

Université Paris 7-Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Thèse de doctorat de l'Université Paris 7
Spécialité : Mathématiques

Présentée et soutenue le 19 juin 2002 par

Denis-Charles CISINSKI

Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie

Directeur de thèse :
Georges MALTSINIOTIS

Jury :

Alain BRUGUIÈRES

Bernhard KELLER

Georges MALTSINIOTIS

Ieke MOERDIJK

Rapporteur

Fabien MOREL

Pierre SCHAPIRA

Carlos SIMPSON

Rapporteur

Table des matières

Introduction	5
Descente et asphéricité	5
Conjectures de Grothendieck — Histoires de modèles	14
Guide de lecture	20
Remerciements	26
Chapitre 1. Théorie homotopique des catégories	27
1. Catégories test locales	27
2. Éléments d'intégration	36
3. Induction aux préfaisceaux	42
Chapitre 2. Algèbre homotopique des préfaisceaux	45
1. Accessibilité	45
2. Extensions anodines	55
3. A -localisateurs	71
4. Propreté	81
Chapitre 3. Yoga simplicial	91
1. Ensembles simpliciaux	91
2. Caractérisation locale de la classe des ∞ -équivalences (1)	102
3. Réalisations simpliciales	107
Chapitre 4. Extensions de Kan homotopiques	117
1. Propriétés locales formelles	117
2. La construction de Bousfield-Kan	126
3. Réalisations homotopiques des catégories	130
4. Densité homotopique	134
Chapitre 5. À la poursuite des modèles	145
1. Modèles élémentaires	145
2. Ubiquité de la propreté	150
3. Types d'homotopie relatifs	159
4. Caractérisation locale de la classe des ∞ -équivalences (2)	168
5. Représentations	172
Chapitre 6. Zoologie (1) : catégories test	181
1. Catégories squelettiques	181
2. Ensembles cubiques	193
3. Le contre-exemple globulaire	209
Chapitre 7. Zoologie (2) : localisateurs fondamentaux	213

1. Types d'homotopie tronqués	213
2. Localisateurs fondamentaux triviaux	220
3. Homologies, torsions et impropretés	222
Annexe A. Florilège catégorique	225
1. Préfaisceaux réalisés en catégories	225
2. Images directes de cribles	230
3. Accessibilité des petites catégories	233
Annexe B. Structures de Thomason	235
1. Carrés homotopiquement cocartésiens de catégories	235
2. Structures de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$	236
3. Calcul de fractions	239
Bibliographie	241
Index des notations	243
Index terminologique	247

Introduction

Descente et asphéricité

Ce travail a pour propos de contribuer à l'étude de la catégorie homotopique \mathbf{Hot} , dont les objets sont les CW -complexes, et les flèches, les classes d'homotopie d'applications continues entre iceux. Cette catégorie admet plusieurs descriptions en termes de localisations de "catégories de modèles". Rappelons pour mémoire que si \mathcal{M} désigne une catégorie, et \mathcal{W} une partie de l'ensemble $\mathbf{Fl}\mathcal{M}$ des flèches de \mathcal{M} , une localisation de \mathcal{M} par \mathcal{W} est un couple $(\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}, \gamma)$, où $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ est une catégorie, et γ un foncteur de \mathcal{M} vers cette dernière,

$$\gamma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M} ,$$

satisfaisant les propriétés suivantes.

- (i) Le foncteur γ envoie tous les éléments de \mathcal{W} sur des isomorphismes de $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$.
- (ii) Le couple $(\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}, \gamma)$ est universel pour la propriété (i).

Autrement dit, pour tout foncteur

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}' ,$$

tel que tout élément de \mathcal{W} soit envoyé sur un isomorphisme de \mathcal{M}' , il existe un unique foncteur

$$\mathcal{W}^{-1}F : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$$

tel que le triangle suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}' \\ & \searrow \gamma & \nearrow \mathcal{W}^{-1}F \\ & \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M} & \end{array}$$

Modulo des problèmes ensemblistes (pouvant conduire à un changement d'univers), une telle localisation existe toujours. Il est d'autre part immédiat qu'elle est unique à isomorphisme unique près. Par abus de langage, on parlera donc parfois de la localisation de \mathcal{M} par \mathcal{W} .

Considérons à présent la catégorie $\mathcal{T}op$, dont les objets sont les espaces topologiques (quelconques), et dont les flèches sont les applications continues. Si

$$f : X \longrightarrow Y$$

est une flèche de $\mathcal{T}op$, on dit qu'elle est une *équivalence d'homotopie faible* si elle vérifie les conditions suivantes.

- (i) L'application induite par f entre les ensembles de composantes connexes par arcs

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$$

est bijective.

- (ii) Pour tout point x de X , et tout entier $n \geq 1$, l'application

$$\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

est un isomorphisme de groupes.

On note alors \mathcal{W}_{Top} la partie de $FlTop$ formée des équivalences d'homotopie faibles, et on vérifie que toute équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible. Cette dernière assertion admet une réciproque partielle : toute équivalence d'homotopie faible entre CW -complexes est une équivalence d'homotopie. En outre, pour tout espace topologique X , il existe une équivalence d'homotopie faible (fonctorielle)

$$CW X \longrightarrow X$$

dont la source est un CW -complexe. De tout ceci, on déduit aussitôt que l'inclusion de la catégorie des CW -complexes dans Top induit une équivalence de catégories

$$Hot \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{Top}^{-1} Top .$$

Les types d'homotopie (*i.e.* les classes d'isomorphie d'objets de Hot) peuvent aussi être caractérisés par des critères cohomologiques. On dit qu'une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

est une *équivalence cohomologique* si pour tout faisceau localement constant L sur Y , f induit un isomorphisme en cohomologie

$$H^n(Y, L) \xrightarrow{\sim} H^n(X, f^*L)$$

pour $n = 0$ si L est un faisceau d'ensemble, $n = 1$ si L est un faisceau en groupes, et $n \geq 2$ si L est un faisceau en groupes abéliens. Un espace topologique est dit *asphérique* si l'unique application de celui-ci vers l'espace ponctuel est une équivalence cohomologique. Un espace topologique est dit *localement asphérique* s'il admet une base d'ouverts asphériques. Par exemple, on peut vérifier que tout CW -complexe est localement asphérique. Plus généralement, tout espace topologique localement contractile est localement asphérique. Enfin, une application continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

est *asphérique* si pour tout ouvert U de Y , l'application induite

$$f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

est une équivalence cohomologique. On remarque immédiatement qu'une telle application est une équivalence cohomologique (puisque U est un ouvert de lui-même). Le lien avec ce qui précède se fait par l'énoncé classique ci-dessous.

THÉORÈME (Whitehead). *Une application continue entre espaces localement asphériques est une équivalence cohomologique si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie faible. En particulier, une application continue entre CW-complexes est une équivalence cohomologique si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.*

La nature locale de la cohomologie donne en outre la caractérisation suivante des applications asphériques.

THÉORÈME (Descente cohomologique en topologie). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques localement asphériques. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *L'application f est asphérique.*
- (ii) *Il existe une base d'ouverts \mathcal{U} de Y telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, l'application induite par f*

$$f^{-1}(U) \rightarrow U$$

soit une équivalence cohomologique.

- (iii) *Il existe une base d'ouverts asphériques \mathcal{U} de Y telle que pour tout $U \in \mathcal{U}$, l'espace $f^{-1}(U)$ soit asphérique.*
- (iv) *Pour tout homéomorphisme local $Y' \rightarrow Y$, si on forme le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \quad ,$$

l'application f' est une équivalence cohomologique.

Ce critère d'asphéricité, tel qu'il est formulé ici, reflète l'une des propriétés fondamentales des "bonnes" catégories de modèles de \mathbf{Hot} (*i.e.* des couples $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$, où \mathcal{M} est une catégorie, et \mathcal{W} une partie de $\mathbf{Fl} \mathcal{M}$, tels que la catégorie localisée $\mathcal{W}^{-1} \mathcal{M}$ soit équivalente à \mathbf{Hot}). Considérons pour s'en convaincre les exemples des ensembles simpliciaux et des petites catégories.

La *catégorie des simplexes* est la catégorie Δ , dont les objets sont les ensembles $\Delta_n = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, munis de l'ordre naturel, et dont les flèches sont les applications croissantes. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux d'ensembles sur Δ (*i.e.* des foncteurs $\Delta^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$). On définit un foncteur

$$\Delta_\bullet^{\mathcal{T}op} : \Delta \rightarrow \mathcal{T}op \quad , \quad \Delta_n \mapsto \Delta_n^{\mathcal{T}op} \quad ,$$

par $\Delta_n^{\mathcal{T}op} = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$.

La catégorie $\mathcal{T}op$ admettant des petites limites inductives, ce foncteur définit un foncteur unique à isomorphisme unique près

$$|\cdot| : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathcal{T}op \quad ,$$

commutant aux petites limites inductives, et tel que pour tout $n \geq 0$, $|\Delta_n| = \Delta_n^{\mathcal{T}op}$, appelé dans la littérature le *foncteur de réalisation géométrique*. Ce dernier admet un adjoint à droite

$$S : \mathcal{T}op \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad ,$$

défini par la formule

$$(SX)_n = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta_n^{\mathcal{T}op}, X) \quad , \quad X \in \mathcal{T}op \quad , \quad n \geq 0 \quad .$$

Un morphisme d'ensemble simpliciaux est une *équivalence faible* si sa réalisation géométrique

$$|f| : |X| \longrightarrow |Y|$$

est une équivalence d'homotopie faible. On note $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ l'ensemble des équivalences faibles ainsi définies. Il est immédiat par définition de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ que le foncteur $|\cdot|$ induit un foncteur au niveau des catégories localisées, noté :

$$||\cdot|| : \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{T}op}^{-1}\mathcal{T}op \quad .$$

On peut par ailleurs montrer les deux énoncés suivants.

- 1) Pour tout ensemble simplicial X , l'espace topologique $|X|$ est un *CW-complexe*.
- 2) Pour tout espace topologique X , l'application canonique

$$|SX| \longrightarrow X$$

est une équivalence d'homotopie faible.

On en déduit aussitôt que le foncteur $||\cdot||$ se factorise par **Hot**, induisant une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{Hot} \quad .$$

Le troisième modèle de **Hot** dont nous proposons l'observation dans ce paragraphe est la catégorie **Cat** des petites catégories (dont les flèches sont les foncteurs entre icelles). Tout ensemble ordonné définissant canoniquement une catégorie, la catégorie des simplexes peut être vue comme une sous-catégorie pleine de **Cat**. Notons

$$i : \Delta \longrightarrow \text{Cat}$$

le foncteur d'inclusion. On définit le *foncteur nerf*

$$N : \text{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \quad A \longmapsto NA \quad ,$$

$$\text{par } (NA)_n = \text{Hom}_{\text{Cat}}(i\Delta_n, A) \quad , \quad n \geq 0 \quad .$$

Plus explicitement, $(NA)_n$ s'identifie à l'ensemble des suites de n flèches composables de A ,

$$a_0 \xrightarrow{u_1} a_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_n} a_n \quad , \quad u_i \in \text{Fl } A \quad ,$$

la catégorie Δ agissant sur NA par composition de ces flèches, ou bien par insertions d'identités. Une flèche de **Cat** est une *équivalence faible* si son image par le foncteur nerf en est une dans $\widehat{\Delta}$. On note \mathcal{W}_{Cat} l'ensemble des équivalences faibles ainsi obtenues. Il est encore une fois immédiat que le foncteur nerf induit un foncteur

$$\underline{N} : \mathcal{W}_{\text{Cat}}^{-1}\text{Cat} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \quad ,$$

et partant, par composition, un foncteur

$$B : \mathcal{W}_{\mathcal{C}at}^{-1} \mathcal{C}at \longrightarrow \mathbf{Hot} .$$

Le foncteur \underline{N} est une équivalence de catégories, ce qui implique qu'il en est de même de B . On peut expliciter un quasi-inverse de \underline{N} comme suit.

Soit X un ensemble simplicial. La *catégorie des simplexes de X* , notée Δ/X , admet la description suivante. Un objet est un couple (Δ_n, u) , où n est un entier positif, et $u : \Delta_n \longrightarrow X$ un morphisme d'ensembles simpliciaux (par le lemme de Yoneda, on peut aussi voir u comme un élément de X_n). Un morphisme

$$(\Delta_{n_0}, u_0) \longrightarrow (\Delta_{n_1}, u_1)$$

est une flèche $\varphi : \Delta_{n_0} \longrightarrow \Delta_{n_1}$ de Δ , telle que le triangle suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n_0} & \xrightarrow{\varphi} & \Delta_{n_1} \\ & \searrow u_0 & \swarrow u_1 \\ & & X \end{array}$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, on obtient un foncteur

$$\Delta/f : \Delta/X \longrightarrow \Delta/Y \quad ,$$

défini sur les objets par $(\Delta/f)(\Delta_n, u) = (\Delta_n, fu)$. On désigne enfin par

$$i_\Delta : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad X \longmapsto \Delta/X$$

le foncteur obtenu.

THÉORÈME (Quillen). *Il existe un morphisme de foncteurs*

$$N i_\Delta \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$$

tel que pour tout ensemble simplicial X , la flèche

$$N \Delta/X \longrightarrow X$$

soit une équivalence faible.

On déduit aussitôt de cet énoncé que le foncteur i_Δ respecte les équivalences faibles (il vérifie même l'équation $i_\Delta^{-1} \mathcal{W}_{\mathcal{C}at} = \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$), et que le foncteur induit

$$\underline{i}_\Delta : \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{C}at}^{-1} \mathcal{C}at$$

est une équivalence de catégories, quasi-inverse du foncteur \underline{N} . La compréhension du foncteur i_Δ relève du caractère local des théories homotopiques envisagées ici, comparable au théorème de descente cohomologique énoncé plus haut.

La construction du foncteur i_Δ se généralise immédiatement aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie quelconque. Si A est une petite catégorie, et si X est un préfaisceau sur A , on lui associe la catégorie A/X , dont les objets sont les couples (a, u) , où a est un objet de A , et u une section de X au-dessus de a , les flèches étant les triangles commutatifs évidents. On a en outre un foncteur d'oubli

$$A/X \longrightarrow A \quad (a, u) \longmapsto a .$$

Ce dernier peut être interprété comme un isomorphisme local dans le sens suivant. Un foncteur $f : A \longrightarrow B$ entre petites catégories est un *isomorphisme local* si pour tout objet a de A , le foncteur

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \quad b = f(a) \quad ,$$

est un isomorphisme de \mathcal{Cat} . On dit qu'une petite catégorie est *asphérique* si le foncteur canonique de celle-ci vers la catégorie finale est une équivalence faible. Par exemple, toute petite catégorie admettant un objet final est asphérique. En particulier, pour toute petite catégorie A , et tout objet a de A , la catégorie A/a est asphérique (autrement dit, toute petite catégorie est localement asphérique). Si

$$f : A \longrightarrow B$$

est un morphisme de \mathcal{Cat} , et si X est un préfaisceau sur B , on notera par abus $A/X = A/f^*X$. On remarque que le carré suivant est cartésien dans \mathcal{Cat} .

$$\begin{array}{ccc} A/X & \longrightarrow & A \\ f/X \downarrow & & \downarrow f \\ B/X & \longrightarrow & B \end{array}$$

On dit que f est *asphérique* si pour tout préfaisceau X sur B , le foncteur

$$f/X : A/X \longrightarrow B/X$$

est une équivalence faible. Il est immédiat que f est alors en particulier une équivalence faible, car si X est l'objet final de la catégorie des préfaisceaux sur B , on a l'égalité $B/X = B$. Le théorème A de Quillen [43] admet une formulation très proche du théorème de descente cohomologique en topologie (cette analogie peut d'ailleurs se poursuivre jusqu'au niveau des démonstrations, car on peut aussi caractériser les équivalences faibles de \mathcal{Cat} par la cohomologie à coefficients localement constants).

THÉORÈME (Descente homotopique). *Soit $f : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Le foncteur f est asphérique.*
- (ii) *Il existe une famille génératrice \mathcal{U} de la catégorie des préfaisceaux sur B , telle que pour tout élément X de \mathcal{U} , le foncteur*

$$f/X : A/X \longrightarrow B/X$$

soit une équivalence faible.

- (iii) *Pour tout objet b de B , la catégorie A/b est asphérique.*
- (iv) *Pour tout isomorphisme local $B' \longrightarrow B$, si on forme le carré cartésien suivant dans \mathcal{Cat} ,*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

le morphisme f' est une équivalence faible.

Ce résultat permet une première approche du comportement homotopique du foncteur i_Δ . Soit A une petite catégorie. On définit un foncteur

$$\tau_A : \Delta / \mathbf{N} A \longrightarrow A$$

par la formule

$$\tau_A(a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n) = a_n .$$

Un calcul élémentaire permet de montrer que lorsque A admet un objet final, la catégorie $\Delta / \mathbf{N} A$ est contractile, et donc asphérique. En outre, pour tout objet a de A , on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Delta / \mathbf{N}(A/a) & \longrightarrow & \Delta / \mathbf{N} A \\ \tau_{A/a} \downarrow & & \downarrow \tau_A \\ A/a & \longrightarrow & A \end{array} .$$

Autrement dit, on a un isomorphisme canonique

$$\Delta / \mathbf{N}(A/a) \simeq (\Delta / \mathbf{N} A) / a .$$

En vertu du théorème de descente homotopique, le foncteur τ_A est donc asphérique, et en particulier, une équivalence faible. Cependant, le fait que pour tout ensemble simplicial X , la catégorie Δ / X ait le même type d'homotopie que X n'est expliqué par cette approche que lorsque X est le nerf d'une petite catégorie. Pour comprendre le cas général, il faut avoir recours à la notion de colimite homotopique.

Soit I une petite catégorie. On note $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$ la catégorie des foncteurs définis sur I , à valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Une *équivalence faible* de $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$ est un morphisme de foncteurs

$$f : X \longrightarrow Y$$

tel que pour tout objet i de I , l'évaluation de f en i ,

$$f_i : X_i \longrightarrow Y_i ,$$

soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. On note

$$\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta}(I)$$

la localisation de $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$ par ces flèches. Le foncteur

$$\delta_I : \widehat{\Delta} \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta}) ,$$

qui associe à chaque ensemble simplicial X , le foncteur constant de valeurs X , respecte trivialement les équivalences faibles. Il définit par conséquent un foncteur

$$\underline{\delta}_I : \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta}(I) .$$

Ce dernier admet un adjoint à gauche, noté

$$\underline{\mathbf{holim}}_I : \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta}(I) \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta} .$$

Cet adjoint peut être construit par exemple par la théorie de Bousfield-Kan [5], et un calcul explicite montre que pour tout ensemble simplicial X , on a un isomorphisme canonique dans la catégorie homotopique

$$\underline{\operatorname{holim}}_I \underline{\delta}_I(X) \simeq X \times \mathbb{N} I .$$

En particulier, si $*$ désigne l'ensemble simplicial final, on obtient un isomorphisme canonique

$$\underline{\operatorname{holim}}_I \underline{\delta}_I(*) \simeq \mathbb{N} I .$$

Considérons un ensemble simplicial X . On définit un foncteur

$$\phi_X : \Delta/X \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

$$\text{par } (\Delta_n, u) \longmapsto \Delta_n .$$

On a un morphisme canonique dans $\underline{\operatorname{Hom}}(\Delta/X, \widehat{\Delta})$

$$\phi_X \longrightarrow \delta_{\Delta/X}(X) .$$

Il est bien connu que ce dernier induit par adjonction un isomorphisme

$$\underline{\operatorname{lim}}_{\Delta/X} \phi_X \xrightarrow{\sim} X .$$

On peut montrer que cela reste vérifié au niveau homotopique. Autrement dit, le morphisme

$$\phi_X \longrightarrow \underline{\delta}_{\Delta/X}(X)$$

induit un isomorphisme canonique dans $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta}$

$$\underline{\operatorname{holim}}_{\Delta/X} \phi_X \xrightarrow{\sim} X .$$

Or pour tout $n \geq 0$, les morphismes $\Delta_n \longrightarrow * = \Delta_0$ sont des équivalences faibles. On a donc un isomorphisme

$$\phi_X \xrightarrow{\sim} \underline{\delta}_{\Delta/X}(X) ,$$

d'où des isomorphismes dans $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}^{-1} \widehat{\Delta}$:

$$X \simeq \underline{\operatorname{holim}}_{\Delta/X} \phi_X \simeq \underline{\operatorname{holim}}_{\Delta/X} \underline{\delta}_{\Delta/X}(*) \simeq \mathbb{N} \Delta/X .$$

L'identification de X avec $\mathbb{N} \Delta/X$ relève ainsi de deux aspects différents.

- 1) Le préfaisceau X , vu comme un représentant d'un objet de \mathbf{Hot} , est localement asphérique, dans le sens où il est obtenu comme une colimite homotopique d'un diagramme formé d'objets asphériques.
- 2) Le comportement local de X , vu comme un préfaisceau sur la catégorie Δ des simplexes, garde un sens après localisation.

La différence notable entre la catégorie de modèles $\widehat{\Delta}$, et les deux autres, \mathcal{Top} et \mathcal{Cat} , est que celle-ci fournit un modèle uniforme de descente, déterminé par la géométrie locale de Δ , *i.e.* du topos $\widehat{\Delta}$. La notion de “méthode simpliciale” peut être vue comme l’invocation systématique de ce principe. L’un des propos de ce travail est de montrer qu’il existe un grand nombre d’autres petites catégories A telles que la catégorie des préfaisceaux sur A soit une catégorie de modèles de \mathbf{Hot} , de telle manière que les propriétés de descente dans \mathbf{Hot} puissent être modelées par la géométrie locale de A .

Conjectures de Grothendieck — Histoires de modèles

Dans *Pursuing stacks* [21], Grothendieck élabore une théorie de l'homotopie dans la catégorie des petites catégories, inspirée des propriétés de descente cohomologique évoquées au paragraphe précédent. Il définit en particulier la notion de *localisateur fondamental*, c'est-à-dire de partie \mathcal{W} de $\mathbf{FI}Cat$ — dont les éléments seront appelés *équivalences faibles* — satisfaisant les propriétés de stabilité suivantes.

LF1 La partie \mathcal{W} est faiblement saturée.

Cet axiome impose des propriétés que l'on peut attendre de toute notion raisonnable d'équivalences faibles :

- a) toute identité est une équivalence faible ;
- b) si dans un triangle commutatif de Cat , deux flèches parmi les trois sont des équivalences faibles, il en est de même de la dernière ;
- c) si $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{r} A$ est une paire de flèches de Cat , telles que $ri = 1_A$, et $ir \in \mathcal{W}$, alors $r \in \mathcal{W}$.

LF2 Toute petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Autrement dit, si A est une petite catégorie admettant un objet final, le foncteur $A \rightarrow *$ ($*$ désignant la catégorie finale) est une équivalence faible.

LF3 Pour tout triangle commutatif de Cat ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & S & \end{array},$$

si la flèche u est asphérique au-dessus de S , alors elle est une équivalence faible.

Cet axiome est une version relative du théorème de descente homotopique (*i.e.* du théorème A de Quillen). Il signifie que si pour tout objet s de S , le foncteur

$$u/s : A/s \rightarrow B/s$$

est une équivalence faible, alors u est une équivalence faible. Dans le cas où $B = S$ et $\beta = 1_B$, on retrouve bien l'énoncé de descente homotopique déjà cité. En utilisant les mêmes méthodes que Quillen, ou bien encore des critères cohomologiques, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Les équivalences faibles usuelles de Cat (*i.e.* celles envisagées au paragraphe précédent) forment un localisateur fondamental.*

D'autre part, il est immédiat que toute intersection de localisateurs fondamentaux est un localisateur fondamental. Vu que $\mathbf{FI}Cat$ est un localisateur fondamental, il est sensé de définir pour toute partie \mathcal{F} de $\mathbf{FI}Cat$, le *localisateur fondamental engendré par \mathcal{F}* comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux contenant \mathcal{F} . En particulier, lorsque $\mathcal{F} = \emptyset$, on définit ainsi le *localisateur fondamental minimal*.

CONJECTURE A (Grothendieck). *Le localisateur fondamental des équivalences faibles usuelles est le localisateur fondamental minimal.*

Si \mathcal{W} désigne un localisateur fondamental, on note $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ la localisation de $\mathcal{C}at$ par \mathcal{W} . L'énoncé ci-dessous est une conséquence immédiate de la conjecture A.

COROLLAIRE 2. *Pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est canoniquement équivalente à une localisation de la catégorie homotopique \mathbf{Hot} .*

Considérons à présent un localisateur fondamental \mathcal{W} fixé. Soit A une petite catégorie. On a un foncteur de la catégorie des préfaisceaux sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$,

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad X \longmapsto A/X \ .$$

Grothendieck définit les *équivalences faibles de \widehat{A}* comme les éléments de l'ensemble

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1} \mathcal{W} \ .$$

Le foncteur i_A induit alors un foncteur

$$\underline{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \ .$$

Un des problèmes que se pose Grothendieck dans *Pursuing stacks* est de donner une caractérisation des petites catégories A telles que le foncteur \underline{i}_A ci-dessus soit une équivalence de catégories. Cette question étant trop vaste pour être résolue, Grothendieck observe que le foncteur i_A admet systématiquement un adjoint à droite,

$$i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad C \longmapsto (a \longmapsto \mathbf{Hom}_{\widehat{A}}(A/a, C)) \ .$$

Cela permet de définir la notion de *catégorie test faible* : on dit que A est une catégorie test faible si on a l'égalité

$$i_A^* i_A^{-1} \mathcal{W}_{\widehat{A}} = \mathcal{W} \ ,$$

et si les morphismes d'adjonction

$$i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad \text{et} \quad 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

sont des équivalences faibles naturelles. Cela implique que les deux foncteurs induits,

$$\underline{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \quad \text{et} \quad \underline{i}_A^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A}$$

sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre. La “bonne” notion est enfin atteinte lorsqu'on demande qu'une telle propriété soit vérifiée localement : une petite catégorie A est une *catégorie test locale* si pour tout objet a de A , la catégorie A/a est une catégorie test faible. On vérifie en outre que pour qu'une petite catégorie test locale A soit elle même une catégorie test faible, il faut et il suffit qu'elle soit asphérique. On en vient donc à la définition suivante : une *catégorie test* est une catégorie test locale asphérique. La notion de catégorie test (locale) se révèle être très agréable à manipuler, car des critères simples à vérifier donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une petite catégorie soit test (locale). Par exemple, toute petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés finis non vides est une catégorie test. Bien

entendu, la catégorie des simplexes Δ est un exemple élémentaire de catégorie test. En général, si A est une catégorie test locale, alors pour tout préfaisceau X sur A (resp. toute petite catégorie A'), A/X (resp. $A \times A'$) est une catégorie test locale.

Considérons une petite catégorie A . On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A est une *cofibration* (resp. une *fibration*) si c'est un monomorphisme (resp. s'il vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux monomorphismes qui sont en outre des équivalences faibles). On peut alors se demander dans quelles conditions a-t-on défini de la sorte une structure de catégorie de modèles fermée sur \widehat{A} . La démonstration de l'énoncé ci-dessous est élémentaire, n'utilisant que les critères dégagés par Grothendieck caractérisant les catégorie test locale, et des arguments simples d'algèbre homotopique (1.1.27).

PROPOSITION 3. *Soit A une petite catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *La catégorie A est une catégorie test locale.*
- (ii) *Tout préfaisceau X sur A admet un cylindre, i.e. la codiagonale*

$$(1_X, 1_X) : X \amalg X \longrightarrow X$$

admet une factorisation en une cofibration

$$(\partial^0, \partial^1) : X \amalg X \longrightarrow XI$$

suivie d'une équivalence faible

$$\sigma : XI \longrightarrow X .$$

- (iii) *Tout morphisme de \widehat{A} vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations est une équivalence faible.*

CONJECTURE B (Grothendieck). *Pour toute catégorie test locale A , la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$.*

La proposition ci-dessus montre que cette conjecture est optimale, dans le sens où pour que la catégorie des préfaisceaux sur A admette de la sorte une structure de catégorie de modèles fermée, il faut que A soit une catégorie test locale. On remarque que les conjectures A et B donnent une nouvelle description de la structure de catégorie de modèles fermée classique des ensembles simpliciaux.

Le propos principal de cette thèse est de montrer les conjectures A et B. Cependant, la conjecture B n'a pu être résolue qu'en imposant des conditions de petitesse sur le localisateur fondamental considéré : on dit qu'un localisateur fondamental \mathcal{W} est *accessible* s'il existe un petit ensemble \mathcal{F} de flèches de \mathcal{Cat} qui l'engendre (*i.e.* si \mathcal{W} est l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux contenant \mathcal{F}). Par exemple, le localisateur fondamental minimal est accessible (en considérant l'ensemble $\mathcal{F} = \emptyset$), et le localisateur fondamental maximal FlCat est accessible (en considérant cette fois l'ensemble $\mathcal{F} = \{\emptyset \longrightarrow *\}$). Nous avons ainsi obtenu l'énoncé suivant (5.1.11).

THÉORÈME 4. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible, et A une catégorie test locale (relativement à \mathcal{W}). Alors la catégorie des préfaisceaux sur A admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant¹, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$.*

Nous nous sommes aussi préoccupés d'explicitier ce que la catégorie homotopique $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ classe lorsque A est une catégorie test locale. Si A est asphérique (i.e. si \widehat{A} est une catégorie test), on sait par définition qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{W}} .$$

En général si A est une petite catégorie, et \mathcal{W} un localisateur fondamental, on note \mathcal{W}/A la partie de FlCat/A formée des flèches de Cat/A dont l'image dans Cat par le foncteur d'oubli est une équivalence faible. On définit alors la catégorie des *types d'homotopie relatifs au-dessus de A* , ou encore, pour abrégier, des *A -types d'homotopie*,

$$\text{Hot}_{\mathcal{W}}//A = \mathcal{W}/A^{-1}\text{Cat}/A .$$

On peut alors prouver l'énoncé ci-dessous (5.3.19).

THÉORÈME 5. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental et A une catégorie test locale. Alors on a une équivalence de catégories canonique*

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//A .$$

D'autre part, on peut montrer que toute catégorie fibrée au-dessus d'une catégorie test locale est encore une catégorie test locale. En particulier, si A est une catégorie test locale, et si \mathbb{G} est un préfaisceau en groupes sur A , on peut voir ce dernier comme un foncteur

$$\mathbb{G} : A^{\circ} \longrightarrow \text{Cat} ,$$

(tout groupe pouvant être vu comme une catégorie ayant un unique objet et dont les flèches sont des isomorphismes). On note $B\mathbb{G}$ la catégorie fibrée sur A associée. Cette notation est justifiée par le fait que la catégorie des préfaisceaux sur $B\mathbb{G}$ s'identifie canoniquement à celle des préfaisceaux sur A munis d'une action de \mathbb{G} à droite. Ces considérations mènent aussitôt à l'énoncé suivant (par une spécialisation de 5.5.12).

COROLLAIRE 6. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible, A une catégorie test locale, et \mathbb{G} un préfaisceau en groupes sur A . Alors la catégorie des représentations de \mathbb{G} (i.e. des préfaisceaux sur A munis d'une action de \mathbb{G}) admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{B\mathbb{G}}$. En outre, la catégorie homotopique obtenue est canoniquement équivalente à la catégorie des $B\mathbb{G}$ -types d'homotopie.*

¹Une catégorie de modèle fermée \mathcal{M} est à engendrement cofibrant si la factorisation de toute flèche de \mathcal{M} en une cofibration (resp. une cofibration triviale), suivie d'une fibration triviale (resp. d'une fibration) s'obtient par l'argument du petit objet appliqué à un petit ensemble de cofibrations (resp. de cofibrations triviales). En particulier, ces factorisations sont donc fonctorielles.

En vue de la démonstration du théorème 4, nous avons introduit la notion suivante. Soit A une petite catégorie. On appelle *cofibrations* les monomorphismes, et *fibrations triviales*, les flèches de \widehat{A} vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations. Si \mathcal{W} désigne une partie de $\text{Fl } \widehat{A}$, on appelle *équivalences faibles* les éléments de \mathcal{W} , et *cofibrations triviales* les morphismes de \widehat{A} qui sont à la fois des cofibrations et des équivalences faibles. Un A -localisateur est une partie \mathcal{W} de $\text{Fl } \widehat{A}$ vérifiant les axiomes suivants.

- L1 Si dans un triangle commutatif de \widehat{A} , deux flèches parmi les trois sont des équivalences faibles, il en est de même de la dernière.
- L2 Toute fibration triviale est une équivalence faible.
- L3 Les cofibrations triviales sont stables par images directes et par compositions transfinies.

Comme dans le cas des localisateurs fondamentaux, on dit qu'un A -localisateur \mathcal{W} est *accessible* s'il existe un petit ensemble \mathcal{F} de flèches de \widehat{A} tel que \mathcal{W} soit l'intersection des A -localisateurs contenant \mathcal{F} . Nous avons établi le résultat ci-dessous (2.3.4).

THÉORÈME 7. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} une partie de $\text{Fl } \widehat{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *La partie \mathcal{W} est un A -localisateur accessible.*
- (ii) *La catégorie \widehat{A} admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} .*

D'autre part, les résultats dégagés par Grothendieck permettent de démontrer un énoncé fort pertinent (1.3.10).

THÉORÈME 8. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une petite catégorie. Pour que A soit une catégorie test locale, il faut et il suffit que $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ soit un A -localisateur.*

On voit donc à présent que la démonstration du théorème 4 revient à montrer qu'il existe un petit ensemble de flèches de \widehat{A} qui engendrent le A -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il est alors temps de remarquer que les axiomes définissant les A -localisateurs souffrent d'un manque cruel : aucun analogue de l'axiome LF3 n'est mentionné. Autrement dit, les propriétés locales de la catégorie des préfaisceaux sur A n'interviennent pas *a priori* dans la définition des A -localisateurs.

