6.2. *The functor G is fully faithful.*

For the proof, we need a number of lemmas.
It is well-known that the category $\mathcal{H}^-(\mathcal{E})$ admits a semiorthogonal decomposition, *cf.* [BO], formed by $\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$ and its right orthogonal $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{E})$, the full subcategory of the right bounded $\mathcal{E}$-acyclic complexes. For X in $\mathcal{H}^-(\mathcal{E})$, we write

$$\mathbf{p}X \to X \to \mathbf{a}_p X \to S\mathbf{p}X$$

for the corresponding triangle, where $\mathbf{p}X$ is in $\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$ and $\mathbf{a}_p X$ is in $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{E})$. If X lies in $\mathcal{H}^-(\mathcal{M})$, then clearly $\mathbf{a}_p X$ lies in $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ so that we have an induced semiorthogonal decomposition of $\mathcal{H}^-(\mathcal{M})$.

Lemma 6.3. *The functor $\Upsilon : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ which takes X to $\mathbf{a}_p X$ is fully faithful.*

Proof. By the semiorthogonal decomposition of $\mathcal{H}^-(\mathcal{M})$, the functor $X \mapsto \mathbf{a}_p X$ induces a right adjoint of the localization functor

$$\mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{H}^-(\mathcal{M})/\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$$

and an equivalence of the quotient category with the right orthogonal $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}^-(\mathcal{P}) \arrow[d, hook, shift right] & \\
 & \mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right] & \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}(\mathcal{P})^{\perp} \arrow[l, hook'] \\
\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \arrow[r, hook] & \mathcal{H}^-(\mathcal{M})/\mathcal{H}^-(\mathcal{P}) \arrow[u, hook, shift right] \arrow[ur, dashed, "\sim"] & .
\end{tikzcd}$$

Moreover, it is easy to see that the canonical functor

$$\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{H}^-(\mathcal{M})/\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$$

is fully faithful so that we obtain a fully faithful functor

$$\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$$

taking X to $\mathbf{a}_p X$. $\square$

Remark 6.4. Since the functor G is triangulated and takes $\mathcal{H}^-(\mathcal{P})$ to zero, for X in $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})$, the adjunction morphism $X \to \mathbf{a}_p X$ yields an isomorphism

$$G(X) \xrightarrow{\sim} G(\mathbf{a}_p X) = G(\Upsilon X)\,.$$

Let $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ be the full subcategory of the derived category $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ formed by the right bounded complexes whose homology modules lie in the subcategory $\operatorname{Mod}\underline{\mathcal{M}}$ of $\operatorname{Mod}\mathcal{M}$. The Yoneda functor $\mathcal{M} \to \operatorname{Mod}\mathcal{M}$, $M \mapsto M^\wedge$, induces a full embedding

$$\Psi : \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})\,.$$

We write $\mathcal{V}$ for its essential image. Under Ψ, the category $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ is identified with $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$. Let $\Phi : \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ be the functor which takes X to the dg module

$$B \mapsto \operatorname{Hom}^\bullet(X_c, \Psi(B))\,,$$

where B is in $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$ and X_c is a cofibrant replacement of X for the projective model structure on $\mathcal{C}(\mathcal{M})$. Since for each right bounded complex M with components in $\mathcal{M}$, the complex $M^\wedge$ is cofibrant in $\mathcal{C}(\mathcal{M})$, it is clear that the functor $G : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ is isomorphic to the composition $\Phi \circ \Psi \circ \Upsilon$. We have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \arrow[r, hook, "\Upsilon"] & \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\sim"] & & \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} \\
& & \mathcal{V} \arrow[ur, hook] \arrow[urr, dashed] & & \\
\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[uu, hook] \arrow[r, equal] & \mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[uu, hook] \arrow[rr, "\sim"] & & \operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \arrow[uu, hook] \arrow[ul, hook] \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{per}(\mathcal{B}^{op})^{op} \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

Lemma 6.5. *Let Y be an object of $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$.*

a) Y lies in $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ iff $\mathrm{H}^p(Y)$ is a finitely presented $\underline{\mathcal{M}}$-module for all $p \in \mathbb{Z}$ and vanishes for all but finitely many p.

b) Y lies in $\mathcal{V}$ iff $\mathrm{H}^p(Y)$ is a finitely presented $\underline{\mathcal{M}}$-module for all $p \in \mathbb{Z}$ and vanishes for all $p \gg 0$.

Proof. a) Clearly the condition is necessary. For the converse, suppose first that Y is a finitely presented $\underline{\mathcal{M}}$-module. Then, as an $\mathcal{M}$-module, Y admits a resolution of length $d+1$ by finitely generated projective modules by theorem 5.4 b) of [KR07]. It follows that Y belongs to $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$. Since $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ is triangulated, it also contains all shifts of finitely presented $\underline{\mathcal{M}}$-modules and all extensions of shifts. This proves the converse.
b) Clearly the condition is necessary. For the converse, we can suppose without loss of generality that $Y^n = 0$, for all $n \geqslant 1$ and that Y^n belongs to $\operatorname{proj}\mathcal{M}$, for $n \leqslant 0$. We now construct a sequence

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0$$

of complexes of finitely generated projective $\mathcal{M}$-modules such that P_n is quasi-isomorphic to $\tau_{\geqslant -n}Y$ for each n and that, for each $p \in \mathbb{Z}$, the sequence of $\mathcal{M}$-modules P_n^p becomes stationary. By our assumptions, we have $\tau_{\geqslant 0}Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(Y)$. Since $\mathrm{H}^0(Y)$ belongs to $\operatorname{mod}\underline{\mathcal{M}}$, we know by theorem 5.4 c) of [KR07] that it belongs to $\operatorname{per}(\mathcal{M})$ as an $\mathcal{M}$-module. We define P_0 to be a finite resolution of $\mathrm{H}^0(Y)$ by finitely generated $\mathcal{M}$-modules. For the induction step, consider the following truncation triangle associated with Y

$$S^{i+1}\mathrm{H}^{-i-1}(Y) \to \tau_{\geqslant -i-1}Y \to \tau_{\geqslant -i}Y \to S^{i+2}\mathrm{H}^{-i-1}(Y)\,,$$

for $i \geqslant 0$. By the induction hypothesis, we have constructed $P_0, \ldots, P_i$ and we have a quasi-isomorphism $P_i \xrightarrow{\sim} \tau_{\geqslant -i}Y$. Let Q_{i+1} be a finite resolution of $S^{i+2}\mathrm{H}^{-i-1}(Y)$ by finitely presented projective $\mathcal{M}$-modules. We have a morphism $f_i : P_i \to Q_{i+1}$ and we define P_{i+1} as the cylinder of f_i. We define P as the limit of the P_i in the category of complexes. We remark that Y is quasi-isomorphic to P and that P belongs to $\mathcal{V}$. This proves the converse. $\square$

Let X be in $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$.

Remark 6.6. Lemma 6.5 shows that the natural t-structure of $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ restricts to a t-structure on $\mathcal{V}$. This allows us to express $\Psi(X)$ as

$$\Psi(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{holim}_i \tau_{\geqslant -i}\Psi(X)\,,$$

where $\tau_{\geqslant -i}\Psi(X)$ is in $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$.

Lemma 6.7. *We have the following isomorphism*

$$\Phi(\Psi(X)) = \Phi(\operatorname*{holim}_i \tau_{\geqslant -i}\Psi(X)) \xrightarrow{\sim} \operatorname*{holim}_i \Phi(\tau_{\geqslant -i}\Psi(X))\,.$$

Proof. It is enough to show that the canonical morphism induces a quasi-isomorphism when evaluated at any object B of $\mathcal{B}$. We have

$$\Phi(\operatorname*{holim}_i \tau_{\geqslant -i}\Psi(X))(B) = \mathrm{Hom}^\bullet(\operatorname*{holim}_i \tau_{\geqslant -i}\Psi(X), B)\,,$$

but since B is a bounded complex, for each $n \in \mathbf{Z}$, the sequence

$$i \mapsto \mathrm{Hom}^n(\tau_{\geqslant -i}\Psi(X), B)$$

stabilizes as i goes to infinity. This implies that

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\operatorname*{holim}_i \tau_{\geqslant -i}\Psi(X), B) \xleftarrow{\sim} \operatorname*{holim}_i \Phi(\tau_{\geqslant -i}\Psi(X))(B)\,.$$

$\square$

Lemma 6.8. *The functor Φ restricted to the category $\mathcal{V}$ is fully faithful.*

Proof. Let X, Y be in $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$. The following are canonically isomorphic :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi\Psi X, \Phi\Psi Y)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi\Psi Y, \Phi\Psi X)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\operatorname*{hocolim}_i \Phi\tau_{\geqslant -i}\Psi Y, \operatorname*{hocolim}_j \Phi\tau_{\geqslant -j}\Psi X) \tag{6.1}$$
$$\operatorname*{holim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi\tau_{\geqslant -i}\Psi Y, \operatorname*{hocolim}_j \Phi\tau_{\geqslant -j}\Psi X)$$
$$\operatorname*{holim}_i \operatorname*{hocolim}_j \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi\tau_{\geqslant -i}\Psi Y, \Phi\tau_{\geqslant -j}\Psi X) \tag{6.2}$$
$$\operatorname*{holim}_i \operatorname*{hocolim}_j \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(\tau_{\geqslant -j}\Psi X, \tau_{\geqslant -i}\Psi Y)$$
$$\operatorname*{holim}_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\operatorname*{holim}_j \tau_{\geqslant -j}\Psi X, \tau_{\geqslant -i}\Psi Y) \tag{6.3}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\Psi(X), \Psi(Y))\,.$$

Here (4.1) is by the lemma 6.7 seen in $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$, (4.2) is by the fact that $\Phi\tau_{\geqslant -i}\Psi Y$ is compact and (4.3) is by the fact that $\tau_{\geqslant -i}\Psi Y$ is bounded. $\square$

It is clear now that lemmas 6.3, 6.7 and 6.8 imply the proposition 6.2.

