Des récurrences aux algèbres amassées

Bernhard Keller

Université Paris Diderot – Paris 7

Journée en l'honneur de Rached Mneimné
18 décembre 2017

But

Montrer comment les propriétés remarquables de la suite de Somos et des frises de Coxeter

But

Montrer comment les propriétés remarquables de la suite de Somos et des frises de Coxeter

But

Montrer comment les propriétés remarquables de la suite de Somos et des frises de Coxeter se généralisent dans la théorie des algèbres amassées de Fomin–Zelevinsky.

Plan

Plan

1. Suite de Somos
2. Frises de Coxeter

Plan

1. Suite de Somos
2. Frises de Coxeter
3. Algèbres amassées

Plan

1. Suite de Somos
2. Frises de Coxeter
3. Algèbres amassées
4. Périodicité

Plan

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ \ k \geq 5.$$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :
$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\,,\ k \geq 5.$$
- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \frac{x_3\, x_5 + x_4^2}{x_2}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \frac{x_3\, x_5 + x_4^2}{x_2}$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :
$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$
- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \frac{x_3\, x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \,, \ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \frac{x_3\, x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$
-

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_k	2	3	7	23	59	314	1529	8209	83313

Suite de Somos (1989)

- Donnée initiale : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_2\, x_4 + x_3^2}{x_1} = 2$
- $x_6 = \frac{x_3\, x_5 + x_4^2}{x_2} = 3$
-

k	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_k	2	3	7	23	59	314	1529	8209	83313

- On obtient des nombres entiers !

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\,,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \frac{x_5\, x_3 + x_4^2}{x_2} = \frac{x_3 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \frac{x_5\, x_3 + x_4^2}{x_2} = \frac{x_3 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$
- $x_7 = \frac{x_6\, x_4 + x_5^2}{x_3} = \frac{2x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_4^3 + x_2^3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4^2}{x_1^2 x_2 x_3}$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \frac{x_5\, x_3 + x_4^2}{x_2} = \frac{x_3 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$
- $x_7 = \frac{x_6\, x_4 + x_5^2}{x_3} = \frac{2x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_4^3 + x_2^3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4^2}{x_1^2 x_2 x_3}$
- $x_8 = (x_1^3 x_3 x_4^4 + 2x_1^2 x_3^4 x_4^2 + 3x_1^2 x_2 x_3^2 x_4^3 + x_1 x_3^7 + 3x_1 x_2 x_3^5 x_4 + 3x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^2 + x_2^2 x_3^6 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^4 x_3^2 x_4^2 + x_2^5 x_4^3 + x_1^2 x_2^2 x_4^4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4^3)/x_1^3 x_2^2 x_3 x_4$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\,,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \frac{x_5\, x_3 + x_4^2}{x_2} = \frac{x_3 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$
- $x_7 = \frac{x_6\, x_4 + x_5^2}{x_3} = \frac{2x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_4^3 + x_2^3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4^2}{x_1^2 x_2 x_3}$
- $x_8 = (x_1^3 x_3 x_4^4 + 2x_1^2 x_3^4 x_4^2 + 3x_1^2 x_2 x_3^2 x_4^3 + x_1 x_3^7 + 3x_1 x_2 x_3^5 x_4 + 3x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^2 + x_2^2 x_3^6 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^4 x_3^2 x_4^2 + x_2^5 x_4^3 + x_1^2 x_2^2 x_4^4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4^3)/x_1^3 x_2^2 x_3 x_4$
- $x_9 = (\text{somme de 16 termes})/x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4$

Suite de Somos générique

- Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
- Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

- $x_5 = \frac{x_4\, x_2 + x_3^2}{x_1}$
- $x_6 = \frac{x_5\, x_3 + x_4^2}{x_2} = \frac{x_3 x_3 x_4 + x_3^3 + x_1 x_4^2}{x_1 x_2}$
- $x_7 = \frac{x_6\, x_4 + x_5^2}{x_3} = \frac{2x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_4^3 + x_2^3 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_4^2}{x_1^2 x_2 x_3}$
- $x_8 = (x_1^3 x_3 x_4^4 + 2x_1^2 x_3^4 x_4^2 + 3x_1^2 x_2 x_3^2 x_4^3 + x_1 x_3^7 + 3x_1 x_2 x_3^5 x_4 + 3x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^2 + x_2^2 x_3^6 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^3 x_3^4 x_4 + 3x_2^4 x_3^2 x_4^2 + x_2^5 x_4^3 + x_1^2 x_2^2 x_4^4 + x_1 x_2^3 x_3 x_4^3)/x_1^3 x_2^2 x_3 x_4$
- $x_9 = (\text{somme de 16 termes})/x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4$
- On obtient des polynômes de Laurent à coefficients entiers !