Considérons une petite catégorie A , ainsi qu'un A -localisateur \mathcal{W} . Sans aucune hypothèse d'accessibilité, on peut donner un sens à la notion de colimite homotopique dans \widehat{A} , relativement à \mathcal{W} . Si X est un préfaisceau sur A , on définit un foncteur

$$\phi_X : A/X \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad (a, a \longrightarrow X) \longmapsto a .$$

On a alors un morphisme canonique (à équivalence faible près)

$$\underline{\text{holim}}_{A/X} \phi_X \longrightarrow X .$$

On dit que \mathcal{W} est *régulier* si le morphisme ci-dessus est une équivalence faible pour tout X . La construction des foncteurs $\underline{\text{holim}}$ pouvant être rendue indépendante des A -localisateurs considérés, on vérifie que tout A -localisateur contenant un A -localisateur régulier est lui-même régulier. On peut alors montrer l'énoncé suivant (4.4.13).

THÉORÈME 9. *Le A -localisateur régulier minimal est accessible.*

COROLLAIRE 10. *Soit \mathcal{F} un petit ensemble de flèches de \widehat{A} . Le A -localisateur régulier engendré par \mathcal{F} est accessible.*

Soit A une petite catégorie. Un A -localisateur test est un A -localisateur régulier tel que tout préfaisceau représentable soit asphérique (*i.e.* tel que pour tout objet a de A , le morphisme de a vers le préfaisceau final soit une équivalence faible). Il résulte immédiatement du corollaire ci-dessus que le A -localisateur test minimal est accessible. D'autre part, on dit qu'un localisateur fondamental est *modelable par A* si A est une catégorie test relativement à celui-ci. Nous avons démontré l'énoncé suivant (5.1.10).

THÉORÈME 11. *Soit A une petite catégorie. L'application*

$$\mathcal{W} \longmapsto i_A^{-1}\mathcal{W}$$

établit une bijection de l'ensemble des localisateurs fondamentaux modelables par A sur celui des A -localisateurs test. En outre, cette correspondance conserve l'accessibilité dans le sens où pour qu'un localisateur fondamental \mathcal{W} , modelable par A , soit accessible, il faut et il suffit que le A -localisateur $i_A^{-1}\mathcal{W}$ le soit.

Ce théorème implique évidemment le théorème 4 dans le cas où A est une catégorie test. Le cas général en résulte par des moyens beaucoup moins explicites, issus de la machinerie des A -localisateurs. La conjecture A se révèle aussi être une conséquence de ce théorème (5.1.12).

Ajoutons pour conclure ce paragraphe que la notion de A -localisateur se généralise naturellement en celle de \mathcal{E} -localisateur pour un topos arbitraire \mathcal{E} (cf. [10]). De même, la problématique des catégories test s'étend au cadre des catégories de faisceaux, ce qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

Guide de lecture

Chapitre 1. Théorie homotopique des catégories. Une partie de la théorie homotopique de Grothendieck est exposée, sous la forme d'un fascicule de résultats (le lecteur étant renvoyé en général à [36]).

Le premier paragraphe comprend les définitions de localisateur fondamental, de catégories test, de foncteurs test, *etc.* Quelques écarts nous distinguent de [36] :

- La notion de localisateur fondamental envisagée dans ce texte correspond à celle de localisateur fondamental fort dans [36].
- La notion de foncteur test que nous avons adoptée est un peu moins générale que dans [36].
- L'une des caractérisations des catégories test locales (resp. des foncteurs test locaux) en termes d'équivalences faibles locales (1.1.16, (e)) n'est pas explicite dans [36].

Nous énonçons le lemme d'homotopie élémentaire 1.1.27, lequel explique en quoi la notion de catégorie test locale est caractérisée par certaines propriétés de relèvement. Le paragraphe se clôt sur la donnée de quelques exemples élémentaires de catégories test (1.1.28). Nous démontrons en particulier que la catégorie des simplexes est une catégorie test (1.1.29), par une méthode différente de celle de Grothendieck (exposée dans [36]).

Le second paragraphe s'ouvre quant à lui sur les notions de foncteur propre et de foncteur lisse, duales l'une de l'autre. Celles-ci, dégagées par Grothendieck, formalisent le comportement homotopique des catégories cofibrées et fibrées respectivement. Nous rappelons ensuite la construction des extensions de Kan homotopiques dans Cat en termes d'intégrales (ce qui généralise par exemple les constructions de Thomason [46]). Le seul énoncé original de ce paragraphe est le théorème 1.2.19, lequel généralise à la situation homotopique l'assertion selon laquelle tout préfaisceau sur une petite catégorie est canoniquement une limite inductive de préfaisceaux représentables. Ce résultat, de nature assez technique, ne sera pas utilisé avant la fin du chapitre 4.

Le dernier paragraphe met l'emphasis sur les catégories de préfaisceaux. Nous y introduisons la notion de A -localisateur, puis formulons une caractérisation des catégories test locales par ce langage (1.3.10).

Chapitre 2. Algèbre homotopique des préfaisceaux. Cette partie est consacrée à l'étude systématique du lien entre les notions de structures de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie A , et de A -localisateur. Elle peut être lue indépendamment du chapitre précédent.

Le premier paragraphe commence par quelques rappels concernant l'accessibilité dans les catégories de préfaisceaux. On y démontre ensuite plusieurs lemmes techniques concernant les factorisations obtenues par l'argument du petit objet. Nous étudions en particulier les propriétés d'exactitude de ces constructions, spécialisant de la sorte des résultats dus à P.S. Hirschhorn dans [24].

Le second paragraphe se veut constructif. Il s'agit d'établir une méthode systématique pour élaborer des structures de catégorie de modèles fermées sur les

catégories de préfaisceaux. Pour se faire, nous partons du constat (déjà fait par F. Morel dans [39]) que les méthodes de [17] gardent un sens dans un cadre beaucoup plus général que celui des ensembles simpliciaux. Dans cette optique, nous introduisons la notion de donnée homotopique (2.2.3), laquelle donne sens à celle d'extension anodine, puis de préfaisceau fibrant, et enfin d'équivalence faible (2.2.12). Pour montrer qu'on a ainsi défini une structure de catégorie de modèles fermée (2.2.13), avec pour cofibrations les monomorphismes, il suffit de montrer qu'il existe un petit ensemble de cofibrations triviales qui engendre toutes les cofibrations triviales par l'argument du petit objet. Cette existence est établie grâce à un argument de cardinalité à la Bousfield (2.2.33). Nous mettons toutefois le lecteur en garde à propos du fait que dans cette construction, toute extension anodine est une cofibration triviale, mais que la réciproque n'est pas vérifiée en général. Nous donnons enfin plusieurs conditions équivalentes caractérisant les situations pour lesquelles les notions d'extension anodine et de cofibration triviale coïncident (2.2.38 et 2.2.44).

Dans le paragraphe suivant, on adopte un point de vue plus axiomatique, en développant systématiquement la notion de A -localisateur. On établit la correspondance entre ceux-ci et les structures de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, et dont les cofibrations sont les monomorphismes (2.3.4). Nous démontrons ensuite les sorites principaux concernant la construction de A -localisateurs accessibles. On montre par exemple que si \mathcal{F} est un petit ensemble de flèches, le A -localisateur stable par produits finis engendré par \mathcal{F} est accessible (2.3.9). Il est aussi établi que si

$$\varphi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est un foncteur vérifiant certaines conditions d'exactitudes, et si \mathcal{W} est un B -localisateur accessible, alors $\varphi^{-1}\mathcal{W}$ est un A -localisateur accessible (2.3.10). Cela implique en particulier que la notion de A -localisateur accessible est stable par passage aux catégories de foncteurs (2.3.12).

Le dernier paragraphe de ce chapitre est lui consacré aux phénomènes de propre. On dit qu'un A -localisateur est *propre* s'il est accessible et si la structure de catégorie de modèles fermée associée est propre. Nous inspirant du travail précurseur de F. Morel et V. Voevodsky [40] ainsi que d'une remarque technique de J.F. Jardine dans [33], nous établissons une condition nécessaire et suffisante (et calculable) pour qu'un A -localisateur accessible soit propre (2.4.4). Nous obtenons comme corollaire que tout A -localisateur engendré par une petite famille de A -localisateurs propres est propre (2.4.6). Une autre conséquence immédiate est que si $(X_i)_{i \in I}$ est une petite famille de préfaisceaux sur A , le A -localisateur engendré par les projections

$$Y \times X_i \longrightarrow Y \quad , \quad Y \in \text{Ob } \widehat{A} \quad , \quad i \in I \quad ,$$

est propre (2.4.7). Un contre-exemple, montrant qu'il existe des A -localisateurs qui ne sont pas propres, sera donné au chapitre 7.

Chapitre 3. Yoga simplicial. Cette partie s'ouvre sur une première application de la théorie des A -localisateurs : retrouver par cette voie la théorie

classique des ensembles simpliciaux. On définit les ∞ -équivalences comme les éléments du Δ -localisateur engendré par les projections

$$X \times \Delta_1 \longrightarrow X \quad , \quad X \in \mathbf{Ob} \widehat{\Delta} .$$

Ce Δ -localisateur est propre et stable par produits finis (3.1.5). La structure de catégorie de modèles fermée associée peut en outre être définie par une donnée homotopique explicite, et on vérifie facilement que les extensions anodines obtenues sont exactement celles construites par P. Gabriel et M. Zisman. Pour retrouver le résultat de Quillen avec toute sa force (3.1.29), il reste donc à montrer que les extensions anodines ainsi définies sont exactement les cofibrations triviales, ou de manière équivalente, que les fibrations sont exactement les fibrations de Kan (3.1.28). La démonstration que nous donnons de ce fait se distingue des précédentes en ce qu'elle ne fait usage ni de fibrations minimales, ni de la réalisation géométrique.

Le second paragraphe est d'abord consacré à une démonstration d'une version simpliciale du théorème B de Quillen [43] (3.2.3). Nous démontrons ensuite que cet énoncé caractérise en un certain sens le Δ -localisateur des ∞ -équivalences (3.2.7). Autrement dit, il n'y a pas lieu d'espérer un énoncé analogue pour un Δ -localisateur non trivial, strictement plus grand que celui des ∞ -équivalences.

La troisième et dernière partie de ce chapitre renoue avec la théorie générale des A -localisateurs. Son intérêt est purement technique. On y définit la notion de complétion simpliciale \mathcal{W}_Δ d'un A -localisateur \mathcal{W} en tant que $A \times \Delta$ -localisateur (3.3.16). La propriété principale de cette construction est que l'inclusion canonique de \widehat{A} dans $\widehat{A \times \Delta}$ induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}^{-1} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_\Delta^{-1} \widehat{A \times \Delta} ,$$

un quasi-inverse pouvant être défini par un objet cosimplicial adéquat (3.3.20). En outre, pour que \mathcal{W} soit accessible (resp. propre), il faut et il suffit que \mathcal{W}_Δ le soit. En guise d'application de ce type de méthodes, nous donnons une démonstration très élémentaire du fait bien connu que pour tout ensemble simplicial X , les morphismes

$$X \longrightarrow \mathrm{Ex} X \quad \text{et} \quad X \longrightarrow \mathrm{Ex}^\infty X$$

sont des ∞ -équivalences (3.3.14). Un corollaire immédiat (et non moins bien connu) est la stabilité des ∞ -équivalences par petites limites inductives filtrantes (3.3.15).

Chapitre 4. Extensions de Kan homotopiques. La notion d'extension de Kan homotopique est une version relative de celle de (co-)limite homotopique. Elle a un sens dans les catégories de modèles fermées générales (voir [23, 13, 9]), mais nous avons choisi de l'évoquer dans le cadre plus confortable — *i.e.* moins technique — des catégories de modèles fermées exponentielles : on dit qu'une catégorie de modèles fermée \mathcal{C} est *exponentielle à gauche* (resp. *à droite*) si pour toute petite catégorie I , la catégorie \mathcal{C}^I des foncteurs de I dans \mathcal{C} admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles, ainsi que les cofibrations (resp. ainsi que les fibrations), sont définies par celles de \mathcal{C} argument par argument. On dit que \mathcal{C} est *exponentielle* si elle l'est à la fois à gauche et à

droite. Pour tout A -localisateur accessible, la structure de catégorie de modèles fermée associée sur \widehat{A} est exponentielle (4.1.5). Le premier paragraphe s'ouvre donc sur la construction des extensions de Kan homotopiques dans les catégories de modèles fermées exponentielles — laquelle se révèle être très agréable puisqu'on a à disposition des adjonctions de Quillen. Outre quelques sorites de functorialité, nous étudions le comportement local des extensions de Kan homotopiques, c'est-à-dire le calcul de leurs fibres (4.1.14). Plus concrètement, si \mathcal{M} est une catégorie admettant des petites limites inductives, et si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, le foncteur image inverse par u , défini entre les catégories de foncteurs,

$$u^* : \mathcal{M}^J \longrightarrow \mathcal{M}^I ,$$

admet un adjoint à gauche,

$$u_! : \mathcal{M}^I \longrightarrow \mathcal{M}^J .$$

Si F est un foncteur de I vers \mathcal{M} , et j un objet de J , l'évaluation de $u_!F$ en j s'écrit

$$(u_!F)_j \simeq \varinjlim_{I/j} F|_{I/j}$$

($F|_{I/j}$ désignant l'image inverse de F par le foncteur canonique de I/j vers I). Cette description garde un sens lorsqu'on dérive les foncteurs incriminés. Nous montrons ensuite que pour toute petite catégorie A , et tout A -localisateur, les extensions de Kan homotopiques à gauche (*i.e.* du type colimite homotopique relative) gardent un sens, ainsi que leur comportement local (4.1.30).

Le second paragraphe est consacré — toujours dans le cadre des A -localisateurs — à la construction des extensions de Kan homotopiques du point de vue de Bousfield-Kan [5]. Ces constructions ont en effet le mérite d'être plus canoniques que celles obtenues par voie abstraite (dans le sens où elles requièrent moins de choix). Nous les avons donc adoptées dans la suite, afin de "simplifier" les constructions du paragraphe suivant notamment.

Dans la troisième partie de ce chapitre, on commence par montrer qu'à tout A -localisateur est canoniquement associé un localisateur fondamental (4.3.3). Ce dernier est formé des flèches

$$u : I \longrightarrow J$$

telles que pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme induit par u ,

$$\varinjlim_I p_I^* X \longrightarrow \varinjlim_J p_J^* X ,$$

soit une équivalence faible dans \widehat{A} ($p_I^* X$ et $p_J^* X$ désignant les foncteurs constants de valeur X , indexés par I et J respectivement). La seule difficulté apparente pour montrer qu'on a ainsi défini un localisateur fondamental, est la vérification de l'axiome de descente homotopique LF3, laquelle résulte formellement des propriétés locales des extensions de Kan homotopiques. La suite du paragraphe est vouée à une construction technique (4.3.6) qui se veut être l'analogue homotopique du fait que si S est une petite catégorie, et \mathcal{M} une catégorie admettant

des petites limites inductives, tout foncteur de S à valeurs dans \mathcal{M} admet un prolongement, unique à isomorphisme unique près, en un foncteur

$$\widehat{S} \longrightarrow \mathcal{M}$$

commutant aux petites limites inductives.

Le quatrième et dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à la notion de A -localisateur régulier, déjà évoquée plus haut. On y montre que celle-ci est stable par localisation (4.4.15) — *i.e.* par passage aux catégories A/X pour tout préfaisceau X sur A — et par passage aux catégories de foncteurs (4.4.21). On caractérise en outre les A -localisateurs réguliers comme ceux dont la complétion simpliciale contient le $A \times \Delta$ -localisateur des ∞ -équivalences argument par argument (4.4.25). En particulier, cela montre que la notion de A -localisateur régulier recouvre la théorie de la localisation des préfaisceaux simpliciaux développée dans [19]. Un corollaire immédiat est que le A -localisateur régulier minimal est propre (en particulier accessible), et stable par produits finis. On en déduit aussi que tout A -localisateur régulier est stable par petites limites inductives filtrantes. Parmi quelques derniers sorites, on fait l'observation que le localisateur fondamental associé à un A -localisateur régulier est totalement déterminé par l'action de $\mathcal{C}at$ sur les préfaisceaux représentables (4.4.29).

Chapitre 5. A la poursuite des modèles. Le premier paragraphe consiste en la démonstration des conjectures de Grothendieck, comme cela a été décrit plus haut (5.1.11 et 5.1.12). On y trouve aussi quelques exemples d'équivalences de Quillen entre catégories de préfaisceaux sur des catégories test (5.1.18 et 5.1.20). On prouve par ailleurs que tout localisateur fondamental est stable par petites limites inductives filtrantes (5.1.16).

En second lieu, le problème de la propriété est abordé : on dit qu'un localisateur fondamental est *propre* si pour toute catégorie test A , le A -localisateur associé est propre. On montre que pour qu'un localisateur fondamental soit propre, il faut et il suffit qu'il existe une catégorie test A telle que le A -localisateur associé soit propre (5.2.18). On établit par ailleurs qu'un localisateur fondamental accessible \mathcal{W} est propre si et seulement s'il existe une famille \mathcal{F} de petites catégories telle que \mathcal{W} soit le plus petit localisateur fondamental faisant des éléments de \mathcal{F} des catégories sphériques (5.2.21). Ces considérations seraient incomplètes sans une légère généralisation de la théorie de Thomason [47], exposée dans l'annexe B : pour tout localisateur fondamental accessible \mathcal{W} , $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les \mathcal{W} -équivalences, et celle-ci est propre si et seulement si \mathcal{W} est propre (B.2.10).

Le troisième paragraphe est une étude de la notion de catégorie test locale. On y donne la description de la catégorie homotopique d'une catégorie test locale en termes de types d'homotopie relatifs (5.3.19). On obtient comme corollaire que pour tout localisateur fondamental propre, et toute catégorie test locale A , le A -localisateur associé est propre (5.3.29). Cela permet aussi de donner un nouvel exemple d'équivalence de Quillen (5.3.26), généralisant celui de 5.1.18.

La quatrième partie de ce chapitre est consacrée au localisateur fondamental minimal \mathcal{W}_∞ . On démontre le théorème B de Quillen à partir de son analogue simplicial, établi au chapitre 3 (5.4.3). Cet énoncé fournit, comme dans le cadre

simplicial, une caractérisation axiomatique de \mathcal{W}_∞ (5.4.7). Il permet par ailleurs de prouver que si A est une catégorie test locale au sens de \mathcal{W}_∞ , le A -localisateur $i_A^{-1}\mathcal{W}_\infty$ est exactement le A -localisateur régulier engendré par les morphismes entre préfaisceaux représentables sur A (5.4.8).

Ce chapitre s'achève sur l'étude homotopique des catégories de représentations avec le point de vue des catégories test locales, comme cela a déjà été mentionné plus haut (5.5.2 et 5.5.12). Dans le cas du localisateur fondamental minimal, si A est une catégorie test locale stricte (*i.e.* telle que le A -localisateur $i_A^{-1}\mathcal{W}_\infty$ soit stable par produits finis), et \mathbb{G} est un préfaisceau en groupes sur A , on montre qu'un morphisme de représentations est une équivalence faible si et seulement si son image dans \widehat{A} par le foncteur d'oubli en est une (5.5.23). Dans le cas où $A = \Delta$, on retrouve ainsi la théorie homotopique usuelle des représentations d'un groupe simplicial.

Chapitre 6. Zoologie (1) : catégories test. Ce chapitre a pour vocation de donner des exemples concrets et non triviaux de catégories test. On y développe dans un premier temps les notions de *catégorie squelettique* et de *catégorie squelettique régulière*, formalisant ainsi quelques unes des bonnes propriétés combinatoires de la catégorie des simplexes. Lorsque A est une catégorie squelettique régulière, tout A -localisateur est régulier. Si en outre A est une catégorie test pour un localisateur fondamental, la description du A -localisateur correspondant s'en trouve très simplifiée. C'est ce qu'on vérifie ensuite dans l'étude homotopique des ensembles cubiques : on démontre dans ce cadre l'analogie du théorème de Quillen pour les ensembles simpliciaux, *i.e.* l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée propre, à engendrement cofibrant, avec une description précise des fibrations (6.2.37). On développe en outre la théorie des ensembles globulaires, en tant que catégorie de préfaisceaux sur une catégorie squelettique régulière qui n'est pas une catégorie test en général (6.3.8). Nous donnons pour conclure quelques indications (succinctes) pour construire des catégories test sur le principe de la décomposition des sphères.

Chapitre 7. Zoologie (2) : localisateurs fondamentaux. Il s'agit cette fois de donner des exemples de localisateurs fondamentaux. On étudie particulièrement le localisateur fondamental \mathcal{W}_n , $n \geq 0$, correspondant aux types d'homotopie tronqués en degré n . Cela nous donne l'occasion de donner un nouvel exemple de catégorie test : la catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ des simplexes Δ_m , $0 \leq m \leq n+1$ (7.1.10). En outre, on montre que l'inclusion pleine $\Delta_{\leq n+1} \rightarrow \Delta$ induit deux équivalences de Quillen entre $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ et $\widehat{\Delta}$ (en localisant par \mathcal{W}_n). Cela donne un nouvel éclairage sur les foncteurs de troncation de Postnikov. On montre aussi que la catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ détermine \mathcal{W}_n en un sens adéquat (7.1.20).

On établit ensuite que tout localisateur fondamental qui n'est pas contenu dans \mathcal{W}_0 est trivial (7.2.2).

Ce chapitre s'achève enfin sur une courte note concernant les localisateurs fondamentaux associés à une théorie homologique (7.3.3), simple interprétation des résultats de Bousfield [4]. On définit ensuite une famille de localisateurs fondamentaux accessibles qui ne sont pas propres à partir de l'homologie singulière rationnelle (7.3.6).

Remerciements

Cette thèse a été faite sous la direction de Georges Malsiniotis. Je tiens à lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour son soutien à la fois critique et laudatif, sans compter le temps et l'énergie qu'il a bien voulu consacrer à la lecture attentive de ce texte.

Je remercie Ieke Moerdijk et Carlos Simpson pour avoir accepté si promptement d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je me suis aussi nourri de discussions avec notamment Alain Bruguières, Albert Burroni, Frédéric Déglise, Jacques Emsalem, Bernhard Keller, Arnaud Leprince, Alban Moreau, Fabien Morel, et Ingo Waschkes. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

CHAPITRE 1

Théorie homotopique des catégories

1. Catégories test locales

1.1.1. Dans le texte qui suit, on a adopté le langage des univers de Grothendieck (voir SGA 4 [22]). On supposera donc qu'un univers est fixé, et qu'il contient l'ensemble des entiers naturels. On parlera de petits ensembles pour désigner les ensembles qui sont des éléments du-dit univers, et d'ensembles ou de classes pour les autres.

1.1.2. Si C est une catégorie, on note $\mathbf{Ob} C$ (resp. $\mathbf{Fl} C$) l'ensemble des objets (resp. des flèches) de C . On note $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, *i.e.* celle dont les objets sont les catégories C telles que l'ensemble des flèches $\mathbf{Fl} C$ soit petit, et dont les morphismes sont les foncteurs. Il est bien connu que $\mathcal{C}at$ admet des petites limites inductives et projectives (voir par exemple [17]). On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des petits ensembles, et si C est une petite catégorie, \widehat{C} désigne la catégorie des préfaisceaux de petits ensembles, *i.e.* des foncteurs de la catégorie C° opposée à C vers $\mathcal{E}ns$.

1.1.3. Soit $f : A \rightarrow B$ une flèche de $\mathcal{C}at$. Pour $b \in \mathbf{Ob} B$, on définit la catégorie A/b en formant le carré cartésien suivant (où B/b désigne la catégorie des objets de B au-dessus de b , et $B/b \rightarrow B$ le foncteur d'oubli) :

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ f/b \downarrow & & \downarrow f \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array} .$$

On remarque que A/b s'identifie canoniquement à la catégorie dont les objets sont les couples (a, u) , où $a \in \mathbf{Ob} A$ et où $u : fa \rightarrow b$ est une flèche de B , et dont les flèches $\phi : (a, u) \rightarrow (b, v)$ sont les flèches $\phi : a \rightarrow b$ de A , telles que $v \circ f(\phi) = u$.

Lorsqu'on se donne un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & & C \end{array} ,$$

pour chaque objet c de C , il vient une flèche canonique $f/c : A/c \rightarrow B/c$, ce qui induit un foncteur $\zeta : C \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{C}at)$, $c \mapsto f/c$.

1.1.4. Soient \mathcal{M} une catégorie, et \mathcal{W} une partie de $\mathbf{Fl} \mathcal{M}$. On dira que \mathcal{W} est *faiblement saturée* si les axiomes suivants sont vérifiés.

FS1 Toutes les identités sont des éléments de \mathcal{W} .

FS2 Si dans un triangle commutatif de \mathcal{M} , deux des trois flèches sont dans \mathcal{W} , alors il en est de même de la dernière.

FS3 Si $i : X \longrightarrow Y$ et $r : Y \longrightarrow X$ sont deux flèches de \mathcal{M} , telles que $ri = 1_X$ et $ir \in \mathcal{W}$, alors r est un élément de \mathcal{W} .

Soient $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ la localisation de \mathcal{M} par \mathcal{W} , et $\gamma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$ le foncteur canonique (*i.e.* le couple (\mathcal{M}, γ) est un objet initial parmi les foncteurs de source \mathcal{M} envoyant les éléments de \mathcal{W} sur des isomorphismes). On dira que \mathcal{W} est *fortement saturé* si un morphisme de \mathcal{M} est un isomorphisme à condition et à condition seulement que son image par le foncteur γ soit un isomorphisme dans $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}$.

1.1.5. Si \mathcal{W} est un ensemble de flèches de \mathcal{Cat} , on dira qu'un foncteur $A \longrightarrow B$ entre petites catégories est une \mathcal{W} -équivalence (ou encore une *équivalence faible*) si c'est un élément de \mathcal{W} . Etant donné un triangle commutatif dans \mathcal{Cat} ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & C & \end{array},$$

on dira que f est un foncteur \mathcal{W} -*asphérique au-dessus de C* (ou plus simplement *asphérique au-dessus de C*), si pour tout objet c de C , la flèche f/c est une \mathcal{W} -équivalence. Dans le cas particulier où $B = C$ et où β est l'identité, on dira que f est \mathcal{W} -*asphérique* (ou encore *asphérique*). Enfin, on dira qu'une petite catégorie A est \mathcal{W} -*asphérique* (ou *asphérique*) si l'unique foncteur $A \longrightarrow *$ de A vers la catégorie ponctuelle est \mathcal{W} -asphérique.

DÉFINITION 1.1.6. Une partie \mathcal{W} de \mathbf{FlCat} est un *localisateur fondamental* si les axiomes suivants sont vérifiés.

LF1 L'ensemble de flèches \mathcal{W} est faiblement saturé.

LF2 Pour toute catégorie A admettant un objet final, l'unique flèche $A \longrightarrow *$ de A vers l'objet final de \mathcal{Cat} est une \mathcal{W} -équivalence.

LF3 Pour tout triangle commutatif de \mathcal{Cat} ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & C & \end{array},$$

si f est \mathcal{W} -asphérique au-dessus de C , alors f est une \mathcal{W} -équivalence.

REMARQUE 1.1.7. La notion de localisateur fondamental que nous avons adopté ici correspond à celle de localisateur fondamental fort dans [36].

Un exemple trivial de localisateur fondamental est l'ensemble \mathbf{FlCat} . En outre, toute intersection d'une famille de localisateurs fondamentaux est encore un localisateur fondamental. Par conséquent, si S est un ensemble de flèches de \mathcal{Cat} , on peut définir le *localisateur fondamental engendré par S* , que l'on notera $\mathcal{W}(S)$,

comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux qui contiennent S . On dira qu'un localisateur fondamental est *accessible* s'il est de la forme $\mathcal{W}(S)$ pour un petit ensemble S de flèches de Cat . Le *localisateur fondamental minimal* est le localisateur fondamental engendré par $\emptyset \subset \mathbf{FI}Cat$ (il est par définition accessible).

On fixe, pour la suite de cette section, un localisateur fondamental \mathcal{W} .

SORITES 1.1.8. *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (a) *Une petite catégorie A est asphérique si et seulement si le foncteur canonique $A \longrightarrow *$ est une équivalence faible.*
- (b) *Le produit de deux foncteurs asphériques est asphérique.*
- (c) *Soient $u : A \longrightarrow B$ et $v : B \longrightarrow C$ deux foncteurs composables entre petites catégories. Si u est asphérique, alors v est asphérique si et seulement si le foncteur composé $vu : A \longrightarrow C$ l'est.*
- (d) *Tout foncteur entre petites catégories admettant un adjoint à droite est asphérique. En particulier, toute équivalence de catégories est asphérique, et toute petite catégorie admettant un objet initial est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Voir [36, 2.4, 2.6, 2.8 et 2.9]. □

PROPOSITION 1.1.9. *Les \mathcal{W} -équivalences sont stables par sommes quelconques et par produits finis.*

DÉMONSTRATION. Voir [36, propositions 9.2 et 9.3]. □

PROPOSITION 1.1.10. *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de Cat . Il existe un diagramme commutatif (naturel en u)*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{t_A} & S(A) & \xrightarrow{s_A} & A^\circ \\ \downarrow u & & \downarrow S(u) & & \downarrow u^\circ \\ B & \xleftarrow{t_B} & S(B) & \xrightarrow{s_B} & B^\circ \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles. En particulier, u est une équivalence faible si et seulement si u° en est une.

DÉMONSTRATION. Voir [36, 2.17 et 2.19]. □

REMARQUE 1.1.11. La proposition ci-dessus permet de dualiser les notions considérées. Pour chaque foncteur entre petites catégories $f : A \longrightarrow B$, et chaque objet b de B , on note $b \setminus A = (A^\circ / b)^\circ$. Alors si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & & C \end{array}$$

est un triangle commutatif de Cat , on dit que f est *\mathcal{W} -coasphérique au-dessus de C* (ou plus simplement *coasphérique au-dessus de C*) si pour tout $c \in C$, le

foncteur induit $c \setminus f : c \setminus A \longrightarrow c \setminus B$ est une \mathcal{W} -équivalence. On s'aperçoit aussitôt qu'en vertu de la proposition précédente, f est coasphérique au-dessus de C si et seulement si f° est asphérique au-dessus de C° , et qu'alors f est une \mathcal{W} -équivalence. De même, on appelle foncteur \mathcal{W} -coasphérique (ou coasphérique) tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ tel que pour tout objet b de B , la catégorie $b \setminus A$ soit \mathcal{W} -asphérique, ou encore, de manière équivalente, tel que le foncteur $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ soit \mathcal{W} -asphérique. Un tel foncteur est toujours une \mathcal{W} -équivalence (c'est une spécialisation immédiate de l'assertion précédente). Dans [36], le théorème 9.10 donne plusieurs axiomatiques équivalentes de la notion de localisateur fondamental qui synthétisent bien ces phénomènes.

1.1.12. Soit A une petite catégorie. A chaque préfaisceau F sur A , on associe la petite catégorie A/F , dont les objets sont les couples

$$(a, u) \quad , \quad a \in \mathbf{Ob} A \quad \text{et} \quad u \in \mathbf{Hom}_{\widehat{A}}(a, F) \simeq F_a \quad ,$$

et les flèches $(a, u) \longrightarrow (a', u')$, les morphismes $f : a \longrightarrow a'$ de A telles que $u' f = u$. On remarque que si a est un objet de A (vu comme un préfaisceau représentable, on retrouve ainsi la catégorie des objets de A au-dessus de a (1.1.3). Cela définit le foncteur

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Cat} \quad , \quad F \longmapsto A/F \quad .$$

On peut montrer que ce dernier admet un adjoint à droite

$$i_A^* : \mathbf{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$$

(voir le corollaire A.1.15), défini par

$$(i_A^* C)_a = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A/a, C) \quad .$$

On définit un ensemble de flèches de \widehat{A} par

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1} \mathcal{W} \quad .$$

Un élément de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ sera appelé une \mathcal{W} -équivalence (ou encore une *équivalence faible* selon le contexte). On dira qu'une flèche $X \longrightarrow Y$ dans \widehat{A} est une \mathcal{W} -équivalence locale (ou encore une *équivalence faible locale*) si pour tout objet a de A , le foncteur induit

$$i_A(X \times a) \longrightarrow i_A(Y \times a)$$

est une \mathcal{W} -équivalence. Un préfaisceau X sur A sera dit \mathcal{W} -localement asphérique (ou *localement asphérique*) si l'unique flèche $X \longrightarrow *$ de X vers l'objet final de \widehat{A} est une \mathcal{W} -équivalence locale. On remarque immédiatement que toute équivalence faible locale est une équivalence faible, car pour tout préfaisceau X sur A , et pour tout objet a de A , la catégorie $(i_A X)/a$ s'identifie canoniquement à la catégorie $i_A(X \times a)$, ce qui permet d'appliquer l'axiome LF3 au triangle ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} A/X & \longrightarrow & A/Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

REMARQUE 1.1.13. Soient A une petite catégorie, et X un préfaisceau sur A . On a un isomorphisme de catégories $\widehat{A}/X \simeq \widehat{A/\overline{X}}$, et si \mathcal{U}_X désigne le foncteur d'oubli

$$\mathcal{U}_X : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A},$$

on vérifie l'égalité $i_{A/X} = i_A \mathcal{U}_X$. Il en résulte immédiatement qu'une flèche de \widehat{A}/X est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image dans \widehat{A} par le foncteur d'oubli en est une.

DÉFINITION 1.1.14. Une \mathcal{W} -catégorie test faible (ou une catégorie test faible) est une petite catégorie A telle que le morphisme d'adjonction

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\text{Cat}}$$

soit une \mathcal{W} -équivalence (*i.e.* telle que pour toute petite catégorie C , le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^* C \longrightarrow C$ soit une équivalence faible).

Une \mathcal{W} -catégorie test locale (ou une catégorie test locale) est une petite catégorie A telle que pour tout $a \in \text{Ob } A$, A/a soit une \mathcal{W} -catégorie test faible.

Une \mathcal{W} -catégorie test (ou une catégorie test) est une catégorie test locale qui est aussi une catégorie test faible.