6.4 Determination of the image of G

Let $L_\rho : \mathcal{D}^-(\underline{\mathcal{M}}) \to \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ be the restriction functor induced by the projection functor $\mathcal{M} \to \underline{\mathcal{M}}$. L_ρ admits a left adjoint $L : \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}^-(\underline{\mathcal{M}})$ which takes Y to $Y \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{M}} \underline{\mathcal{M}}$. Let $\mathcal{B}^-$ be the dg subcategory of $\mathcal{C}^-(\mathrm{Mod}\,\mathcal{M})_{dg}$ formed by the objects of $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ that are in the essential image of the restriction of Ψ to $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$. Let $\mathcal{B}'$ be the dg quotient, *cf.* [Dri04], of $\mathcal{B}^-$ by its quasi-isomorphisms. It is clear that the dg categories $\mathcal{B}'$ and $\mathcal{B}$ are quasi-equivalent, *cf.* [Kel94], and that the natural dg functor $\mathcal{M} \to \mathcal{C}^-(\mathrm{Mod}\,\mathcal{M})_{dg}$ factors through $\mathcal{B}^-$. Let $R' : \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} \to \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$ be the restriction functor induced by the dg functor $\underline{\mathcal{M}} \to \mathcal{B}'$. Let $\Phi' : \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}'^{op})^{op}$ be the functor which takes X to the dg module

$$B' \mapsto \mathrm{Hom}^\bullet(X_c, B')\,,$$

where B' is in $\mathcal{B}'$ and X_c is a cofibrant replacement of X for the projective model structure on $\mathcal{C}(\mathrm{Mod}\,\mathcal{M})$. Finally let $\Gamma : \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}) \to \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$ be the functor that sends Y to

$$M \mapsto \mathrm{Hom}^\bullet(Y_c, \underline{\mathcal{M}}(?, M))\,,$$

where Y_c is a cofibrant replacement of Y for the projective model structure on $\mathcal{C}(\mathrm{Mod}\,\underline{\mathcal{M}})$ and M is in $\underline{\mathcal{M}}$.

We have the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} & \mathcal{B} \arrow[d] \\
\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \arrow[r, hook, "\Upsilon"] & \mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{D}(\mathcal{B}'^{op})^{op} \arrow[u, "\sim"'] \arrow[d, "R'"] & \mathcal{B}' \\
 & & \mathcal{D}^-(\underline{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\Gamma"'] & \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op} & \underline{\mathcal{M}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Lemma 6.9. *The following square*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\Phi'"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{D}(\mathcal{B}'^{op})^{op} \arrow[d, "R'"] & \mathcal{B}' \\
\mathcal{D}^-(\underline{\mathcal{M}}) \arrow[r, "\Gamma"'] & \mathcal{D}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op} & \underline{\mathcal{M}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

is commutative.

Proof. By definition $(R' \circ \Phi')(X)(M)$ equals $\mathrm{Hom}^\bullet(X_c, \underline{\mathcal{M}}(?, \mathcal{M}))$. Since $\underline{\mathcal{M}}(?, M)$ identifies with $L_\rho M^\wedge$ and by adjunction, we have

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X_c, \underline{\mathcal{M}}(?, M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet(X_c, L_\rho M^\wedge) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet((LX)_c, \underline{\mathcal{M}}(?, M))\,,$$

where the last member equals $(\Gamma \circ L)(X)(M)$. $\square$

Lemma 6.10. *The functor L reflects isomorphisms.*

Proof. Since L is a triangulated functor, it is enough to show that if $L(Y) = 0$, then $Y = 0$. Let Y be in $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ such that $L(Y) = 0$. We can suppose, without loss of generality, that $\mathrm{H}^p(Y) = 0$ for all $p > 0$. Let us show that $\mathrm{H}^0(Y) = 0$. Indeed, since $\mathrm{H}^0(Y)$ is an $\underline{\mathcal{M}}$-module, we have $\mathrm{H}^0(Y) \cong L^0\mathrm{H}^0(Y)$, where

$L^0 : \operatorname{Mod}\mathcal{M} \to \operatorname{Mod}\underline{\mathcal{M}}$ is the left adjoint of the inclusion $\operatorname{Mod}\underline{\mathcal{M}} \to \operatorname{Mod}\mathcal{M}$. Since $\mathrm{H}^p(Y)$ vanishes in degrees $p > 0$, we have

$$L^0\mathrm{H}^0(Y) = \mathrm{H}^0(LY)\,.$$

By induction, one concludes that $\mathrm{H}^p(Y) = 0$ for all $p \leqslant 0$. □

Proposition 6.11. *An object Y of $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ lies in the essential image of the functor $\Psi\circ\Upsilon : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ iff $\tau_{\geqslant -n}Y$ is in $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$, for all $n \in \mathbb{Z}$ and $L(Y)$ belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}})$.*

Proof. Let X be in $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$. By lemma 6.5 a), $\tau_{\geqslant -n}\Psi\Upsilon(X)$ is in $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$, for all $n \in \mathbb{Z}$. Since X is a bounded complex, there exists an $s \ll 0$ such that for all $m < s$ the m-components of $\Upsilon(X)$ are in $\mathcal{P}$, which implies that $L\Psi\Upsilon(X)$ belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}})$.
Conversely, suppose that Y is an object of $\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ which satisfies the conditions. By lemma 6.5, Y belongs to $\mathcal{V}$. Thus we have $Y = \Psi(Y')$ for some Y' in $\mathcal{H}^-_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M})$. We now consider Y' as an object of $\mathcal{H}^-(\mathcal{M})$ and also write Ψ for the functor $\mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{M})$ induced by the Yoneda functor. We can express Y' as

$$Y' \xleftarrow{\sim} \operatorname*{hocolim}_i \sigma_{\geqslant -i}Y'\,,$$

where the $\sigma_{\geqslant -i}$ are the naive truncations. By our assumptions on Y', $\sigma_{\geqslant -i}Y'$ belongs to $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$, for all $i \in \mathbb{Z}$. The functors Ψ and L clearly commute with the naive truncations $\sigma_{\geqslant -i}$ and so we have

$$L(Y) = L(\Psi Y') \xleftarrow{\sim} \operatorname*{hocolim}_i L(\sigma_{\geqslant -i}\Psi Y') \xrightarrow{\sim} \operatorname*{hocolim}_i \sigma_{\geqslant -i}L(\Psi Y')\,.$$

By our hypotheses, $L(Y)$ belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}})$ and so there exists an $m \gg 0$ such that

$$L(Y) = L(\Psi Y') \xleftarrow{\sim} \sigma_{\geqslant -m}L(\Psi Y') = L(\sigma_{\geqslant -m}\Psi Y')\,.$$

By lemma 6.10, the inclusion

$$\Psi(\sigma_{\geqslant -m}Y)' = \sigma_{\geqslant -m}\Psi Y' \longrightarrow \Psi(Y') = Y$$

is an isomorphism. But since $\sigma_{\geqslant -m}Y'$ belongs to $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$, Y identifies with $\Psi(\sigma_{\geqslant -m}Y')$. □

Remark 6.12. It is clear that if X belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}})$, then $\Gamma(X)$ belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$. We also have the following partial converse.

Lemma 6.13. *Let X be in $\mathcal{D}^-_{\operatorname{mod}\underline{\mathcal{M}}}(\underline{\mathcal{M}})$ such that $\Gamma(X)$ belongs to $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$. Then X is in $\operatorname{per}(\underline{\mathcal{M}})$.*

Proof. By lemma 6.5 b) we can suppose, without loss of generality, that X is a right bounded complex with finitely generated projective components. Applying Γ, we get a perfect complex $\Gamma(X)$. In particular $\Gamma(X)$ is homotopic to zero in high degrees. But since Γ is an equivalence

$$\operatorname{proj}\underline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{proj}\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}\,,$$

it follows that X is already homotopic to zero in high degrees. □

Remark 6.14. The natural right aisle on $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ is the full subcategory of the objects X such that $\mathsf{H}^n(X) = 0$ for all $n < 0$. The associated truncation functor $\tau_{\geqslant 0}$ takes $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ to itself. Therefore, the natural right aisle on $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ restricts to a natural right aisle $\mathcal{U}^{op}$ on $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$.