Plan

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban.
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & & y \\ & x & \\ & & z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

	1	1	1	1	1	1	1	1
1								
	1							
1								
	1	1	1	1	1	1	1	1

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un 'serpent' de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 5 \\
1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un 'serpent' de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
1 & & 2 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$
\begin{array}{ccc}
 & y & \\
x & & \frac{1+yz}{x} \\
 & z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

- On obtient des entiers !

Frises de Coxeter (1971)

- Donnée initiale : un ‘serpent’ de 1s bordant un ruban
- Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

- On obtient des entiers !
- C’est périodique !

Frises de Coxeter génériques

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & & & & \\
 & x_1 & & & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & & & & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & & & & & & & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & & & & & & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & & x_1 & & & & & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & x_1 & & & & & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{x_1+1}{x_2} & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

Frises de Coxeter génériques

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{x_1+1}{x_2} & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

- On obtient des polynômes de Laurent à coefficients entiers !

Frises de Coxeter génériques

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{x_1+1}{x_2} & \\
 & x_1 & & \frac{x_2+1}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} & & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

- On obtient des polynômes de Laurent à coefficients entiers !
- C'est périodique !

Plan

Sergey Fomin
University of Michigan

Andrei Zelevinsky ✝
Northeastern University

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)
- un ensemble Q_1 (l'ensemble des flèches)

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)
- un ensemble Q_1 (l'ensemble des flèches)
- deux applications

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)
- un ensemble Q_1 (l'ensemble des flèches)
- deux applications
  - $s : Q_1 \to Q_0$ (envoie une flèche sur sa source)

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)
- un ensemble Q_1 (l'ensemble des flèches)
- deux applications
  - $s : Q_1 \to Q_0$ (envoie une flèche sur sa source)
  - $t : Q_1 \to Q_0$ (envoie une flèche sur son but).

Un carquois est un graphe orienté

Définition

Un *carquois* Q est un graphe orienté : il est donné par

- un ensemble Q_0 (l'ensemble des sommets)
- un ensemble Q_1 (l'ensemble des flèches)
- deux applications
  - $s : Q_1 \to Q_0$ (envoie une flèche sur sa source)
  - $t : Q_1 \to Q_0$ (envoie une flèche sur son but).

Remarque

Un carquois est une 'catégorie sans composition'.

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$Q : \quad \begin{tikzcd}
& 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & 6 \\
1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[rr, shift left, "\beta"] & & 4 \arrow[ll, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$
Q : \quad
\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & 6 \\
1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[rr, shift left, "\beta"] & & 4 \arrow[ll, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$Q: \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & 6 \\ 1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[rr, shift left, "\beta"] & & 4 \arrow[ll, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On a $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \ldots\}$.

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$Q: \quad \begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & 6 \\
1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 4 \arrow[l, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On a $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \dots\}$.
α est une *boucle*,

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$Q : \quad \begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & 6 \\
1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 4 \arrow[l, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On a $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \ldots\}$.
α est une *boucle*, (β, γ) est un 2-*cycle*,

Un carquois peut avoir des boucles, des cycles, plusieurs composantes.

Exemple

$$Q : \quad \begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl, "\lambda"'] & & 5 \arrow["\alpha"', loop left] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & 6 \\
1 \arrow[rr, "\nu"'] & & 2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 4 \arrow[l, shift left, "\gamma"] & 7 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On a $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \ldots\}$.
α est une *boucle*, (β, γ) est un 2-*cycle*, 7 est une *source* de Q.

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} j \xrightarrow{\alpha} k$, on rajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} k$;

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} j \xrightarrow{\alpha} k$, on rajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} k$;
2) on renverse toutes les flèches de source ou de but j;

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} j \xrightarrow{\alpha} k$, on rajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} k$;
2) on renverse toutes les flèches de source ou de but j;
3) on élimine tous les 2-cycles

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} j \xrightarrow{\alpha} k$, on rajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} k$;
2) on renverse toutes les flèches de source ou de but j;
3) on élimine tous les 2-cycles

Mutation des carquois

Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles avec $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ (toujours supposé à partir de maintenant).