REMARQUE 1.1.15. Si une petite catégorie A est une catégorie test faible, alors on a les inclusions

$$i_A \mathcal{W}_{\widehat{A}} \subset \mathcal{W} \text{ et } i_A^* \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}},$$

et le couple de foncteurs adjoints entre les catégories localisées $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A}$ et $\mathcal{W}^{-1} \text{Cat}$, induit par (i_A, i_A^*) , est formé de deux équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre (voir [36, 4.8 et 4.9]). On montrera ultérieurement (5.1.2) que tout localisateur fondamental est fortement saturé. Cela implique qu'une petite catégorie A est une catégorie test faible si et seulement si on a les inclusions ci-dessus, et si les foncteurs induits par i_A et i_A^* sur les catégories localisées sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

THÉORÈME 1.1.16 (Grothendieck [21]). *Soit A une petite catégorie. On note Δ_1 la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$. Les assertions qui suivent sont équivalentes.*

- (a) A est une catégorie test locale.
- (b) Pour tout objet X de \widehat{A} , la projection $X \times i_A^* \Delta_1 \longrightarrow X$ est une équivalence faible.
- (c) Pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^* C$ est localement asphérique.
- (d) Le préfaisceau $i_A^* \Delta_1$ est localement asphérique.
- (e) Pour toute équivalence faible u de Cat , $i_A^* u$ est une équivalence faible locale.

En outre, si l'une de ces conditions est vérifiée, alors A est une catégorie test si et seulement si elle est asphérique.

DÉMONSTRATION. Voir [36, propositions 3.4 et 6.3, et théorème 6.6] pour les équivalences de (a) à (d). Il est par ailleurs immédiat que (a) implique (e) et que (e) implique (c). \square

1.1.17. Soit $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur défini sur une petite catégorie A . On obtient alors un foncteur

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad ,$$

défini pour chaque petite catégorie C , et chaque objet a de A , par $i^*(C)(a) = \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(ia, C)$. Cela détermine un foncteur

$$i_A i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}at \quad .$$

On notera parfois par abus A/C la catégorie A/i^*C .

Supposons que pour tout objet a de A , la catégorie ia admette un objet final e_a . On définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$$

comme suit : si C est une petite catégorie, le foncteur

$$\alpha_C : A/C \longrightarrow C$$

est déterminé sur les objets par la formule $\alpha_C(a, u) = u(e_a)$ (en remarquant que par définition du préfaisceau i^*C , un objet de A/C est un couple (a, u) , où a est un objet de A , et u un foncteur $ia \longrightarrow C$), et si $f : (a, u) \longrightarrow (b, v)$ est une flèche de A/C , *i.e.* une flèche $f : a \longrightarrow b$ telle que $v \circ i(f) = u$, $\alpha_C(f) = v(i(f))(e_a) \longrightarrow e_b$.

DÉFINITION 1.1.18. Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que les catégories ia (où $a \in \text{Ob } A$) admettent un objet final. On dira que i est un \mathcal{W} -foncteur *test faible* (ou un *foncteur test faible*) si A est une catégorie test faible et si pour toute petite catégorie C , le foncteur $\alpha_C : A/i^*C \longrightarrow C$ est une équivalence faible, et que c'est un \mathcal{W} -foncteur *test local* (ou un *foncteur test local*), si A est une catégorie test locale et si pour tout objet a de A , la restriction de i à A/a est un foncteur test faible. Un foncteur test local défini sur une catégorie test sera appelé un \mathcal{W} -foncteur *test* (ou un *foncteur test*) si c'est en outre un foncteur test faible.

REMARQUE 1.1.19. La notion de foncteur test que nous avons adoptée ici est plus restrictive que celle développée dans [36].

PROPOSITION 1.1.20 (Grothendieck [21]). *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que les catégories ia , $a \in \text{Ob } A$, admettent un objet final. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *A est une catégorie test locale et i est un foncteur test local.*
- (b) *Pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau i^*C sur A est localement sphérique.*
- (c) *Le préfaisceau $i^*\Delta_1$ est localement sphérique.*
- (d) *Pour toute équivalence faible u de $\mathcal{C}at$, i^*u est une équivalence faible locale.*

En outre, si l'une de ces conditions est satisfaite, et si A est une catégorie test, alors i est un foncteur test.

DÉMONSTRATION. Voir [36, théorème 8.12] pour les équivalences de (a) à (c). Il est par ailleurs immédiat que (a) implique (d) et que (d) implique (b). \square

1.1.21. Un foncteur $u : A \longrightarrow B$ sera appelé une *immersion ouverte* (resp. une *immersion fermée*) si c'est une inclusion pleine, et si pour tout objet b de B , s'il existe un objet a de A , ainsi qu'une flèche $b \longrightarrow a$ (resp. $a \longrightarrow b$) dans B , alors $b \in \text{Ob } A$. On dira dans ces conditions que A est un *crible* (resp. un *cocrible*) de B .

Il est immédiat que si $u : A \longrightarrow B$ est un foncteur, c'est une immersion ouverte si et seulement si le foncteur opposé $u^\circ : A^\circ \longrightarrow B^\circ$ est une immersion fermée.

Si B est une catégorie, et si A est une sous-catégorie pleine, on notera $B \setminus A$ la sous-catégorie pleine de B dont les objets sont les éléments de $\text{Ob } B \setminus \text{Ob } A$. Si $j : U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte, alors l'inclusion $i : X \setminus U \longrightarrow X$ est une immersion fermée, et dualement, si $i : F \longrightarrow X$ est une immersion fermée, l'inclusion complémentaire $j : X \setminus F \longrightarrow X$ est une immersion ouverte.

LEMME 1.1.22. *Soit $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte, et A une catégorie admettant un objet final ω . Alors pour tout foncteur $u : U \longrightarrow A$, il existe un unique foncteur $x : X \longrightarrow A$, tel que $x \circ j = u$, et dont la restriction au cocrible $X \setminus U$ soit le foncteur constant de valeur ω . \square*

1.1.23. On rappelle que si $i : A \longrightarrow B$ et $p : X \longrightarrow Y$ sont deux flèches d'une catégorie \mathcal{C} , on dit que i (resp. p) *vérifie la propriété de relèvement à gauche* (resp. *à droite*) *relativement à p* (resp. *relativement à i*), si pour tout carré commutatif du type suivant dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array} ,$$

il existe une flèche $l : B \longrightarrow X$ telle que $l \circ i = a$ et $p \circ l = b$.

Lorsque A est une petite catégorie, on dira qu'une flèche $p : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} est une *fibration triviale* si elle vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout monomorphisme de \widehat{A} (i.e. si (X, p) est un objet injectif de la catégorie \widehat{A}/Y). Il est remarquable que les fibrations triviales sont (entre autre) stables par composition et par changement de base. En particulier, si I est un objet injectif de \widehat{A} , pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times I \longrightarrow X$ est une fibration triviale.

LEMME 1.1.24. *Soient A une petite catégorie, et $i : A \longrightarrow \text{Cat}$ un foncteur. On suppose que le foncteur $i_! : \widehat{A} \longrightarrow \text{Cat}$ envoie les monomorphismes de \widehat{A} sur des immersions ouvertes. Alors l'adjoint à droite de $i_!$, $i^* : \text{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$, envoie les petites catégories admettant un objet final sur des objets injectifs de \widehat{A} .*

DÉMONSTRATION. Le lemme 1.1.22 implique que si X est une petite catégorie admettant un objet final, le foncteur canonique $p : X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux immersions ouvertes, ce qui permet de conclure par un argument standard d'adjonction. \square

EXEMPLE 1.1.25. Soit A une petite catégorie. Si i désigne le foncteur

$$A \longrightarrow \text{Cat} \quad , \quad a \longmapsto A/a,$$

alors le foncteur $i_!$ est simplement le foncteur

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{Cat}$$

(cela résulte du corollaire A.1.15), et il est immédiat que ce dernier envoie les monomorphismes sur des immersions ouvertes. Le lemme ci-dessus implique donc que le foncteur

$$i_A^* : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{A}$$

envoie les catégories admettant un objet final sur des objets injectifs de \widehat{A} .

DÉFINITION 1.1.26. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un ensemble de flèches de \widehat{A} , et soit X un préfaisceau sur A . Un \mathcal{W} -cylindre de X est la donnée d'un quadruplet $(XI, \partial_0, \partial_1, \sigma)$, où XI est un préfaisceau sur A , et $\partial_0, \partial_1 : X \longrightarrow XI$, $\sigma : XI \longrightarrow X$ des flèches de \widehat{A} , tel que $\sigma \partial_e = 1_X$, $e = 0, 1$, tel que la flèche $(\partial_0, \partial_1) : X \amalg X \longrightarrow XI$ soit un monomorphisme et tel que σ soit un élément de \mathcal{W} .

LEMME 1.1.27. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} une partie faiblement saturée de $\text{Fl } \widehat{A}$. On appellera *équivalences faibles* les éléments de \mathcal{W} . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Toute fibration triviale est une équivalence faible.
- (b) Pour tout préfaisceau X sur A , et pour toute petite catégorie C admettant un objet final, la projection $X \times i_A^* C \longrightarrow X$ est une équivalence faible.
- (c) Pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times i_A^* \Delta_1 \longrightarrow X$ est une équivalence faible.
- (d) Tout objet de \widehat{A} admet un \mathcal{W} -cylindre.

DÉMONSTRATION. Commençons par l'implication (a) \Rightarrow (b). Si C est une petite catégorie admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^* C$ est un objet injectif (cf. exemple 1.1.25). Comme les fibrations triviales sont stables par changement de base, on en conclut que pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times i_A^* C \longrightarrow X$ est une fibration triviale.

L'implication (b) \Rightarrow (c) est immédiate, vu que la catégorie Δ_1 admet un objet final.

Pour montrer (c) \Rightarrow (d), il suffit de remarquer que comme les catégories A/a sont connexes (pour $a \in \text{Ob } A$), le foncteur i_A^* commute aux sommes, et il commute aussi aux produits fibrés, puisqu'il admet un adjoint à gauche, ce qui montre qu'il respecte les monomorphismes. On en déduit que le morphisme $i_A^*(\delta_1^1, \delta_1^0)$ est un monomorphisme (où δ_1^i est l'inclusion $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ qui ne prend pas la valeur i), et donc pour tout préfaisceau X sur A , on obtient un \mathcal{W} -cylindre $(X \times i_A^* \Delta_1, 1_X \times i_A^* \delta_1^1, 1_X \times i_A^* \delta_1^0, 1_X \times i_A^* \sigma_0^0)$ (où on a noté σ_0^0 la flèche $\Delta_1 \longrightarrow \Delta_0$).

Il reste donc à montrer (d) \Rightarrow (a). On considère une fibration triviale $p : X \longrightarrow Y$, et on commence par remarquer que le carré suivant admet un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array} \quad ,$$

ce qui implique que p admet une section $s : Y \longrightarrow X$. On choisit alors un \mathcal{W} -cylindre $(XI, \partial_0, \partial_1, \sigma)$ de X , et on obtient le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{(1_X, sp)} & X \\ (\partial_0, \partial_1) \downarrow & & \downarrow p \\ XI & \xrightarrow{p\sigma} & Y \end{array} .$$

Ce dernier admet un relèvement $h : XI \longrightarrow X$, puisque (∂_0, ∂_1) est un monomorphisme. On a donc les formules $h\partial_0 = 1_X$ et $h\partial_1 = sp$. Or les flèches ∂_e sont des équivalences faibles pour $e = 0, 1$, ainsi que 1_X et par suite, h est une équivalence faible. Par conséquent, sp est une équivalence faible, et comme $ps = 1_Y$, on en déduit que p est une équivalence faible (en vertu de l'axiome FS3). \square

EXEMPLE 1.1.28. Soit A une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés finis admettant un élément maximal (resp. à la catégorie des catégories finies admettant un objet final). On note $i : A \longrightarrow \mathcal{Cat}$ l'inclusion (pleine). Alors A est une catégorie test, et i est un foncteur test. En effet, on peut supposer que Δ_1 est un objet de A , et comme $\Delta_1 = i^*\Delta_1$, pour tout objet a de A , $a \times i^*\Delta_1 \longrightarrow a$ est une équivalence faible, puisque c'est une flèche entre préfaisceaux représentables. Autrement-dit, $i^*\Delta_1$ est localement asphérique, et comme A est asphérique (elle admet un objet final), l'assertion résulte de la proposition 1.1.20.

On peut montrer de même que toute petite catégorie équivalente à celle des ensembles ordonnés finis (resp. des catégories finies) non-vides est une catégorie test (l'inclusion dans \mathcal{Cat} n'étant alors plus un foncteur test pour des raisons évidentes).

EXEMPLE 1.1.29. On rappelle que la *catégorie des simplexes* est la catégorie Δ , dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_n = \{0, \dots, n\} \quad , n \geq 0 \quad ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, et dont les morphismes sont les applications croissantes. Comme la catégorie \mathcal{Ord} des petits ensembles ordonnés est canoniquement une sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} , l'inclusion de Δ dans \mathcal{Ord} est pleine, on obtient une inclusion pleine canonique $i : \Delta \longrightarrow \mathcal{Cat}$. On note $N = i^*$ le *foncteur nerf*.

La catégorie des simplexes Δ est une catégorie test, et l'inclusion canonique $i : \Delta \longrightarrow \mathcal{Cat}$ est un foncteur test.

DÉMONSTRATION. Soit C une petite catégorie admettant un objet final e . On va montrer que le foncteur

$$\alpha_C : i_\Delta N C \longrightarrow C$$

est une équivalence faible, ou encore, que la catégorie Δ/C est asphérique. On note I la catégorie représentée par le graphe

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & 2 & \end{array} ,$$

et $d^j : * \longrightarrow I$ le foncteur qui pointe l'objet j pour $j = 0, 1, 2$. On désigne par $s : \Delta_0 \longrightarrow C$ le foncteur qui pointe l'objet e de C , et on note $p : \Delta/C \longrightarrow \Delta/C$ le foncteur $\Delta/C \longrightarrow * \longrightarrow \Delta/C$, où $* \longrightarrow \Delta/C$ pointe l'objet (Δ_0, s) . On a une inclusion canonique $\phi : \alpha_C^{-1}(e) \longrightarrow \Delta/C$, et on définit un foncteur $\psi : \Delta/C \longrightarrow \alpha_C^{-1}(e)$ de la manière suivante : si (Δ_n, u) est un objet de Δ/C , $\phi(\Delta_n, u) = (\Delta_{n+1}, u^+)$, où $u^+ : \Delta_{n+1} \longrightarrow C$ est le foncteur donné par $u^+(k) = u(k)$ si $k < n + 1$, et $u^+(n + 1) = e$, et si $f : (\Delta_m, u) \longrightarrow (\Delta_n, v)$ est une flèche de Δ/C , $\phi(f)$ est l'application croissante $\phi(f) : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_{n+1}$, $k \longmapsto f(k)$ si $k < n + 1$, et $n + 1 \longmapsto m + 1$. On remarque que les incusions strictement croissantes $\delta_{n+1}^{n+1} : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n+1}$, déterminées comme celles qui ne prennent pas la valeur $n + 1$, définissent un morphisme de foncteurs $\tau_{02} : 1_{\Delta/C} \longrightarrow \psi\phi$. D'autre part, il vient un morphisme de foncteurs $\tau_{12} : p \longrightarrow \psi\phi$, déterminé pour chaque objet (Δ_n, u) de Δ/C , par la flèche $(\Delta_0, s) \longrightarrow (\Delta_{n+1}, u^+)$, elle même définie par l'application $\Delta_0 \longrightarrow \Delta_{n+1}$ qui envoie 0 sur $n + 1$. On définit alors un foncteur $h : I \times \Delta/C \longrightarrow \Delta/C$ à l'aide de τ_{02} et de τ_{12} , tel que $h(d^0 \times 1_{\Delta/C}) = 1_{\Delta/C}$, et $h(d^1 \times 1_{\Delta/C}) = p$. D'autre part, la catégorie I est asphérique, puisqu'elle admet un objet final, et les foncteurs $d^j \times 1_{\Delta/C}$ sont des équivalences faibles, puisque ce sont des sections de l'équivalence faible $I \times \Delta/C \longrightarrow \Delta/C$. On en déduit que h est une équivalence faible, et donc que p en est une aussi. Il résulte donc de l'axiome FS3 que la catégorie Δ/C est asphérique. En particulier, pour toute paire d'entiers $m, n \geq 0$, la catégorie $\Delta/(\Delta_m \times \Delta_n)$ est asphérique, et par conséquent, $\Delta_1 = \mathbb{N} \Delta_1$ est un préfaisceau sur Δ qui est localement asphérique. Cela permet de conclure en vertu de la proposition ci-dessus, une fois remarqué que Δ est une catégorie asphérique, puisqu'elle admet un objet final (à savoir Δ_0). \square

2. Éléments d'intégration

Dans cette section, on fixe une fois pour toute un localisateur fondamental \mathcal{W} .

1.2.1. Nous aurons recours ici à la notion de catégorie (co-)fibrée, pour laquelle nous renvoyons à [20, exposé VI]. Nous commençons par en étudier les propriétés homotopiques grâce aux notions de morphisme propre et de morphisme lisse dans \mathcal{Cat} , dégagées par Grothendieck. Nous adopterons la terminologie de [36], en dépit des risques de confusions avec le lexique homotopique usuel : un foncteur $u : A \longrightarrow B$ sera appelé une *fibration* (resp. une *cofibration*) s'il fait de A une catégorie fibrée (resp. cofibrée) au-dessus de B .

Si A est une catégorie, et si $a \in \mathbf{Ob} A$, on note $a : * \longrightarrow A$ le foncteur qui pointe l'objet a . Si $p : X \longrightarrow Y$ est un foncteur, et si $y \in \mathbf{Ob} Y$, on note X_y la fibre de p au-dessus de y , *i.e.* la catégorie définie par le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ * & \xrightarrow{y} & Y \end{array} .$$

On a une inclusion pleine canonique $X_y \longrightarrow X/y$ définie explicitement par $x \longmapsto (x, 1_y)$.

DÉFINITION 1.2.2. Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}at$ est \mathcal{W} -propre, ou plus simplement propre (resp. \mathcal{W} -lisse, ou plus simplement lisse) si pour tout objet y de Y , le morphisme canonique

$$X_y \longrightarrow X/y \quad (\text{resp. } X_y \longrightarrow y \setminus X)$$

est \mathcal{W} -coasphérique (resp. \mathcal{W} -asphérique).

REMARQUE 1.2.3. Il résulte de la proposition 1.1.10 qu'un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ est propre si et seulement si $p^\circ : X^\circ \longrightarrow Y^\circ$ est lisse. Les énoncés ci-dessous, bien que ne mentionnant que les morphismes propres, induisent donc directement des énoncés analogues pour les morphismes lisses.

EXEMPLE 1.2.4. Toute cofibration est propre, et toute fibration est lisse. En particulier, toute immersion fermée est propre, et toute immersion ouverte est lisse. En effet, si $p : X \longrightarrow Y$ est une cofibration, alors pour tout objet y de Y , l'inclusion $X_y \longrightarrow X/y$ admet un adjoint à gauche [36, lemme 2.13] et donc, en vertu de la proposition 1.1.10 et de 1.1.8, (d), est coasphérique.

THÉORÈME 1.2.5 (Grothendieck). Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) p est propre.
- (b) Pour tout objet x de X , les fibres du morphisme

$$x \setminus X \longrightarrow y \setminus Y, \quad y = p(x)$$

sont asphériques.

- (c) Pour tout morphisme $\Delta_1 \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}at$, si on forme les carrés cartésiens,

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y \{1\} & \longrightarrow & X \times_Y \Delta_1 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ \{1\} & \longrightarrow & \Delta_1 & \longrightarrow & Y \end{array},$$

la flèche $X \times_Y \{1\} \longrightarrow X \times_Y \Delta_1$ est coasphérique.

- (d) Pour toutes flèches $v : Y' \longrightarrow Y$ et $v' : Y'' \longrightarrow Y'$ de $\mathcal{C}at$, si on forme les carrés cartésiens,

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y Y'' & \xrightarrow{u'} & X \times_Y Y' & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ Y'' & \xrightarrow{v'} & Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array},$$

et si v' est coasphérique, il en est de même de u' .

En outre, si p est propre, alors pour tout objet x de X , le morphisme

$$x \setminus X \longrightarrow y \setminus Y, \quad y = p(x)$$

est propre.

DÉMONSTRATION. Voir [36, proposition 12.3 et théorème 12.12] pour la démonstration des équivalences, et [36, lemme 12.6] pour ce qui est de la seconde assertion. \square

COROLLAIRE 1.2.6. *Les morphismes propres (resp. lisse) sont stables par composition et par changement de base.*

DÉMONSTRATION. Voir [36, corollaire 12.4 et proposition 12.8]. \square

PROPOSITION 1.2.7. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & Z \end{array}$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$. On suppose que p et q sont des morphismes propres. Si pour tout objet z de Z , le foncteur induit sur les fibres $X_z \rightarrow Y_z$ est une équivalence faible, alors u est asphérique au-dessus de Z . En particulier, u est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION. Voir [36, proposition 12.13]. \square

COROLLAIRE 1.2.8. *Les morphismes propres (resp. lisses) à fibres asphériques sont des équivalences faibles universelles (i.e. restent des équivalences faibles après tout changement de base).*

1.2.9. Soit A une petite catégorie. Une \mathcal{W} -équivalence étagée (ou une équivalence faible) de la catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathcal{C}at)$ des foncteurs de A vers $\mathcal{C}at$ est un morphisme $F \rightarrow G$ tel que pour tout objet a de A , le foncteur $F_a \rightarrow G_a$ soit une \mathcal{W} -équivalence.

Soit $F : A \rightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. On lui associe une catégorie cofibrée $\int F$ au-dessus de A comme suit. La catégorie $\int F$ a pour objets les couples (a, x) , où $a \in \mathbf{Ob} A$ et $x \in \mathbf{Ob} F_a$, et pour flèches $(a, x) \rightarrow (a', x')$ les couples (α, ξ) , où $\alpha \in \mathbf{Hom}_A(a, a')$ et $\xi \in \mathbf{Hom}_{F_{a'}}(F_\alpha(x), x')$. Si $(\alpha, \xi) : (a, x) \rightarrow (a', x')$ et $(\alpha', \xi') : (a', x') \rightarrow (a'', x'')$ sont deux morphismes composables de $\int F$, leur composition est déterminée par la formule

$$(\alpha', \xi') \circ (\alpha, \xi) = (\alpha' \circ \alpha, \xi' \circ F_{\alpha'}(\xi)) .$$

La cofibration $\theta_F : \int F \rightarrow A$ est simplement le foncteur de projection $(a, x) \mapsto a$. Par exemple si F est un foncteur constant de valeur C , alors $\int F = A \times C$ et θ_F est la projection évidente. On obtient ainsi un *foncteur d'intégration*

$$\int_A = \int : \underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \rightarrow \mathcal{C}at .$$

Il se factorise en fait par la catégorie $\mathcal{C}at/A$. En outre, il envoie tout les morphismes de $\underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathcal{C}at)$ sur des morphismes cocartésiens. D'autre part, si $\varinjlim F$ désigne la limite inductive de F , et si on note pour chaque objet a de A , $\varepsilon_a : F_a \rightarrow \varinjlim F$, les morphismes canoniques, on peut définir un morphisme, fonctoriel en F ,

$$K(F) : \int F \rightarrow \varinjlim F ,$$

par $K(F)(a, x) = \varepsilon_a(x)$. Ces constructions peuvent être vues comme des solutions d'un problème universel adéquat (voir [36, 10.3 et 10.4]).

Si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur image inverse $u^* : \underline{\mathbf{Hom}}(B, \mathbf{Cat}) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathbf{Cat})$, défini par $F \mapsto F \circ u$. On notera parfois $F|_A$ pour u^*F . On vérifie facilement que pour tout foncteur $F : B \rightarrow \mathbf{Cat}$, on a un carré cartésien canonique dans \mathbf{Cat} :

$$(1.2.9.1) \quad \begin{array}{ccc} \int u^*F & \longrightarrow & \int F \\ \theta_{u^*F} \downarrow & & \downarrow \theta_F \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array} .$$

En particulier, pour tout objet b de B , on a deux isomorphismes canoniques

$$(\int F)_b \simeq F_b \text{ et } (\int F)/b \simeq \int F|_{B/b} .$$

On en déduit que l'inclusion pleine $F_b \rightarrow (\int F)/b$ est asphérique. Cette dernière constatation mène directement à l'énoncé suivant.

PROPOSITION 1.2.10. *Pour toute petite catégorie A , le foncteur*

$$\int : \underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

respecte les équivalences faibles.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.2.7 et du carré cartésien (1.2.9.1) (dans le cas où A est la catégorie ponctuelle). \square

1.2.11. On a vu que le foncteur d'intégration $F \mapsto \int F$ correspond à la notion de foncteur covariant. Duale, si A est une petite catégorie, et si F est un foncteur de A° vers \mathbf{Cat} , on définit une fibration $\zeta_F : \nabla F \rightarrow A$ par

$$\nabla F = (\int F^\circ)^\circ \text{ et } \zeta_F = (\theta_{F^\circ})^\circ ,$$

où F° désigne le foncteur $a \mapsto (F_a)^\circ$. Cela définit ainsi un *foncteur de cointégration*

$$\nabla_A = \nabla : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

qui respecte les équivalences faibles (propositions 1.1.10 et 1.2.10). Par exemple dans le cas où F est un préfaisceau d'ensembles (vus comme des catégories discrètes) sur A , $\nabla F = i_A F$.

Les opérations d'intégration et de cointégration sont compatibles dans le sens suivant. Soient A et B deux petites catégories. On considère un foncteur

$$F : A^\circ \times B \longrightarrow \mathbf{Cat} ,$$

ce qui définit en (co-)intégrant argument par argument deux foncteurs

$$\int F = \int_B F : A^\circ \longrightarrow \mathbf{Cat} \quad \text{et} \quad \nabla F = \nabla_A F : B \longrightarrow \mathbf{Cat} .$$

On a en outre deux morphismes de foncteurs vers les foncteurs constants correspondants

$$\theta_F : \int_B F \longrightarrow B \quad \text{et} \quad \zeta_F : \nabla_A F \longrightarrow A ,$$

ce qui induit deux foncteurs canoniques,

$$\nabla_A \theta_F : \nabla_A \int_B F \longrightarrow A \times B \quad \text{et} \quad \int_B \zeta_F : \int_B \nabla_A F \longrightarrow B \times A .$$

Nous laissons au lecteur le calcul explicite donnant lieu à la conclusion suivante.

LEMME 1.2.12. *Avec les notations ci-dessus, l'isomorphisme d'échange $A \times B \simeq B \times A$ identifie canoniquement les catégories $\nabla_A \int_B F$ et $\int_B \nabla_A F$ au-dessus de $A \times B$.*

NOTATIONS 1.2.13. On note $\pi_F : \int \nabla F \longrightarrow B$ et $\varpi_F : \int \nabla F \longrightarrow A$ les morphismes obtenus en composant avec les projections $B \times A \longrightarrow B$ et $B \times A \longrightarrow A$ respectivement. On remarque par ailleurs que π_F est une cofibration, et que ϖ_F est une fibration.

1.2.14. On fixe à présent une petite catégorie A .

Pour chaque petite catégorie B , on note $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B)$ la localisation de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B, \mathcal{C}at)$ par les \mathcal{W} -équivalences étagées (1.2.9). Dans le cas où A est la catégorie ponctuelle, on note $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(B)$ cette catégorie, et lorsque B est la catégorie ponctuelle, on note $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}} = \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(*)$. On pose enfin $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(*)$.

Si $u : B \longrightarrow B'$ est un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur image inverse u^* de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B', \mathcal{C}at)$ vers $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B, \mathcal{C}at)$ qui respecte les \mathcal{W} -équivalences. On en déduit un foncteur

$$u^* : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B') \longrightarrow \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B) .$$

THÉORÈME 1.2.15 (Grothendieck [21]). *Pour tout foncteur entre petites catégories $u : B \longrightarrow B'$, le foncteur image inverse homotopique*

$$u^* : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B') \longrightarrow \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B') .$$

DÉMONSTRATION. Voir [36, théorème 11.7]. □

1.2.16. Nous aurons besoin par la suite d'une description explicite du foncteur $\mathbf{L}u_!$, légèrement différente en général de celle définie dans [36]. Pour chaque petite catégorie C , on définit un foncteur

$$\Theta_C : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at/C) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times C, \mathcal{C}at)$$

par $\Theta_C(F, v : F \longrightarrow C) = ((a, c) \longmapsto F_a/c)$, (C désignant aussi le foncteur constant sur A° de valeur C). Cela permet de construire un foncteur

$$\underline{u}_! : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B', \mathcal{C}at)$$

par $\underline{u}_! F = \Theta_B(\int F, u \circ \theta_F)$, lequel respecte les \mathcal{W} -équivalences étagées. En effet, dans le cas où A est la catégorie ponctuelle, cela résulte de [36, lemme 11.5], et en général, si $F \longrightarrow G$ est une équivalence faible de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ \times B, \mathcal{C}at)$, alors pour tout objet a de A , le morphisme $(\underline{u}_! F)_a \longrightarrow (\underline{u}_! G)_a$ s'identifie au morphisme $\underline{u}_!(F_a) \longrightarrow \underline{u}_!(G_a)$, ce qui nous ramène au cas de la catégorie ponctuelle. D'une manière générale, les constructions et les arguments de la démonstration du théorème 11.7 dans [36] sont fonctoriels, et donc montrent que le foncteur induit par $\underline{u}_!$ sur les catégories localisées est l'adjoint à gauche escompté.

NOTATIONS 1.2.17. Si B est une petite catégorie, on note $p_B : B \longrightarrow *$ le foncteur vers la catégorie ponctuelle, et on note

$$\mathbb{L} \underline{\lim} = \mathbb{L} \underline{\lim}_{\rightarrow B} : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B) \longrightarrow \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}$$

le foncteur $\mathbb{L}p_{B!}$. En vertu de ce qui précède, c'est le foncteur induit par le foncteur

$$\begin{aligned} \int = \underline{p}_{B!} : \mathbf{Hom}(A^\circ \times B, \mathcal{C}at) &\longrightarrow \mathbf{Hom}(A^\circ, \mathcal{C}at) \\ F &\longmapsto (a \longmapsto \int F_a) . \end{aligned}$$

1.2.18. On définit un objet $\mathbf{dis h}_A$ de $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(A)$ comme le foncteur de $A^\circ \times A$ vers $\mathcal{C}at$ qui, à un couple d'objets (a, b) de A , associe l'ensemble $\mathbf{Hom}_A(a, b)$, vu comme une catégorie discrète. Cet objet engendre $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}$ dans le sens suivant.

THÉORÈME 1.2.19. *Pour toute petite catégorie X , et pour tout objet F de la catégorie homotopique $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(X)$, il existe un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathbb{L}\pi_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A) \xrightarrow{\sim} F .$$

DÉMONSTRATION. Soit F un objet de $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(X)$, i.e. un simple foncteur $F : A^\circ \times X \longrightarrow \mathcal{C}at$. On rappelle que le foncteur $\underline{\pi}_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A) : A^\circ \times X \longrightarrow \mathcal{C}at$ est défini par la formule suivante (où $(a, x) \in \mathbf{Ob}(A^\circ \times X)$, et où on a identifié les catégories A°/a et $(a \setminus A)^\circ$).

$$\left(\underline{\pi}_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A)\right)_{(a, x)} = \left(\int (\varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A))_a\right) / x \simeq a \setminus \int \nabla F / x \simeq \nabla \int F|_{(a \setminus A)^\circ \times X/x}$$

Soit (a, x) un objet de $A^\circ \times X$. On définit un foncteur

$$\varrho(F)_{(a, x)} : \left(\underline{\pi}_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A)\right)_{(a, x)} \longrightarrow F_{(a, x)}$$

comme suit. Un objet de $\left(\underline{\pi}_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A)\right)_{(a, x)}$ est quintuplet $(a', \alpha : a \longrightarrow a', x', \xi : x' \longrightarrow x, y)$, où α est une flèche de A , ξ une flèche de X , et y un objet de $F_{(a', x')}$, et une flèche

$$(a', \alpha : a \longrightarrow a', x', \xi : x' \longrightarrow x, y) \longrightarrow (a'', \alpha' : a \longrightarrow a'', x'', \xi' : x'' \longrightarrow x, y')$$

est un triplet (ϕ, ψ, f) , où $\phi : a' \longrightarrow a''$ est une flèche de A telle que $\phi\alpha = \alpha'$, $\psi : x' \longrightarrow x''$ est une flèche de X telle que $\xi'\psi = \xi$, et $f : F_{(a', x')} \longrightarrow F_{(a'', x'')}$ est une flèche de $F_{(a', x'')}$. On pose ainsi

$$\begin{aligned} \varrho(F)_{(a, x)}(a', \alpha : a \longrightarrow a', x', \xi : x' \longrightarrow x, y) &= F_{(\alpha, \xi)}(y) && \text{sur les objets,} \\ \varrho(F)_{(a, x)}(\phi, \psi, f) &= F_{(\alpha, \xi')}(f) && \text{sur les flèches.} \end{aligned}$$

On vérifie que cela définit un morphisme (naturel en F)

$$\varrho(F) : \underline{\pi}_{F!} \varpi_F^*(\mathbf{dis h}_A) \longrightarrow F$$

dans la catégorie $\mathbf{Hom}(A^\circ \times X, \mathcal{C}at)$. Pour conclure, il suffit à présent de montrer que c'est une \mathcal{W} -équivalence argument par argument. Or on a les carrés cartésiens

suivants, pour $(a, x) \in \mathbf{Ob}(A^\circ \times X)$,

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{(a,x)} & \xrightarrow{i(F,a,x)} & \int F_a|_{X/x} & \xrightarrow{j(F,a,x)} & \nabla \int F|_{(a \setminus A)^\circ \times X/x} \\
 \downarrow & & \downarrow \theta_{F_a|_{X/x}} & & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{(x, 1_x)} & X/x & \xrightarrow{(a, 1_a) \times 1_{X/x}} & a \setminus A \times X/x \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 & & * & \xrightarrow{(a, 1_a)} & a \setminus A
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \curvearrowright \\
 \varpi_{F|_{(a \setminus A)^\circ \times X/x}}
 \end{array}$$

D'autre part, comme $\varpi_{F|_{(a \setminus A)^\circ \times X/x}}$ est une fibration, le foncteur $j(F, a, x)$ admet un adjoint à droite, et donc est asphérique (1.1.8, (d)), et dualement, vu que $\theta_{F_a|_{X/x}}$ est une cofibration, le foncteur $i(F, a, x)$ admet un adjoint à gauche, ce qui implique qu'il est coasphérique. Il résulte de tout ceci que le foncteur

$$F_{(a,x)} \longrightarrow \nabla \int F|_{(a \setminus A)^\circ \times X/x}$$

est une \mathcal{W} -équivalence. On vérifie enfin que ce dernier est une section de $\varrho(F)_{(a,x)}$, ce qui achève la démonstration. \square

3. Induction aux préfaisceaux

On fixe un localisateur fondamental \mathcal{W} ainsi qu'une petite catégorie A .