Definition 6.15. Let $\mathcal{U}$ be the natural left aisle in $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op}$ associated with $\mathcal{U}^{op}$.

Lemma 6.16. *The natural left aisle $\mathcal{U}$ on $\operatorname{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op} \xrightarrow{\sim} \operatorname{per}(\mathcal{B}^{op})$ satisfies the conditions of proposition 6.28 b).*

Proof. Clearly the natural left aisle $\mathcal{U}$ in $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op}$ is non-degenerate. We need to show that for each $C \in \mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op}$, there is an integer N such that $\mathrm{Hom}(C, S^N U) = 0$ for each $U \in \mathcal{U}$. We have the following isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op}}(C, S^N \mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(S^{-N}\mathcal{U}^{op}, C)\,,$$

where $\mathcal{U}^{op}$ denotes the natural right aisle on $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$. Since by theorem 5.4 c) of [KR07] an $\underline{\mathcal{M}}$-module admits a projective resolution of length $d+1$ as an $\mathcal{M}$-module and C is a bounded complex, we conclude that for $N \gg 0$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(S^{-N}\mathcal{U}^{op}, C) = 0\,.$$

This proves the lemma. □

We denote by $\tau_{\leqslant n}$ and $\tau_{\geqslant n}$, $n \in \mathbb{Z}$, the associated truncation functors on $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$.

Lemma 6.17. *The functor $\Phi : \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ restricted to the category $\mathcal{V}$ is exact with respect to the given t-structures.*

Proof. We first prove that $\Phi(\mathcal{V}_{\leqslant 0}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$. Let X be in $\mathcal{V}_{\leqslant 0}$. We need to show that $\Phi(X)$ belongs to $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$. The following have the same classes of objects :

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})_{>0}$$
$$(\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})_{\leqslant 0})^{\perp} \tag{6.4}$$
$${}^{\perp}(\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op})_{>0}\,, \tag{6.5}$$

where in (5.1) we consider the right orthogonal in $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ and in (5.2) we consider the left orthogonal in $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$. These isomorphisms show us that $\Phi(X)$ belongs to $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$ iff

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi(X), \Phi(P)) = 0\,,$$

for all $P \in \mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})_{>0}$. Now, by lemma 6.8 the functor Φ is fully faithful and so

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi(X), \Phi(P)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X, P)\,.$$

Since X belongs to $\mathcal{V}_{\leqslant 0}$ and P belongs to $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})_{>0}$, we conclude that

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X, P) = 0\,,$$

which implies that $\Phi(X) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$. Let us now consider X in $\mathcal{V}$. We have the truncation triangle

$$\tau_{\leqslant 0}X \to X \to \tau_{>0}X \to S\tau_{\leqslant 0}X\,.$$

The functor Φ is triangulated and so we have the triangle

$$\Phi\tau_{\leqslant 0}X \to X \to \Phi\tau_{>0}X \to S\Phi\tau_{\leqslant 0}X\,,$$

where $\Phi\tau_{\leqslant 0}X$ belongs to $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$. Since Φ induces an equivalence between $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ and $\mathrm{Hom}(P, \tau_{>0}X) = 0$, for all P in $\mathcal{V}_{\leqslant 0}$, we conclude that $\Phi\tau_{>0}X$ belongs to $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{>0}$. This implies the lemma. □

Definition 6.18. Let $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_{f}$ denote the full triangulated subcategory of $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ formed by the objects Y such that $\tau_{\geqslant -n}Y$ is in $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$, for all $n \in \mathbb{Z}$, and $R(Y)$ belongs to $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$.

Proposition 6.19. *An object Y of $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ lies in the essential image of the functor $G : \mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ iff it belongs to $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})_f^{op}$.*

Proof. Let X be in $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$. It is clear that the $\tau_{\geqslant -n}G(X)$ are in $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ for all $n \in \mathbb{Z}$. By proposition 6.11 we know that $L\Psi\Upsilon(X)$ belongs to $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}})$. By lemma 6.9 and remark 6.12 we conclude that $RG(X)$ belongs to $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$. Let now Y be in $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})_f^{op}$. We can express it, by the dual of lemma 6.30 as the homotopy limit of the following diagram

$$\cdots \to \tau_{\geqslant -n-1}Y \to \tau_{\geqslant -n}Y \to \tau_{\geqslant -n+1}Y \to \cdots ,$$

where $\tau_{\geqslant -n}Y$ belongs to $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$, for all $n \in \mathbb{Z}$. But since Φ induces an equivalence between $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$, this last diagram corresponds to a diagram

$$\cdots \to M_{-n-1} \to M_{-n} \to M_{-n+1} \to \cdots$$

in $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$. Let $p \in \mathbb{Z}$. The relations among the truncation functors imply that the image of the above diagram under each homology functor H^p, $p \in \mathbb{Z}$, is stationary as n goes to $+\infty$. This implies that

$$\mathrm{H}^p \operatorname*{holim}_n M_{-n} \xrightarrow{\sim} \lim_n \mathrm{H}^p\, M_{-n} \cong \mathrm{H}^p\, M_j \,,$$

for all $j < p$. We have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{holim}_n M_{-n} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname*{holim}_n \tau_{\geqslant -i}\, M_{-n} \cong M_{-i} \\
\tau_{\geqslant -i} \operatorname*{holim}_n M_{-n} \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

which implies that

$$\tau_{\geqslant -i} \operatorname*{holim}_n M_{-n} \xrightarrow{\sim} M_{-i} \,,$$

for all $i \in \mathbb{Z}$. Since $\operatorname*{holim}_n M_{-n}$ belongs to $\mathcal{V}$, lemma 6.7 allows us to conclude that $\Phi(\operatorname*{holim}_n M_{-n}) \cong Y$. We now show that $\operatorname*{holim}_n M_{-n}$ satisfies the conditions of proposition 6.11. We know that $\tau_{\geqslant -i} \operatorname*{holim}_n M_{-n}$ belongs to $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$, for all $i \in \mathbb{Z}$. By lemma 6.9 $(\Gamma \circ L)(\operatorname*{holim}_n M_{-n})$ identifies with $R(Y)$, which is in $\mathrm{per}(\underline{\mathcal{M}}^{op})^{op}$. Since $\operatorname*{holim}_n M_{-n}$ belongs to $\mathcal{V}$, its homologies lie in $\mathrm{mod}\,\underline{\mathcal{M}}$ and so we are in the conditions of lemma 6.11, which implies that $L(\operatorname*{holim}_n M_{-n})$ belongs to $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$. This finishes the proof. □

6.5 Alternative description

In this section, we present another characterization of the image of G, which was identified as $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})_f^{op}$ in proposition 6.19. Let M denote an object of $\mathcal{M}$ and also the naturally associated complex in $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})$. Since the category $\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P})$ is generated by the objects $M \in \mathcal{M}$ and the functor G is fully faithful, we remark that $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})_f^{op}$ equals the triangulated subcategory of $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ generated by the objects $G(M)$, $M \in \mathcal{M}$. The rest of this section is concerned with the problem of characterizing the objects $G(M)$, $M \in \mathcal{M}$. We denote by P_M the projective $\underline{\mathcal{M}}$-module $\underline{\mathcal{M}}(?, M)$ associated with $M \in \mathcal{M}$ and by X_M the image of M under $\Psi \circ \Upsilon$.

Lemma 6.20. *We have the following isomorphism*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}\,\underline{\mathcal{M}}}(P_M, \mathrm{H}^0(Y)) \,,$$

for all $Y \in \mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$.

Proof. Clearly X_M belongs to $\mathcal{D}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})_{\leqslant 0}$ and is of the form

$$\cdots \to P_n^\wedge \to \cdots \to P_1^\wedge \to P_0^\wedge \to M^\wedge \to 0\,,$$

where $P_n \in \mathcal{P}$, $n \geqslant 0$. Now Yoneda's lemma and the fact that $\mathrm{H}^m(Y)(P_n) = 0$, for all $m \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, imply the lemma. □

Remark 6.21. Since the functor Φ restricted to $\mathcal{V}$ is fully faithful and exact, we have

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(G(M), \Phi(Y)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi(P_M), \mathrm{H}^0(\Phi(Y)))\,,$$

for all $Y \in \mathcal{V}$.

We now characterize the objects $G(M) = \Phi(X_M)$, $M \in \mathcal{M}$, in the triangulated category $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$. More precisely, we give a description of the functor

$$R_M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(?, \Phi(X_M)) : \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op} \to \mathrm{Mod}\, k$$

using an idea of M. Van den Bergh, *cf.* lemma 2.13 of [CKN01]. Consider the following functor

$$F_M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})}(\mathrm{H}^0(?), \Phi(P_M)) : \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op} \to \mathrm{mod}\, k\,.$$

Remark 6.22. Remark 6.21 shows that the functor R_M when restricted to $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$ coincides with F_M.

Let DF_M be the composition of F_M with the duality functor $D = \mathrm{Hom}(?, k)$. Note that DF_M is homological.