Définition (Fomin–Zelevinsky)

Soit $j \in Q_0$. Le *carquois muté* $\mu_j(Q)$ est le carquois obtenu à partir de Q comme suit

1) pour tout sous-carquois $i \xrightarrow{\beta} j \xrightarrow{\alpha} k$, on rajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} k$;
2) on renverse toutes les flèches de source ou de but j;
3) on élimine tous les 2-cycles (par ex. $\bullet \begin{smallmatrix}\longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow\end{smallmatrix} \bullet$ donne $\bullet \longrightarrow \bullet$).

Exemples de mutations de carquois

Un exemple simple:

Exemples de mutations de carquois

Un exemple simple:

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Exemples de mutations de carquois

Un exemple simple:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

1)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

Exemples de mutations de carquois

Un exemple simple:

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

1)

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

2)

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ul] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

Exemples de mutations de carquois

Un exemple simple:

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

1)

$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

2)

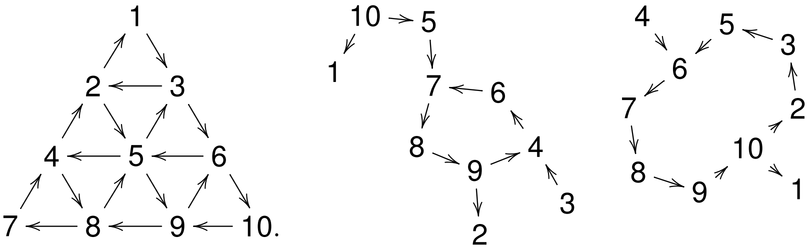
$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr, shift left] & & 3 \arrow[ll, shift left] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

3)

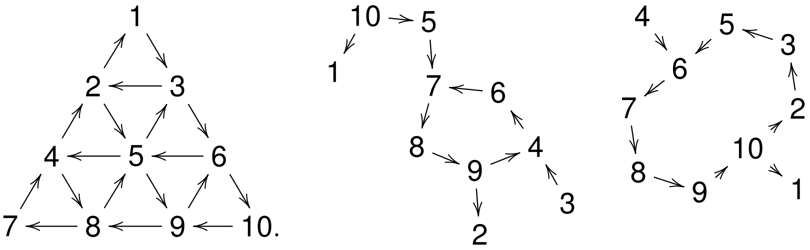
$$\begin{tikzcd} & \color{red}{1} \arrow[dl] & \\ 2 & & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Exemples plus compliqués: recherche Google sur ‘mutation des carquois’ !

Exemples plus compliqués: recherche Google sur ‘mutation des carquois’ !



Exemples plus compliqués: recherche Google sur ‘mutation des carquois’ !



Rappel : on voulait définir les algèbres amassées !

Mutation des graines

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;
b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\})$

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

a) $R' = \mu_j(R)$;

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

a) $R' = \mu_j(R)$;

b) $u' = u \setminus \{u_j\} \cup \{u'_j\}$,

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

a) $R' = \mu_j(R)$;

b) $u' = u \setminus \{u_j\} \cup \{u'_j\}$,

Mutation des graines

Définition

Une graine est un couple (R, u), où

a) R est un carquois à n sommets;

b) $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est un ensemble libre et générateur du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple: $(1 \to 2 \to 3, \{x_1, x_2, x_3\}) = (x_1 \to x_2 \to x_3)$.

Définition

Pour un sommet j de R, la graine mutée $\mu_j(R, u)$ est (R', u'), où

a) $R' = \mu_j(R)$;

b) $u' = u \setminus \{u_j\} \cup \{u'_j\}$, où u'_j est défini par la relation d'échange

$$u_j u'_j = \prod_{\substack{\text{flèches} \\ i \to j}} u_i + \prod_{\substack{\text{flèches} \\ j \to k}} u_k .$$

Un exemple

$$x_1 \to x_2 \to x_3$$

Un exemple

$$x_1 \to x_2 \to x_3$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dl, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] & x_3 \\
\cdot & \cdot \arrow[l] \arrow[r] & \cdot & & &
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & & \color{red}{x_1} \arrow[r] \arrow[dlll, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] & x_3 \\ \cdot & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & & & & \end{tikzcd}$$