LEMME 1.3.1. Soit I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur. Alors le foncteur canonique

$$K(i_A F) : \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A \varinjlim F$$

est une fibration.

En outre, si $s = (a, s : a \longrightarrow \varinjlim F)$ est un objet de $i_A \varinjlim F$, et si $(i_A F)_s$ désigne le foncteur de I vers \mathcal{Cat} déterminé par $i \longmapsto (i_A F_i)_s$, on a un isomorphisme canonique

$$\int (i_A F)_s \simeq (\int i_A F)_s .$$

DÉMONSTRATION. On peut voir F comme un foncteur de $I \times A^\circ$ vers \mathcal{Cat} (toujours en considérant les ensembles comme des catégories discrètes), et on peut considérer $\varinjlim F$ comme un foncteur constant sur I à valeurs dans \widehat{A} . On a alors un morphisme canonique $F \longrightarrow \varinjlim F$. Quitte à remplacer A par $A/\varinjlim F$, on peut ainsi supposer que $\varinjlim F$ est l'objet final de \widehat{A} . Or on a l'identification $i_A F = \nabla F$, par laquelle le foncteur $K(i_A F)$ correspond au foncteur composé de $\int \zeta_F$ et de la projection de $I \times A$ vers A . Le lemme résulte donc du lemme 1.2.12 et du carré cartésien (1.2.9.1). \square

PROPOSITION 1.3.2. *Soit X un préfaisceau sur A . On définit un foncteur ρ_X de A vers \widehat{A} par $a \mapsto X \times a$. Si X désigne aussi le foncteur constant sur A de valeur X , on a un morphisme de foncteurs $\rho_X \rightarrow X$ qui induit un isomorphisme canonique $\varinjlim \rho_X \rightarrow X$. On obtient ainsi un morphisme canonique dans Cat*

$$K(i_A \rho_X) : \int i_A \rho_X \longrightarrow i_A X = A/X .$$

Ce foncteur est une fibration dont les fibres sont asphériques. En particulier, c'est une \mathcal{W} -équivalence universelle.

DÉMONSTRATION. On sait déjà grâce au lemme ci-dessus qu'il s'agit d'une fibration. Il suffit donc de montrer que ses fibres sont asphériques. Or si (a, k) est un objet de A/X , i.e. $a \in \text{Ob } A$ et $k \in \text{Hom}_{\widehat{A}}(a, X)$, alors

$$(\int i_A \rho_X)_{(a,k)} \simeq a \setminus A$$

admet un objet initial, ce qui prouve l'assertion. \square

COROLLAIRE 1.3.3. *Avec les hypothèses et les notations de 1.3.2, pour tout objet a de A , le foncteur induit sur les fibres au-dessus de a ,*

$$\int (\text{dis } \rho_X)_a = (\int i_A \rho_X)_a \longrightarrow (A/X)_a = \text{dis } X_a ,$$

($\text{dis } Y$ désignant pour chaque préfaisceau d'ensembles Y sur A le préfaisceau en catégories discrètes associé), est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉMONSTRATION. Cela résulte aussitôt du fait que $K(i_A \rho_X)$ est une équivalence faible universelle. \square

REMARQUE 1.3.4. L'énoncé ci-dessus est un analogue en termes de préfaisceaux du théorème 1.2.19.

PROPOSITION 1.3.5 (Grothendieck [21]). *Soient I une petite catégorie, et F un foncteur de I vers \widehat{A} . Alors les fibres du foncteur canonique*

$$K(i_A F) : \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A \varinjlim F$$

sont asphériques (et donc $K(i_A F)$ est coasphérique) dans les cas suivants.

1. *I est l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 1'\}$, et la flèche $F_0 \rightarrow F_1$ est un monomorphisme.*
2. *I est un ensemble bien ordonné, et pour tous $i < i'$ dans I , la flèche $F_i \rightarrow F_{i'}$ est un monomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Voir [36, propositions 10.14 et 10.17]. \square

DÉFINITION 1.3.6. Soient \mathcal{C} une catégorie, et \mathcal{F} un ensemble de flèches de \mathcal{C} . On dira que \mathcal{F} est *stable par images directes* (resp. *stable par compositions transfinies*), si pour tout carré cocartésien dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & V \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{j} & Z \end{array} ,$$

si i est un élément de \mathcal{F} , alors il en est de même de j (resp. si I est un ensemble bien ordonné, d'élément initial 0, et $X : I \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur tels que pour tout $i \in I$, $i > 0$, le morphisme $\varinjlim_{j < i} X(j) \longrightarrow X(i)$ soit un élément de \mathcal{F} , alors le morphisme composé transfini $X(0) \longrightarrow \varinjlim X$ est un élément de \mathcal{F} .

REMARQUE 1.3.7. Dans une catégorie admettant des sommes, toute somme s'écrit comme un composé transfini d'images directes. On en déduit que tout ensemble de flèches stable par compositions transfinies et par images directes est aussi stable par sommes.

COROLLAIRE 1.3.8. *Pour toute petite catégorie A , la classe des monomorphismes de \widehat{A} qui sont des éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est stable par images directes et par compositions transfinies.*

DÉMONSTRATION. Voir [36, corollaires 10.15 et 10.19]. \square

Nous introduisons dès à présent la notion suivante, laquelle permet de synthétiser les propriétés formelles vérifiées par les \mathcal{W} -équivalences dans les catégories de préfaisceaux sur une catégorie test locale.

DÉFINITION 1.3.9. Soit A une petite catégorie. Un A -localisateur est un ensemble de flèches \mathcal{W} de \widehat{A} satisfaisant les axiomes suivants.

- L1 Si dans un triangle commutatif de \widehat{A} , deux des flèches sont dans \mathcal{W} , la troisième est dans \mathcal{W} .
- L2 Toute fibration triviale est dans \mathcal{W} .
- L3 La classe des monomorphismes de \widehat{A} qui sont dans \mathcal{W} est stable par images directes et par compositions transfinies.

On appellera \mathcal{W} -équivalences les éléments de \mathcal{W} .

COROLLAIRE 1.3.10. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Une petite catégorie A est une \mathcal{W} -catégorie test locale si et seulement si $i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A -localisateur. Le cas échéant, c'est une \mathcal{W} -catégorie test si et seulement si elle est \mathcal{W} -asphérique.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte du théorème 1.1.16, du lemme 1.1.27, et du corollaire 1.3.8. \square

REMARQUE 1.3.11. Le but du prochain chapitre est de montrer que pour toute petite catégorie A , les axiomes définissant la notion de A -localisateur, lorsque certaines conditions de petitesse sont vérifiées, suffisent pour définir une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen sur la catégorie des préfaisceaux sur A .

CHAPITRE 2

Algèbre homotopique des préfaisceaux

1. Accessibilité

2.1.1. Ce paragraphe a pour but de rappeler les techniques élémentaires qui permettront d'utiliser l'argument du petit objet assez librement dans les catégories de préfaisceaux. Les notions d'accessibilité telles que nous les envisageons ici sont celles de SGA 4 (voir [22, exposé I, § 9]).

Lorsque E est un ensemble, on note $|E|$ son cardinal.

DÉFINITION 2.1.2. Soit α un cardinal. Un ensemble ordonné I est dit α -filtrant, s'il est filtrant, et si tout sous-ensemble de I de cardinal inférieur ou égal à α admet un majorant.

REMARQUE 2.1.3. Dans SGA 4, un ensemble ordonné α -filtrant est appelé un ensemble ordonné grand devant α . Il est immédiat que si $\beta \leq \alpha$ sont deux cardinaux, tout ensemble ordonné α -filtrant est β -filtrant.

EXEMPLE 2.1.4. Soit α un cardinal. Alors le cardinal successeur de α , vu comme un ordinal (et donc comme un ensemble bien ordonné), est α -filtrant.

DÉFINITION 2.1.5. Soit α un cardinal. Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est α -accessible si pour tout petit ensemble α -filtrant I , \mathcal{A} admet des limites inductives de type I , et F y commute. On dira qu'un foncteur est accessible s'il est α -accessible pour un certain cardinal α .

Soit \mathcal{C} une catégorie. Un objet X de \mathcal{C} est accessible (resp. α -accessible pour un cardinal α), si le foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns, Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'est.

REMARQUE 2.1.6. Si $\beta \leq \alpha$, tout foncteur α -accessible est β -accessible.

EXEMPLE 2.1.7. Tout foncteur qui commute aux petites limites inductives est α -accessible pour tout cardinal α . Le composé de deux foncteurs α -accessibles l'est. Une limite inductive de foncteurs α -accessibles est α -accessible.

REMARQUE 2.1.8. Soit A une petite catégorie. Dans la catégorie \widehat{A} des préfaisceaux d'ensembles sur A , les objets représentables sont α -accessibles pour tout cardinal α . En effet, les limites inductives se calculent terme à terme dans \widehat{A} , ce qui peut se reformuler en disant que si a est un objet de A , le foncteur $\text{Hom}_{\widehat{A}}(a, \cdot) : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ commute aux petites limites inductives.

PROPOSITION 2.1.9. Soient A une petite catégorie, et $\alpha = |\text{Fl } A|$. Le foncteur $\varinjlim : \underline{\text{Hom}}(A, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \mathcal{E}ns$ est α -accessible. (Voir [22, exposé I, corollaire 9.8]).

DÉMONSTRATION. Il est bien connu que dans la catégorie des ensembles, les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies. On se ramène alors facilement au cas où A est une catégorie discrète, *i.e.* un ensemble de cardinal α . En effet, si F est un foncteur de A vers $\mathcal{E}ns$, la limite projective de F se calcule comme le noyau d'une double flèche dont le but est un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des flèches de A , et la source un produit des $F(a)$ indexé par l'ensemble des objets de A .

Soient I un ensemble ordonné α -filtrant, et $(F_a)_{a \in A}$ une famille de foncteurs de I vers $\mathcal{E}ns$. Il faut montrer que l'application naturelle

$$\phi : \varinjlim \prod_a F_a \longrightarrow \prod_a \varinjlim F_a$$

est bijective.

Soient x et y deux éléments de $\varinjlim \prod_a F_a$. On peut supposer que x et y sont des éléments de $\prod_a F_a(i_0)$ pour un $i_0 \in I$ convenable, car I est filtrant. Si $\phi(x) = \phi(y)$, alors pour tout $a \in A$, il existe $i_a \in I$ tel que $x_a = y_a$ dans $F_a(i)$ pour i plus grand que i_a . Comme I est α -filtrant, il existe un $i_1 \in I$ majorant tous les i_a . On a donc $x = y$ dans $\prod_a F_a(i_1)$, ce qui montre l'injectivité.

Si $z \in \prod_a \varinjlim F_a$, pour chaque élément a de A , il existe un $i_a \in I$ tel que z_a provienne de l'ensemble $F_a(i_a)$. Encore une fois, vu que I est α -filtrant, il existe un majorant i des i_a , et donc les images des z_a dans $F_a(i)$ définissent un antécédent de z . \square

PROPOSITION 2.1.10. *Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des limites inductives. On considère un cardinal α , une petite catégorie A , et un foncteur $F : A \longrightarrow \mathcal{C}$, tels que pour tout $a \in A$, l'objet $F(a)$ soit α -accessible, et on note $\lambda = \max(\alpha, |\text{Fl } A|)$. Alors $\varinjlim F$ est λ -accessible. (Voir [22, exposé I, corollaire 9.9]).*

DÉMONSTRATION. Soit I un petit ensemble ordonné α -filtrant, et soit $\phi : I \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Alors il vient les bijections canoniques

$$\begin{aligned} \varinjlim_I \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_A F, \phi) &\simeq \varinjlim_I \varprojlim_{A^\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \phi) \\ &\simeq \varprojlim_{A^\circ} \varinjlim_I \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \phi) \\ &\simeq \varprojlim_{A^\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F, \varinjlim_I \phi) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_A F, \varinjlim_I \phi), \end{aligned}$$

ce qui montre la proposition. \square

COROLLAIRE 2.1.11. *Si A est une petite catégorie, tout préfaisceau X sur A est $|\text{Fl } A/X|$ -accessible.*

DÉMONSTRATION. D'après la remarque 2.1.8, cela résulte trivialement de la proposition ci-dessus et du fait que X est la limite inductive dans \widehat{A} du foncteur $A/X \longrightarrow \widehat{A}$, $(a, u) \longmapsto a$. \square

REMARQUE 2.1.12. Ce corollaire implique que pour toutes petites catégories A et B , tout foncteur $\widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ admettant un adjoint à gauche est accessible (ce qui est une spécialisation de [22, exposé I, proposition 9.5]). En effet, si $D : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ est un tel foncteur, et si G en désigne un adjoint à gauche, alors D est défini par la formule

$$D(X)_b = \text{Hom}_{\widehat{A}}(G(b), X) \quad , \quad X \in \text{Ob } \widehat{A} \quad , \quad b \in \text{Ob } B .$$

DÉFINITION 2.1.13. Soit A une petite catégorie, et soit α un cardinal. On dira qu'un préfaisceau X sur A est *de taille* $\leq \alpha$ si pour tout objet a de A , le cardinal de l'ensemble $X(a)$ est $\leq \alpha$.

REMARQUE 2.1.14. Si $\alpha \geq |\text{Fl } A|$ est infini, un préfaisceau X sur A est de taille $\leq \alpha$ si et seulement si $\alpha \geq |\text{Fl}(A/X)|$, et donc tout préfaisceau de taille $\leq \alpha$ est α -accessible, en vertu du corollaire 2.1.11.

Si C est une petite catégorie, et si S est un ensemble d'objets de C , on peut définir $C(S)$, le crible engendré par S dans C : c'est l'intersection de tous les cribles de C qui contiennent S . La catégorie $C(S)$ admet une description plus explicite : c'est la sous-catégorie pleine de C définie par

$$\text{Ob } C(S) = \{c \in \text{Ob } C \mid \exists s \in S, \text{Hom}_C(c, s) \neq \emptyset\} .$$

D'autre part, si F est un préfaisceau sur A , il vient une bijection canonique

$$\{\text{sous-objets de } F\} \simeq \{\text{cribles de } A/F\} .$$

Par conséquent, si S est un sous-ensemble de $\coprod_{a \in \text{Ob } A} F(a)$, on peut définir le sous-objet $F(S)$ de F engendré par S , comme étant celui correspondant au crible de A/F engendré par S . Or si $\alpha \geq |\text{Fl } A|$, et si $|S| \leq \alpha$ alors $F(S)$ est de taille $\leq \alpha$, et donc est α -accessible, comme on l'a remarqué plus haut.

2.1.15. Pour chaque cardinal α , on note $\text{Acc}_\alpha(A)$ (resp. $T_\alpha(A)$) la sous-catégorie pleine de \widehat{A} formée des objets α -accessibles (resp. des objets de taille $\leq \alpha$).

PROPOSITION 2.1.16. Soient A une petite catégorie, et α un cardinal infini qui majore $|\text{Fl } A|$. Alors tout objet de \widehat{A} est la réunion α -filtrante de ses sous-objets α -accessibles. En outre, il vient l'égalité :

$$T_\alpha(A) = \text{Acc}_\alpha(A) .$$

En particulier, la catégorie $\text{Acc}_\alpha(A)$ est essentiellement petite.

DÉMONSTRATION. Le début de la remarque 2.1.14 montre qu'on a une inclusion pleine $T_\alpha(A) \subset \text{Acc}_\alpha(A)$, et donc il suffit de montrer que tout préfaisceau α -accessible est de taille $\leq \alpha$. Soit X un objet de \widehat{A} . On note I l'ensemble des sous-objets de X de taille $\leq \alpha$, ordonné par l'inclusion. On vérifie aisément qu'il est α -filtrant, et on a un foncteur évident $F : I \rightarrow \widehat{A}$. En outre, on a une flèche canonique $\varinjlim F \rightarrow X$, laquelle est un monomorphisme, puisque c'est une limite inductive filtrante de monomorphismes. C'est en fait un isomorphisme puisque tous les objets représentables sont de taille $\leq \alpha$, ainsi que leurs quotients. Si X est α -accessible, cet isomorphisme se factorise en $X \rightarrow F(i) \rightarrow X$ pour un $i \in I$. Il est clair qu'alors l'inclusion $F(i) \rightarrow X$ est un épimorphisme, et donc un

isomorphisme, ce qui achève la démonstration, car il est évident que la catégorie $T_\alpha(A)$ est essentiellement petite. \square

PROPOSITION 2.1.17. *Soient A une petite catégorie, et α un cardinal infini majorant $|\text{Fl } A|$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (a) *Toute limite projective finie de préfaisceaux sur A α -accessibles est α -accessible.*
- (b) *Tout sous-objet d'un préfaisceau sur A α -accessible est α -accessible.*

DÉMONSTRATION. La proposition 2.1.16 permet de se ramener au cas où \widehat{A} est la catégorie des ensembles, auquel cas cette proposition est triviale. \square

PROPOSITION 2.1.18. *Soient A et B deux petites catégories, $\phi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur accessible. Alors il existe un cardinal α tel que pour tout cardinal $\beta \geq \alpha$, on ait :*

$$\phi(\text{Acc}_\beta(A)) \subset \text{Acc}_{\beta^\alpha}(B) .$$

En particulier, si $\beta_0 \geq \alpha$, et si $\beta = 2^{\beta_0}$, alors

$$\phi(\text{Acc}_\beta(A)) \subset \text{Acc}_\beta(B) .$$

(Voir [22, exposé I, proposition 9.14])

DÉMONSTRATION. On considère un cardinal infini γ majorant $|\text{Fl } A|$ et $|\text{Fl } B|$, tel que ϕ soit γ -accessible. On remarque qu'il existe un cardinal $\alpha \geq \gamma$, tel que tout préfaisceau γ -accessible sur A soit envoyé par le foncteur ϕ sur un préfaisceau α -accessible sur B (en vertu de la proposition 2.1.16 et du corollaire 2.1.11). D'autre part, si E est un ensemble, le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de E dont le cardinal est $\leq \gamma$ est majoré par $|E|^\gamma$, car cet ensemble se plonge dans l'ensemble des applications de γ vers E . On considère à présent un cardinal $\beta \geq \alpha$. Si X est un préfaisceau β -accessible sur A , on note I l'ensemble des sous-objets γ -accessibles de X , ordonné par l'inclusion. La remarque 2.1.14 et la proposition 2.1.16 permettent de voir que le cardinal de l'ensemble I est majoré par $|\text{Fl } A/X|^\gamma$, et donc par β^α . En outre, en vertu de la proposition 2.1.16, I est un ensemble ordonné γ -filtrant, et le foncteur d'inclusion $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ a pour limite inductive le préfaisceau X . Comme ϕ est γ -accessible par hypothèse, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim \phi F \simeq \phi X$. La proposition 2.1.10 implique donc que ϕX est β^α -accessible, puisque β^α majore α . Pour achever la démonstration, il suffit de constater que si $\beta_0 \geq \alpha$, et si $\beta = 2^{\beta_0}$, alors on a les égalités $\beta^\alpha = (2^{\beta_0})^\alpha = 2^{\beta_0 \alpha} = 2^{\beta_0} = \beta$. \square

DÉFINITION 2.1.19. Soient \mathcal{C} une catégorie, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : W \longrightarrow Z$ deux flèches de \mathcal{C} . La flèche f est un *rétracte* de g s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & W & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

tel que $ri = 1_X$ et $sj = 1_Y$.

On dira qu'un ensemble de flèches de \mathcal{C} est *stable par rétractes* si tout rétracte d'un élément de cet ensemble est un élément de celui-ci.

DÉFINITION 2.1.20. Soit \mathcal{C} une catégorie. Si F est un ensemble de flèches de \mathcal{C} , on notera $l(F)$ (resp. $r(F)$), l'ensemble des flèches de \mathcal{C} qui vérifient la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à tous les éléments de F .

REMARQUE 2.1.21. Si \mathcal{C} est une catégorie admettant des petites limites inductives, alors pour tout ensemble de flèches F de \mathcal{C} , $l(F)$ est stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes. En particulier, l'ensemble des flèches de \mathcal{C} formé des flèches qui sont des composés transfinis d'images directes d'éléments de I , notée $\text{Cell}(F)$, est contenu dans $l(r(F))$. On peut montrer que $\text{Cell}(F)$ est stable par compositions transfinies et par images directes (voir [26, lemme 2.1.2]). Cela implique que $\text{Cell}(F)$ et $l(F)$ sont stables par sommes, puisque toute somme est un composé transfini d'images directes.

On remarque que dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles, l'ensemble des applications injectives est stable par images directes, par composition transfinie et par rétractes. On en déduit que pour toute petite catégorie A , l'ensemble des monomorphismes de \widehat{A} vérifie la même propriété.

2.1.22. LEMME DU RÉTRACTE. Soit \mathcal{C} une catégorie. On considère deux morphismes i et p de \mathcal{C} tels que pi ait un sens. Si $pi \in l(p)$, alors pi est un rétracte de i .

DÉMONSTRATION. Voir [26, lemme 1.1.9]. □

DÉFINITION 2.1.23. Soit \mathcal{C} une catégorie, et soit I un petit ensemble de flèches de \mathcal{C} . On dira que I permet l'argument du petit objet si pour tout morphisme $A \rightarrow B$ qui est un élément de I , l'objet A est accessible.

2.1.24. L'ARGUMENT DU PETIT OBJET. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, admettant des petites limites inductives, et I un petit ensemble de flèches de \mathcal{C} permettant l'argument du petit objet. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de \mathcal{C} en $f = pi$ où $p \in r(I)$ et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de I . En outre, tout élément de la classe $l(r(I))$ est un rétracte de $\text{Cell}(i)$, ce qui fait de $l(r(I))$ le plus petit ensemble de flèches de \mathcal{C} stable par images directes, par compositions transfinies, et par rétractes contenant I .

DÉMONSTRATION. Voir [26, théorème 2.1.14 et cocollaire 2.1.15]. □

LEMME 2.1.25. Soit A une petite catégorie. On considère une classe \mathbf{C} de monomorphismes de \widehat{A} et une classe \mathbf{D} de préfaisceaux sur A ayant les propriétés suivantes.

- (a) La classe \mathbf{C} est stable par images directes, par compositions transfinies.
- (b) Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux monomorphismes composables de \widehat{A} , et si f et gf sont des éléments de \mathbf{C} , alors $g \in \mathbf{C}$.
- (c) Tout préfaisceau sur A est réunion de ses sous-objets appartenant à \mathbf{D} .

- (d) Pour tout élément $X \longrightarrow Y$ de \mathbf{C} , et tout sous-objet Z de Y appartenant à \mathbf{D} , il existe un sous-objet T de Y appartenant à \mathbf{D} et contenant Z , tel que $T \cap X \longrightarrow T$ soit un élément de \mathbf{C} .

On note \mathcal{N} l'ensemble des éléments de \mathbf{C} dont le but est un élément de \mathbf{D} . Alors $\mathbf{C} = \text{Cell}(\mathcal{N})$. Si en outre la classe \mathbf{C} est stable par rétractes et s'il existe un petit ensemble $D \subset \mathbf{D}$ tel que tout élément de \mathbf{D} soit isomorphe à un élément de D , alors le petit ensemble I des éléments de \mathbf{C} dont le but est dans D engendre \mathbf{C} dans le sens où on a les égalités : $\mathbf{C} = \text{Cell}(I) = l(r(I))$.

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que $\text{Cell}(\mathcal{N}) \subset \mathbf{C}$. Il suffit donc de montrer l'autre inclusion. Soit $i : K \longrightarrow L$ un élément de \mathbf{C} . On considère l'ensemble E des sous-objets de L qui sont dans \mathbf{D} que l'on munit d'un bon ordre. On va construire un foncteur $\phi : E \longrightarrow \widehat{A}$ tel que pour tout $e \in E$, $\phi(e)$ soit un sous-objet de L contenant K et e , l'inclusion $K \longrightarrow \phi(e)$ étant un élément de $\text{Cell}(\mathcal{N})$, et tel que si $e \neq 0$ (où 0 est l'élément initial de E), le morphisme $\varinjlim_{e' < e} \phi(e') \longrightarrow \phi(e)$ soit un élément de $\text{Cell}(\mathcal{N})$. La flèche $K \longrightarrow \varinjlim \phi$ s'identifiera canoniquement à i , et elle sera un élément de $\text{Cell}(\mathcal{N})$. Pour $e = 0$, comme 0 est par hypothèse dans \mathbf{D} , il existe un sous-objet U_0 de L , élément de \mathbf{D} , contenant 0 , et tel que $U_0 \cap K \longrightarrow U_0$ soit dans \mathbf{C} . On pose alors $\phi(0) = U_0 \cup K$. Le carré cocartésien ci-dessous montre que l'inclusion $K \longrightarrow U_0 \cup K$ est alors dans $\text{Cell}(\mathcal{N})$.

$$\begin{array}{ccc} K \cap U_0 & \longrightarrow & U_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & K \cup U_0 \end{array}$$

On procède ensuite par induction transfinitive. Supposons que pour un $e > 0$ on ait construit tous les $\phi(e')$ pour $e' < e$. On pose $V = \varinjlim_{e' < e} \phi(e')$. Alors l'inclusion $K \longrightarrow V$ est un élément de \mathbf{C} , et donc il en est de même de $V \longrightarrow L$. On en déduit qu'il existe un sous-objet α -accessible U_e de L , contenant e , et tel que l'inclusion $U_e \cap V \longrightarrow U_e$ soit dans \mathbf{C} . On pose alors $\phi(e) = U_e \cup V$, et on vérifie immédiatement grâce au carré cocartésien ci-dessous que $V \longrightarrow \phi(e)$ est un élément de $\text{Cell}(\mathcal{N})$.

$$\begin{array}{ccc} V \cap U_e & \longrightarrow & U_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & V \cup U_e \end{array}$$

La dernière assertion résulte de l'argument du petit objet appliqué à l'ensemble I des éléments de \mathbf{C} dont le but est dans D . \square

REMARQUE 2.1.26. Le lemme ci-dessus sera toujours appliqué dans la suite pour une classe \mathbf{C} de monomorphismes stable par rétractes, et avec pour classe d'objets \mathbf{D} les préfaïceaux α -accessibles pour un cardinal α bien choisi.

DÉFINITION 2.1.27. Soit A une petite catégorie. Un *modèle cellulaire* de \widehat{A} est un petit ensemble \mathcal{M} de monomorphismes de \widehat{A} , tel que $l(r(\mathcal{M}))$ soit l'ensemble des monomorphismes de \widehat{A} .

PROPOSITION 2.1.28. *Toute catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie admet un modèle cellulaire.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la proposition 2.1.16 et du lemme 2.1.25 appliqué à la classe des monomorphismes de la catégorie de préfaisceaux considérée. \square

COROLLAIRE 2.1.29. *Soit A une petite catégorie. Alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de \widehat{A} en $f = pi$ où i est un monomorphisme et où p est une fibration triviale.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte du corollaire 2.1.11 et de la proposition 2.1.28, qui permettent d'appliquer l'argument du petit objet. \square

LEMME 2.1.30. *Soit A une petite catégorie.*

(a) *On considère un diagramme commutatif de \widehat{A} de la forme ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{x_1} & X_0 & \xrightarrow{x_2} & X_2 \\ i_1 \downarrow & & (1) \downarrow i_0 & & (2) \downarrow i_2 \\ S_1 & \xleftarrow{s_1} & S_0 & \xrightarrow{s_2} & S_2 \end{array}$$

Si les morphismes i_2 et $l : X_1 \amalg_{X_0} S_0 \longrightarrow S_1$ sont des monomorphismes, le morphisme canonique

$$X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow S_1 \amalg_{S_0} S_2$$

est un monomorphisme.

(b) *Pour tout diagramme commutatif de \widehat{A} de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{x_1} & X_0 & \xrightarrow{x_2} & X_2 \\ i_1 \downarrow & & (1) \downarrow i_0 & & (2) \downarrow i_2 \\ S_1 & \xleftarrow{s_1} & S_0 & \xrightarrow{s_2} & S_2 \\ j_1 \uparrow & & (1') \uparrow j_0 & & (2') \uparrow j_2 \\ Y_1 & \xleftarrow{y_1} & Y_0 & \xrightarrow{y_2} & Y_2 \end{array} ,$$

si les flèches verticales et les morphismes x_1 , s_1 et y_1 sont des monomorphismes, et si les carrés (1) et (1') sont cartésiens, alors le morphisme canonique

$$(X_1 \times_{S_1} Y_1) \amalg_{(X_0 \times_{S_0} Y_0)} (X_2 \times_{S_2} Y_2) \longrightarrow (X_1 \amalg_{X_0} X_2) \times_{(S_1 \amalg_{S_0} S_2)} (Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2)$$

est un isomorphisme.

(c) *Pour toute petite famille de diagrammes de \widehat{A} de la forme*

$$\begin{array}{ccc} X_i & & Y_i \\ & \searrow & \swarrow \\ & S_i & \end{array} ,$$

le morphisme canonique

$$\coprod_i (X_i \times_{S_i} Y_i) \longrightarrow (\coprod_i X_i) \times_{(\coprod_i S_i)} (\coprod_i Y_i)$$

est un isomorphisme.

REMARQUE 2.1.31. Pour que le morphisme l de l'énoncé (a) soit un monomorphisme, il suffit que le carré (1) soit cartésien, et que les flèches i_1 et s_1 soient des monomorphismes.

DÉMONSTRATION. (a) On pose $X = X_1 \amalg_{X_0} X_2$ et $S = S_1 \amalg_{S_0} S_2$. On commence par former le carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & X \\ i_2 \downarrow & & \downarrow k \\ S_2 & \longrightarrow & X \amalg_{X_2} S_2 \end{array}$$

Comme par hypothèse, i_2 est un monomorphisme, il en est de même de k . D'autre part, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg_{X_0} S_0 & \longrightarrow & X \amalg_{X_2} S_2 \\ l \downarrow & & \downarrow m \\ S_1 & \longrightarrow & S \end{array} ,$$

lequel s'avère être cocartésien, en regard des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} S_1 \amalg_{X_1 \amalg_{X_0} S_0} X \amalg_{X_2} S_2 &= S_1 \amalg_{X_1 \amalg_{X_0} S_0} X_1 \amalg_{X_0} X_2 \amalg_{X_2} S_2 \\ &\simeq S_1 \amalg_{X_1 \amalg_{X_0} S_0} X_1 \amalg_{X_0} S_2 \\ &\simeq S_1 \amalg_{S_0} S_2 \\ &= S . \end{aligned}$$

Or l est un monomorphisme, et donc m en est un aussi. L'assertion résulte ainsi du fait que le morphisme canonique de X vers S est le composé de m et de k .

(b) Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \cap Y_1 & & X_0 \cap Y_0 & & X_2 \cap Y_2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ X_1 \times_{S_1} Y_1 & \longleftarrow & X_0 \times_{S_0} Y_0 & \longrightarrow & X_2 \times_{S_2} Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longleftarrow & X_0 & \longrightarrow & X_2 \end{array} .$$

On remarque grâce à l'égalité

$$X_1 \cap Y_1 \cap X_0 = X_0 \cap Y_0$$

que le carré de gauche est cartésien. Il résulte donc de la remarque 2.1.31 et de (a) que la flèche canonique

$$(X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) \longrightarrow X_1 \amalg_{X_0} X_2$$

est un monomorphisme. On vérifie de la même manière que le morphisme canonique

$$(X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) \longrightarrow Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2$$

est un monomorphisme. On a d'autre part le diagramme commutatif suivant dans $\widehat{\mathcal{A}}$, dont toutes les faces horizontales sont cocartésiennes.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 \cap Y_1 & \longrightarrow & Y_1 \\
 & \swarrow & \uparrow & & \swarrow \\
 X_1 & \longrightarrow & X_1 \cup Y_1 & & \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 & & X_0 \cap Y_0 & \longrightarrow & Y_0 \\
 X_0 & \longrightarrow & X_0 \cup Y_0 & & \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 & & X_2 \cap Y_2 & \longrightarrow & Y_2 \\
 X_2 & \longrightarrow & X_2 \cup Y_2 & & \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 & & & &
 \end{array}$$

On en déduit un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) & \longrightarrow & X_1 \amalg_{X_0} X_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2 & \longrightarrow & (X_1 \cup Y_1) \amalg_{(X_0 \cup Y_0)} (X_2 \cup Y_2)
 \end{array} .$$

Or en vertu de ce qui précède, toutes les flèches de ce carré sont des monomorphismes, ce qui implique qu'il est aussi cartésien. Considérons à présent le diagramme commutatif ci-après.

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 \cup Y_1 & \longleftarrow & X_0 \cup Y_0 & \longrightarrow & X_2 \cup Y_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S_1 & \longleftarrow & S_0 & \longrightarrow & S_2
 \end{array}$$

Les trois flèches verticales sont des monomorphismes, ainsi que les flèches horizontales du carré de gauche. Les égalités

$$(X_1 \cup Y_1) \cap S_0 = (X_1 \cap S_0) \cup (Y_1 \cap S_0) = X_0 \cup Y_0$$

montrent que le carré de gauche est cartésien. Il résulte donc de (a) que la flèche canonique

$$(X_1 \cup Y_1) \amalg_{(X_0 \cup Y_0)} (X_2 \cup Y_2) \longrightarrow S_1 \amalg_{S_0} S_2$$

est un monomorphisme. Cela implique que le carré suivant est cartésien,

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1 \cap Y_1) \amalg_{(X_0 \cap Y_0)} (X_2 \cap Y_2) & \longrightarrow & Y_1 \amalg_{Y_0} Y_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_1 \amalg_{X_0} X_2 & \longrightarrow & S_1 \amalg_{S_0} S_2
 \end{array} ,$$

et démontre (b).