Lemma 6.23. *We have the following isomorphism of functors on* $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$

$$DF_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi(X_M), ?[d+1])\,.$$

Proof. The following functors are canonically isomorphic to $DF\Phi$:

$$D\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})}(\mathrm{H}^0\Phi(?), \Phi(P_M))$$
$$D\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi\mathrm{H}^0(?), \Phi(P_M)) \tag{6.6}$$
$$D\mathrm{Hom}_{\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(P_M, \mathrm{H}^0(?)) \tag{6.7}$$
$$D\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, ?) \tag{6.8}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(?[-d-1], X_M) \tag{6.9}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi(?)[-d-1], \Phi(X_M)) \tag{6.10}$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}}(\Phi(X_M), \Phi(?)[d+1]) \tag{6.11}$$

Step (6.1) follows from the fact that Φ is exact. Step (6.2) follows from the fact that Φ is fully faithful and we are considering the opposite category. Step (6.3) is a consequence of lemma 6.20. Step (6.4) follows from the $(d+1)$-Calabi-Yau property and remark 6.6. Step (6.5) is a consequence of Φ being fully faithful and step (6.6) is a consequence of working in the opposite category. Since the functor Φ^{op} establish an equivalence between $\mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})^{op}$ and $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$ the lemma is proven. □

Now, since the category $\mathrm{Mod}\, k$ is cocomplete, we can consider the left Kan extension, *cf.* [ML98], E_M of DF_M along the inclusion $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$. We have the following commutative square :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op}) \arrow[r, "DF_M"] \arrow[d, hook] & \mathrm{mod}\, k \arrow[d, hook] \\
\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op}) \arrow[r, dashed, "E_M"'] & \mathrm{Mod}\, k\,.
\end{tikzcd}$$

For each X of $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$, the comma-category of morphisms $P \to X$ from a perfect object P to X is filtered. Therefore, the functor E_M is homological. Moreover, it preserves coproducts and so DE_M is cohomological and transforms coproducts into products. Since $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ is a compactly generated triangulated category, the Brown representability theorem, *cf.* [Nee01b], implies that there is a $Z_M \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ such that

$$DE_M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(?, Z_M)\,.$$

Remark 6.24. Since the duality functor D establishes and anti-equivalence in $\mathrm{mod}\, k$, the functor DE_M restricted to $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$ is isomorphic to F_M.

Theorem 6.25. *We have an isomorphism*

$$G(M) \xrightarrow{\sim} Z_M\,.$$

Proof. We now construct a morphism of functors from R_M to DE_M. Since R_M is representable, by Yoneda's lemma it is enough to construct an element in $DE_M(\Phi(X_M))$. Let $\mathcal{C}$ be the category $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op}) \downarrow \Phi(X_M)$, whose objects are the morphisms $Y' \to \Phi(X_M)$ and let $\mathcal{C}'$ be the category $X_M \downarrow \mathrm{per}_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})$, whose objects are the morphisms $X_M \to X'$. The following are canonically isomorphic :

$$DE_M(\Phi(X_M))$$

$$D\,\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{colim}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})}(\Phi(X_M), Y'[d+1]) \qquad (6.12)$$

$$D\,\underset{\mathcal{C}'}{\mathrm{colim}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X'[-d-1], X_M) \qquad (6.13)$$

$$\mathrm{D}\,\underset{i}{\mathrm{colim}}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}((\tau_{\geqslant -i}X_M)[-d-1], X_M) \qquad (6.14)$$

$$\lim_i \mathrm{DHom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}((\tau_{\geqslant -i}X_M)[-d-1], X_M)$$

$$\lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, \tau_{\geqslant -i}X_M) \qquad (6.15)$$

Step (6.7) is a consequence of the definition of the left Kan extension and lemma 6.23. Step (6.8) is obtained by considering the opposite category. Step (6.9) follows from the fact that the system $(\tau_{\geqslant -i}X_M)_{i\in\mathbb{Z}}$ forms a cofinal system for the index system of the colimit. Step (6.10) follows from the $(d+1)$-Calabi-Yau property. Now, the image of the identity by the canonical morphism

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, X_M) \longrightarrow \lim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-_{\underline{\mathcal{M}}}(\mathcal{M})}(X_M, \tau_{\geqslant -i}X_M)\,,$$

gives us an element of $(DE_M)(\Phi(X_M))$ and so a morphism of functors from R_M to DE_M. We remark that this morphism is an isomorphism when evaluated at the objects of $\mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})$. Since both functors R_M and DE_M are cohomological, transform coproducts into products and $\mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})$ is compactly generated, we conclude that we have an isomorphism

$$G(M) \xrightarrow{\sim} Z_M\,.$$

$\square$

6.6 The main theorem

Consider the following commutative square as in section 6.2:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ \mathcal{T} \arrow[r, hook] & \underline{\mathcal{E}} = \mathcal{C}\,. \end{tikzcd}$$

In the previous sections we have constructed, from the above data, a dg category $\mathcal{B}$ and a left aisle $\mathcal{U} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{B})$, see [KV88], satisfying the following conditions :

- $\mathcal{B}$ is an exact dg category over k such that $\mathrm{H}^0(\mathcal{B})$ has finite-dimensional Hom-spaces and is Calabi-Yau of CY-dimension $d+1$,
- $\mathcal{U} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{B})$ is a non-degenerate left aisle such that :
    - for all $B \in \mathcal{B}$, there is an integer N such that $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(\mathcal{B})}(B, S^N U) = 0$ for each $U \in \mathcal{U}$,
    - the heart $\mathcal{H}$ of the t-structure on $\mathrm{H}^0(\mathcal{B})$ associated with $\mathcal{U}$ has enough projectives.

Let now $\mathcal{A}$ be a dg category and $\mathcal{W} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ a left aisle satisfying the above conditions. We can consider the following general construction : Let $\mathcal{Q}$ denote the category of projectives of the heart $\mathcal{H}$ of the t-structure on $\mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ associated with $\mathcal{W}$. We claim that the following inclusion

$$\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{A}),$$

lifts to a morphism $\mathcal{Q} \xrightarrow{j} \mathcal{A}$ in the homotopy category of small dg categories Heq. Indeed, recall the following argument from section 7 of [Kel94]: Let $\tilde{\mathcal{Q}}$ be the full dg subcategory of $\mathcal{A}$ whose objects are the same as those of $\mathcal{Q}$. Let $\tau_{\leqslant 0}\tilde{\mathcal{Q}}$ denote the dg category obtained from $\tilde{\mathcal{Q}}$ by applying the truncation functor $\tau_{\leqslant 0}$ of complexes to each Hom-space. We have he following diagram in the category of small dg categories

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{Q}} \arrow[r, hook] & \mathcal{A} \\ & \tau_{\leqslant 0}\tilde{\mathcal{Q}} \arrow[u] \arrow[d] & \\ \mathcal{Q} \arrow[r, equal] & \mathrm{H}^0(\tilde{\mathcal{Q}}) & . \end{tikzcd}$$

Let X, Y be objects of $\mathcal{Q}$. Since X and Y belong to the heart of a t-structure in $\mathrm{H}^0(\mathcal{A})$, we have

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(\mathcal{A})}(X, Y[-n]) = 0,$$

for $n \geqslant 1$. The dg category $\mathcal{A}$ is exact, which implies that

$$\mathrm{H}^{-n}\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\tilde{\mathcal{Q}}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^0(\mathcal{A})}(X, Y[-n]) = 0,$$

for $n \geqslant 1$. This shows that the dg functor $\tau_{\leqslant 0}\tilde{\mathcal{Q}} \to \mathrm{H}^0(\tilde{\mathcal{Q}})$ is a quasi-equivalence and so we have a morphism $\mathcal{Q} \xrightarrow{j} \mathcal{A}$ in the homotopy category of small dg categories. We have a triangle functor $j^* : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{Q})$ given by restriction. By proposition 6.28, the left aisle $\mathcal{W} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{A})$ admits a smallest extension to a left aisle $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}_{\leqslant 0}$ on $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}$. Let $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}_f$ denote the full triangulated subcategory of $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}$ formed by the objects Y such that $\tau_{\geqslant -n}Y$ is in $\mathrm{per}(\mathcal{A}^{op})^{op}$, for all $n \in \mathbb{Z}$, and $j^*(Y)$ belongs to $\mathrm{per}(\mathcal{Q}^{op})^{op}$.

Definition 6.26. The stable category of $\mathcal{A}$ with respect to $\mathcal{W}$ is the triangle quotient

$$\mathrm{stab}(\mathcal{A}, \mathcal{W}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{op})^{op}_f / \mathrm{per}(\mathcal{A}^{op})^{op}.$$

We are now able to formulate the main theorem. Let $\mathcal{B}$ be the dg category and $\mathcal{U} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{B})$ the left aisle constructed in sections 1 to 5.