Un exemple

$$\begin{tikzcd} & & & {\color{red}x_1} \arrow[r] \arrow[dll, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] & x_3 \\ \frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & & & \end{tikzcd}$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dll, "\mu_1"'] & {\color{red}x_2} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"'] & x_3 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & \cdot \arrow[rr, bend left] & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dll, "\mu_1"'] & {\color{red}x_2} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"'] & x_3 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & & x_1 \arrow[rr, bend left] & \cdot \arrow[l] & x_3 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] & {\color{red}x_2} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_2"'] \arrow[dlll, "\mu_1"'] & x_3 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] & x_3 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$\begin{tikzcd}
 & & & & x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r] \arrow[dllll, "\mu_1"'] \arrow[d, "\mu_2"'] \arrow[drrrr, "\mu_3"] & x_3 & & & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] & x_3 \arrow[l] & & x_1 \arrow[r] & x_2 & \frac{1+x_2}{x_3} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_2"'] & x_3 \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"] & & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] & x_3 & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] & x_3 \arrow[l] & x_1 \arrow[r] & x_2 & \frac{1+x_2}{x_3} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dll, leftrightarrow, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_2"'] & x_3 \arrow[drr, leftrightarrow, "\mu_3"] & & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_2"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"'] & x_3 & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] & x_3 \arrow[l] & x_1 \arrow[r] & x_2 & \frac{1+x_2}{x_3} \arrow[l] \\
\vdots & & \vdots & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Un exemple

$$\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r] \arrow[dlll, leftrightarrow, "\mu_1"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_2"'] \arrow[drrr, leftrightarrow, "\mu_3"] & x_3 & & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_2"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"'] & x_3 & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"'] & x_3 \arrow[l] & x_1 \arrow[r] & x_2 & \frac{1+x_2}{x_3} \arrow[l] \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & x_1 \arrow[r] \arrow[dlll, leftrightarrow, "\mu_1"'] & x_2 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\mu_2"'] & x_3 \arrow[drrr, leftrightarrow, "\mu_3"] & & & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_2"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"'] & x_3 & & x_1 \arrow[rr, bend left] & \frac{x_1+x_3}{x_2} \arrow[l] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_3"'] & x_3 \arrow[l] & & x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[dl, leftrightarrow, "\mu_1"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mu_2"'] & \frac{1+x_2}{x_3} \arrow[l] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Définition

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Définition

a) La graine initiale est $(Q, x) = (Q, \{x_1, \ldots, x_n\})$.

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Définition

a) La graine initiale est $(Q, x) = (Q, \{x_1, \ldots, x_n\})$.

b) Les variables d'amas sont les fractions rationnelles u_i, $1 \leq i \leq n$, qui apparaissent dans des graines (R, u) obtenues à partir de la graine initiale par mutation itérée.

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Définition

a) La graine initiale est $(Q, x) = (Q, \{x_1, \ldots, x_n\})$.

b) Les variables d'amas sont les fractions rationnelles u_i, $1 \leq i \leq n$, qui apparaissent dans des graines (R, u) obtenues à partir de la graine initiale par mutation itérée.

Remarque

L'algèbre amassée $\mathcal{A}_Q$ est la sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ engendrée par les variables d'amas.

Variables d'amas

Soit Q un carquois à n sommets.

Définition

a) La graine initiale est $(Q, x) = (Q, \{x_1, \ldots, x_n\})$.

b) Les variables d'amas sont les fractions rationnelles u_i, $1 \leq i \leq n$, qui apparaissent dans des graines (R, u) obtenues à partir de la graine initiale par mutation itérée.

Remarque

L'algèbre amassée $\mathcal{A}_Q$ est la sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ engendrée par les variables d'amas.

Théorème (Fomin–Zelevinsky, 2002, Phénomène de Laurent)

Toute variable d'amas est un polynôme de Laurent à coefficients entiers.