L'énoncé (c) est une conséquence immédiate du fait que les sommes dans $\widehat{\mathcal{A}}$ sont disjointes et universelles. \square

2.1.32. On rappelle ici succinctement la construction de la factorisation par l'argument du petit objet, et on développe quelques unes de ses propriétés. Ces considérations forment un cas particulier de certaines constructions de [24, chapitre 16], qui se révèlent un peu plus simples dans le cadre des catégories de préfaisceaux.

On considère à présent une petite catégorie A , un petit ensemble \mathcal{N} de monomorphismes de \widehat{A} , et un ensemble bien ordonné λ . On note 0 le plus petit élément de λ , et pour $\mu \in \lambda$, on note $\mu+1$ son successeur lorsqu'il existe dans λ . On définit alors un foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$, et un morphisme de foncteurs $1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$ par la méthode du petit objet : on commence par définir deux foncteurs $S, B : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ en posant pour chaque objet X de \widehat{A}

$$SX = \coprod_{C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} \coprod_{\text{Hom}_{\widehat{A}}(C, X)} C,$$

et

$$BX = \coprod_{C \longrightarrow D \in \mathcal{N}} \coprod_{\text{Hom}_{\widehat{A}}(C, X)} D,$$

et on obtient deux morphismes de foncteurs évidents $S \longrightarrow B$ et $S \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$. On forme ensuite le carré cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1_{\widehat{A}} \\ \downarrow & & \downarrow l_1 \\ B & \longrightarrow & L_1 \end{array} .$$

Pour $\mu \in \lambda$, on définit le foncteur L_μ par induction transfinie en posant $L_0 = 1_{\widehat{A}}$, puis $L_{\mu+1} = L_1 L_\mu$, et lorsque μ n'est pas un élément successeur, on pose $L_\mu = \varinjlim_{\nu < \mu} L_\nu$, la limite étant définie par les morphismes de foncteurs $l_1 L_\mu : L_\mu \longrightarrow L_{\mu+1}$. On définit enfin le foncteur $L = \varinjlim_{\mu \in \lambda} L_\mu$, et on obtient en outre par composition transfinie un morphisme de foncteurs $l : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$. On remarque que par construction, si X est un préfaisceau sur A , l_X est un composé transfini d'images directes d'éléments de \mathcal{N} , et donc un élément de $l(r(\mathcal{N}))$. C'est en particulier un monomorphisme.

PROPOSITION 2.1.33. *Le foncteur L vérifie les propriétés suivantes.*

- (a) *Il respecte les monomorphismes.*
- (b) *Si $X \longrightarrow Z$ et $Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de \widehat{A} , la flèche canonique $L(X \cap Y) \longrightarrow L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme.*
- (c) *Il est accessible.*
- (d) *Si α est un cardinal tel que L soit α -accessible, et tel que tout préfaisceau sur A soit la réunion α -filtrante de ses sous-objets α -accessibles, alors pour tout objet X de \widehat{A} , et tout sous-objet α -accessible Y de LX , il existe un sous-objet α -accessible Z de X , tel que LZ contienne Y .*

DÉMONSTRATION. Pour montrer (a) et (b), on remarque qu'il suffit de montrer les énoncés analogues pour le foncteur L_1 , car les limites inductives filtrantes

sont exactes. Pour tout préfaisceau C sur A on note K_C le foncteur

$$K_C : \mathcal{E}ns \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad E \longmapsto \coprod_E C .$$

On vérifie immédiatement qu'il commute aux produits fibrés, et donc, en particulier, qu'il respecte les monomorphismes. On remarque que

$$S = \coprod_{u:C \rightarrow D \in \mathcal{N}} S_u \quad (\text{resp.} \quad B = \coprod_{u:C \rightarrow D \in \mathcal{N}} B_u) ,$$

où S_u (resp. B_u) est le composé du foncteur

$$\text{Hom}_{\widehat{A}}(C, \cdot) : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

suivi du foncteur K_C (resp. K_D). Il est immédiat que les foncteurs de types S_u et B_u commutent aux produits fibrés. Vu que les monomorphismes sont stables par sommes, on en déduit que les foncteurs S et B respectent les monomorphismes, et il résulte de l'assertion (c) du lemme 2.1.30, qu'ils respectent les intersections de sous-objets. Enfin, on s'aperçoit aussitôt que pour tout monomorphisme $X \longrightarrow Y$, le carré ci-dessous est formé de monomorphismes et est cartésien.

$$\begin{array}{ccc} SX & \longrightarrow & BX \\ \downarrow & & \downarrow \\ SY & \longrightarrow & BY \end{array}$$

L'assertion (a) (resp. (b)) est donc conséquence de la partie (a) (resp. (b)) du lemme 2.1.30.

On remarque qu'en vertu du corollaire 2.1.11, les foncteurs S et B sont accessibles (car le composé d'un foncteur accessible avec un foncteur qui commute aux petites limites inductives est accessible, toute somme de foncteurs accessibles est accessible). On en déduit que le foncteur L_1 l'est aussi. La propriété (c) résulte immédiatement du fait que les foncteurs accessibles sont stables par composition et par limites inductives.

Pour montrer la propriété (d), on considère un préfaisceau X sur A , puis on note I l'ensemble des sous-objets α -accessibles de X , ordonné par l'inclusion, et $\phi : I \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur évident. Si Y est un objet α -accessible, comme $\varinjlim \phi \simeq X$, comme I est α -filtrant, et comme L est α -accessible, on a une bijection canonique :

$$\varinjlim \text{Hom}_{\widehat{A}}(Y, L\phi) \simeq \text{Hom}_{\widehat{A}}(Y, LX) .$$

Lorsque $Y \subset LX$, cela implique que Y est contenu dans un des $L\phi(i)$, et achève la démonstration de la proposition. \square

2. Extensions anodines

DÉFINITION 2.2.1. Soit A une petite catégorie. Un *cylindre* d'un préfaisceau X sur A est un quadruplet

$$(IX, \partial_X^0, \partial_X^1, \sigma_X)$$

correspondant à un diagramme commutatif du type suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \searrow^{\partial_X^0} & & \nearrow^{1_X} \\
 & IX & \xrightarrow{\sigma_X} X \\
 \nearrow_{\partial_X^1} & & \searrow_{1_X} \\
 X & &
 \end{array} ,$$

et tel que $(\partial_X^0, \partial_X^1) : X \amalg X \longrightarrow IX$ soit un monomorphisme.

Un *morphisme de cylindres*

$$(IX, \partial_X^0, \partial_X^1, \sigma_X) \longrightarrow (IY, \partial_Y^0, \partial_Y^1, \sigma_Y)$$

est une paire de morphismes $\phi : X \longrightarrow Y$ et $\psi : IX \longrightarrow IY$ tels que $\psi \partial_X^e = \partial_Y^e \phi$ pour $e = 0, 1$ et $\phi \sigma_X = \sigma_Y \psi$.

On note $Cyl(A)$ la catégorie des cylindres de \widehat{A} .

Un *cylindre fonctoriel* est une section du foncteur

$$Cyl(A) \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad (IX, \partial_X^0, \partial_X^1, \sigma_X) \longmapsto X \quad ,$$

i.e. c'est un quadruplet $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ où I est un foncteur de la catégorie \widehat{A} vers elle-même, et où $\partial^0, \partial^1 : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow I$ sont des morphismes de foncteurs admettant une rétraction fonctorielle commune σ , tels que pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme $(\partial_X^0, \partial_X^1)$ soit un monomorphisme.

2.2.2. Si X est un préfaisceau sur A , on notera $X \otimes I$ le préfaisceau $I(X)$, et parfois aussi $1_X \otimes \partial^e := \partial_X^e : X \longrightarrow X \otimes I$, $e = 0, 1$, $1_X \otimes \sigma := \sigma_X : X \otimes I \longrightarrow X$. Autrement dit, on voit la catégorie des foncteurs $\underline{\text{Hom}}(\widehat{A}, \widehat{A})$ comme une catégorie monoïdale stricte (le produit tensoriel étant donné par la composition des foncteurs), et \widehat{A} comme un module sur celle-ci. On notera ∂I le foncteur $X \mapsto X \otimes \partial I := X \amalg X$. Le couple (∂^0, ∂^1) définit donc une inclusion canonique i de ∂I dans I .

DÉFINITION 2.2.3. Une *donnée homotopique élémentaire* sur une petite catégorie A est un cylindre fonctoriel $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ vérifiant les axiomes suivants.

DH1 Le foncteur I commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes.

DH2 Pour tout monomorphisme $j : K \longrightarrow L$ dans \widehat{A} , les carrés ci-dessous sont cartésiens ($e = 0, 1$) :

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{j} & L \\
 1_K \otimes \partial^e \downarrow & & \downarrow 1_L \otimes \partial^e \\
 K \otimes I & \xrightarrow{j \otimes 1_I} & L \otimes I
 \end{array} .$$

Une *donnée homotopique* sur A est un couple (\mathcal{I}, S) où \mathcal{I} est une donnée homotopique élémentaire, et où S est un petit ensemble de monomorphismes de \widehat{A} .

REMARQUE 2.2.4. Si on a un carré cartésien dans \widehat{A}

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & U \end{array} ,$$

et si les flèches $S \longrightarrow U$ et $T \longrightarrow U$ sont des monomorphismes, alors la flèche canonique $T \amalg_R S \longrightarrow U$ est un monomorphisme, et on la notera $T \cup S \longrightarrow U$.

Si (\mathcal{I}, S) est une donnée homotopique sur A , on note pour chaque préfaisceau X sur A , $X \otimes \{e\} \longrightarrow X \otimes I$ le morphisme $1_X \otimes \partial^e$ ($e = 0, 1$), et donc pour chaque inclusion $K \longrightarrow L$ dans \widehat{A} , il vient des monomorphismes ($e = 0, 1$)

$$K \otimes I \cup L \otimes \{e\} \longrightarrow L \otimes I .$$

D'autre part, on remarque que comme les sommes sont universelles dans \widehat{A} , il résulte de DH2 que pour toute inclusion de préfaisceaux sur A , $j : K \longrightarrow L$, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \partial I & \xrightarrow{j \otimes 1_{\partial I}} & L \otimes \partial I \\ 1_K \otimes i \downarrow & & \downarrow 1_L \otimes i \\ K \otimes I & \xrightarrow{j \otimes 1_I} & L \otimes I \end{array} ,$$

ce qui donne une inclusion

$$K \otimes I \cup L \otimes \partial I \longrightarrow L \otimes I .$$

EXEMPLE 2.2.5. Soit A une petite catégorie, un *segment* de \widehat{A} est un triplet $(I, \partial^0, \partial^1)$, où I est un préfaisceau sur A , et où ∂^0 et ∂^1 sont des sections globales de I (*i.e.* des morphismes de l'objet final $*$ de \widehat{A} vers I). Un tel segment est *séparant* si le morphisme

$$(\partial^0, \partial^1) : * \amalg * \longrightarrow I$$

est un monomorphisme de \widehat{A} . Dans ces conditions, on obtient canoniquement une donnée homotopique élémentaire définie par le foncteur

$$X \longmapsto X \times I$$

et par les formules $\partial_X^e = 1_X \times \partial^e$, $e = 0, 1$, $\sigma_X = pr_1$ (pr_1 désignant la première projection).

EXEMPLE 2.2.6. Si A est une petite catégorie, le foncteur i_A^* et les inclusions $\partial^e : \{e\} \longrightarrow \Delta_1$, $e = 0, 1$, définissent un segment séparant de \widehat{A}

$$(L, \lambda^0, \lambda^1) ,$$

appelé le *segment de Lawvere de \widehat{A}* , en posant

$$L = i_A^* \Delta_1 \quad \text{et} \quad \lambda^e = i_A^* \partial^e \quad , e = 0, 1 .$$

Cette terminologie est justifiée par le fait que pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times i_A^* \Delta_1 \longrightarrow X$ peut être vue comme l'objet $i_{A/X}^* \Delta_1$ dans $\widehat{A/X}$, et donc comme l'objet de Lawvere de $\widehat{A}/X \simeq \widehat{A/X}$ (*i.e.* c'est l'objet représentant le

foncteur $(\widehat{A}/X)^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ qui à un objet associe l'ensemble de ses sous-objets, cf. [36, § 6.5]. On obtient ainsi un cylindre fonctoriel \mathcal{L} , appelé le *cylindre de Lawvere*, et donc, en vertu de l'exemple ci-dessus, une donnée homotopique élémentaire sur A . Celle-ci jouera un rôle particulier par la suite, qui s'explique par son aspect canonique, et par le fait que pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times i_A^* \Delta_1 \longrightarrow X$ est une fibration triviale (*i.e.* est un objet injectif de \widehat{A}/X), en vertu de l'exemple 1.1.25.

DÉFINITION 2.2.7. Soit \mathcal{I} une donnée homotopique élémentaire sur une petite catégorie A . On dira qu'une flèche $u_0 : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} est \mathcal{I} -homotope (ou encore *homotope*, lorsque cela ne sera pas trop ambigu) à $u_1 : X \longrightarrow Y$, s'il existe un morphisme $h : X \otimes I \longrightarrow Y$ tels que $h(1_X \otimes \partial^e) = u_e$ pour $e = 0, 1$.

REMARQUE 2.2.8. On vérifie immédiatement que la relation d'équivalence sur \widehat{A} , engendrée par la relation d'homotopie, est compatible à la composition. On notera $h_{\mathcal{I}}(A)$ la catégorie quotient, et $Q : \widehat{A} \longrightarrow h_{\mathcal{I}}(A)$ le foncteur canonique. On dira qu'une flèche f de \widehat{A} est une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie si $Q(f)$ est un isomorphisme de $h_{\mathcal{I}}(A)$.

Un préfaisceau X sur A sera dit \mathcal{I} -contractile si le morphisme de X vers l'objet final de \widehat{A} est une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie.

Dans le cas où la donnée homotopique élémentaire \mathcal{I} est définie par un segment séparant $(I, \partial^0, \partial^1)$, on parlera de I -homotopie au lieu de \mathcal{I} -homotopie, *etc.*

2.2.9. La notion de catégorie de modèles que nous considérerons ici est celle de [26], laquelle est un peu plus restrictive que celle de Quillen [41, 42], mais nous arriverons naturellement dans ce cadre.

DÉFINITION 2.2.10. Une catégorie de modèles fermée est la donnée d'un quadruplet $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$, où \mathcal{C} est une catégorie, et où \mathcal{W} , \mathbf{Fib} , \mathbf{Cof} sont des ensembles de flèches de \mathcal{C} , appelés respectivement l'ensemble des *équivalences faibles*, l'ensemble des *fibrations*, et l'ensemble des *cofibrations*, tel que les axiomes suivants soient vérifiés (on appelle *fibrations triviales* (resp. *cofibrations triviales*) les éléments de l'ensemble $\mathcal{W} \cap \mathbf{Fib}$ (resp. de l'ensemble $\mathcal{W} \cap \mathbf{Cof}$)).

CM1 La catégorie \mathcal{C} admet des petites limites inductives et projectives.

CM2 Dans tout triangle commutatif de \mathcal{C} , si deux des flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième en est une.

CM3 Les classes \mathcal{W} , \mathbf{Fib} et \mathbf{Cof} sont stables par rétractes.

CM4 Toute cofibration triviale (resp. fibration triviale) vérifie la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) relativement à toute fibration (resp. à toute cofibration).

CM5 Il existe deux factorisations fonctorielles de toute flèche f de \mathcal{C} en $f = pi$ et $f = qj$ où p et q sont des fibrations, i et j des cofibrations, i et q des équivalences faibles.

Une catégorie de modèles fermée $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$ est à *engendrement cofibrant* s'il existe deux petits ensembles de flèches I et J de \mathcal{C} , permettant tous deux l'argument du petit objet, et tels que $l(r(I)) = \mathbf{Cof}$ et $l(r(J)) = \mathbf{Cof} \cap \mathcal{W}$. On

dira alors que le couple (I, J) engendre la-dite structure de catégorie de modèles fermée.

2.2.11. Dans la suite de cette section, on fixe A une petite catégorie, et (\mathcal{I}, S) une donnée homotopique sur A , puis on choisit un modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} (ce qui est possible en vertu de la proposition 2.1.28). On note alors Λ^0 l'ensemble des flèches qui sont des éléments de S ou bien qui sont de la forme $A \otimes I \cup B \otimes \{e\} \longrightarrow B \otimes I$ pour $A \longrightarrow B \in \mathcal{M}$ et $e = 0, 1$.

Si T est un ensemble de monomorphismes de \widehat{A} , on lui associe l'ensemble de monomorphismes

$$\Lambda(T) = \{A \otimes I \cup B \otimes \partial I \longrightarrow B \otimes I \mid A \longrightarrow B \in T\} .$$

On définit alors par récurrence des ensembles Λ^n par la formule

$$\Lambda^{n+1} = \Lambda(\Lambda^n) ,$$

puis on pose

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}) = \cup_{n \geq 0} \Lambda^n .$$

Autrement dit, $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ est le plus petit ensemble de flèches de \widehat{A} qui contient Λ^0 et qui est stable par l'opération Λ .

DÉFINITION 2.2.12. Une *cofibration* est un monomorphisme. On notera \mathbf{Cof} la classe des cofibrations de \widehat{A} .

Une *fibration triviale* est un élément de la classe $r(\mathbf{Cof})$.

Une *extension anodine* est un élément de la classe $l(r(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})))$.

Une *fibration naïve* est un élément de la classe $r(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$.

Un objet X de \widehat{A} est *fibrant* si la flèche $X \longrightarrow *$ est une fibration naïve.

Une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} est une *équivalence faible* si pour tout objet fibrant T , l'application

$$f^* : \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(Y, T) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(X, T)$$

est bijective. On note \mathcal{W} la classe des équivalences faibles.

Une *cofibration triviale* est un élément de la classe $\mathbf{Cof} \cap \mathcal{W}$.

Enfin, une *fibration* est un élément de la classe $\mathbf{Fib} = r(\mathbf{Cof} \cap \mathcal{W})$.

Cette section sera dédiée à la démonstration de l'énoncé ci-dessous.

THÉORÈME 2.2.13. Avec les définitions ci-dessus, $(\widehat{A}, \mathcal{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$ est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.

REMARQUE 2.2.14. On remarque immédiatement que la classe des équivalences faibles vérifie l'axiome CM2 et est stable par rétractes. Elle vérifie en outre la propriété suivante (ce qui implique qu'elle est faiblement saturée) : si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ sont deux flèches de \widehat{A} telles que fg et gf soient des équivalences faibles, alors f et g sont des équivalences faibles.

DÉFINITION 2.2.15. Une flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} est un *rétracte par déformation fort* (resp. le *dual d'un rétracte par déformation fort*) s'il existe deux flèches $h : Y \otimes I \longrightarrow Y$ (resp. $k : X \otimes I \longrightarrow X$) et $g : Y \longrightarrow X$ telles que :

- i) $gf = 1_X$ (resp. $fg = 1_Y$);

- ii) $h\partial_Y^0 = 1_Y$ et $h\partial_Y^1 = fg$ (resp. $k\partial_X^0 = 1_X$ et $k\partial_X^1 = gf$);
- iii) $h(f \otimes 1_I) = (1_Y \otimes \sigma)(f \otimes 1_I)$ (resp. $fk = f(1_X \otimes \sigma)$).

PROPOSITION 2.2.16. *Toute fibration triviale est le dual d'un rétracte par déformation fort.*

DÉMONSTRATION. La démonstration de l'implication (d) \Rightarrow (a) du lemme 1.1.27 démontre aussi cette proposition. \square

COROLLAIRE 2.2.17. *Toute fibration triviale est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Comme \mathcal{W} est faiblement saturée, le corollaire résulte de la proposition ci-dessus. \square

REMARQUE 2.2.18. On peut à présent faire l'analyse de ce qu'il manque pour démontrer le théorème 2.2.13.

Par le corollaire 2.1.29, il existe une factorisation (fonctorielle) de toute flèche f de \widehat{A} en $f = pi$ où i est une cofibration, et où p est une fibration triviale. On en déduit facilement qu'une fibration q est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale. En effet, on peut factoriser q en $q = pi$ où $i \in \mathbf{Cof}$ et où $p \in r(\mathbf{Cof})$, et comme $p \in \mathcal{W}$ par le corollaire 2.2.17, si $q \in \mathcal{W}$, cela implique que $i \in \mathcal{W}$. Le lemme de rétracte montre donc que q est une fibration triviale, puisque p en est une. La réciproque n'est autre que le corollaire 2.2.17.

Ceci posé, on voit qu'en vue de la démonstration du théorème 2.2.13, les axiomes CM1, CM2, CM3 et CM4 sont vérifiés, le corollaire 2.1.29 assurant une moitié de l'axiome CM5. Cela signifie qu'il suffit de montrer que toute flèche f de \widehat{A} se factorise (par l'argument du petit objet) en une cofibration triviale suivie d'une fibration.

PROPOSITION 2.2.19. *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de \widehat{A} en $f = pi$ où p est une fibration naïve, et où i est un composé transfini d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ (en particulier, i est une extension anodine).*

DÉMONSTRATION. Le corollaire 2.1.11 permet d'appliquer l'argument du petit objet à l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. \square

PROPOSITION 2.2.20. *Soit $K \rightarrow L$ une cofibration (resp. une extension anodine). Alors pour $e = 0, 1$, $K \otimes I \cup L \otimes \{e\} \rightarrow L \otimes I$ (resp. $K \otimes I \cup L \otimes \partial I \rightarrow L \otimes I$) est une extension anodine. En particulier, pour tout préfaisceau X sur A , les morphismes $\partial_X^e : X \rightarrow X \otimes I$ sont des extensions anodines.*

DÉMONSTRATION. Voir [26, lemme 4.2.4]. \square

REMARQUE 2.2.21. Cet énoncé permet de montrer que l'ensemble des extensions anodines ne dépend pas du choix d'un modèle cellulaire, mais seulement de la donnée homotopique.

Les techniques de la démonstration de la proposition ci-dessus permettent d'affiner l'ensemble générateur des extensions anodines dans le cas suivant. Soient A une petite catégorie, et $(I, \partial^0, \partial^1)$ un segment séparant de \widehat{A} . On se donne un

modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} , et on forme l'ensemble $\Lambda'_I(\mathcal{M})$ des monomorphismes de la forme

$$K \times I \cup L \times \{e\} \longrightarrow L \times I$$

pour $e = 0, 1$, et $K \longrightarrow L \in \mathcal{M}$. Si on considère I comme une donnée homotopique (élémentaire), en reprenant les notations du paragraphe 2.2.11, on a l'égalité

$$l(r(\Lambda'_I(\mathcal{M}))) = l(r(\Lambda_I(\varnothing, \mathcal{M}))) .$$

LEMME 2.2.22. *Soient K et T deux objets de \widehat{A} , T étant fibrant. Alors la relation de \mathcal{I} -homotopie sur $\mathbf{Hom}_{\widehat{A}}(K, T)$ est une relation d'équivalence. En particulier, si $u, v : K \longrightarrow T$ sont deux morphismes de préfaisceaux, alors $u = v$ dans $h_{\mathcal{I}}(A)$ si et seulement s'il existe un morphisme $h : K \otimes I \longrightarrow T$ tel que $h(1_K \otimes \partial^0) = u$ et $h(1_K \otimes \partial^1) = v$.*

DÉMONSTRATION. La réflexivité est immédiate : si $u : K \longrightarrow T$ est une flèche de \widehat{A} , $u\sigma_K : K \otimes I \longrightarrow T$ est une homotopie de u vers u .

Montrons la symmétrie : soit $h : K \otimes I \longrightarrow T$ un morphisme de préfaisceaux. On pose $u = h\partial_K^0$ et $v = h\partial_K^1$, et on veut trouver un morphisme $H : K \otimes I \longrightarrow T$ tel que $u = H\partial_K^1$ et $v = H\partial_K^0$. En remarquant que $K \otimes \partial I \otimes I = (K \otimes I) \amalg (K \otimes I)$, on définit une flèche $f : K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{1\} \longrightarrow T$ par $f = ((v\sigma_K, h), v\sigma_K)$, et on obtient un relèvement k (en vertu de la proposition 2.2.20) :

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{1\} & \longrightarrow & T \\ \downarrow & \nearrow k & \\ K \otimes I \otimes I & & \end{array} .$$

On pose alors $H = k\partial_{K \otimes I}^0$. Il vient les égalités

$$H\partial_K^0 = k\partial_{K \otimes I}^0\partial_K^0 = k(\partial_K^0 \otimes 1_I)\partial_K^0 = v\sigma_K\partial_K^0 = v$$

$$\text{et } H\partial_K^1 = k\partial_{K \otimes I}^0\partial_K^1 = k(\partial_K^1 \otimes 1_I)\partial_K^0 = h\partial_K^0 = u .$$

Pour montrer la transitivité, vu qu'on a déjà la symmétrie, il suffit de montrer que si on a deux flèches $h, k : K \otimes I \longrightarrow T$ telles que $h\partial_K^0 = k\partial_K^0 = v$ et $h\partial_K^1 = u$, $k\partial_K^1 = w$, alors il existe une flèche $l : K \otimes I \longrightarrow T$ telle que $l\partial_K^0 = u$ et $l\partial_K^1 = w$. Or on a une flèche $g : K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{0\} \longrightarrow T$ donnée par $g = ((h, k), v\sigma_K)$, ce qui permet d'obtenir un relèvement q :

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \partial I \otimes I \cup K \otimes I \otimes \{0\} & \longrightarrow & T \\ \downarrow & \nearrow q & \\ K \otimes I \otimes I & & \end{array} .$$

On pose $l = q\partial_{K \otimes I}^1$. Alors il vient comme ci-dessus les égalités $l\partial_K^0 = h\partial_K^1 = u$ et $l\partial_K^1 = k\partial_K^1 = w$. \square

PROPOSITION 2.2.23. *Toute extension anodine est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Soient $j : K \longrightarrow L$ une extension anodine, et T un objet fibrant de \widehat{A} . Il faut montrer que l'application

$$j^* : \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(L, T) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(K, T)$$

est bijective. Or la surjectivité est immédiate : soit $k : K \longrightarrow T$ une flèche de \widehat{A} . Il vient un relèvement l de j sous k :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & T \\ j \downarrow & \nearrow l & \\ L & & \end{array} .$$

On a donc l'égalité $j^*l = k$.

Pour l'injectivité on considère deux flèches $l_0, l_1 : L \longrightarrow T$ telles que $l_0j = l_1j$ dans $h_{\mathcal{I}}(A)$. Par le lemme 2.2.22, il existe un morphisme $h : K \otimes I \longrightarrow T$ tel que $h\partial_K^0 = l_0j$ et $h\partial_K^1 = l_1j$. On obtient une flèche $u : K \otimes I \cup L \otimes \partial I \longrightarrow T$, définie par $u = (h, l_0, l_1)$, et grâce à la proposition 2.2.20, on a le relèvement suivant :

$$\begin{array}{ccc} K \otimes I \cup L \otimes \partial I & \longrightarrow & T \\ \downarrow & \nearrow H & \\ L \otimes I & & \end{array} .$$

Il vient les égalités $H\partial_L^e = l_e$ pour $e = 0, 1$, autrement dit, $l_0 = l_1$ dans $h_{\mathcal{I}}(A)$. \square

LEMME 2.2.24. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de \widehat{A} , les préfaisceaux X et Y étant fibrants. Alors le morphisme f est une équivalence faible si et seulement si c'est une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie (i.e. $Q(f)$ est un isomorphisme de $h_{\mathcal{I}}(A)$).

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que c'est une condition suffisante. Supposons que f soit une équivalence faible. Comme X est fibrant, il vient une bijection

$$f^* : \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(Y, X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(X, X) ,$$

et par suite, il existe une flèche $g : Y \longrightarrow X$ dans \widehat{A} telle que $Q(g)Q(f) = 1_X$. On en déduit que pour tout objet fibrant T , l'application

$$g^* : \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(X, T) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{h_{\mathcal{I}}(A)}(Y, T)$$

est bijective, et donc comme ci-dessus, puisque Y est aussi fibrant, que $Q(g)$ admet un inverse à gauche dans $h_{\mathcal{I}}(A)$. Par conséquent, $Q(g)$ est un isomorphisme, et par conséquent, il en est de même de $Q(f)$. \square

SCHOLIE 2.2.25. La catégorie localisée $\mathcal{W}^{-1}\widehat{A}$ est la localisation de \widehat{A} par les extensions anodines.

En effet, soit \mathbf{Anod} la classe des extensions anodines, et

$$\gamma : \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Anod}^{-1}\widehat{A}$$

le foncteur de localisation. Comme $\mathbf{Anod} \subset \mathcal{W}$, il suffit de vérifier que ce dernier envoie toutes les équivalences faibles sur un isomorphisme. En vertu de la proposition 2.2.20, pour tout préfaisceau X sur A , les morphismes $\partial_X^e : X \longrightarrow X \otimes I$ sont des extensions anodines, ce qui implique que le foncteur γ se factorise de manière

unique par la catégorie $h_{\mathcal{I}}(A)$ (pour être plus précis, il s'agit de remarquer que comme $\sigma_X \partial_X^e = 1_X$, $\gamma(\sigma_X)$ est un isomorphisme, ce qui implique l'identification $\gamma(\partial_X^0) = \gamma(\partial_X^1)$, puis l'assertion). Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence faible. Alors en vertu de la proposition 2.2.19, on peut choisir une extension anodine de but fibrant $j : Y \rightarrow Y'$, puis une factorisation de jf en une extension anodine $i : X \rightarrow X'$ suivie d'une fibration naïve $f' : X' \rightarrow Y'$. Comme f , i et j sont des équivalences faibles, il en est de même de f' , et donc il résulte du lemme 2.2.24 que f' est une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie. On en déduit que $\gamma(f')$ est un isomorphisme, ce qui implique que $\gamma(f)$ en est un aussi.

LEMME 2.2.26. *Soit $p : X \rightarrow Y$ une fibration naïve. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *La flèche p est une fibration triviale.*
- (b) *La flèche p est le dual d'un rétracte par déformation fort.*

DÉMONSTRATION. L'implication (a) \Rightarrow (b) résulte de la proposition 2.2.16.

Il reste donc à montrer l'implication (b) \Rightarrow (a). On se donne donc des morphismes $s : Y \rightarrow X$ et $k : X \otimes I \rightarrow X$ tels que $ps = 1_Y$, $k\partial_X^0 = 1_X$, $k\partial_X^1 = sp$, et $pk = p\sigma_X$, et on veut montrer que p est une fibration triviale. On considère un monomorphisme $i : K \rightarrow L$, et un carré commutatif dans \widehat{A} ,

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{b} & Y \end{array} ,$$

dont on va montrer qu'il admet un relèvement l . Or il résulte des égalités $psb = b = b\sigma_L\partial_L^1$ et $pk(a \otimes 1_I) = p\sigma_X(a \otimes 1_I) = pa\sigma_K = bi\sigma_K = b\sigma_L(i \otimes 1_I)$ que le carré ci-dessous est commutatif, et donc de la proposition 2.2.20, qu'il admet un relèvement $\lambda : L \otimes I \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes I \cup L \otimes \{1\} & \xrightarrow{(k(a \otimes 1_I), sb)} & X \\ j \downarrow & & \downarrow p \\ L \otimes I & \xrightarrow{\sigma_L} L \xrightarrow{b} & Y \end{array} .$$

On pose $l = \lambda\partial_L^0$. Il vient alors les relations $pl = p\lambda\partial_L^0 = b\sigma_L\partial_L^0 = b$ et $li = \lambda\partial_L^0 i = \lambda(j \otimes 1_I)\partial_K^0 = k(a \otimes 1_I)\partial_K^0 = k\partial_X^0 a = a$. \square

LEMME 2.2.27. *Une fibration naïve de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale.*

DÉMONSTRATION. Soit $p : X \rightarrow Y$ une fibration naïve de but fibrant. Par le lemme 2.2.24, p est une équivalence faible si et seulement si c'est une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie (*i.e.* si $Q(p)$ est un isomorphisme). Donc si p est une équivalence faible, par le lemme 2.2.22, il existe une flèche $k : Y \otimes I \rightarrow Y$, et une flèche

$t : Y \longrightarrow X$, telles que $k\partial_X^0 = 1_Y$ et $k\partial_X^1 = pt$. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{t} & X \\ \partial_Y^1 \downarrow & & \downarrow p \\ Y \otimes I & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

qui admet un relèvement $k' : Y \otimes I \longrightarrow X$. On pose $s = k'\partial_Y^0$. Alors $ps = pk'\partial_Y^0 = k\partial_Y^0 = 1_Y$. D'autre part, comme $Q(p)$ est un isomorphisme, il vient $Q(s)Q(p) = 1_X$, et donc par le lemme 2.2.22, il existe une \mathcal{I} -homotopie de 1_X vers sp . On se donne donc une flèche $h : X \otimes I \longrightarrow X$ telle que $h\partial_X^0 = 1_X$ et $h\partial_X^1 = sp$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \partial I & \xrightarrow{\partial_{X \otimes \partial I}^1} & X \otimes \partial I \otimes I \\ (\partial_X^0, \partial_X^1) \downarrow & & \downarrow (h, sph) \\ X \otimes I & \xrightarrow{sp\sigma_X} & X \end{array} ,$$

ce qui définit une flèche $(sp\sigma_X, (h, sph)) : X \otimes I \otimes \{1\} \cup X \otimes \partial I \otimes I \longrightarrow X$. On a d'autre part les relations $psp\sigma_X = ph\partial_X^1\sigma_X = ph(\sigma_X \otimes 1_I)\partial_{X \otimes I}^1$, et $p(h, sph) = ph(\sigma_X \otimes 1_I)((\partial_X^0, \partial_X^1) \otimes 1_I)$, ce qui montre la commutativité du carré suivant,

$$\begin{array}{ccc} X \otimes I \otimes \{1\} \cup X \otimes \partial I \otimes I & \xrightarrow{(sp\sigma_X, (h, sph))} & X \\ (\partial_{X \otimes I}^1, (\partial_X^0 \otimes 1_I, \partial_X^1 \otimes 1_I)) \downarrow & & \downarrow p \\ X \otimes I \otimes I & \xrightarrow{\sigma_X \otimes 1_I} X \otimes I \xrightarrow{h} X \xrightarrow{p} & Y \end{array} ,$$

ce dernier admettant un relèvement $H : X \otimes I \otimes I \longrightarrow X$. On pose $K = H\partial_{X \otimes I}^0$. Alors $K\partial_X^0 = H\partial_{X \otimes I}^0\partial_X^0 = H(\partial_X^0 \otimes 1_I)\partial_X^0 = h\partial_X^0 = 1_X$, $K\partial_X^1 = H\partial_{X \otimes I}^0\partial_X^1 = H(\partial_X^1 \otimes 1_I)\partial_X^0 = sph\partial_X^0 = sp$, et $pK = pH\partial_{X \otimes I}^0 = ph(\sigma_X \otimes 1_I)\partial_{X \otimes I}^0 = ph\partial_X^0\sigma_X = p\sigma_X$. Le lemme 2.2.26 montre que p est une fibration triviale. La réciproque résulte du corollaire 2.2.17. \square

COROLLAIRE 2.2.28. *Une cofibration de but fibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une extension anodine.*

DÉMONSTRATION. Soit $i : K \longrightarrow L$ une cofibration, le préfaïceau L étant fibrant. On factorise i en $i = qj$ où j est une extension anodine, et où q est une fibration naïve. Alors en vertu de la proposition 2.2.23, i est une équivalence faible si et seulement si q est une équivalence faible, et par la proposition ci-dessus, q est une équivalence faible si et seulement si c'est une fibration triviale. Donc si i est une équivalence faible, q vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à i , et par suite, i est un rétracte de j , ce qui montre que i est une extension anodine. La réciproque a déjà été montrée (voir la proposition 2.2.23). \square

PROPOSITION 2.2.29. *Une cofibration est une équivalence faible si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe*

des fibrations naïves de but fibrant. En particulier, toute fibration naïve de but fibrant est une fibration, et pour tout préfaisceau X sur A , l'unique flèche $X \rightarrow *$ est une fibration si et seulement si X est fibrant.