Theorem 6.27. *The functor G induces an equivalence of categories*

$$\tilde{G} : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{stab}(\mathcal{B},\mathcal{U})\,.$$

Proof. We have the following commutative diagram :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, dashed, "\tilde{G}", "\sim"'] & & \mathrm{stab}(\mathcal{B},\mathcal{U}) \\
\mathcal{H}^b(\mathcal{M})/\mathcal{H}^b(\mathcal{P}) \arrow[u] \arrow[rr, "G", "\sim"'] & & \mathcal{D}(\mathcal{B}^{op})^{op}_f \arrow[u] \\
\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr, "\sim"'] & & \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}\,. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

The functor G is an equivalence since it is fully faithful by proposition 6.2 and essentially surjective by proposition 6.19. Since we have an equivalence $\mathcal{H}^b_{\mathcal{E}\text{-}ac}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{per}(\mathcal{B}^{op})^{op}$ by construction of $\mathcal{B}$ and the columns of the above diagram are short exact sequences of triangulated categories, the theorem is proved. □

6.7 Appendix: extension of t-structures

Let $\mathcal{T}$ be a compactly generated triangulated category with suspension functor S. We denote by $\mathcal{T}_c$ the full triangulated sub-category of $\mathcal{T}$ formed by the compact objects, see [Nee01b]. We use the terminology of [KV88]. Let $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_c$ be a left aisle on $\mathcal{T}_c$, i.e. a full additive subcategory $\mathcal{U}$ of $\mathcal{T}_c$ which satisfies:

a) $S\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$,

b) $\mathcal{U}$ is stable under extensions, i.e. for each triangle

$$X \to Y \to Z \to SX$$

of $\mathcal{T}_c$, we have $Y \in \mathcal{U}$ whenever $X, Z \in \mathcal{U}$ and

c) the inclusion functor $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}_c$ admits a right adjoint.

As shown in [KV88], the concept of aisle is equivalent to that of t-structure.

Proposition 6.28. *a) The left aisle $\mathcal{U}$ admits a smallest extension to a left aisle $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ on $\mathcal{T}$.*

*b) If $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_c$ is non-degenerate (*i.e., *$f : X \to Y$ is invertible iff $\mathrm{H}^p(f)$ is invertible for all $p \in \mathbb{Z}$) and for each $X \in \mathcal{T}_c$, there is an integer N such that* $\mathrm{Hom}(X, S^N U) = 0$ *for each $U \in \mathcal{U}$, then $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ is also non-degenerate.*

Proof. a) Let $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ be the smallest full subcategory of $\mathcal{T}$ that contains $\mathcal{U}$ and is stable under infinite sums and extensions. It is clear that $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ is stable by S since $\mathcal{U}$ is. We need to show that the inclusion functor $\mathcal{T}_{\leqslant 0} \hookrightarrow \mathcal{T}$ admits a right adjoint. For completeness, we include the following proof, which is a variant of the 'small object argument', *cf.* also [ATJLSS03]. We have the following recursive procedure. Let $X = X_0$ be an object in $\mathcal{T}$. For the initial step consider all morphisms from any object P in $\mathcal{U}$ to X_0. This forms a set I_0 since $\mathcal{T}$ is compactly generated and so we have the following triangle

$$\coprod_{f \in I_0} P \longrightarrow X_0 \longrightarrow X_1 \rightsquigarrow \coprod_{f \in I_0} P\,.$$

For the induction step consider the above construction with X_n, $n \geqslant 1$, in the place of X_{n-1} and I_n in the place of I_{n-1}. We have the following diagram

$$\begin{tikzcd} X = X_0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[dl, squiggly] & X_2 \arrow[r] \arrow[dl, squiggly] & X_3 \arrow[r] \arrow[dl, squiggly] & \cdots \arrow[r] & X' \\ \coprod_{f\in I_0} P \arrow[u] & \coprod_{f\in I_1} P \arrow[u] & \coprod_{f\in I_2} P \arrow[u] & \coprod_{f\in I_3} P \arrow[u] & & \end{tikzcd},$$

where X' denotes the homotopy colimit of the diagram $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Consider now the following triangle

$$S^{-1}X' \to X'' \to X \to X'\,,$$

where the morphism $X \to X'$ is the transfinite composition in our diagram. Let P be in $\mathcal{U}$. We remark that since P is compact, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P, X') = 0$. This also implies, by construction of $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$, that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(R, X') = 0$, for all R in $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$. The long exact sequence obtained by applying the functor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(R, ?)$ to the triangle above shows that

$$\mathrm{Hom}(R, X'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, X)\,.$$

Let X''_{n-1}, $n \geqslant 1$, be an object as in the following triangle

$$X = X_0 \to X_n \to X''_{n-1} \to S(X)\,.$$

A recursive application of the octahedron axiom implies that X''_{n-1} belongs to $S(\mathcal{T}_{\leqslant 0})$, for all $n \geqslant 1$. We have the isomorphism

$$\underset{n}{\mathrm{hocolim}}\, X''_{n-1} \xrightarrow{\sim} S(X'')\,.$$

Since $\underset{n}{\mathrm{hocolim}}\, X''_{n-1}$ belongs to $S(\mathcal{T}_{\leqslant 0})$, we conclude that X'' belongs to $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$. This shows that the functor that sends X to X'' is the right adjoint of the inclusion functor $\mathcal{T}_{\leqslant 0} \hookrightarrow \mathcal{T}$. This proves that $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ is a left aisle on $\mathcal{T}$. We now show that the t-structure associated to $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$, *cf.* [KV88], extends, from $\mathcal{T}_c$ to $\mathcal{T}$, the one associated with $\mathcal{U}$. Let X be in $\mathcal{T}_c$. We have the following truncation triangle associated with $\mathcal{U}$

$$X_{\mathcal{U}} \to X \to X^{\mathcal{U}^{\perp}} \to SX_{\mathcal{U}}\,.$$

Clearly $X_{\mathcal{U}}$ belongs to $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$. We remark that $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{T}_{\leqslant 0}^{\perp}$, and so $X^{\mathcal{U}^{\perp}}$ belongs to $\mathcal{T}_{>0} := \mathcal{T}_{\leqslant 0}^{\perp}$.

We now show that $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$ is the smallest extension of the left aisle $\mathcal{U}$. Let $\mathcal{V}$ be an aisle containing $\mathcal{U}$. The inclusion functor $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{T}$ commutes with sums, because it admits a right adjoint. Since $\mathcal{V}$ is stable under extensions and suspensions, it contains $\mathcal{T}_{\leqslant 0}$.

b) Let X be in $\mathcal{T}$. We need to show that $X = 0$ iff $\mathrm{H}^p(X) = 0$ for all $p \in \mathbb{Z}$. Clearly the condition is necessary. For the converse, suppose that $\mathrm{H}^p(X) = 0$ for all $p \in \mathbb{Z}$. Let n be an integer. Consider the following truncation triangle

$$\mathrm{H}^{n+1}(X) \to \tau_{>n}X \to \tau_{>n+1}X \to S\mathrm{H}^{n+1}(X)\,.$$

Since $\mathrm{H}^{n+1}(X) = 0$ we conclude that

$$\tau_{>n}X \in \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{>m}\,,$$

for all $n \in \mathbb{Z}$. Now, let C be a compact object of $\mathcal{T}$. We know that there is a $k \in \mathbb{Z}$ such that $C \in \mathcal{T}_{\leqslant k}$. This implies that

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, \tau_{>n}X) = 0$$

for all $n \in \mathbb{Z}$, since $\tau_{>n}X$ belongs to $(\mathcal{T}_{\leqslant k})^{\perp}$. The category $\mathcal{T}$ is compactly generated and so we conclude that $\tau_{>n}X = 0$, for all $n \in \mathbb{Z}$. The following truncation triangle

$$\tau_{\leqslant n}X \to X \to \tau_{>n}X \to S\tau_{\leqslant n}X\,,$$

implies that $\tau_{\leqslant n}X$ is isomorphic to X for all $n \in \mathbb{Z}$. This can be rephrased as saying that

$$X \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{\leqslant -n}\,.$$

Now by our hypothesis there is an integer N such that

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C,\mathcal{U}_{\leqslant -N}) = 0\,.$$

Since C is compact and by construction of $\mathcal{T}_{\leqslant -N}$, we have

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C,\mathcal{T}_{\leqslant -N}) = 0\,.$$

This implies that $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C,X) = 0$, for all compact objects C of $\mathcal{T}$. Since $\mathcal{T}$ is compactly generated, we conclude that $X = 0$. This proves the converse. □

Lemma 6.29. *Let $(Y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ be in $\mathcal{T}$. We have the following isomorphism*

$$\mathrm{H}^n\,(\coprod_p Y_p) \xleftarrow{\sim} \coprod_p \mathrm{H}^n(Y_p)\,,$$

for all $n \in \mathbb{Z}$.