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\,,\ k \geq 5.$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\,,\ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} {\color{red}1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd}$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \ , \ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1}$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}} \; , \; k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad\qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

$$\mu_1(Q) : \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \color{red}{2} \arrow[l] \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd}$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ , \ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

$$\mu_1(Q) : \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \color{red}{2} \arrow[l] \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd} \qquad x_2' = \frac{x_1' x_3 + x_4^2}{x_2}$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

$$Q : \quad \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left=1] \arrow[ur, shift right=1] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left=1] \arrow[ul, shift right=1] \end{tikzcd} \qquad\qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

$$\mu_1(Q) : \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left=1] \arrow[dr, shift right=1] & \color{red}{2} \arrow[l] \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] \arrow[ur, shift left=1] \arrow[ur, shift right=1] & 3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd} \qquad\qquad x_2' = \frac{x_1' x_3 + x_4^2}{x_2} = x_6$$

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

$$\mu_1(Q) : \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \color{red}{2} \arrow[l] \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd} \qquad x_2' = \frac{x_1' x_3 + x_4^2}{x_2} = x_6$$

Observation clé : $\mu_1(Q)$ est Q tourné de 90 degrés !

La suite de Somos est formée de variables d'amas

Donnée initiale : indéterminées x_1, x_2, x_3, x_4.
Récurrence :

$$x_k = \frac{x_{k-3}\, x_{k-1} + x_{k-2}^2}{x_{k-4}}\ ,\ k \geq 5.$$

$$Q : \begin{tikzcd} \color{red}{1} \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\ 4 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[ul, shift left] \arrow[ul, shift right] \end{tikzcd} \qquad x_1' = \frac{x_2 x_4 + x_3^2}{x_1} = x_5$$

$$\mu_1(Q) : \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \color{red}{2} \arrow[l] \arrow[d] \\ 4 \arrow[u] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & 3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd} \qquad x_2' = \frac{x_1' x_3 + x_4^2}{x_2} = x_6$$

Observation clé : $\mu_1(Q)$ est Q tourné de 90 degrés !
Récurrence : la suite de Somos est obtenue en mutant successivement par rapport à $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & x_2 & & & & & & & & & & & & \\
x_3 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & \\ & \searrow \\ & x_2 \\ & \nearrow \\ x_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{matrix} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & \color{red}{x_1'} & & & & & & & & & & & \\
 & \color{red}{x_2} \nearrow & & & & & & & & & & & & \\
\color{red}{x_3} \nearrow & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{matrix}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x'_1 & & & & & & & & & & & \\
 & x_2 \nearrow & & & & & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & & & & & & \\
x_3 & & x'_3 & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & {\color{red}x_1'} & & & & & & & & & & & \\
 & x_2 & & {\color{red}x_2'} & & & & & & & & & & \\
x_3 & & {\color{red}x_3'} & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x'_1 & & \color{red}{x''_1} & & & & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & & & & \\
 & x_2 & & \color{red}{x'_2} & & & & & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
x_3 & & \color{red}{x'_3} & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & & & & & & & & \\
 & x_2 & & x_2' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & & & & & \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{tikzcd}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
& {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} \\
x_1 & & x_1' & & {\color{red}x_1''} & & & & & & & & \\
& x_2 & & x_2' & & {\color{red}x_2''} & & & & & & & \\
x_3 & & x_3' & & {\color{red}x_3''} & & & & & & & & \\
& {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1} & & {\color{blue}1}
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & {\color{red}x_3} & & & & & & & \\
 & x_2 & & x_2' & & {\color{red}x_2''} & & & & & & & & \\
x_3 & & x_3' & & {\color{red}x_3''} & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & \color{red}{x_3} & & & & & & & \\
 & x_2 & & x_2' & & \color{red}{x_2''} & & & & & & & & \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & \color{red}{x_1} & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & & & & & & \\
 & & & & & & \searrow & & & & & & & \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & & & & & \\
 & & & & & & \nearrow & & & & & & & \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Les frises de C. sont formées de variables d'amas

Récurrence :

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & \frac{1+yz}{x} \\ & z & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Plan

1. Suite de Somos
2. Frises de Coxeter
3. Algèbres amassées
4. Périodicité

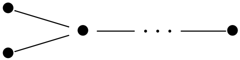
Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n			
D_n			
E_6			
E_7			
E_8			

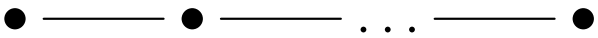
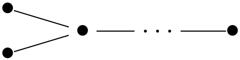
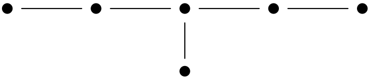
Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n	$\bullet$ —— $\bullet$ —— ... —— $\bullet$	≥ 1	$n+1$
D_n			
E_6			
E_7			
E_8			