DÉMONSTRATION. Soit $i : K \rightarrow L$ une cofibration. Il existe une extension anodine de but fibrant $j : L \rightarrow L'$ (par la proposition 2.2.19, en factorisant l'unique morphisme $L \rightarrow *$), et par le corollaire 2.2.28, i est une équivalence faible si et seulement si ji est une extension anodine.

Supposons que i soit une équivalence faible, et considérons un carré commutatif

$$(2.2.29.1) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{b} & Y \end{array} ,$$

où la flèche p est une fibration naïve de but fibrant. On veut montrer qu'il admet un relèvement. Comme Y est fibrant, et comme j est une extension anodine, il vient un relèvement $b' : L' \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{b} & Y \\ j \downarrow & \nearrow b' & \\ L' & & \end{array} .$$

On obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X \\ ji \downarrow & & \downarrow p \\ L' & \xrightarrow{b'} & Y \end{array} ,$$

lequel admet un relèvement $l : L' \rightarrow X$. Il vient alors les égalités $lji = a$ et $plj = b'j = b$. Le morphisme lj est donc un relèvement du carré (2.2.29.1).

Réciproquement, si i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à la classe des fibrations naïves de but fibrant, on factorise ji en $ji = pk$ où $k : K \rightarrow K'$ est une extension anodine, et $p : K' \rightarrow L'$ est une fibration naïve (2.2.19). Vu que i et j vérifient la propriété de relèvement à gauche relativement à p , il en est de même de ji . On en déduit que ji est un rétracte de k , et donc que c 'est une extension anodine. Par conséquent, i est une équivalence faible. \square

COROLLAIRE 2.2.30. *Les équivalences faibles forment un A -localisateur.*

DÉMONSTRATION. On sait déjà que l'ensemble des équivalences faibles est faiblement saturé, et qu'il contient les fibrations triviales (par le corollaire 2.2.17). Les propriétés de stabilité par compositions transfinies et par images directes résultent de la proposition 2.2.29, car tout ensemble de flèches défini par une propriété de relèvement à gauche relativement à un autre ensemble de flèches est stable par images directes et par compositions transfinies. \square

LEMME 2.2.31. *Tout rétracte par déformation fort est une extension anodine.*

DÉMONSTRATION. Soit $i : K \longrightarrow L$ un rétracte par déformation fort. Alors par définition, il existe des morphismes $r : L \longrightarrow K$, $h : L \otimes I \longrightarrow L$, tels que $ri = 1_K$, $h\partial_L^0 = 1_L$, $h\partial_L^1 = ir$, et $h(i \otimes 1_I) = \sigma_L(i \otimes 1_I)$. Considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{v} & Y \end{array} ,$$

dans lequel p est une fibration naïve, et montrons qu'il admet un relèvement. On remarque qu'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K \otimes I \cup L \otimes \{1\} & \xrightarrow{(u\sigma_K, ur)} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ L \otimes I & \xrightarrow{vh} & Y \end{array} ,$$

et que ce dernier admet un relèvement $K : L \otimes I \longrightarrow X$, par la proposition 2.2.20. On pose $l = K\partial_L^0$. On a alors $li = K\partial_L^0 i = K(i \otimes 1_I)\partial_K^0 = u\sigma_K\partial_K^0 = u$, et $pl = pK\partial_L^0 = vh\partial_L^0 = v$. \square

LEMME 2.2.32. *Toute extension anodine de source et de but fibrants est un rétracte par déformation fort.*

DÉMONSTRATION. Soit $i : K \longrightarrow L$ une extension anodine de source et de but fibrants. On obtient d'abord un relèvement :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{1_K} & K \\ i \downarrow & \nearrow r & \\ L & & \end{array} ,$$

ce qui permet de définir le morphisme $(i\sigma_K, (1_L, ir))$, et ainsi d'obtenir un relèvement h dans le diagramme suivant (en vertu de la proposition 2.2.20) :

$$\begin{array}{ccc} K \otimes I \cup L \otimes \partial I & \xrightarrow{(i\sigma_K, (1_L, ir))} & L \\ \downarrow & \nearrow h & \\ L \otimes I & & \end{array} .$$

On vérifie alors les équations $h\partial_L^0 = 1_L$, $h\partial_L^1 = ir$, et $h(i \otimes 1_I) = i \otimes \sigma$. \square

L'énoncé suivant, ainsi que sa démonstration, sont directement inspirés de leurs analogues dans [24].

PROPOSITION 2.2.33. *Pour tout cardinal assez grand α , si on pose $\beta = 2^\alpha$, pour toute cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$, et pour tout sous-objet β -accessible J de D , il existe un sous-objet β -accessible K de D , qui contient J , tel que l'inclusion $C \cap K \longrightarrow K$ soit une cofibration triviale.*

DÉMONSTRATION. On va utiliser la proposition 2.1.33, appliquée au foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$ défini à partir de l'ensemble $\mathcal{N} = \Lambda_{\mathcal{T}}(S, \mathcal{M})$ et d'un ensemble bien ordonné bien choisi, tel que pour tout préfaisceau X sur A , LX soit fibrant (voir la section sur l'argument du petit objet dans [26] pour plus de détails). On reprendra les mêmes notations que celles de 2.1.33. On rappelle que les propriétés suivantes sont vérifiées (voir les propositions 2.1.16, 2.1.18 et 2.1.33) :

- (a) le foncteur L respecte les monomorphismes ;
- (b) si $X \longrightarrow Z$ et $Y \longrightarrow Z$ sont deux monomorphismes de \widehat{A} , la flèche canonique $L(X \cap Y) \longrightarrow L(X) \cap L(Y)$ est un isomorphisme ;
- (c) Les foncteur L et I sont accessibles. Par conséquent, il existe un cardinal α_0 tel que pour tout cardinal $\alpha \geq \alpha_0$, les foncteurs L et I sont α -accessibles, et si $\beta = 2^\alpha$, alors L et I envoient tout objet β -accessible de \widehat{A} sur un objet β -accessible ;
- (d) Il existe un cardinal β_0 tel que pour tout cardinal $\beta \geq \beta_0$, tout préfaisceau X sur A est la réunion β -filtrante de ses sous-objets β -accessibles, et tout sous-objet β -accessible Y de LX est contenu dans un sous-objet de LX de la forme LZ , où Z est un sous-objet β -accessible de X ;
- (e) il existe un morphisme de foncteurs $l : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$ tel que pour tout préfaisceau X sur A , l_X soit une extension anodine.

Considérons une cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{l_C} & LC \\ i \downarrow & & \downarrow Li \\ D & \xrightarrow{l_D} & LD \end{array} .$$

On remarque que Li est une cofibration triviale de source et de but fibrants, et donc d'après le lemme précédent et le corollaire 2.2.28, c'est un rétracte par déformation fort. Il existe donc des morphismes $r : LD \longrightarrow LC$, et $h : LD \otimes I \longrightarrow LD$, tels que $rLi = 1_{LC}$, $h\partial_{LD}^0 = 1_{LD}$, $h\partial_{LD}^1 = L(i)r$, et $h(Li \otimes 1_I) = Li \otimes \sigma$.

On choisit un cardinal infini α assez grand (*i.e.* majorant les cardinaux α_0 et β_0 des conditions (c) et (d) ci-dessus), on note α^+ le cardinal successeur de α , vu comme un ensemble bien ordonné, puis on pose $\beta = 2^\alpha$. On sait que α^+ est un ensemble ordonné α -filtrant, et que $\alpha^+ \leq \beta$.

On se donne un sous-objet β -accessible J de D . On va construire une suite de sous-objets β -accessibles de D

$$K_0 \subset \dots \subset K_\gamma \subset K_{\gamma+1} \subset \dots \subset D, \quad \gamma \in \alpha^+,$$

telle que K_0 contienne J , la composée $LK_\gamma \otimes I \longrightarrow LD$, de l'inclusion $LK_\gamma \otimes I \longrightarrow LD \otimes I$ et de $h : LD \otimes I \longrightarrow LD$, se factorise par un morphisme $k_\gamma : LK_\gamma \otimes I \longrightarrow LK_{\gamma+1}$ (ces factorisations étant nécessairement uniques, puisque les flèches $LK_\gamma \longrightarrow LD$ sont des monomorphismes). Pour cela, on pose $K_0 = J$. Si $\gamma > 0$, et si on a construit les $K_{\gamma'}$ pour tout $\gamma' < \gamma$, on pose $K'_\gamma = \varinjlim_{\gamma' < \gamma} K_{\gamma'}$. Alors K'_γ est toujours β -accessible par la proposition 2.1.10, ainsi que $LK'_\gamma \otimes I$. Comme LD est la réunion β -filtrante de ses sous-objets β -accessibles, le morphisme $LK'_\gamma \otimes I \longrightarrow$

LD , composé de l'inclusion $LK'_\gamma \otimes I \longrightarrow LD \otimes I$ et du morphisme $h : LD \otimes I \longrightarrow LD$, se factorise par un sous-objet β -accessible de LD , lequel est contenu dans un LK''_γ , où K''_γ est un sous-objet β -accessible de D par la propriété (d). On pose enfin $K_\gamma = K'_\gamma \cup K''_\gamma$.

Soit $K = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} K_\gamma$. La proposition 2.1.10 montre que K est un objet β -accessible. Grâce à l' α -accessibilité de L , et à l'universalité des limites inductives dans \widehat{A} , on a les identifications suivantes

$$LK = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} LK_\gamma, \quad K \cap C = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} K_\gamma \cap C, \quad \text{et} \quad L(K \cap C) = \varinjlim_{\gamma \in \alpha^+} L(K_\gamma \cap C).$$

On obtient un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} LK \otimes I & \xrightarrow{k} & LK \\ \downarrow & & \downarrow \\ LD \otimes I & \xrightarrow{h} & LD \end{array},$$

où k est la limite inductive des morphismes k_γ . D'autre part, on a des isomorphismes $L(K_\gamma \cap C) \longrightarrow L(K_\gamma) \cap L(C)$, ce qui implique que les morphismes $LK_\gamma \longrightarrow LC$, composés de $LK_\gamma \longrightarrow LD$ et de r se factorisent de manière unique en des morphismes $s_\gamma : LK_\gamma \longrightarrow L(K_{\gamma+1} \cap C)$, tels qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} LK_\gamma & \xrightarrow{s_\gamma} & L(K_{\gamma+1} \cap C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ LD & \xrightarrow{r} & LC \end{array},$$

et induit un morphisme $s : LK \longrightarrow L(K \cap C)$, tel que le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc} LK & \xrightarrow{s} & L(K \cap C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ LD & \xrightarrow{r} & LC \end{array},$$

comme la limite inductive des flèches s_γ .

On vérifie facilement que la donnée de k et de s fait de l'inclusion $L(K \cap C) \longrightarrow LK$ un rétracte par déformation fort, et donc une équivalence faible (et même une extension anodine par le corollaire 2.2.28). Par conséquent, le morphisme $K \cap C \longrightarrow K$ est une cofibration triviale. \square

PROPOSITION 2.2.34. *Il existe un petit ensemble \mathcal{N} de cofibrations triviales, tel que $l(r(\mathcal{N})) = \text{Cof} \cap \mathcal{W}$.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte des propositions 2.2.33 et 2.1.16, ainsi que du lemme 2.1.25. \square

COROLLAIRE 2.2.35. *Il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche f de \widehat{A} en $f = qj$, où j est une cofibration triviale, et où q est une fibration.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la proposition 2.2.34 et de l'argument du petit objet. \square

2.2.36. Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.13, en vertu de la remarque 2.2.18.

REMARQUE 2.2.37. Le théorème 2.2.13 est susceptible de raffinements. Par exemple, la notion d'extension anodine détermine celle d'objets fibrants (proposition 2.2.29), et donc celle d'équivalence faible (du moins une fois choisie une notion d'équivalence d'homotopie adéquate). Il est d'autre part naturel de se demander si toute cofibration triviale est une extension anodine. La réponse est négative en général (voir [24, exemple 4.2.14]).

PROPOSITION 2.2.38. *Soit A une petite catégorie munie d'une donnée homotopique (\mathcal{I}, S) . On considère la structure de catégorie de modèles fermée sur \widehat{A} engendrée par celle-ci. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Toute cofibration triviale est une extension anodine.*
- (b) *Toute fibration naïve est une fibration.*
- (c) *Toute fibration naïve qui est aussi une équivalence faible est une fibration triviale.*
- (d) *Toute fibration naïve p admet une factorisation de la forme $p = qj$, où q est une fibration, et où j est une extension anodine.*

DÉMONSTRATION. L'implication (a) \Rightarrow (b) se vérifie immédiatement en considérant les propriétés de relèvement correspondantes, et il en est de même pour l'implication (b) \Rightarrow (c).

Vérifions (c) \Rightarrow (d). Soit p une fibration naïve. On peut factoriser p en $p = ri$, où r est une fibration et i une cofibration triviale, puis factoriser i en $i = sj$, où s est une fibration naïve, et j une extension anodine. Comme s est une équivalence faible, c'est une fibration triviale, et donc en particulier une fibration. Par conséquent, $q = rs$ est une fibration.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que (d) \Rightarrow (a). Si i est une cofibration triviale, on la factorise en $i = qj$, où q est une fibration naïve, et où j est une extension anodine, puis on factorise q en une extension anodine k , suivie d'une fibration r . On obtient ainsi une factorisation de i en une extension anodine suivie d'une fibration, ce qui permet de conclure grâce au lemme du rétracte. \square

2.2.39. Si I est un ensemble de flèches d'une catégorie \mathcal{C} , on note I/X l'ensemble des flèches de \mathcal{C}/X de la forme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & L \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array},$$

où $u \in I$.

LEMME 2.2.40. *Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des petites limites inductives, et X un objet de \mathcal{C} . On a alors pour tout petit ensemble I de flèches de \mathcal{C} permettant l'argument du petit objet, l'égalité $l(r(I/X)) = l(r(I))/X$.*

DÉMONSTRATION. Nous laissons au lecteur l'exercice facile consistant à montrer que I/X est un petit ensemble de flèches de \mathcal{C}/X permettant l'argument du petit objet. On vérifie immédiatement l'inclusion $I/X \subset l(r(I))/X$, et on en déduit que $l(r(I/X)) \subset l(r(I))/X$ (grâce à 2.1.24). D'autre part, si

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & L \\ & \searrow k & \swarrow l \\ & & X \end{array}$$

est un élément de $l(r(I))/X$, on factorise u par l'argument du petit objet en $u = pi$, où $p \in r(I)$ et $i \in l(r(I))$. En explicitant cette construction, on remarque qu'alors i peut être vu comme un élément de $\text{Cell}(I/X)$. Le lemme résulte ainsi de l'égalité $r(I/X) = r(I)/X$ et du lemme du rétracte. \square

2.2.41. Soient A une petite catégorie, (\mathcal{I}, S) une donnée homotopique sur A , et \mathcal{M} un modèle cellulaire de \widehat{A} . On fixe un préfaisceau X sur A . Alors \mathcal{M}/X est un modèle cellulaire de $\widehat{A}/X \simeq \widehat{A}/\widehat{X}$. On définit la *donnée homotopique induite sur X* , notée (\mathcal{I}_X, S_X) sur A/X en posant pour tout objet (Y, f) de \widehat{A}/X , $(Y, f) \otimes I_X = (Y \otimes I, f\sigma_Y)$, et $S_X = \Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})/X$. Un calcul immédiat montre que

$$(2.2.41.1) \quad \Lambda_{\mathcal{I}_X}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})/X, \mathcal{M}/X) = \Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})/X .$$

LEMME 2.2.42. *Soit A une petite catégorie munie d'une donnée homotopique, et X un préfaisceau sur A . On considère la donnée homotopique sur A/X induite sur X . Alors une flèche*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{y} & Y' \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

de \widehat{A}/X est une extension anodine si et seulement si y en est une dans \widehat{A} .

DÉMONSTRATION. Cela résulte du lemme 2.2.40 et de l'égalité (2.2.41.1). \square

2.2.43. Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, si X est un préfaisceau sur A , la donnée homotopique induite sur X définit une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur \widehat{A}/X . On appellera *X -équivalences faibles* les équivalences faibles de cette structure. Une vérification immédiate montre qu'une flèche de préfaisceaux sur A au-dessus de X est une fibration triviale (resp. une fibration naïve) si et seulement si son image par le foncteur d'oubli \mathcal{U}_X en est une. Les objets fibrants de \widehat{A}/X sont donc simplement les fibrations naïves de but X dans \widehat{A} (2.2.29). On sait que le foncteur d'oubli

$$\mathcal{U}_X : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}$$

envoie les extensions anodines sur des extensions anodines. On en déduit que le foncteur \mathcal{U}_X envoie les X -équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles (puisque toute X -équivalence faible entre objets fibrants est

la composée d'une extension anodine suivie d'une fibration triviale). Comme tout préfaisceau sur A/X peut être approximé fonctoriellement par un objet fibrant à une extension anodine près, on en déduit que le foncteur \mathcal{U}_X envoie les X -équivalences faibles sur des équivalences faibles (cette assertion est un corollaire immédiat du lemme ci-dessus et de la proposition 2.3.2 ci-après).

En résumé, si \mathbf{An} désigne l'ensemble des extensions anodines et \mathbf{FibN} celui des fibrations naïves, et si on note avec un indice X les notions correspondantes pour la donnée homotopique induite sur X , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{An}_X &= \mathbf{An}/X \quad , & \mathbf{FibN}_X &= \mathbf{FibN}/X \quad , \\ \mathbf{Cof}_X &= \mathbf{Cof}/X \quad , & \mathbf{Fib}_X \cap \mathcal{W}_X &= (\mathbf{Fib} \cap \mathcal{W})/X \quad , \\ \mathcal{W}_X &\subset \mathcal{W}/X \quad , & \mathbf{Cof}_X \cap \mathcal{W}_X &\subset (\mathbf{Cof} \cap \mathcal{W})/X \quad , & \mathbf{Fib}/X &\subset \mathbf{Fib}_X \end{aligned}$$

Ces préliminaires permettent de formuler un complément à la proposition 2.2.38 comme suit.

PROPOSITION 2.2.44. *Soit A une petite catégorie munie d'une donnée homotopique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Toute cofibration triviale de \widehat{A} est une extension anodine.*
- (b) *Pour tout préfaisceau X sur A , les X -équivalences faibles sont les flèches de \widehat{A}/X dont l'image par le foncteur d'oubli vers \widehat{A} est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Pour voir que (a) implique (b), on remarque que toute flèche f de \widehat{A}/X admet une factorisation de la forme $f = pi$, où i est une cofibration, et p une fibration triviale. Comme l'image de p par le foncteur d'oubli \mathcal{U}_X de \widehat{A}/X vers \widehat{A} est une fibration triviale, $\mathcal{U}_X f$ est une équivalence faible si et seulement si $\mathcal{U}_X i$ en est une. Or (a) implique que $\mathcal{U}_X i$ est une équivalence faible si et seulement si elle est une extension anodine. Il résulte donc du lemme 2.2.42 que si $\mathcal{U}_X f$ est une équivalence faible, alors f est une X -équivalence faible. Vu que le foncteur \mathcal{U}_X envoie les X -équivalences faibles sur des équivalences faibles, cela permet bien de conclure.

Supposons la condition (b) vérifiée, et considérons une cofibration triviale $i : K \longrightarrow L$. Alors i peut être vue par hypothèse comme une cofibration triviale de \widehat{A}/L :

$$i : (K, i) \longrightarrow (L, 1_L) .$$

Comme $(L, 1_L)$ est un objet fibrant de \widehat{A}/L , il résulte du corollaire 2.2.28 que cette dernière est une extension anodine dans \widehat{A}/L , et donc en vertu du lemme 2.2.42, i est une extension anodine dans \widehat{A} . On a ainsi prouvé la réciproque. \square

3. A-localisateurs

Dans cette section, on va mettre en lumière le lien entre les notions de donnée homotopique et de A -localisateur (voir la définition 1.3.9).

DÉFINITION 2.3.1. Soit A une petite catégorie. Si S est un ensemble de flèches de \widehat{A} , le A -localisateur engendré par S , noté $\mathcal{W}(S)$, est l'intersection de tous les

A -localisateurs contenant S . Un A -localisateur est *accessible* s'il est engendré par un petit ensemble. Le A -localisateur *minimal* est le A -localisateur $\mathcal{W}(\emptyset)$.

PROPOSITION 2.3.2. *Soient A une petite catégorie, et (\mathcal{I}, S) une donnée homotopique sur A . On note \mathcal{W} l'ensemble des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée sur \widehat{A} obtenue à partir de (\mathcal{I}, S) par le théorème 2.2.13, et on choisit un modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} , ce qui permet de définir un ensemble d'extensions anodines $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$. En particulier, \mathcal{W} est un A -localisateur accessible.*

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})) \subset \mathcal{W}$ résulte de la minimalité du A -localisateur $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$ relativement à $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$ et du corollaire 2.2.30.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un élément de \mathcal{W} . Par un double application de la proposition 2.2.19, on construit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{j} & Y' \end{array} \quad ,$$

où f' est une fibration naïve de but fibrant, et i, j sont des composés transfinis d'images directes d'éléments de $\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$. On sait alors que les morphismes i et j sont des éléments de $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$, et donc en vertu du lemme 2.2.27, f' est une fibration triviale. Par conséquent, f' est un élément de $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}))$, et il en est de même de f . \square

LEMME 2.3.3. *Soient A une petite catégorie, (\mathcal{I}, S) une donnée homotopique sur A , et \mathcal{M} un modèle cellulaire de \widehat{A} . On considère une classe \mathcal{C} de monomorphismes de \widehat{A} vérifiant les conditions de stabilité suivantes.*

- (a) *La classe \mathcal{C} est stable par compositions et par images directes.*
- (b) *Si $u : X \rightarrow Y$ et $v : Y \rightarrow Z$ sont deux monomorphismes de \widehat{A} , et si v et u sont dans \mathcal{C} , alors v est dans \mathcal{C} .*
- (c) *Pour tout préfaisceau X sur A , les inclusions $\partial_X^\varepsilon : X \rightarrow X \otimes I$, $\varepsilon = 0, 1$, sont dans \mathcal{C} , et $S \subset \mathcal{C}$.*

Alors on a l'inclusion

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M}) \subset \mathcal{C} .$$

Si en outre \mathcal{C} est stable par compositions transfinies et par rétractes, alors la classe \mathcal{C} contient toutes les extensions anodines définies par (\mathcal{I}, S) .

DÉMONSTRATION. On remarque que (a) implique que \mathcal{C} est stable par sommes finies. En particulier, le foncteur ∂I envoie les éléments de \mathcal{C} sur des éléments de \mathcal{C} . Soit $u : X \rightarrow Y$ un élément de \mathcal{C} . On considère le diagramme commutatif suivant, induit par le morphisme de foncteurs $(\partial^0, \partial^1) : \partial I \rightarrow I$ (et donc formé uniquement de monomorphismes).

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \partial I & \longrightarrow & Y \otimes \partial I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes I & \longrightarrow & Y \otimes I \end{array}$$

Comme on vient de le voir, la flèche horizontale du haut est dans \mathbf{C} , et la flèche horizontale du bas (*i.e.* $u \otimes 1_I$) est dans \mathbf{C} : en effet, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \{0\} & \longrightarrow & Y \otimes \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes I & \longrightarrow & Y \otimes I \end{array} ,$$

dans lequel les flèches verticales sont dans \mathbf{C} (en vertu de (c)), et dont la flèche horizontale du haut est dans \mathbf{C} (il s'agit de u elle même); il résulte donc de (b) que la flèche horizontale du bas est bien dans \mathbf{C} . D'autre part, si on forme le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \partial I & \longrightarrow & Y \otimes \partial I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes I & \longrightarrow & X \otimes I \cup Y \otimes \partial I \end{array} ,$$

la condition (a) implique que le morphisme de $X \otimes I$ vers $X \otimes I \cup Y \otimes \partial I$ est dans \mathbf{C} . On a d'autre part le triangle commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes I & \longrightarrow & X \otimes I \cup Y \otimes \partial I \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y \otimes I & \end{array}$$

Or ce qui précède et la condition (b) montrent que la flèche de $X \otimes I \cup Y \otimes \partial I$ vers $Y \otimes I$ est dans \mathbf{C} . En reprenant les notations du paragraphe 2.2.11, on a donc montré que $\Lambda(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que \mathbf{C} contient l'ensemble Λ^0 . On sait déjà que \mathbf{C} contient S (en vertu de (c)), et donc il suffit de montrer que pour tout monomorphisme $K \longrightarrow L$ de \widehat{A} , les morphismes

$$K \otimes I \cup L \otimes \{\varepsilon\} \longrightarrow L \otimes I , \quad \varepsilon = 0, 1$$

est dans \mathbf{C} . On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \{\varepsilon\} & \longrightarrow & L \otimes \{\varepsilon\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \otimes I & \longrightarrow & L \otimes I \end{array} ,$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes, et dont les flèches verticales sont dans \mathbf{C} . En formant le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} K \otimes \{\varepsilon\} & \longrightarrow & L \otimes \{\varepsilon\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \otimes I & \longrightarrow & K \otimes I \cup L \otimes \{\varepsilon\} \end{array} ,$$

on constate que la condition (a) implique que le morphisme de $L \otimes \{\varepsilon\}$ vers $K \otimes I \cup L \otimes \{\varepsilon\}$ est dans \mathbf{C} . Pour conclure, on considère enfin le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \otimes \{\varepsilon\} & \xrightarrow{\quad} & K \otimes I \cup L \otimes \{\varepsilon\} \\ & \searrow & \swarrow \\ & L \otimes I & \end{array},$$

lequel permet de conclure en vertu de la condition (b). \square

THÉORÈME 2.3.4. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} une partie de $\text{Fl } \widehat{A}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Si on note \mathbf{Cof} l'ensemble des monomorphismes de \widehat{A} , et $\mathbf{Fib} = r(\mathbf{Cof} \cap \mathcal{W})$, alors $(\widehat{A}, \mathcal{W}, \mathbf{Fib}, \mathbf{Cof})$ est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant.*
- (b) *L'ensemble \mathcal{W} est un A -localisateur accessible.*

En particulier, pour toute petite catégorie A , \widehat{A} admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}(\emptyset)$, appelée la structure de catégorie de modèles minimale.

DÉMONSTRATION. Supposons que \mathcal{W} soit un A -localisateur accessible, et considérons un petit ensemble T de flèches de \widehat{A} tel que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(T)$. On factorise chaque élément f de T en $f = p_f i_f$, où i_f est un monomorphisme, et où p_f est une fibration triviale (par le corollaire 2.1.29), et on pose $S = \{i_f \mid f \in T\}$. Il est clair que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(S)$. D'autre part, on a une donnée homotopique (\mathcal{L}, S) , où $\mathcal{L} = (L, \lambda^0, \lambda^1)$ est le cylindre de Lawvere (voir l'exemple 2.2.6), et en choisissant un modèle cellulaire \mathcal{M} , on définit un petit ensemble d'extensions anodines $\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M})$. Vu que \mathcal{W} contient toutes les fibrations triviales, et donc en particulier celles du type $X \times L \rightarrow X$, il résulte du lemme ci-dessus que $\mathcal{W}(S)$ contient $\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M})$, et donc qu'il contient $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M}))$. Comme il est clair que S est contenu dans $\mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M}))$, on en déduit que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Lambda_{\mathcal{L}}(S, \mathcal{M}))$. La proposition 2.3.2 montre qu'on obtient la structure de catégorie de modèles fermée annoncée.

Réciproquement, si l'assertion (b) est vérifiée, il existe un petit ensemble J de cofibrations triviales tel que $l(r(J)) = \mathbf{Cof} \cap \mathcal{W}$. On vérifie aussitôt que \mathcal{W} est un A -localisateur contenant J , et donc que le A -localisateur $\mathcal{W}(J)$, engendré par J , est contenu dans \mathcal{W} . Il suffit par conséquent de montrer l'autre inclusion. Soit f un élément de \mathcal{W} . Il existe grâce à l'argument du petit objet une factorisation de la forme $f = pi$, où $i \in \text{Cell}(J) \subset \mathcal{W}(J)$, et $p \in \mathbf{Fib}$. Or $f \in \mathcal{W}$, ce qui implique que $p \in \mathcal{W}$, et par suite, $p \in r(\mathbf{Cof}) \subset \mathcal{W}(J)$. \square

COROLLAIRE 2.3.5. *Pour toute petite catégorie A , tout A -localisateur est fortement saturé. En particulier, tout A -localisateur est stable par rétractes.*

DÉMONSTRATION. Lorsque le A -localisateur est accessible, cela résulte de [41, chap. I, sec. 5, prop. 1]. Dans le cas général, si $\underline{\mathcal{W}}$ est un A -localisateur, on note \mathbb{W} l'ensemble des A -localisateurs accessibles contenus dans $\underline{\mathcal{W}}$, lequel est

un ensemble ordonné filtrant (pour l'inclusion). L'identification $\underline{\mathcal{W}} = \cup_{\mathcal{W} \in \underline{\mathcal{W}}} \mathcal{W}$ implique que le foncteur canonique

$$\varinjlim_{\mathcal{W} \in \underline{\mathcal{W}}} \mathcal{W}^{-1} \widehat{A} \longrightarrow \underline{\mathcal{W}}^{-1} \widehat{A}$$

est un isomorphisme de catégories. On en déduit qu'une flèche u de \widehat{A} induit un isomorphisme dans $\underline{\mathcal{W}}^{-1} \widehat{A}$ si et seulement s'il existe un A -localisateur accessible \mathcal{W} contenu dans $\underline{\mathcal{W}}$, tel que u induise un isomorphisme dans $\mathcal{W}^{-1} \widehat{A}$, ce qui montre le corollaire. \square

REMARQUE 2.3.6. Si A est une petite catégorie, un A -localisateur \mathcal{W} est accessible si et seulement s'il existe un petit ensemble J tel que $l(r(J)) = \text{Cof} \cap \mathcal{W}$. Lorsque c'est le cas, \mathcal{W} est le plus petit A -localisateur contenant J .

LEMME 2.3.7. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur.*

(a) *On considère un diagramme commutatif dans \widehat{A}*

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_2 \\ B_1 & \xleftarrow{\beta_1} & B_0 & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 \end{array} \quad ,$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des \mathcal{W} -équivalences. Alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est une \mathcal{W} -équivalence.

(b) *On se donne un petit ensemble bien ordonné λ , deux foncteurs $X, Y : \lambda \longrightarrow \widehat{A}$, et un morphisme de foncteurs $\phi : X \longrightarrow Y$. On suppose en outre que pour tout élément μ de λ , les flèches naturelles $\varinjlim_{\nu < \mu} X(\nu) \longrightarrow X(\mu)$ et $\varinjlim_{\nu < \mu} Y(\nu) \longrightarrow Y(\mu)$ sont des monomorphismes, $\phi(\mu) : X(\mu) \longrightarrow Y(\mu)$ étant une \mathcal{W} -équivalence. Alors $\varinjlim \phi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est une \mathcal{W} -équivalence.*

(c) *Les \mathcal{W} -équivalences sont stables par petites sommes.*

DÉMONSTRATION. Lorsque \mathcal{W} est accessible, il s'agit d'un résultat général dans les catégories de modèle fermées (voir [26, corollaire 5.1.6 et lemme 5.2.6]). Le cas non-nécessairement accessible s'en déduit car les énoncés ne portent que sur des petits ensembles de flèches. \square

PROPOSITION 2.3.8. *Soient A et B deux petites catégories, $F, G : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ deux foncteurs qui commutent aux petites limites inductives et qui respectent les monomorphismes. Alors pour tout morphisme de foncteurs α de F vers G , le plus petit B -localisateur \mathcal{W} tel que pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme $\alpha_X : FX \longrightarrow GX$ soit une \mathcal{W} -équivalence, est accessible. Plus précisément, si \mathcal{M} est un modèle cellulaire de \widehat{A} , \mathcal{W} est engendré par l'ensemble*

$$S = \{ \alpha_T \mid X \longrightarrow Y \in \mathcal{M}, \quad T \in \{X, Y\} \} .$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que $\mathcal{W}(S) \subset \mathcal{W}$. La proposition résulte alors de l'argument du petit objet appliqué à \mathcal{M} , qui permet de dire que pour tout préfaisceau X , la flèche $\emptyset \rightarrow X$ est un rétracte d'un composé transfini d'images directes de sommes d'éléments de \mathcal{M} , ce à partir de quoi on peut utiliser le lemme précédent pour montrer que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}(S)$. \square

COROLLAIRE 2.3.9. *Soit A une petite catégorie.*

- (a) *Si S est un ensemble de flèches de \widehat{A} , on note $\mathbf{cart}(S)$ l'ensemble des flèches de la forme*

$$s \times 1_Z : X \times Z \longrightarrow Y \times Z \quad , \quad s \in S \quad , \quad Z \in \mathbf{Ob} \widehat{A} .$$

Alors le plus petit A -localisateur contenant $\mathbf{cart}(S)$ est stable par produits finis. Si en outre S est un petit ensemble, il est aussi accessible.