Proof. By definition $\mathrm{H}^n := \tau_{\geqslant n}\,\tau_{\leqslant n}\,, n \in \mathbb{Z}$. Since $\tau_{\geqslant n}$ admits a right adjoint, it is enough to show that $\tau_{\leqslant n}$ commute with infinite sums. We consider the following triangle

$$\coprod_p \tau_{\leqslant n}Y_p \to \coprod_p Y_p \to \coprod_p \tau_{>n}Y_p \to S(\coprod_p \tau_{\leqslant n}Y_p)\,.$$

Here $\coprod\limits_p \tau_{\leqslant n}Y_p$ belongs to $\mathcal{T}_{\leqslant n}$ since $\mathcal{T}_{\leqslant n}$ is stable under infinite sums. Let P be an object of $S^n\mathcal{U}$. Since P is compact, we have

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P,\coprod_p \tau_{>n}Y_p) \xleftarrow{\sim} \coprod_p \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P,\tau_{>n}Y_p) = 0\,.$$

Since $\mathcal{T}_{\leqslant n}$ is generated by $S^n\mathcal{U}$, $\coprod\limits_i \tau_{>n}Y_p$ belongs to $\mathcal{T}_{>n}$. Since the truncation triangle of $\coprod\limits_p Y_p$ is unique, this implies the following isomorphism

$$\coprod_p \tau_{\leqslant n}Y_p \xrightarrow{\sim} \tau_{\leqslant n}(\coprod_p Y_p)\,.$$

This proves the lemma. □

Proposition 6.30. *Let X be an object of $\mathcal{T}$. Suppose that we are in the conditions of proposition 6.28 b). We have the following isomorphism*

$$\underset{i}{\mathrm{hocolim}}\,\tau_{\leqslant i}X \xrightarrow{\sim} X\,.$$

Proof. We need only show that

$$\mathrm{H}^n(\operatorname{hocolim}_i \tau_{\leqslant i} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X)\,,$$

for all $n \in \mathbb{Z}$. We have the following triangle, *cf.* [Nee01b],

$$\coprod_p \tau_{\leqslant p} X \to \coprod_q \tau_{\leqslant q} X \to \operatorname{hocolim}_i \tau_{\leqslant i} X \to S(\coprod_p \tau_{\leqslant p} X)\,.$$

Since the functor H^n is homological, for all $n \in \mathbb{Z}$ and it commutes with infinite sums by lemma 6.29, we obtain a long exact sequence

$$\begin{aligned} \cdots \to \coprod_p \mathrm{H}^n(\tau_{\leqslant p} X) \to \coprod_q \mathrm{H}^n(\tau_{\leqslant q} X) \to \mathrm{H}^n\,(\operatorname{hocolim}_i \tau_{\leqslant i} X) \to \\ \to \coprod_p \mathrm{H}^n\, S(\tau_{\leqslant p} X) \to \coprod_q \mathrm{H}^n\, S(\tau_{\leqslant q} X) \to \cdots \end{aligned}$$

We remark that the morphism $\coprod_p \mathrm{H}^n\, S(\tau_{\leqslant p} X) \to \coprod_q \mathrm{H}^n\, S(\tau_{\leqslant q} X)$ is a split monomorphism and so we obtain

$$\mathrm{H}^n(X) = \operatorname{colim}_i \mathrm{H}^n(\tau_{\leqslant i} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\operatorname{hocolim}_i \tau_{\leqslant i} X)\,.$$

$\square$

Appendix A

Drinfeld's DG quotient

In this appendix, we give a simple and purely homotopic proof of the main result proved by Drinfeld in [Dri04]. Our proof is based only on the Quillen model structure on dgcat of theorem 1.8.

Recall that the functor

$$\mathsf{H}^0(-) : \mathsf{dgcat} \to \mathsf{cat}\,,$$

where cat denotes the category of small categories, descends to the localized categories

$$\mathsf{H}^0(-) : \mathsf{Heq} \to \mathsf{Ho}(\mathsf{cat})\,,$$

where Heq denotes the localization of dgcat by the quasi-equivalences and $\mathsf{Ho}(\mathsf{cat})$ the localization of cat by the equivalences of categories.

Let $\mathcal{A}$ be a small dg category and $\mathcal{N}$ a set of objects in $\mathcal{A}$.

Definition A.1. A morphism $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in Heq *annihilates* $\mathcal{N}$ if the induced morphism in $\mathsf{Ho}(\mathsf{cat})$

$$\mathsf{H}^0(Q) : \mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \to \mathsf{H}^0(\mathcal{B})$$

takes all objects of $\mathcal{N}$ to zero objects (i.e. objects whose identity vanishes in $\mathsf{H}^0(\mathcal{B})$).

Remark A.2.

- Notice that the morphism $\mathsf{H}^0(Q)$ in $\mathsf{Ho}(\mathsf{cat})$ corresponds to a functor in cat up to natural isomorphism.
- Observe also that if $\mathcal{N}$ equals the set of objects of $\mathcal{A}$ there exists at most one morphism $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in Heq which annihilates $\mathcal{A}$. We denote it by 0.

In section 3 of [Dri04], Drinfeld made the following construction: let

$$\widetilde{\mathcal{A}} \xrightarrow[\sim]{\pi} \mathcal{A}$$

be a k-homotopically flat resolution of $\mathcal{A}$ (for example, we could take a cofibrant resolution of $\mathcal{A}$) and consider the dg category $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ obtained from $\widetilde{\mathcal{A}}$ by introducing a new morphism h_X of degree -1 for every object X whose image under π is homotopically equivalent to an object of $\mathcal{N}$ and by imposing the relation $d(h_X) = \mathbf{1}_X$.

We have the following diagram in dgcat

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi", "\sim"'] & \mathcal{A}/\mathcal{N} \\ \mathcal{A} & \end{tikzcd},$$

which gives rise to a morphism $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ in Heq.

Theorem A.3 ([Dri04]). *The morphism Q annihilates $\mathcal{N}$ and is universal in* Heq *among the morphisms annihilating $\mathcal{N}$.*

We now present a simple and homotopic proof of this theorem, where the homotopic notations used are those of chapter 1.

Proof. Let

$$\widetilde{\mathcal{A}} \overset{\pi}{\underset{\sim}{\twoheadrightarrow}} \mathcal{A}$$

be a cofibrant resolution of $\mathcal{A}$ and let $\widetilde{\mathcal{N}}$ be the full dg subcategory of $\widetilde{\mathcal{A}}$ whose objects are those whose image under π is homotopically equivalent to an object of $\mathcal{N}$.

Recall from chapter 1 that $\mathcal{C}(0)$ denotes the dg category with two objects 8 and 9 such that $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(8,8) = k$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(9,9) = k$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(9,8) = 0$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(8,9) = S^{-1}$ and whose composition is given by multiplication. Recall also that $\mathcal{P}(0)$ denotes the dg category with two objects 6 and 7 such that $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(6,6) = k$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(7,7) = k$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(7,6) = 0$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}(0)}(6,7) = D^0$ and whose composition is given by multiplication. We have a dg functor

$$S(0) : \mathcal{C}(0) \to \mathcal{P}(0)\,,$$

that sends 8 to 6, 9 to 7 and S^{-1} to D^0 by the identity on k in degree -1.

Now consider the following push-out

$$\begin{tikzcd} \coprod_{X \in \widetilde{\mathcal{N}}} \mathcal{C}(0) \arrow[r] \arrow[d, tail, "\coprod_{X\in\widetilde{\mathcal{N}}} S(0)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[d, tail, "i"] \\ \coprod_{X \in \widetilde{\mathcal{N}}} \mathcal{P}(0) \arrow[r] & \mathcal{A}/\mathcal{N}\,, \end{tikzcd}$$

where the uppper horizontal dg functor corresponds to specifying all the identities of the objects in $\widetilde{\mathcal{N}}$. This shows that $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ is still a cofibrant dg category. Notice that the dg functor i induces a surjective map

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \xrightarrow{i^*} \{F \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) |\, F(X)\,\text{contractible}, \forall X \in \widetilde{\mathcal{N}}\}\,.$$

Since every object in dgcat is fibrant, we can calculate the morphisms in Heq to $\mathcal{B}$ using the good path object $P(\mathcal{B})$ from definition 4.1. Observe that by definition of the path object $P(\mathcal{B})$, the set

$$\{F \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) |\, F(X)\,\text{contractible}, \forall X \in \widetilde{\mathcal{N}}\}$$

is stable under homotopies.

Clearly the map i^* induces a surjective one

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B})/htp \xrightarrow{i^*} \{F \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) |\, F(X)\,\text{contractible}, \forall X \in \widetilde{\mathcal{N}}\}/htp\,.$$

We will now prove that the map i^* is also injective. Let F and G be dg functors from $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ to $\mathcal{B}$ such that $F \circ i$ and $G \circ i$ are homotopic. We have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \\ \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[ur, "F\circ i"] \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G\circ i"'] & P(\mathcal{B}) \arrow[u, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

in dgcat. Observe that an extension of the homotopy H from $\widetilde{\mathcal{A}}$ to $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ corresponds exactly to specifying a contraction for each object $H(X) = A \xrightarrow{f} B$ of $P(\mathcal{B})$, where X belongs to $\widetilde{\mathcal{N}}$.