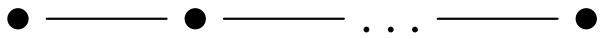
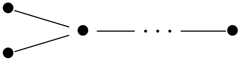
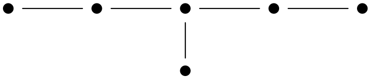
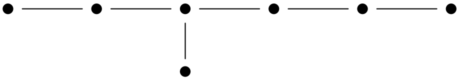
Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n	$\bullet \text{———} \bullet \text{———} \ldots \text{———} \bullet$	≥ 1	$n+1$
D_n		≥ 4	$2n-2$
E_6			
E_7			
E_8			

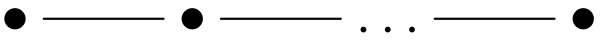
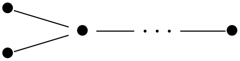
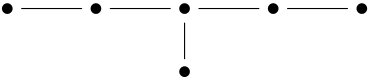
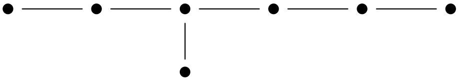
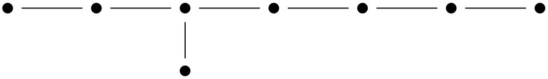
Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n		≥ 1	$n+1$
D_n		≥ 4	$2n-2$
E_6		6	12
E_7			
E_8			

Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n		≥ 1	$n+1$
D_n		≥ 4	$2n-2$
E_6		6	12
E_7		7	18
E_8			

Les diagrammes de Dynkin (de type ADE)

Nom	Graphe	n	Nb. de Cox.
A_n		≥ 1	$n+1$
D_n		≥ 4	$2n-2$
E_6		6	12
E_7		7	18
E_8		8	30

Le théorème de périodicité

Soit Q un carquois un *carquois de Dynkin*, c'est-à-dire un carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin, par exemple

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \ .$$

Le théorème de périodicité

Soit Q un carquois un *carquois de Dynkin*, c'est-à-dire un carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin, par exemple

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \, .$$

Soit h le nombre de Coxeter de ce diagramme, par exemple $h = 4$.

Le théorème de périodicité

Soit Q un carquois un *carquois de Dynkin*, c'est-à-dire un carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin, par exemple

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3\ .$$

Soit h le nombre de Coxeter de ce diagramme, par exemple $h = 4$. Soit $i_1, \ldots, i_n$ une énumération croissante des sommets de Q, par exemple $1, 3, 2$.

Le théorème de périodicité

Soit Q un carquois un *carquois de Dynkin*, c'est-à-dire un carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin, par exemple

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \,.$$

Soit h le nombre de Coxeter de ce diagramme, par exemple $h = 4$. Soit $i_1, \ldots, i_n$ une énumération croissante des sommets de Q, par exemple $1, 3, 2$. Soit la suite de mutations

$$\mu_{\underline{i}} = \mu_{i_n}\, \mu_{i_{n-1}} \, \ldots \, \mu_{i_2}\, \mu_{i_1} .$$

Le théorème de périodicité

Soit Q un carquois un *carquois de Dynkin*, c'est-à-dire un carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin, par exemple

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 .$$

Soit h le nombre de Coxeter de ce diagramme, par exemple $h = 4$. Soit $i_1, \ldots, i_n$ une énumération croissante des sommets de Q, par exemple $1, 3, 2$. Soit la suite de mutations

$$\mu_{\underline{i}} = \mu_{i_n} \, \mu_{i_{n-1}} \, \ldots \, \mu_{i_2} \, \mu_{i_1} .$$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

L'exemple $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 \arrow[dr] & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 \arrow[dr] & \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 \arrow[ur] & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 \arrow[ur] & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{tikzcd}$$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 \arrow[dr] & \\
 & x_2 \arrow[ur] & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 \arrow[ur] & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 \arrow[ur] & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{tikzcd}
$$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 \arrow[dr] & \\
 & x_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 \arrow[ur] & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{tikzcd}$$

L'exemple $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & \searrow & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & \searrow \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 & & x_3' & \nearrow & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & \nearrow \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

L'exemple $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q,x) = (Q,x).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' \arrow[dr] & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 \arrow[dr] & \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 & & x_3' \arrow[ur] & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 \arrow[ur] & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{tikzcd}$$

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & \\
 & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 & & x_2' & & x_2'' & & x_2 \\
x_3 & & x_3' & & x_3'' & & x_1 & & x_1' & & x_1'' & & x_3 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

$\mu_{\underline{i}}$ = translation d'une unité vers la droite.