- (b) *Si \mathcal{W} et \mathcal{W}' sont deux A -localisateurs stables par produits finis, alors le A -localisateur engendré par ceux-ci est stable par produits finis.*
(c) *Le A -localisateur minimal est stable par produits finis.*

DÉMONSTRATION. Si X est un préfaisceau sur A , on note

$$\pi_X : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad Y \longmapsto Y \times X .$$

On remarque que le foncteur π_X commute aux petites limites inductives, et qu'il respecte les monomorphismes, ainsi que les fibrations triviales. Par conséquent, pour tout A -localisateur \mathcal{W} , $\pi_X^{-1}\mathcal{W}$ est un A -localisateur.

Montrons l'assertion (a). Soit S un ensemble de flèches de \widehat{A} . Alors pour tout préfaisceau Z sur A , on a l'inclusion $\pi_Z \mathbf{cart}(S) \subset \mathbf{cart}(S)$, ce qui implique que $\pi_Z^{-1}\mathcal{W}(\mathbf{cart}(S))$ est un A -localisateur contenant $\mathcal{W}(\mathbf{cart}(S))$, et prouve la première partie de (a). Dans le cas où S est un petit ensemble, chaque élément $s : X \rightarrow Y$ définit un morphisme de foncteurs évident

$$\pi_s : \pi_X \longrightarrow \pi_Y$$

qui vérifie les conditions de la proposition ci-dessus, laquelle montre que le A -localisateur $\mathcal{W}(\mathbf{cart}(S))$ est accessible.

L'assertion (b) résulte de (a), une fois remarqué que si \mathcal{W} et \mathcal{W}' sont deux A -localisateurs stables par produits finis, le A -localisateurs engendré par ceux-ci est le plus petit contenant $\mathbf{cart}(\mathcal{W} \cup \mathcal{W}')$.

L'assertion (c) est une spécialisation de (a) dans le cas où $S = \emptyset$. \square

PROPOSITION 2.3.10. *Soient A et B deux petites catégories, $\phi : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ un foncteur, et \mathcal{W} un B -localisateur accessible. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (a) *Le foncteur ϕ commute aux petites limites inductives.*
(b) *Le foncteur ϕ respecte les monomorphismes, et pour toute paire d'inclusions $J \rightarrow L$, $K \rightarrow L$, la flèche canonique $\phi(J \cap K) \rightarrow \phi(J) \cap \phi(K)$ est un isomorphisme.*
(c) *Il existe un cylindre fonctoriel $\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ tel que pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme $\phi(X \otimes I) \rightarrow \phi(X)$ soit une \mathcal{W} -équivalence.*

Alors $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est un A -localisateur accessible.

DÉMONSTRATION. On remarque qu'une fois les conditions (a) et (b) vérifiées, $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est un A -localisateur si et seulement si la condition (c) est vérifiée (en utilisant le lemme 1.1.27). Le seul aspect non-trivial à démontrer est donc le fait que $\phi^{-1}\mathcal{W}$ est accessible.

En vertu des propositions 2.1.16, 2.1.18 et 2.2.33, il existe un cardinal infini β tel que :

- (i) tout préfaisceau sur A est la réunion β -filtrante de ses sous-objets β -accessibles ;
- (ii) le foncteur ϕ envoie tout objet β -accessible de \widehat{A} sur un objet β -accessible de \widehat{B} ;
- (iii) pour toute \mathcal{W} -cofibration triviale $i : C \longrightarrow D$ dans \widehat{B} , et tout sous-objet β -accessible J de D , il existe un sous-objet β -accessible J' de D , contenant J , et tel que l'inclusion $J' \cap C \longrightarrow J'$ soit une \mathcal{W} -cofibration triviale.

Soit $K \longrightarrow L$ un élément de $\text{Cof} \cap \phi^{-1}\mathcal{W}$, et soit J un sous-objet β -accessible de L . On va construire une suite de sous-objets β -accessibles de L , J_n , $n \geq 0$, et une suite de sous-objets β -accessibles de ϕL , J'_n , $n \geq 0$, telles que pour tout $n \geq 0$, on ait des inclusions

$$J_n \subset J_{n+1}, \quad J'_n \subset J'_{n+1}, \quad \phi J_n \subset J'_n, \quad J'_n \subset \phi J_{n+1},$$

les morphismes $\phi(K) \cap J'_n \longrightarrow J'_n$ étant des \mathcal{W} -équivalences. On pose $J_0 = J$. Pour $n \geq 1$, si on a construit J_{n-1} , comme J_{n-1} est β -accessible, il en est de même de ϕJ_{n-1} (en vertu de (ii)), et par (iii), ϕJ_{n-1} est contenu dans un sous-objet β -accessible J'_{n-1} de ϕL , tel que $\phi(K) \cap J'_{n-1} \longrightarrow J'_{n-1}$ soit une \mathcal{W} -cofibration triviale. D'autre part, par (i), L est la réunion β -filtrante de ses sous-objets β -accessibles, et donc comme J'_{n-1} est β -accessible, vu que le foncteur ϕ commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes, J'_{n-1} est contenu dans un sous-objet β -accessible de ϕL , de la forme $\phi J''_n$, où J''_n est un sous-objet β -accessible de L . La propriété (i) implique alors qu'il existe un sous-objet β -accessible J_n de L , contenant J_{n-1} et J''_n .

Une fois cette construction faite, on définit $J' = \varinjlim_n J_n$. Il vient des isomorphismes

$$\phi J' \simeq \varinjlim_n J'_n \quad \text{et} \quad \phi(J' \cap K) \simeq \varinjlim_n (J'_n \cap \phi(K)),$$

et par le lemme 2.3.7, on a une équivalence faible dans \widehat{B} ,

$$\varinjlim_n (J'_n \cap \phi(K)) \longrightarrow \varinjlim_n J'_n.$$

On en déduit que $J' \cap K \longrightarrow J'$ est une $\phi^{-1}\mathcal{W}$ -équivalence.

Etant donné que la catégorie $\text{Acc}_\beta(A)$ est essentiellement petite (2.1.16), le lemme 2.1.25 montre à présent que

$$l(r(\text{Fl}(\text{Acc}_\beta(A)) \cap \text{Cof} \cap \phi^{-1}\mathcal{W})) = \text{Cof} \cap \phi^{-1}\mathcal{W},$$

et on conclut grâce à la remarque 2.3.6. \square

LEMME 2.3.11. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, et soit pour chaque i , J_i un ensemble de flèches de \mathcal{C}_i . On note $\mathcal{C} = \prod_i \mathcal{C}_i$ et $J = \prod_i J_i \subset \text{Fl}\mathcal{C}$. Alors on a une identification canonique $l(J) = \prod_i l(J_i)$. \square

COROLLAIRE 2.3.12. Soient A et I deux petites catégories, et \mathcal{W} un A -localisateur accessible. On définit un ensemble d'équivalences faibles \mathcal{W}^I sur la catégorie $\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \simeq \widehat{I^\circ} \times A$ des foncteurs de I vers \widehat{A} , comme l'ensemble des flèches $X \rightarrow Y$ telles que pour tout objet i de I , le morphisme de \widehat{A} , $X(i) \rightarrow Y(i)$ soit une \mathcal{W} -équivalence.

Alors $\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W}^I . En outre, si p est une fibration pour cette structure, alors pour tout objet i de I , le morphisme p_i est une fibration de \widehat{A} au sens de \mathcal{W} .

DÉMONSTRATION. Si I est une catégorie discrète, cela résulte du lemme ci-dessus. En effet, si \mathcal{N} est un petit ensemble de cofibrations triviales de \widehat{A} tel que $l(r(\mathcal{N})) = \text{Cof} \cap \mathcal{W}$ (ce qui existe en vertu du théorème 2.3.4), alors

$$\mathcal{W}^I \cap \text{Cof} = \prod_{i \in I} (\mathcal{W} \cap \text{Cof}) = \prod_{i \in I} l(r(\mathcal{N})) = l(r(\prod_{i \in I} \mathcal{N})),$$

ce qui montre que \mathcal{W}^I est accessible, car il est de la forme $\mathcal{W}(\prod_{i \in I} \mathcal{N})$ (cf. 2.3.6). De même, on vérifie que dans ce cas, les fibrations sont exactement les flèches p de $\prod_{i \in I} \widehat{A}$ telles que pour tout $i \in I$, p_i soit une fibration de \widehat{A} . Dans le cas général, on considère l'ensemble $\text{Ob } I$ comme une catégorie discrète, et on a un foncteur canonique $u : \text{Ob } I \rightarrow I$, ce qui induit un foncteur image inverse $u^* : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{Ob } I, \widehat{A})$. Or u^* commute aux petites limites inductives et projectives, et donc admet un adjoint à gauche. Si on note p la projection de $I^\circ \times A$ vers A , pour tout objet X de $\widehat{I^\circ} \times A$, la projection $X \times p^* i_A^* \Delta_1 \rightarrow X$ est une \mathcal{W}^I -équivalence. La première assertion résulte donc de la proposition 2.3.10, qui montre que le $(I^\circ \times A)$ -localisateur $\mathcal{W}^I = (u^*)^{-1}(\mathcal{W}^{\text{Ob } I})$ est accessible, et permet d'appliquer le théorème 2.3.4. Pour montrer la seconde assertion, on remarque que si $u_!$ désigne l'adjoint à gauche de u^* , alors pour toute famille $X = (X_i)_{i \in \text{Ob } I}$ de préfaisceaux sur A , et pour tout $j \in \text{Ob } I$, on a une identification canonique

$$(u_! X)_j \simeq \prod_{i \in \text{Ob } I} \prod_{\text{Hom}_I(i, j)} X_i.$$

On en déduit que le foncteur $u_!$ respecte les cofibrations triviales, et donc que par adjonction, le foncteur u^* respecte les fibrations, ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 2.3.13. Soit A une petite catégorie. Toute intersection d'une petite famille de A -localisateurs accessibles est accessible.

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ une petite famille de A -localisateurs accessibles. On considère l'ensemble I comme une catégorie discrète, et on peut voir la famille $(\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ comme un $(A \times I)$ -localisateur $\underline{\mathcal{W}}$, lequel est accessible par un raisonnement analogue à celui développé pour démontrer le corollaire précédent.

D'autre part, le foncteur canonique $\delta : \widehat{A} \longrightarrow \prod_I \widehat{A} \simeq \widehat{A \times I}$ vérifie les conditions de la proposition 2.3.10, et l'égalité $\delta^{-1}\underline{\mathcal{W}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ achève ainsi cette démonstration. \square

PROPOSITION 2.3.14 (Crans [12]). *Soient $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \text{Fib}, \text{Cof})$ une catégorie de modèles fermée engendrée par un couple (I, J) , et $G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur admettant un adjoint à droite $D : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$. On suppose les conditions suivantes vérifiées.*

- (i) *La catégorie \mathcal{M}' admet des petites limites projectives et inductives.*
- (ii) *Les ensembles GI et GJ permettent l'argument du petit objet.*
- (iii) *$D(l(r(GJ))) \subset \mathcal{W}$.*

On pose $\mathcal{W}' = D^{-1}\mathcal{W}$, $\text{Fib}' = D^{-1}\text{Fib}$, et $\text{Cof}' = l(\text{Fib}' \cap \mathcal{W}')$. Alors le quadruplet $(\mathcal{M}', \mathcal{W}', \text{Fib}', \text{Cof}')$ est une catégorie de modèles fermée engendrée par le couple (GI, GJ) .

DÉMONSTRATION. La vérification des axiomes CM1, CM2 et CM3 est immédiate. On remarque qu'on a les identifications suivantes :

$$\text{Fib}' = D^{-1}\text{Fib} = D^{-1}r(J) = r(GJ) ,$$

$$\text{Fib}' \cap \mathcal{W}' = D^{-1}(\text{Fib} \cap \mathcal{W}) = D^{-1}r(I) = r(GI) ,$$

d'où $\text{Cof}' = l(r(GI))$. La condition (iii) implique que $l(r(GJ)) \subset \text{Cof}' \cap \mathcal{W}'$. On va montrer l'autre inclusion. Soit $i : X \longrightarrow Y \in \text{Cof}' \cap \mathcal{W}'$. On factorise i en $i = qj$ où $j : X \longrightarrow Z \in l(r(GJ))$ et où $q : Z \longrightarrow Y \in r(GJ)$ (ce qui est possible car en vertu de (ii), l'ensemble GJ permet l'argument du petit objet). Mais alors comme i et j sont dans \mathcal{W}' , il en est de même de q , et donc $q \in r(GI)$. On en déduit qu'il existe une flèche $k : Y \longrightarrow Z$ telle que $ki = j$ et $qk = 1_Y$, ce qui fait de i un rétracte de j , et donc $i \in l(r(GJ))$. On a ainsi montré CM4. L'axiome CM5 résulte du fait que les ensembles GI et GJ permettent l'argument du petit objet. \square

COROLLAIRE 2.3.15. *Soient A et I deux petites catégories, et \mathcal{W} un A -localisateur accessible. Alors $\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes $X \longrightarrow Y$ tels que pour tout $i \in \text{Ob } I$, $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une \mathcal{W} -équivalence (resp. une fibration au sens de \mathcal{W}).*

DÉMONSTRATION. Lorsque I est une catégorie discrète, $\widehat{A \times I} = \prod_I \widehat{A}$, et on obtient ainsi la structure produit. Dans le cas général, on considère l'ensemble $\text{Ob } I$ comme une catégorie discrète, et on note $u : \text{Ob } I \longrightarrow I$ le foncteur d'inclusion canonique. Il induit un foncteur image inverse

$$u^* : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{Ob } I, \widehat{A}) = \prod_I \widehat{A} ,$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$u_! : \prod_I \widehat{A} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) .$$

Comme le foncteur u^* envoie les fibrations au sens de la structure du corollaire 2.3.12 sur des fibrations de $\prod_I \widehat{A}$, pour toute cofibration triviale j de $\prod_I \widehat{A}$, $u_!j$ est une cofibration triviale au sens de la structure du corollaire 2.3.12. On en déduit aussitôt que le couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$ vérifie les conditions de la proposition 2.3.14, et qu'on obtient de la sorte la structure de catégorie de modèles fermée escomptée. \square

2.3.16. Si α désigne un cardinal, on parlera dans la suite de *limites inductives α -filtrantes* pour les limites inductives indexées par des petits ensembles ordonnés α -filtrants.

LEMME 2.3.17. *Soit A une petite catégorie. On considère un modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} et un cardinal α tels que tout préfaisceau sur A , source ou bien but d'un élément de \mathcal{M} , soit α -accessible. Alors les fibrations triviales de \widehat{A} sont stables par les limites inductives α -filtrantes.*

DÉMONSTRATION. Comme \mathcal{M} est par hypothèse un modèle cellulaire de \widehat{A} , la classe des fibrations triviales de \widehat{A} s'identifie à celle des flèches qui vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux éléments de \mathcal{M} . Soit I un petit ensemble ordonné α -filtrant, et soit

$$i \longmapsto p_i : X_i \longrightarrow Y_i$$

un foncteur de I à valeurs dans la catégorie des flèches de \widehat{A} , tel que pour tout $i \in I$, p_i soit une fibration triviale. Si $K \longrightarrow L$ est un élément de \mathcal{M} , alors on a le diagramme commutatif ci-dessous, dont les flèches verticales sont des bijections.

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, X_i) & \longrightarrow & \varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, X_i) \times \varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, Y_i) \varinjlim_{\mathfrak{I}} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, Y_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, \varinjlim_{\mathfrak{I}} X_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, \varinjlim_{\mathfrak{I}} X_i) \times_{\mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(K, \varinjlim_{\mathfrak{I}} Y_i)} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(L, \varinjlim_{\mathfrak{I}} Y_i) \end{array}$$

Les surjections étant stables par limites inductives, et les limites inductives filtrantes étant exactes à gauche, la flèche horizontale du haut est surjective. Il en est donc nécessairement de même de celle du bas, ce qui prouve l'assertion. \square

PROPOSITION 2.3.18. *Soit A une petite catégorie. Il existe un cardinal α tel que tous les A -localisateurs soient stables par limites inductives α -filtrantes (ce qui implique une propriété analogue pour les cardinaux $\beta \geq \alpha$).*

DÉMONSTRATION. Les diagrammes incriminés étant toujours petits, on s'aperçoit aussitôt qu'il suffit de montrer l'assertion pour les A -localisateurs accessibles. Nous allons vérifier dans un premier temps qu'il suffit de prouver l'assertion pour le A -localisateur minimal. Considérons un A -localisateur accessible \mathcal{W} , ainsi qu'une petite catégorie I . La structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 2.3.15 donne l'existence d'un foncteur

$$Q_I : \underline{\mathrm{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I, \widehat{A}),$$

et d'un morphisme de foncteurs $Q_I \longrightarrow 1_{\underline{\mathrm{Hom}}(I, \widehat{A})}$ tels que pour tout foncteur X de I vers \widehat{A} , $Q_I X$ soit cofibrant au sens de cette structure, et $Q_I X \longrightarrow X$ soit

une équivalence faible (en fait une fibration triviale). Comme le foncteur limite inductive

$$\varinjlim_I : \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \widehat{A}$$

admet un adjoint à droite qui respecte les fibrations et les fibrations triviales, il respecte les cofibrations et les cofibrations triviales. En vertu du lemme de Ken Brown [26, lemme 1.1.12], le foncteur $\varinjlim_I Q_I$ respecte donc les équivalences faibles. Une vérification immédiate montre que demander que \mathcal{W} soit stable par limites inductives de type I équivaut à demander que pour tout foncteur X de I dans \widehat{A} , la flèche $\varinjlim_I Q_I X \longrightarrow \varinjlim_I X$ soit une \mathcal{W} -équivalence. Comme la notion de cofibration est la même quels que soient les A -localisateurs considérés, si cette dernière condition est vérifiée par \mathcal{W} , elle le sera encore pour tout A -localisateur contenant \mathcal{W} .

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer l'assertion dans le cas du A -localisateur minimal \mathcal{W} . On considère un foncteur $L : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$, et une \mathcal{W} -équivalence de foncteurs $1_{\widehat{A}} \longrightarrow L$, tels que L soit accessible, et envoie tout préfaisceau X sur A sur un objet \mathcal{W} -fibrant (en vertu de la proposition 2.1.33, de tels objets peuvent être construits grâce à l'argument du petit objet appliqué à un ensemble de générateurs des cofibrations triviales). Soit \mathcal{M} un modèle cellulaire de \widehat{A} . On se donne enfin un cardinal α tel que le foncteur L , ainsi que les sources et les but des éléments de \mathcal{M} , soient α -accessibles. Soit I un petit ensemble ordonné α -filtrant. Le lemme 2.3.17 montre que le foncteur \varinjlim_I envoie les fibrations triviales terme à terme sur des fibrations triviales. Le lemme de Ken Brown appliqué à la structure de catégorie de modèles fermée du corollaire 2.3.15 montre que \varinjlim_I envoie les \mathcal{W} -équivalences terme à terme entre diagrammes \mathcal{W} -fibrants terme à terme sur des \mathcal{W} -équivalences. Or si $X \longrightarrow Y$ est une \mathcal{W} -équivalence terme à terme de $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{A})$, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim_I X & \longrightarrow & \varinjlim_I LX & \xrightarrow{\sim} & L \varinjlim_I X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_I Y & \longrightarrow & \varinjlim_I LY & \xrightarrow{\sim} & L \varinjlim_I Y \end{array}$$

L' α -accessibilité de L implique que les flèches horizontales du carré de droite sont des isomorphismes. On en déduit aussitôt par l'axiome L1 que les flèches horizontales du carré de gauche sont des \mathcal{W} -équivalences. La flèche verticale du milieu étant une \mathcal{W} -équivalence, une nouvelle utilisation de l'axiome L1 achève la démonstration de la proposition. \square

4. Propreté

DÉFINITION 2.4.1. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. Une flèche $X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} est une *équivalence faible propre à droite* si pour toute fibration $Z \longrightarrow Y$, le morphisme image réciproque $Z \times_Y X \longrightarrow Z$ est une équivalence faible.

On dit qu'une catégorie de modèles fermée est *propre à droite* si toutes ses équivalences faibles sont propres à droite.

Dualement, on dit qu'une catégorie de modèles fermée \mathcal{C} est *propre à gauche* si \mathcal{C}° est propre à droite.

REMARQUE 2.4.2. Toute équivalence faible propre à droite est une équivalence faible, car toute identité est une fibration.

Il résulte du lemme 2.3.7 que pour toute petite catégorie A et tout A -localisateur accessible, la structure de catégorie de modèles fermée obtenue sur \widehat{A} est propre à gauche.

DÉFINITION 2.4.3. Soit A une petite catégorie. Un A -localisateur *propre* est un A -localisateur accessible \mathcal{W} , tel que la structure de catégorie de modèles fermée sur \widehat{A} , dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} , soit propre à droite.

THÉORÈME 2.4.4. Soient A une petite catégorie, et S un ensemble de flèches de \widehat{A} . On note \mathcal{W} le A -localisateur engendré par S , et on suppose que celui-ci est accessible. Alors \mathcal{W} est propre si et seulement si pour tout élément $f : X \rightarrow Y$ de S , pour toute fibration de but fibrant $p : E \rightarrow B$, et pour toute flèche $u : Y \rightarrow B$, le morphisme $g : X \times_B E \rightarrow Y \times_B E$, image réciproque de f par p , est une \mathcal{W} -équivalence.

REMARQUE 2.4.5. Une spécialisation immédiate du théorème ci-dessus est le cas $S = \emptyset$. Autrement-dit, la structure de catégorie de modèles minimale sur \widehat{A} (voir le théorème 2.3.4) est propre. On verra plus loin que ce n'est pas le cas de tous les A -localisateurs.

La démonstration de l'énoncé ci-dessus occupe la majeure partie de cette section, mais nous commençons par en donner quelques conséquences.

COROLLAIRE 2.4.6. Soit A une petite catégorie. On considère un petit ensemble I , et une famille \mathcal{W}_i , $i \in I$ de A -localisateurs propres. Alors le A -localisateur engendré par les \mathcal{W}_i est propre.

DÉMONSTRATION. Pour $i \in I$, on choisit un petit ensemble S_i de flèches de \widehat{A} qui engendrent \mathcal{W}_i . On pose $S = \cup_i S_i$, et alors $\mathcal{W}(S)$ est le A -localisateur engendré par les \mathcal{W}_i , et il est clair qu'il est accessible. Le fait que $\mathcal{W}(S)$ soit propre résulte du théorème ci-dessus et du fait que pour tout i , toute fibration au sens de \mathcal{W} en est une au sens de \mathcal{W}_i . \square

COROLLAIRE 2.4.7. Soient A une petite catégorie, et X_i , $i \in I$ une famille de préfaisceaux sur A . On note \mathcal{W} le plus petit A -localisateur contenant les projections $X_i \times Z \rightarrow Z$ pour tout $i \in I$ et pour tout Z . Si \mathcal{W} est accessible (pour cela, il suffit que I soit un petit ensemble, par le corollaire 2.3.9), alors \mathcal{W} est propre.

DÉMONSTRATION. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur A , $Y \rightarrow Z$, le carré suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_i \times Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_i \times Z & \longrightarrow & Z \end{array} ,$$

ce qui permet de conclure en vertu du théorème 2.4.4. \square

DÉFINITION 2.4.8. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et $p : E \rightarrow B$ un morphisme de préfaisceaux sur A . On note $C(p)$ l'ensemble des flèches $f : X \rightarrow Y$ de \widehat{A} telle que pour tout $u \in \text{Hom}_{\widehat{A}}(Y, B)$, une fois formés les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} X \times_B E & \xrightarrow{g} & Y \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{u} & B \end{array} ,$$

la flèche g soit une \mathcal{W} -équivalence.

Si \mathcal{F} est un ensemble de flèches de \widehat{A} , alors on note $C(\mathcal{F})$ l'ensemble $\bigcap_{p \in \mathcal{F}} C(p)$.

SORITES 2.4.9. On considère A , \mathcal{W} , et p comme dans la définition ci-dessus, et on rappelle que Cof désigne la classe des monomorphismes de \widehat{A} .

- (a) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes de préfaisceaux sur A . Si f et g (resp. f et gf) sont des éléments de $C(p)$, alors il en est de même de gf (resp. de g).
- (b) L'ensemble $C(p) \cap \text{Cof}$ est stable par rétractes, par images directes, et par compositions transfinies. En outre, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \xleftarrow{a_2} & A_0 & \xrightarrow{a_1} & A_1 \\ f_2 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ B_2 & \xleftarrow{b_2} & B_0 & \xrightarrow{b_1} & B_1 \end{array} ,$$

tel que a_1 et b_1 soient des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 des éléments de $C(p)$, alors la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \rightarrow B \amalg_{B_0} B_2$ est un élément de $C(p)$.

- (c) Si $C(p)$ contient $\mathcal{W} \cap \text{Cof}$, alors $C(p)$ contient \mathcal{W} .

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer le point (a). Soit $Z \rightarrow B$ un morphisme de préfaisceaux. Alors le morphisme $X \times_B E \rightarrow Y \times_B E$ est une équivalence faible. De même, le morphisme $Y \times_B E \rightarrow Z \times_B E$ (resp. $X \times_B E \rightarrow Y \times_B E \rightarrow Z \times_B E$) est une équivalence faible, et donc, le morphisme $X \times_B E \rightarrow Y \times_B E \rightarrow Z \times_B E$ (resp. $Y \times_B E \rightarrow Z \times_B E$) en est une.

Pour montrer (b), on commence par la remarque suivante : on définit un foncteur $\phi : \widehat{A}/B \rightarrow \widehat{A}$ par $(X \rightarrow B) \mapsto X \times_B E$. Ce foncteur commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes. On en déduit que $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ est un A/B -localisateur car les fibrations triviales sont stables par images réciproques. Le point (b) résulte de cette constatation, du lemme 2.3.7, et de l'universalité des limites inductives dans \widehat{A} , car $C(p)$ peut à présent être vu comme l'ensemble des flèches $X \rightarrow Y$ de \widehat{A} telles que pour toute flèche $Y \rightarrow B$, $X \rightarrow Y \rightarrow B$ soit une $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ -équivalence faible.

Pour se persuader du point (c), il suffit de voir que comme les fibrations

triviales de \widehat{A} sont stables par images réciproques, $C(p)$ les contient toutes, et ainsi, cela résulte du corollaire 2.1.29 et du point (a). \square

LEMME 2.4.10. *Soient A une petite catégorie, (\mathcal{I}, S) une donnée homotopique sur A . On considère une fibration naïve $p : X \rightarrow Y$, et un rétracte par déformation fort $i : Z \rightarrow Y$. Alors l'inclusion image réciproque $j : Z \times_Y X \rightarrow X$ est un rétracte par déformation fort.*

DÉMONSTRATION. On a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array} .$$

Comme i est un rétracte par déformation fort, par définition, il existe deux flèches $r : Y \rightarrow Z$ et $h : Y \otimes I \rightarrow Y$ telles que $ri = 1_Z$, $h\partial_Y^0 = 1_Y$, $h\partial_Y^1 = ir$, et $h(i \otimes 1_I) = \sigma_Y(i \otimes 1_I)$. On a les égalités $h(p \otimes 1_I)\partial_X^0 = h\partial_Y^0 p = 1_Y p = p$, $h(p \otimes 1_I)(j \otimes 1_I) = h(i \otimes 1_I)(q \otimes 1_I) = \sigma_Y(i \otimes 1_I)(q \otimes 1_I) = iq\sigma_{Z \times_Y X} = pj\sigma_{Z \times_Y X}$, et $j\sigma_{Z \times_Y X}\partial_{Z \times_Y X}^0 = j$, ce qui permet de définir un morphisme $u : (Z \times_Y X) \otimes I \cup X \otimes \{0\} \rightarrow X$, en posant $u = (j\sigma_{Z \times_Y X}, 1_X)$, tel que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (Z \times_Y X) \otimes I \cup X \otimes \{0\} & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \otimes I & \xrightarrow{h(p \otimes 1_I)} & Y \end{array} .$$

Or ce dernier admet un relèvement $k : X \otimes I \rightarrow X$, puisque p est une fibration naïve, la flèche verticale de gauche dans ce diagramme étant une extension anodine. On a alors les égalités $k(j \otimes 1_I) = j\sigma_{Z \times_Y X} = \sigma_X(j \otimes 1_I)$ et $k\partial_X^0 = 1_X$. D'autre part, on a les égalités $pk\partial_X^1 = h(p \otimes 1_I)\partial_X^1 = h\partial_Y^1 p = irp$. On a donc une unique flèche $s : X \rightarrow Z \times_Y X$ telle que $js = k\partial_X^1$, et $qs = rp$. En outre, on a $sj = 1_{Z \times_Y X}$, car $jsj = k\partial_X^1 j = k(j \otimes 1_I)\partial_{Z \times_Y X}^1 = j\sigma_{Z \times_Y X}\partial_{Z \times_Y X}^1 = j$, et $qsj = rpj = riq = q$. On a ainsi montré que j est un rétracte par déformation fort. \square

REMARQUE 2.4.11. On considère une petite catégorie A , munie d'une donnée homotopique. Toute section s d'une fibration triviale $p : X \rightarrow Y$ de \widehat{A} est un rétracte par déformation fort. En effet, $(Y, 1_Y)$ et (X, p) sont des objets injectifs de la catégorie \widehat{A}/Y , et sont donc à la fois fibrants et contractiles pour toute donnée homotopique sur A/Y . Or s peut être vue comme une inclusion de $(Y, 1_Y)$ dans (X, p) , et par suite, en vertu du corollaire 2.2.28, est une extension anodine entre objets fibrants pour la donnée homotopique induite sur Y par celle de A (voir 2.2.41). C'est donc un rétracte par déformation fort dans \widehat{A}/X par le lemme 2.2.32. On en déduit immédiatement l'assertion.

En particulier, si $(L, \lambda^0, \lambda^1)$ désigne le cylindre de Lawvere de \widehat{A} , pour tout préfaïceau X sur A , les morphismes

$$\lambda_X^e : X \rightarrow X \times L \quad , \quad e = 0, 1$$

sont des rétractes par déformation fort.

LEMME 2.4.12. *Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur accessible, et $q : E \rightarrow B$ une \mathcal{W} -fibration de but \mathcal{W} -fibrant. Alors pour tous morphismes composables*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Z$$

de \widehat{A} , i étant une cofibration triviale, si i et if sont dans $C(q)$, alors il en est de même de f .

DÉMONSTRATION. Soit $u : Y \rightarrow B$ un morphisme de \widehat{A} . Comme i est une cofibration triviale, et B est fibrant, il existe une flèche $v : Z \rightarrow B$ telle que $u = vi$. On peut alors former les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} X \times_B E & \xrightarrow{f'} & Y \times_B E & \xrightarrow{i'} & Z \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{v} & B \\ & & & \searrow u & & & \end{array}$$

Par hypothèse, i' et $i'f'$ sont des équivalences faibles, et donc f' en est une, ce qui prouve l'assertion. \square

LEMME 2.4.13. *Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur accessible, et $q : E \rightarrow B$ une \mathcal{W} -fibration. Alors pour tous morphismes composables*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$$

de \widehat{A} , p étant une fibration triviale, si pf est dans $C(q)$, alors il en est de même de f .