Recall from lemma 4.3 that a contraction of $A \xrightarrow{f} B$ in $P(\mathcal{B})$ corresponds to morphisms $c_A \in \mathsf{Hom}^{-1}_{\mathcal{B}}(A, A)$, $c_B \in \mathsf{Hom}^{-1}_{\mathcal{B}}(B, B)$ and $h \in \mathsf{Hom}^{-2}_{\mathcal{B}}(A, B)$ which satisfy $d(c_A) = \mathbf{1}_A$, $d(c_B) = \mathbf{1}_B$ and $d(h) = c_B \circ f + f \circ c_A$.

By definition of $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, the dg functors F and G give us already the contractions c_A and c_B. For h it is enough to take

$$h = c_B \circ f \circ c_A \,.$$

This shows us that the dg functors F and G were already homotopic and so the theorem is proven. $\square$

In fact, in [Dri04], Drinfeld has proved a refined (=2-universal) property of his dg quotient construction.

Theorem A.4 ([Dri04]). *The morphism $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ in Heq induces an equivalence of categories*

$$\mathsf{rep}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) \xrightarrow{Q^*} \mathsf{rep}_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \,,$$

where $\mathsf{rep}_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ denotes the full subcategory of quasi-functors whose associated functors $\mathsf{H}^0(\mathcal{A}) \to \mathsf{H}^0(\mathcal{B})$ annihilate $\mathcal{N}$.

Remark A.5. Notice that since we have a bijection, see [Toë07]

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xleftarrow{\sim} \mathsf{iso}(\mathsf{rep}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \,,$$

where iso denotes the set of isomorphism classes, theorem A.4 implies theorem A.3.

We now prove that theorem A.3 also implies theorem A.4.

Theorem A.6. *The morphism $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ in Heq induces an isomorphism*

$$\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \to \mathsf{rep}_{dg,\mathcal{N}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

in Heq.

The proof of the theorem is based on the following proposition.

Let $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be a morphism in Heq. We denote by $K(F) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{C}$ the full dg subcategory of $\mathcal{C}$ whose objects are those which are sent to contractible objects by F. We denote by

$$\mathsf{Ker}(F) : \mathsf{Heq} \to \mathsf{Set}$$

the functor which, to a dg category $\mathcal{E}$, associates the set

$$\{G \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) | \, F \circ G = 0\} \,.$$

Proposition A.7. *The functor $\mathsf{Ker}(F)$ is corepresented by the dg category $K(F)$.*

Proof. Consider the following diagram in dgcat

$$K(\tilde{F}) \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{A}_c \xrightarrow{\tilde{F}} \mathcal{B} \,,$$

where $\mathcal{A}_c$ is a cofibrant resolution of $\mathcal{A}$ and $\tilde{F}$ a representative of the morphism F. Let $\mathcal{E}$ be a small dg category and $\mathcal{E}_c$ a cofibrant resolution.

Notice that we have a bijective map

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{E}_c, K(\tilde{F})) \xrightarrow{\tilde{i}_*} \{P \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{E}_c, \mathcal{A}_c) |\, \tilde{F} \circ P = 0\}$$

which induces a surjective one

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{E}_c, K(\tilde{F})) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{E}, K(\tilde{F}))/htp \overset{\tilde{i}_*}{\to} \{P \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{dgcat}}(\mathcal{E}_c, \mathcal{A}_c) |\, \tilde{F} \circ P = 0\}/htp\,.$$

We now show that $\tilde{i}_*$ is also injective. Let S and R be dg functors from $\mathcal{E}_c$ to $K(\tilde{F})$ such that $\tilde{i} \circ S$ and $\tilde{i} \circ R$ are homotopic. We have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_c \\ \mathcal{E}_c \arrow[ur, "\tilde{i}\circ S"] \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "\tilde{i}\circ R"'] & P(\mathcal{A}_c) \arrow[u, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathcal{A}_c \end{tikzcd}$$

in dgcat. Now, notice that the dg functor H factors through

$$P(K(\tilde{F})) \overset{P(\tilde{i})}{\hookrightarrow} P(\mathcal{A}_c)$$

and so gives us a homotopy between S and R. This proves the proposition. $\square$

Let us now prove theorem A.6.

Proof. Apply the functor

$$\mathsf{rep}_{dg}(?, B) : \mathsf{Heq}^{op} \to \mathsf{Heq}$$

to the short exact sequence

$$\mathcal{N} \overset{i}{\to} \mathcal{A} \overset{Q}{\to} \mathcal{A}/\mathcal{N}$$

and obtain

$$\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \overset{Q^*}{\to} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \overset{i^*}{\to} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{N}, \mathcal{B})\,.$$

We now show that the dg category $\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B})$ corepresents the functor $\mathsf{Ker}(i^*)$ in Heq, see proposition A.7.

Since $i^* \circ Q^*$ is zero it is enough to prove the following: let $\mathcal{D}$ be a small dg category and consider the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \arrow[r, "Q^*"] & \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \arrow[r, "i^*"] & \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{N}, \mathcal{B}) \\ & \mathcal{D} \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd},$$

where F is a morphism in Heq such that $i^* \circ F = 0$. Notice that we have at our disposal a short exact sequence

$$\mathcal{D} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{N} \xrightarrow{Id \overset{\mathbb{L}}{\otimes} i} \mathcal{D} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{A} \xrightarrow{Id \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q} \mathcal{D} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{A}/\mathcal{N}$$

in Heq. Since $\mathsf{rep}_{dg}(-,-)$ is the internal Hom-functor in Heq, see [Toë07], we obtain by adjunction the following diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathcal{N} \arrow[r, "Id\overset{\mathbb{L}}{\otimes}i"] \arrow[dr, "0"'] & \mathcal{D}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathcal{A} \arrow[r, "Id\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q"] \arrow[d, "F^{\natural}"] & \mathcal{D}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[dl, dotted, "G"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd},$$

where $F^{\natural}$ is the morphism associated to F by adjunction and G is the unique morphism induced by $F^{\natural}$, see theorem A.3. By adjunction this implies that there is a unique

$$G_{\natural} \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{Heq}}(\mathcal{D}, \mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}))\,,$$

such that $Q^* \circ G_{\natural} = F$. Now by proposition A.7, we have an induced isomorphism

$$\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{rep}_{dg,\mathcal{N}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

in Heq. This proves the theorem. $\square$

Remark A.8. Since we have an equivalence of categories

$$\mathsf{H}^0(\mathsf{rep}_{dg}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B})) \xleftarrow{\sim} \mathsf{rep}(\mathcal{A}/\mathcal{N}, \mathcal{B})\,,$$

theorem A.3 implies theorem A.4.

Bibliography

[ATJLSS03] Leovigildo Alonso Tarrío, Ana Jeremías López, and María José Souto Salorio. Construction of t-structures and equivalences of derived categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(6):2523–2543 (electronic), 2003.

[BBD82] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Ber07] Julia E. Bergner. A model category structure on the category of simplicial categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(5):2043–2058 (electronic), 2007.

[BF78] A. K. Bousfield and E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–130. Springer, Berlin, 1978.

[BK90] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Framed triangulated categories. *Mat. Sb.*, 181(5):669–683, 1990.

[BLL04] Alexey I. Bondal, Michael Larsen, and Valery A. Lunts. Grothendieck ring of pretriangulated categories. *Int. Math. Res. Not.*, (29):1461–1495, 2004.

[BMR$^+$06] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2):572–618, 2006.

[BMRT] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Clusters and seeds in acyclic cluster algebras. *Preprint math.RT/0510359.*

[BO] A. I. Bondal and D. Orlov. Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties. *Preprint MPIM 95/15, preprint math.AG/9506012.*

[Boc] Raf Bocklandt. Graded Calabi Yau algebras of dimension 3. *Preprint math.RT/060358.*

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[BS01] Paul Balmer and Marco Schlichting. Idempotent completion of triangulated categories. *J. Algebra*, 236(2):819–834, 2001.

[CCS06] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3):1347–1364 (electronic), 2006.

[Cie97] Krzysztof Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Cisa] Denis-Charles Cisinski. Catégories dérivables. *Preprint available at www.math.univ-paris13.fr/∼cisinski.*

[Cisb] Denis-Charles Cisinski. Localisation de Bousfield des dérivateurs. *Letter to the author, Paris 3, March 2007.*

[Cisc] Denis-Charles Cisinski. Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées. *Preprint available at www.math.univ-paris13.fr/∼cisinski.*

[Cis03] Denis-Charles Cisinski. Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 10(2):195–244, 2003.

[CJ95] Aurelio Carboni and Peter Johnstone. Connected limits, familial representability and Artin glueing. *Math. Structures Comput. Sci.*, 5(4):441–459, 1995. Fifth Biennial Meeting on Category Theory and Computer Science (Amsterdam, 1993).

[CK] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras II. *Preprint math.RT/0510251, to appear in Annales de l'E.N.S.*

[CKN01] J. Daniel Christensen, Bernhard Keller, and Amnon Neeman. Failure of Brown representability in derived categories. *Topology*, 40(6):1339–1361, 2001.