Pourquoi $h+2$?

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

Pourquoi $h+2$?

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q, x) = (Q, x).$$

Question

Pourquoi $h+2$? Que signifie le 2 ?

Pourquoi $h+2$?

Théorème (Fomin-Zelevinsky, 2003)

$$\mu_{\underline{i}}^{h+2}(Q,x) = (Q,x).$$

Question

Pourquoi $h+2$? Que signifie le 2 ?

Observation clé

Le nombre 2 est le nombre de Coxeter de A_1 !
Il y a donc deux nombres de Coxeter qui interviennent.

Périodicité pour les paires

Soient Δ et Δ' deux diagrammes de Dynkin.

Périodicité pour les paires

Soient Δ et Δ' deux diagrammes de Dynkin. Soient h et h' leurs nombres de Coxeter.

Périodicité pour les paires

Soient Δ et Δ' deux diagrammes de Dynkin. Soient h et h' leurs nombres de Coxeter. Soit Q leur produit carré $\Delta \Box \Delta'$.

Exemple: $A_4 \Box A_3$

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \\
\bullet \arrow[r] & \circ \arrow[u] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[u] \arrow[d] \\
\circ \arrow[u] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[u] & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mu_+ =$ suite des mutations par rapport aux $\circ$.

$\mu_- =$ suite des mutations par rapport aux $\bullet$.

Périodicité pour les paires

Soient Δ et Δ' deux diagrammes de Dynkin. Soient h et h' leurs nombres de Coxeter. Soit Q leur produit carré $\Delta \square \Delta'$.

Exemple: $A_4 \square A_3$

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \\
\bullet \arrow[r] & \circ \arrow[u] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[u] \arrow[d] \\
\circ \arrow[u] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] & \circ \arrow[u] & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mu_+ =$ suite des mutations par rapport aux $\circ$.

$\mu_- =$ suite des mutations par rapport aux $\bullet$.

Théorème (K)

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(Q, x) = (Q, x).$$

Périodicité pour les carquois

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ *un carquois contenant* $Q = \Delta\Box\Delta'$ *comme sous-carquois plein.*

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ *un carquois contenant* $Q = \Delta\Box\Delta'$ *comme sous-carquois plein.*

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ *un carquois contenant* $Q = \Delta\Box\Delta'$ *comme sous-carquois plein.*

$$(\mu_+\,\mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ un carquois contenant $Q = \Delta \square \Delta'$ comme sous-carquois plein.

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

- $Q = A_4 \square A_3$, $h + h' = 5 + 4 = 9$.

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ un carquois contenant $Q = \Delta\Box\Delta'$ comme sous-carquois plein.

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

- $Q = A_4 \Box A_3$, $h + h' = 5 + 4 = 9$.
- $Q = E_6 \Box E_7$, $h + h' = 12 + 18 = 30$.

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ un carquois contenant $Q = \Delta \square \Delta'$ comme sous-carquois plein.

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

- $Q = A_4 \square A_3$, $h + h' = 5 + 4 = 9$.
- $Q = E_6 \square E_7$, $h + h' = 12 + 18 = 30$.

Remarque

Les démonstrations de Fomin–Zelevinsky sont combinatoires.

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ un carquois contenant $Q = \Delta \square \Delta'$ comme sous-carquois plein.

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

- $Q = A_4 \square A_3$, $h + h' = 5 + 4 = 9$.
- $Q = E_6 \square E_7$, $h + h' = 12 + 18 = 30$.

Remarque

Les démonstrations de Fomin–Zelevinsky sont combinatoires.

Périodicité pour les carquois

Corollaire (K)

Soit $\widetilde{Q}$ un carquois contenant $Q = \Delta\square\Delta'$ comme sous-carquois plein.

$$(\mu_+ \, \mu_-)^{h+h'}(\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}.$$

Exemples

- $Q = A_4 \square A_3$, $h + h' = 5 + 4 = 9$.
- $Q = E_6 \square E_7$, $h + h' = 12 + 18 = 30$.

Remarque

Les démonstrations de Fomin–Zelevinsky sont combinatoires.
Les démonstrations des derniers théorèmes utilisent la théorie des représentations et l'algèbre homologique.