[CN] D.-C. Cisinski and A. Neeman. Additivity for derivator K-theory. *Preprint available at www.math.univ-paris13.fr/∼cisinski.*

[CnT] G. Cortiñas and A. Thom. Bivariant algebraic K-theory. *Preprint math/0603531.*

[DK80] W. G. Dwyer and D. M. Kan. Simplicial localizations of categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 17(3):267–284, 1980.

[Dri02] Vladimir Drinfeld. DG categories. *Series of talks at the Geometric Langlands Seminar, University of Chicago. Notes taken by D. Ben-Zvi.*, Fall 2002.

[Dri04] Vladimir Drinfeld. DG quotients of DG categories. *J. Algebra*, 272(2):643–691, 2004.

[DS04] Daniel Dugger and Brooke Shipley. K-theory and derived equivalences. *Duke Math. J.*, 124(3):587–617, 2004.

[Dug01] Daniel Dugger. Universal homotopy theories. *Adv. Math.*, 164(1):144–176, 2001.

[FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.

[Gar] G. Garkusha. Homotopy theory of associative rings. *Preprint math/0608482.*

[Gina] Victor Ginzburg. Calabi-Yau algebras. *Preprint math.AG/0612139.*

[Ginb] Victor Ginzburg. Lectures in Noncommutative geometry. *Preprint math.AG/0506603.*

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[GLS06] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Rigid modules over preprojective algebras. *Invent. Math.*, 165(3):589–632, 2006.

[Gro90] A. Grothendieck. Dérivateurs. *Manuscript. Available at www.math.jussieu.fr/∼maltsin*, 1983–1990.

[HÖ7] Happel D. Krause H. Hügel, L. *Handbook of Tilting theory*, volume 332 of *LMS Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 2007.

[Hel97] Alex Heller. Stable homotopy theories and stabilization. *J. Pure Appl. Algebra*, 115(2):113–130, 1997.

[Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Hov01] Mark Hovey. Spectra and symmetric spectra in general model categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 165(1):63–127, 2001.

[HSS00] Mark Hovey, Brooke Shipley, and Jeff Smith. Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(1):149–208, 2000.

[IR] Osamu Iyama and Idun Reiten. Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras. *Preprint math.RT/0605136*.

[IY] Osamu Iyama and Y. Yoshino. Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Preprint math/0607736*.

[Iya05] Osamu Iyama. Maximal orthogonal subcategories of triangulated categories satisfying Serre duality. *Oberwolfach report*, 6, 2005.

[Iya07] Osamu Iyama. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv. Math.*, 210(1):22–50, 2007.

[JT91] André Joyal and Myles Tierney. Strong stacks and classifying spaces. In *Category theory (Como, 1990)*, volume 1488 of *Lecture Notes in Math.*, pages 213–236. Springer, Berlin, 1991.

[Kas87] Christian Kassel. Cyclic homology, comodules, and mixed complexes. *J. Algebra*, 107(1):195–216, 1987.

[Kel91] Bernhard Keller. Derived categories and universal problems. *Comm. Algebra*, 19(3):699–747, 1991.

[Kel94] Bernhard Keller. Deriving DG categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27(1):63–102, 1994.

[Kel98] Bernhard Keller. Invariance and localization for cyclic homology of DG algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 123(1-3):223–273, 1998.

[Kel99] Bernhard Keller. On the cyclic homology of exact categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 136(1):1–56, 1999.

[Kel02] Bernhard Keller. From Grothendieck groups to the universal derived invariant. *Talks at the meeting "20 years of tilting theory", Fraueninsel*, 2002.

[Kel05] Bernhard Keller. On triangulated orbit categories. *Doc. Math.*, 10:551–581 (electronic), 2005.

[Kel06a] Bernhard Keller. A-infinity algebras, modules and functor categories. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, volume 406 of *Contemp. Math.*, pages 67–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Kel06b] Bernhard Keller. On differential graded categories. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 151–190. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[KjwMP] Bernhard Keller (joint with Marco Porta). Well generated triangulated categories. *Oberwolfach report n.8, 2006*.

[KL97] G. M. Kelly and Stephen Lack. On property-like structures. *Theory Appl. Categ.*, 3:No. 9, 213–250 (electronic), 1997.

[Kon] Maxim Kontsevich. Notes on motives in finite characteristic. *Preprint, math/0702206*.

[Kon98] Maxim Kontsevich. Triangulated categories and geometry. *Course at E.N.S. Paris. Notes taken by J. Bellaïche, J.-F. Dat, I. Marin, G. Racinet and H. Randriambololona*, 1998.

[Kon04] Maxim Kontsevich. Topological field theory for triangulated categories. *Talk at the conference on K-theory and Noncommutative geometry, Institut Henri Poincaré, Paris*, June 2004.

[KR06] Bernhard Keller and Idun Reiten. Acyclic Calabi-Yau categories are cluster categories. *Oberwolfach report*, (23):27–29, 2006.

[KR07] Bernhard Keller and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.*, 211(1):123–151, 2007.

[Kra01] Henning Krause. On Neeman's well generated triangulated categories. *Doc. Math.*, 6:121–126 (electronic), 2001.

[KS] Maxim Kontsevich and Y. Soibelmann. Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry I. *Preprint math/0606241*.

[KV87] Bernhard Keller and Dieter Vossieck. Sous les catégories dérivées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(6):225–228, 1987.

[KV88] B. Keller and D. Vossieck. Aisles in derived categories. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A*, 40(2):239–253, 1988.

[Low] Wendy Lowen. Hochschild cohomology, the characteristic morphism and derived deformations. *Preprint, math.KT/0707.2602*.

[Lur] Jacob Lurie. Stable ∞-categories. *Preprint, math/0608228*.

[LVdB06] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh. Deformation theory of abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(12):5441–5483 (electronic), 2006.

[Mal01] Georges Maltsiniotis. Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck). *preprint, available at the author's homepage*, 2001.

[McC94] Randy McCarthy. The cyclic homology of an exact category. *J. Pure Appl. Algebra*, 93(3):251–296, 1994.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MN06] Ralf Meyer and Ryszard Nest. The Baum-Connes conjecture via localisation of categories. *Topology*, 45(2):209–259, 2006.

[Nee01a] Amnon Neeman. On the derived category of sheaves on a manifold. *Doc. Math.*, 6:483–488 (electronic), 2001.

[Nee01b] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[Pal] Yann Palu. Catégories triangulées et algèbres amassées. *Ph.D. thesis in preparation.*

[PG64] Nicolae Popesco and Pierre Gabriel. Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258:4188–4190, 1964.

[Por] Marco Porta. *Ph.D. thesis in preparation.*

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Rez] Charles Rezk. A note on a certain model category structure on the category of categories. *available at www.math.uiuc.edu/∼rezk.*

[Ric89] Jeremy Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3):436–456, 1989.

[Ric91] Jeremy Rickard. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc. (2)*, 43(1):37–48, 1991.

[RZ03] Raphaël Rouquier and Alexander Zimmermann. Picard groups for derived module categories. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(1):197–225, 2003.

[Sch97] Stefan Schwede. Spectra in model categories and applications to the algebraic cotangent complex. *J. Pure Appl. Algebra*, 120(1):77–104, 1997.

[Sch06] Marco Schlichting. Negative K-theory of derived categories. *Math. Z.*, 253(1):97–134, 2006.

[Taba] Gonçalo Tabuada. Higher K-theory via universal invariants. *Preprint arXiv:0706.2420, submitted.*

[Tabb] Gonçalo Tabuada. Homotopy theory of well-generated algebraic triangulated categories. *Preprint math.KT/0703172, to appear in Journal of K-theory.*

[Tabc] Gonçalo Tabuada. The Q-model for the Morita homotopy theory of DG categories. *Preprint math.KT/0701205, submitted.*

[Tab05a] Gonçalo Tabuada. Invariants additifs de DG-catégories. *Int. Math. Res. Not.*, (53):3309–3339, 2005.

[Tab05b] Gonçalo Tabuada. Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(1):15–19, 2005.

[Tab06] Gonçalo Tabuada. Addendum to: "Additive invariants of DG-categories" (French) [Int. Math. Res. Not. **2005**, no. 53, 3309–3339; 2196100]. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 75853, 3, 2006.

[Tab07] Gonçalo Tabuada. On the structure of Calabi-Yau categories with a cluster tilting subcategory. *Doc. Math.*, 12:193–213 (electronic), 2007.

[Toë07] Bertrand Toën. The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory. *Invent. Math.*, 167(3):615–667, 2007.

[TT90] R. W. Thomason and Thomas Trobaugh. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 247–435. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[TV] Bertrand Toën and Michel Vaquié. Moduli of objects in dg-categories. *Preprint math/0503418, to appear in Annales de l'E.N.S.*

[TV05] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory. *Adv. Math.*, 193(2):257–372, 2005.

[VdB02] M. Van den Bergh. Non-commutative crepant resolutions. *The Legacy of Niels Hendrik Abel, Springer*, pages 749–770, 2002.

[Ver96] Jean-Louis Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239):xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[Wal85] Friedhelm Waldhausen. Algebraic K-theory of spaces. In *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, volume 1126 of *Lecture Notes in Math.*, pages 318–419. Springer, Berlin, 1985.