DÉMONSTRATION. On se donne une flèche $u : Y \rightarrow B$. On définit deux flèches $u_e : Y \rightarrow B$ par $u_0 = u$ et $u_1 = usp$, où $s : Z \rightarrow Y$ est une section de p (laquelle existe puisque p est une fibration triviale). En outre on a une homotopie de 1_Y vers sp au sens du cylindre de Lawvere (2.2.6). On en déduit qu'il existe un morphisme $h : Y \times L \rightarrow B$, tel que $h\lambda_Y^e = u_e$ pour $e = 0, 1$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\lambda_X^0} & X \times L & \xleftarrow{\lambda_X^1} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f \times 1_L & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\lambda_Y^0} & Y \times L & \xleftarrow{\lambda_Y^1} & Y \\ \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow p \\ & & B & \xleftarrow{us} & Z \end{array} \quad .$$

Si $v : C \longrightarrow B$ est une flèche de \widehat{A} , on notera C_v le produit fibré de C et E au-dessus de B . On obtient un diagramme commutatif, induit par le précédent,

$$\begin{array}{ccccc} X_{uf} & \longrightarrow & (X \times L)_{h(f \times 1_L)} & \longleftarrow & X_{usp} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \searrow \\ Y_u & \longrightarrow & (Y \times L)_h & \longleftarrow & Y_{usp} \longrightarrow Z_{us} \end{array} ,$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont des équivalences faibles, car les flèches du type λ_X^e sont des rétractes par déformation forts (voir à ce propos la remarque 2.4.11), ce qui permet d'appliquer le lemme 2.4.10, et les fibrations triviales sont stables par images réciproques. Enfin, pf est dans $C(q)$ par hypothèse, et donc induit une équivalence faible $X_{usp} \longrightarrow Z_{us}$. On en déduit que f induit une équivalence faible $X_{usp} \longrightarrow Y_{usp}$. Il est donc clair que $X_{uf} \longrightarrow Y_u$ est une équivalence faible, ce qui montre que $f \in C(q)$, et achève ainsi la démonstration. \square

PROPOSITION 2.4.14. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur accessible. On note $F_{\mathcal{W}}$ la classe des \mathcal{W} -fibrations de but \mathcal{W} -fibrant. Alors $C(F_{\mathcal{W}})$ est un A -localisateur.*

DÉMONSTRATION. En vertu de 2.4.9, il suffit de montrer que pour tous morphismes composables

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

de \widehat{A} , si g et gf sont dans $C(F_{\mathcal{W}})$, il en est de même de f . On remarque que $C(F_{\mathcal{W}}) \subset \mathcal{W}$, puisque l'identité de l'objet final de \widehat{A} est une \mathcal{W} -fibration de but \mathcal{W} -fibrant. Par conséquent, g est une équivalence faible, et admet une factorisation de la forme $g = pi$, où i est une cofibration triviale, et p une fibration triviale. Soit q un élément de $F_{\mathcal{W}}$. Par hypothèse, pi et $pi f$ sont dans $C(q)$. Il résulte donc du lemme 2.4.13 que i et if sont dans $C(q)$. Mais alors en vertu du lemme 2.4.12, f est dans $C(q)$, ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 2.4.15. *Soient A une petite catégorie et \mathcal{W} un A -localisateur. On considère trois flèches de \widehat{A} , $f : K \longrightarrow L$, $p : X \longrightarrow Y$, et $q : Z \longrightarrow T$, et on suppose que p est un rétracte de q . Si $f \in C(q)$, alors $f \in C(p)$.*

DÉMONSTRATION. Comme p est un rétracte de q , il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_X & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{r} & X \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{j} & T & \xrightarrow{s} & Y \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & 1_Y & & \end{array} .$$

Soit $u : L \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaïceaux sur A . On obtient par composition avec j un morphisme $v : L \longrightarrow T$, et on vérifie que par functorialité, la flèche $K \times_Y X \longrightarrow L \times_Y X$ est un rétracte de la flèche $K \times_T Z \longrightarrow L \times_T Z$. Comme

$f \in C(q)$, cette dernière est dans \mathcal{W} , et donc l'assertion résulte de la stabilité de \mathcal{W} par rétractes. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.4. Si $F_{\mathcal{W}}$ désigne la classe des fibrations de but fibrant, il s'agit de montrer que \mathcal{W} est propre si et seulement si $S \subset C(F_{\mathcal{W}})$. Or si \mathcal{W} est propre $\mathcal{W} \subset C(F_{\mathcal{W}})$, et donc $S \subset C(F_{\mathcal{W}})$. Réciproquement, si $S \subset C(F_{\mathcal{W}})$, il résulte de la proposition 2.4.14 que $\mathcal{W} \subset C(F_{\mathcal{W}})$. Si F' désigne la classe des morphismes images réciproques d'éléments de $F_{\mathcal{W}}$, on s'aperçoit immédiatement que $C(F') = C(F_{\mathcal{W}})$. Or toute fibration est un rétracte d'un élément de F' . En effet, si $p : X \longrightarrow Y$ est une fibration, il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ Y & \xrightarrow{j} & Y' \end{array} ,$$

dans lequel p' est une fibration de but fibrant, et i, j des cofibrations triviales. On obtient le triangle commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k=(p,i)} & Y \times_{Y'} X' \\ & p \searrow & \swarrow q \\ & & Y \end{array}$$

Comme $j \in \mathcal{W}$ et $p' \in F_{\mathcal{W}}$, la flèche de $Y \times_{Y'} X'$ vers X' , image réciproque de j par p' , est une équivalence faible. Vu que $i \in \mathcal{W}$, on en déduit que $k \in \mathcal{W}$. D'autre part, i étant un monomorphisme, il en est de même de k . Par suite, k est une cofibration triviale, et donc le lemme du rétracte montre que p est un rétracte de q . Or par construction, $q \in F'$, et donc $\mathcal{W} \subset C(q)$. Le lemme 2.4.15 implique donc que $\mathcal{W} \subset C(p)$, ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 2.4.16. *Soient A et I deux petites catégories, et \mathcal{W} un A -localisateur. On rappelle que \mathcal{W}^I désigne la classe des flèches f de $\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \simeq \widehat{I^\circ \times A}$ telles que pour tout objet i de la catégorie I , le morphisme f_i soit une \mathcal{W} -équivalence. Alors si \mathcal{W} est propre, il en est de même de \mathcal{W}^I .*

DÉMONSTRATION. On sait que si \mathcal{W} est accessible, \mathcal{W}^I l'est aussi, et qu'alors si p est une fibration de $\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A})$ au sens de \mathcal{W}^I , pour tout objet i de I , le morphisme p_i est une fibration de \widehat{A} au sens de \mathcal{W} (corollaire 2.3.12). On en déduit immédiatement que si \mathcal{W} est propre, l'image réciproque de toute \mathcal{W}^I -équivalence par une fibration au sens de \mathcal{W}^I est encore une \mathcal{W}^I -équivalence. \square

Nous terminons cette section par quelques résultats généraux sur la propreté dans le cadre abstrait.

DÉFINITION 2.4.17. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. Un carré commutatif de \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{u_0} & Y_0 \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 \end{array}$$

est *homotopiquement cartésien* si X_0 s'identifie canoniquement à la limite homotopique du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y_0 \\ & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & Y_1 \end{array} ,$$

i.e. s'il existe un diagramme commutatif dans \mathcal{C} ,

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longleftarrow & Y_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X'_1 & \xrightarrow{p} & Y'_1 & \longleftarrow_q & Y'_0 \end{array} ,$$

dans lequel les flèches verticales sont des équivalences faibles, et p, q , des fibrations de but fibrant, tel que le morphisme canonique

$$X_0 \longrightarrow X'_1 \times_{Y'_1} Y'_0$$

soit une équivalence faible.

REMARQUE 2.4.18. Si \mathcal{C} est propre à droite, alors le carré ci-dessus est homotopiquement cartésien si et seulement s'il existe une factorisation de la flèche $Y_0 \longrightarrow Y_1$ en $Y_0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y_1$, où $Y_0 \longrightarrow Z$ est une équivalence faible, et où $Z \longrightarrow Y_1$ est une fibration, telle que la flèche $X_0 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} Z$ soit une équivalence faible, et si c'est le cas, alors pour toute factorisation de la flèche $Y_0 \longrightarrow Y_1$ en $Y_0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y_1$, où $Y_0 \longrightarrow Z$ est une équivalence faible, et où $Z \longrightarrow Y_1$ est une fibration, le morphisme canonique $X_0 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} Z$ est une équivalence faible.

La proposition suivante provient de [44].

PROPOSITION 2.4.19. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée propre à droite, et $p : X \longrightarrow Y$ une flèche de \mathcal{C} . Les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour toute flèche $Z \longrightarrow Y$, le carré suivant est homotopiquement cartésien.

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(b) Pour toute équivalence faible $u : Z' \longrightarrow Z$, et pour toute flèche $Z \longrightarrow Y$, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Z' \times_Y X & \xrightarrow{v} & Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ Z' & \xrightarrow{u} & Z & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche v est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION. Montrons que (a) \Rightarrow (b). On se donne donc une équivalence faible $u : Z' \longrightarrow Z$, et une flèche $Z \longrightarrow Y$. On factorise p en une cofibration triviale, suivie d'une fibration $T \longrightarrow Y$. On obtient les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Z' \times_Y X & \xrightarrow{v} & Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z' \times_Y T & \longrightarrow & Z \times_Y T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \xrightarrow{u} & Z & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

On voit que les flèches $Z' \times_Y X \longrightarrow Z' \times_Y T$ et $Z \times_Y X \longrightarrow Z \times_Y T$ sont des équivalences faibles en vertu de la remarque ci-dessus, et comme la flèche $Z \times_Y T \longrightarrow Z$ est une fibration (car c'est une image réciproque d'une fibration), et vu que \mathcal{C} est propre, la flèche $Z' \times_Y T \longrightarrow Z \times_Y T$ est une équivalence faible. On en déduit que v en est une.

Il reste à voir la réciproque. Soit $u : Z \longrightarrow Y$ une flèche de \mathcal{C} . On factorise u en $Z \longrightarrow T \longrightarrow Y$, où $Z \longrightarrow T$ est une cofibration triviale, et où $T \longrightarrow Y$ est une fibration. Alors la flèche $Z \times_Y X \longrightarrow T \times_Y X$ est une équivalence faible ce qui montre que le carré voulu est homotopiquement cartésien, en regard de la remarque ci-dessus. \square

2.4.20. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée. Si X est un objet de \mathcal{C} , La catégorie \mathcal{C}/X admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles (resp. les fibrations, resp. les cofibrations) sont les flèches dont l'image par le foncteur d'oubli de \mathcal{C}/X vers \mathcal{C} en est une dans \mathcal{C} . Si $u : X \longrightarrow Y$ est une flèche de \mathcal{C} , on a un foncteur

$$u_! : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}/Y \quad , \quad (Z, z) \longmapsto (Z, uz) .$$

Ce dernier admet un adjoint à droite

$$u^* : \mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/X$$

qui associe à chaque objet Z au-dessus de Y l'objet $Z \times_Y X$ au-dessus de X . Il est immédiat que le $(u_!, u^*)$ est une adjonction de Quillen, puisque par définition, le foncteur $u_!$ respecte les cofibrations et les équivalences faibles (il en résulte par adjonction que le foncteur u^* respecte les fibrations et les fibrations triviales).

PROPOSITION 2.4.21. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) u est une équivalence faible propre à droite.
- (b) Le couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$ est une équivalence de Quillen (au sens de [26, définition 1.3.12]).
- (c) Le foncteur induit par $u_!$ entre les catégories homotopiques

$$\mathrm{Ho}\mathcal{C}/X \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}/Y$$

est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un simple exercice de traduction à l'aide de [41, chap. I, sec. 5, prop. 1] et de [26, proposition 1.3.13]. \square

COROLLAIRE 2.4.22. Soient \mathcal{C} une catégorie, et \mathcal{W} une classe de flèches de \mathcal{C} . On suppose qu'il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur \mathcal{C} dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} . Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

- (a) Il existe une structure de catégorie de modèles fermée propre sur \mathcal{C} dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} .
- (b) Toute structure de catégorie de modèles fermée sur \mathcal{C} dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} est propre.

DÉMONSTRATION. L'énoncé (c) de la proposition ci-dessus définit une propriété du seul couple $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$, sans mention d'aucune structure de catégorie de modèles fermée sur \mathcal{C} . \square

CHAPITRE 3

Yoga simplicial

1. Ensembles simpliciaux

3.1.1. On rappelle que la catégorie des simplexes Δ est la sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} dont les objets sont les ensembles bien ordonnés

$$\Delta_n = \{0, \dots, n\}, \quad n \geq 0.$$

La catégorie des *ensembles simpliciaux* est par définition la catégorie $\widehat{\Delta}$ des pré-faisceaux sur Δ .

Pour $0 \leq i \leq n$, on note δ_n^i l'unique application croissante et injective de Δ_{n-1} vers Δ_n qui ne prend pas la valeur i , et pour $0 \leq i \leq n$, σ_n^i l'unique application croissante et surjective de Δ_{n+1} vers Δ_n qui prend deux fois la valeur i . On définit alors des ensembles simpliciaux $\partial\Delta_n$ par la formule $\partial\Delta_n = \cup_{0 \leq i \leq n} \text{Im } \delta_n^i$. On a donc une inclusion canonique $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ pour chaque $n \geq 0$.

PROPOSITION 3.1.2. *L'ensemble d'inclusions*

$$\{ \partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n \mid n \geq 0 \}$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}$.

DÉMONSTRATION. Voir [17, chap. III, § 3.2]. □

3.1.3. On a un segment séparant $(\Delta_1, \delta_1^1, \delta_1^0)$, ce qui définit une donnée homotopique élémentaire sur Δ , notée Δ_1 (voir l'exemple 2.2.5), et donc un Δ -localisateur \mathcal{W}_∞ (corollaire 2.2.30), ainsi qu'une notion d'extensions anodines dans $\widehat{\Delta}$. On appellera ∞ -équivalences les éléments de \mathcal{W}_∞ . La remarque 2.2.21 implique que l'ensemble J des inclusions

$$\partial\Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{e\} \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1, \quad n \geq 0, \quad e = 0, 1$$

engendre la classe des extensions anodines, dans le sens où celles-ci sont les éléments de la classe $l(r(J))$. Pour ne pas nous singulariser, nous appellerons *fibrations de Kan*, les fibrations naïves au sens de cette classe d'extensions anodines, et *complexes de Kan* les objets fibrants.

Pour chaque ensemble simplicial X , on obtient une donnée homotopique induite sur X (cf. § 2.2.41), ce qui définit une notion d'extension anodine dans $\widehat{\Delta}/X$, ainsi qu'un Δ/X -localisateur noté \mathcal{W}_∞/X . On appellera *X-extensions anodines* les extensions anodines de $\widehat{\Delta}/X$ définies de la sorte. On remarque qu'en vertu de 2.2.43 les objets fibrants de $\widehat{\Delta}/X$ sont exactement les fibrations de Kan de but X , et qu'en vertu du lemme 2.2.42, les extensions anodines de $\widehat{\Delta}/X$ sont les morphismes dont l'image dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur d'oubli est une extension anodine.

On peut décrire les extensions anodines en exhibant un autre ensemble qui les engendre. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $\Lambda_n^k = \cup_{0 \leq j \leq n, j \neq k} \text{Im } \delta_n^j$. On a alors une inclusion canonique $\Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n$.

PROPOSITION 3.1.4. *La classe des extensions anodines est la classe*

$$l(r(\{ \Lambda_n^k \longrightarrow \Delta_n \mid n \geq 1, 0 \leq k \leq n \})).$$

DÉMONSTRATION. Voir [17, chap. IV, § 2.1]. \square

PROPOSITION 3.1.5. *La catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les ∞ -équivalences, et dont les cofibrations sont les monomorphismes. En outre, les objets fibrants sont exactement les complexes de Kan.*

DÉMONSTRATION. Le fait que l'on obtienne de la sorte une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, avec pour objets fibrants les complexes de Kan, résulte du théorème 2.2.13 et de la proposition 2.2.29. D'autre part, on vérifie grâce à la proposition 2.3.2 et au lemme 2.3.3 que \mathcal{W}_∞ est le Δ -localisateur engendré par les projections

$$X \times \Delta_1 \longrightarrow X, \quad X \in \text{Ob } \widehat{\Delta}.$$

Le corollaire 2.4.7 montre ainsi la propriété. \square

3.1.6. On rappelle que si $u : A \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur défini sur une petite catégorie, et à valeur dans une catégorie admettant des petites limites inductives, il existe un unique foncteur $u_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ qui commute aux petites limites inductives prolongeant u , et que ce dernier admet un adjoint à droite, noté $u^* : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{A}$.

PROPOSITION 3.1.7. *Soit $\phi : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Alors pour $m \geq 2$, $0 \leq i < j \leq m$, le carré suivant est cartésien dans \mathcal{C} :*

$$\begin{array}{ccc} \phi \Delta_{m-2} & \xrightarrow{\phi \delta_{m-1}^i} & \phi \Delta_{m-1} \\ \phi \delta_{m-1}^{j-1} \downarrow & & \downarrow \phi \delta_m^j \\ \phi \Delta_{m-1} & \xrightarrow{\phi \delta_m^i} & \phi \Delta_m \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. On simplifie les notations en notant $\delta^k = \phi \delta_p^k$ et $\sigma^k = \phi \sigma_p^k$. On ne rappelle pas les relations simpliciales (que l'on peut trouver par exemple dans [17, page 24]). Ces dernières montrent déjà que le carré est commutatif, ce qui est un bon début. Soient $u, v : X \longrightarrow \phi \Delta_{m-1}$ deux flèches de \mathcal{C} , telles que $\delta^i u = \delta^j v$. Il faut montrer qu'il existe une unique flèche $w : X \longrightarrow \phi \Delta_{m-2}$ telle que $u = \delta^{j-1} w$ et $v = \delta^i w$. Comme les morphismes du type δ^k admettent des rétractions, l'unicité est immédiate. On distingue deux cas : $j < m$, et $j = m$. Si $j < m$, on pose $w = \sigma^{j-1} u$, et si $j = m$, on pose $w = \sigma^{m-2} u$.

Si $j < m$, on a

$$v = \sigma^j \delta^j v = \sigma^j \delta^i u = \delta^i \sigma^{j-1} u = \delta^i w,$$

d'où

$$u = \sigma^i \delta^i u = \sigma^i \delta^j v = \sigma^i \delta^j \delta^i w = \sigma^i \delta^i \delta^{j-1} w = \delta^{j-1} w.$$

Si $j = m$ et $i < m - 1$, alors on a

$$v = \sigma^{m-1} \delta^m v = \sigma^{m-1} \delta^i u = \delta^i \sigma^{m-2} u = \delta^i w ,$$

d'où encore

$$u = \sigma^i \delta^i u = \sigma^i \delta^m v = \sigma^i \delta^m \delta^i w = \sigma^i \delta^i \delta^{m-1} w = \delta^{m-1} w .$$

Si $j = m$ et $i = m - 1$, alors

$$v = \sigma^{m-1} \delta^m v = \sigma^{m-1} \delta^{m-1} u = u ,$$

et donc $w = \sigma^{m-2} v$, et $\delta^m u = \delta^{m-1} u$, d'où

$$\delta^{m-1} w = \delta^{m-1} \sigma^{m-2} u = \sigma^{m-2} \delta^m u = \sigma^{m-2} \delta^{m-1} u = u = v ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 3.1.8. *Soient A une petite catégorie, et $u : \Delta \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur. Pour que le foncteur $u_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que la flèche $(u\delta_1^1, u\delta_1^0) : u\Delta_0 \amalg u\Delta_0 \longrightarrow u\Delta_1$ soit un monomorphisme de \widehat{A} .*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 3.1.2, le foncteur $u_!$ respecte les monomorphismes si et seulement si pour tout entier positif n , le morphisme $u_! \partial \Delta_n \longrightarrow u_! \Delta_n$ est un monomorphisme. On va vérifier que c'est toujours le cas pour $n \neq 1$, ce qui montrera le lemme.

Lorsque $n = 0$, c'est trivial, car $\partial \Delta_0 = \emptyset$, et car le foncteur $u_!$ commute aux petites limites inductives par construction. Il suffit donc de considérer le cas où $n > 1$. On définit un sous-objet $\partial u \Delta_n$ de $u \Delta_n$ en posant $\partial u \Delta_n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \text{Im } u\delta_n^i$. Les carrés cartésiens décrits par la proposition 3.1.7 montrent que pour $i < j$, on a $\text{Im } u\delta_n^i \cap \text{Im } u\delta_n^j \simeq u\Delta_{n-2}$, ce qui implique que $\partial u \Delta_n$ peut se décrire comme une limite inductive (finie) ne faisant intervenir que des objets de la forme $u\Delta_k$ pour $k = n - 1, n - 2$, les morphismes étant du type $u\delta_k^i$. Autrement-dit, $\partial u \Delta_n$ est la limite inductive de l'image par $u_!$ d'un diagramme de $\widehat{\Delta}$, et on vérifie facilement que la limite inductive de ce diagramme dans la catégorie des ensembles simpliciaux n'est autre que $\partial \Delta_n$ ([17, chap. II, § 3.9]). Par suite, on a $u_! \partial \Delta_n \simeq \partial u \Delta_n$, ce qui montre que $u_! \partial \Delta_n$ est canoniquement un sous-objet de $u \Delta_n$ pour $n > 1$. \square

LEMME 3.1.9. *Soient A une petite catégorie, X un préfaisceau sur A , \mathcal{W} un A/X -localisateur, ϕ et ψ deux foncteurs définis de Δ vers \widehat{A} , $\alpha : \phi \longrightarrow \psi$ un morphisme de foncteurs, et $u : \psi \Delta_n \longrightarrow X$ un morphisme de \widehat{A} . On suppose que les foncteurs $\phi_!$ et $\psi_!$ respectent les monomorphismes, et que pour tout monomorphisme $f : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$, le triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \phi \Delta_m & \xrightarrow{\alpha \Delta_m} & \psi \Delta_m \\ & \searrow u \alpha_{\Delta_n} \phi f & \swarrow u \psi f \\ & X & \end{array}$$

est une \mathcal{W} -équivalence. Alors le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \phi_! \partial \Delta_n & \xrightarrow{\alpha_{\partial \Delta_n}} & \psi_! \partial \Delta_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

est une \mathcal{W} -équivalence, $\alpha : \phi_! \rightarrow \psi_!$ désignant aussi le prolongement de $\alpha : \phi \rightarrow \psi$.

DÉMONSTRATION. Pour les besoins de la démonstration, on introduit la terminologie suivante : un sous-objet K de Δ_n sera dit *homogène* s'il existe un sous-ensemble I de $\{0, \dots, n\}$, tel que $K = \cup_{i \in I} \text{Im } \delta_n^i$. Par exemple, $\partial \Delta_n$ est un sous-objet homogène de Δ_n .

On va montrer par récurrence sur $m \leq n$ que pour tout monomorphisme $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ de Δ , et pour tout sous-objet homogène K de Δ_m , la flèche

$$\begin{array}{ccc} \phi_! K & \xrightarrow{\alpha_K} & \psi_! K \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

Pour $m = 0, 1$, c'est trivial. Pour $m > 1$, on considère un monomorphisme $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$, et un sous-objet homogène K de Δ_m . Alors il existe un sous-ensemble I de $\{0, \dots, m\}$ tel que $K = \cup_{i \in I} \text{Im } \delta_m^i$. On procède alors par récurrence sur $|I|$. Si $I = \emptyset$, c'est évident. Sinon, on choisit $i = \min I \in I$, et donc en posant $J = I \setminus \{i\}$, on définit un sous-objet homogène de Δ_m par $L = \cup_{j \in J} \text{Im } \delta_m^j$. On a alors un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L \cap \Delta_{m-1} & \longrightarrow & \Delta_{m-1} \\ \downarrow & & \downarrow \delta_m^i \\ L & \longrightarrow & K \end{array} .$$

La proposition 3.1.7 montre que

$$L \cap \Delta_{m-1} \simeq \cup_{j \in J} (\text{Im } \delta_m^j \cap \text{Im } \delta_m^i) \simeq \cup_{j \in J} \text{Im } \delta_{m-1}^{j-1} ,$$

et donc que $L \cap \Delta_{m-1}$ est un sous-objet homogène de Δ_{m-1} . En outre, les images de ce carré par les foncteurs $\phi_!$ et $\psi_!$ sont encore des carrés cocartésiens. On peut alors conclure en vertu du lemme 2.3.7. \square

3.1.10. On rappelle que le foncteur $\text{nerf } N : \mathcal{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$, $C \mapsto NC$, est le foncteur qui à une petite catégorie C associe l'ensemble simplicial $\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{Cat}}(\Delta_n, C)$.

LEMME 3.1.11. Soit A une petite catégorie admettant un objet final e . Alors pour toute flèche $f : * \rightarrow NA$, et pour toute flèche $u : NA \rightarrow X$ où X est un

ensemble simplicial,

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{f} & NA \\ & \searrow & \swarrow u \\ & & X \end{array}$$

est une \mathcal{W}_∞/X -équivalence.

DÉMONSTRATION. Soit $e : * \longrightarrow NA$ la flèche qui pointe l'objet final. On vérifie facilement que c est un rétracte par déformation fort, et donc que c est une extension anodine de $\widehat{\Delta}$ en vertu du lemme 2.2.31. Le cas $f = e$ est donc résolu par le lemme 2.2.42. En outre, pour toute flèche $\Delta_1 \longrightarrow X$, et pour $i = 0, 1$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{\delta_1^i} & \Delta_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

est une \mathcal{W}_∞/X -équivalence par construction des X -extensions anodines (voir 2.2.41). Or si $f : * \longrightarrow NA$ est quelconque, il existe une flèche $h : \Delta_1 \longrightarrow NA$ telle que $h\delta_1^1 = f$ et $h\delta_1^0 = e$, ce qui permet de conclure. \square

3.1.12. On introduit à présent les foncteurs de subdivision barycentrique et d'extension de Kan (d'après [34]). Soit \mathcal{Ord} la catégorie des ensembles ordonnés. On définit un foncteur $\xi : \mathcal{Ord} \longrightarrow \mathcal{Cat}$, qui à chaque ensemble ordonné E , associe l'ensemble des sous-ensembles totalement ordonnés finis et non-vides de E , ordonné par l'inclusion (puis vu comme une catégorie), et à chaque application croissante $f : E \longrightarrow F$, associe l'application croissante $\xi f : \xi E \longrightarrow \xi F$, $U \longmapsto f(U)$. En composant avec le foncteur nerf $N : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$, on obtient un foncteur $N\xi : \mathcal{Ord} \longrightarrow \widehat{\Delta}$. Comme Δ est une sous-catégorie pleine de \mathcal{Ord} , cela définit par restriction un foncteur $\sigma : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$, $\Delta_n \longmapsto N\xi\Delta_n$. On obtient ainsi un foncteur

$$\text{Sd} = \sigma_! : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta},$$

lequel admet un adjoint à droite

$$\text{Ex} = \sigma^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}.$$

On remarque que pour tout ensemble ordonné E , il existe une application croissante $\alpha_E : \xi E \longrightarrow E$, qui à $U \subset E$ associe $\max U$. Si $h : \Delta \longrightarrow \widehat{\Delta}$ est le plongement de Yoneda, cela définit un morphisme de foncteurs $\alpha : \sigma \longrightarrow h$, d'où un morphisme de foncteurs $\alpha : \text{Sd} \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$. Par adjonction, on obtient un morphisme de foncteurs $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \text{Ex}$. Il est immédiat que le foncteur Sd respecte les monomorphismes en vertu du lemme 3.1.8.

LEMME 3.1.13. *Pour tout morphisme d'ensembles simpliciaux $u : \text{Sd } \Delta_n \longrightarrow X$ et pour toute flèche $f : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ de Δ , la flèche*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd } \Delta_m & \xrightarrow{\text{Sd } f} & \text{Sd } \Delta_n \\ & \searrow & \swarrow u \\ & X & \end{array}$$

est une équivalence faible de $\widehat{\Delta}/X$.

DÉMONSTRATION. Si $m = 0$, cela résulte du lemme 3.1.11, car $\xi\Delta_n$ admet un objet final. Le cas général s'en déduit immédiatement. \square

PROPOSITION 3.1.14. *Pour toute flèche du type $u : \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1) \longrightarrow X$, les deux morphismes ($i = 0, 1$)*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}(\partial\Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{i\}) & \longrightarrow & \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1) \\ & \searrow & \swarrow u \\ & X & \end{array}$$

sont des cofibrations triviales de $\widehat{\Delta}/X$.

DÉMONSTRATION. Soit $f : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ un monomorphisme de Δ . Pour $0 \leq k \leq m$, on définit des monomorphismes de $\widehat{\Delta}$

$$u_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1$$

par

$$u_k(l) = \begin{cases} (l, 0) & \text{si } l \leq k \\ (l-1, 1) & \text{si } l > k \end{cases}, \quad 0 \leq l \leq m+1.$$

En posant $L_k = \cup_{k' \leq k} \text{Im } u_{k'}$, on obtient une suite de sous-objets

$$\Delta_{m+1} \simeq L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = \Delta_m \times \Delta_1,$$

telle que pour $0 \leq k < m$, on ait $L_k \cap \text{Im } u_{k+1} \simeq \Delta_m$. On a donc des plongements $\Delta_{m+1} \longrightarrow L_k$, tels qu'on ait des carrés cocartésiens du type

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \longrightarrow & \Delta_{m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_k & \longrightarrow & L_{k+1} \end{array}.$$

En procédant par récurrence sur k , on montre grâce aux lemmes 3.1.13 et 2.3.7 que la flèche $\text{Sd } L_0 \longrightarrow \text{Sd}(\Delta_m \times \Delta_1)$ peut être vue comme une \mathcal{W}_∞/X -équivalence. En utilisant encore le lemme 3.1.13, on en déduit que pour $i = 0, 1$, si $d^i : \Delta_0 \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1$ désigne le morphisme constant de valeur $(0, 1-i)$, la flèche

$$\text{Sd } d^i : \text{Sd } \Delta_0 \simeq \Delta_0 \longrightarrow \text{Sd}(\Delta_m \times \Delta_1)$$

est une \mathcal{W}_∞/X -équivalence. On en conclut par une nouvelle application du lemme 3.1.13 que les morphismes d'ensembles simpliciaux au-dessus de X ($i = 0, 1$)

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd } \Delta_m & \xrightarrow{\text{Sd}(1_{\Delta_m} \times \delta_1^i)} & \text{Sd}(\Delta_m \times \Delta_1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ u \text{Sd}(f \times 1_{\Delta_1}) \end{array}$$

sont des \mathcal{W}_∞/X -équivalences. Le lemme 3.1.9 montre alors que les flèches du type

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd } \partial \Delta_n & \xrightarrow{\text{Sd}(1_{\partial \Delta_n} \times \delta_1^i)} & \text{Sd}(\partial \Delta_n \times \Delta_1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

sont des \mathcal{W}_∞/X -équivalences. On a donc pour $i = 0, 1$, et pour toute flèche $\text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1) \rightarrow X$, des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd } \partial \Delta_n & \xrightarrow{\text{Sd}(1_{\partial \Delta_n} \times \delta_1^i)} & \text{Sd}(\partial \Delta_n \times \Delta_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sd } \Delta_n & \xrightarrow{\text{Sd}(1_{\Delta_n} \times \delta_1^i)} & \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1) \\ & & \searrow u \\ & & X \end{array} ,$$

dont les deux flèches horizontales sont des cofibrations triviales de $\widehat{\Delta}/X$, et par conséquent, comme le foncteur Sd commute aux sommes amalgamées, la flèche

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd } \Delta_n & \longrightarrow & \text{Sd}(\partial \Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{i\}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

est une cofibration triviale de $\widehat{\Delta}/X$, ce qui montre enfin que la flèche

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}(\partial \Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{i\}) & \longrightarrow & \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

en est une aussi, et achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 3.1.15. *Pour $n \geq 0$ et pour $i = 0, 1$, les flèches*

$$\text{Sd}(\partial \Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{i\}) \longrightarrow \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1)$$

sont des extensions anodines.

DÉMONSTRATION. Pour $X = \text{Sd}(\Delta_n \times \Delta_1)$, on peut appliquer la proposition 3.1.14, qui montre que ces deux inclusions sont des cofibrations triviales de $\widehat{\Delta}/X$. Or $(X, 1_X)$ est un objet fibrant de $\widehat{\Delta}/X$, et donc les flèches en question sont des

extensions anodines de $\widehat{\Delta}/X$ par le corollaire 2.2.28. Le lemme 2.2.42 implique que ces inclusions sont des extensions anodines de $\widehat{\Delta}$. \square

COROLLAIRE 3.1.16. *Le foncteur Sd respecte les extensions anodines, et le foncteur Ex respecte les fibrations de Kan.*

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du corollaire précédent, et la seconde de la première par adjonction. \square

3.1.17. Pour $n \geq 0$, on a un morphisme de foncteur

$$\beta_{\text{Ex}^n} : \text{Ex}^n \longrightarrow \text{Ex}^{n+1} ,$$

ce qui définit un système inductif de foncteurs,

$$1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \text{Ex} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Ex}^n \longrightarrow \text{Ex}^{n+1} \longrightarrow \cdots .$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\text{Ex}^\infty = \varinjlim_n \text{Ex}^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} .$$

On définit par récurrence des morphismes $\beta^n : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \text{Ex}^n$ par $\beta^0 = 1_{1_{\widehat{\Delta}}}$, et $\beta^{n+1} = \beta_{\text{Ex}^n} \beta^n$. Cela induit un morphisme de foncteurs $\beta^\infty : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \text{Ex}^\infty$.

3.1.18. On définit à présent la catégorie \mathcal{CS} des *complexes simpliciaux combinatoires* : un complexe simplicial combinatoire est un couple $X = (E, \Phi)$, où E est un ensemble ordonné, et où Φ est un sous-ensemble de ξE tel que pour tous $s \in \Phi$, $s' \subset s$, si $s' \neq \emptyset$ alors $s' \in \Phi$. Un morphisme de complexes simpliciaux combinatoires $f : (E_0, \Phi_0) \longrightarrow (E_1, \Phi_1)$ est une application croissante $f : E_0 \longrightarrow E_1$ telle que $f(\Phi_0) \subset \Phi_1$. On a un foncteur évident $\kappa : \Delta \longrightarrow \mathcal{CS}$, défini par $\Delta_n \longmapsto (\Delta_n, \xi \Delta_n)$, ce qui induit un foncteur $\kappa^* : \mathcal{CS} \longrightarrow \widehat{\Delta}$, par $X \longmapsto (\Delta_n \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{CS}}(\kappa \Delta_n, X))$. On remarque que si E est un ensemble ordonné, alors $\kappa^*(E, \xi E)$ n'est autre que le nerf de E .

EXEMPLE 3.1.19. On note Φ_n^k (resp. $\partial \Phi_n$) l'ensemble des $U \subset \Delta_n$ qui ne contiennent pas $\{0, \dots, n\} \setminus \{k\}$ (resp. $\{0, \dots, n\}$). Alors $\kappa^*(\Delta_n, \Phi_n^k) = \Lambda_n^k$ (resp. $\kappa^*(\Delta_n, \partial \Phi_n) = \partial \Delta_n$).

LEMME 3.1.20. *Pour tout complexe simplicial combinatoire $X = (E, \Phi)$, on a $\text{Sd } \kappa^* X = \text{N } \Phi$ (où Φ est vu comme un sous-ensemble ordonné de ξE , et donc comme une catégorie).*

DÉMONSTRATION. On sait que les simplexes non dégénérés de $\text{N } E$ sont les monomorphismes du type $\Delta_n \longrightarrow \text{N } E$ (voir [17, page 34]). On en déduit que ξE est l'ensemble des simplexes non dégénérés de $\text{N } E$, ordonné par l'inclusion, et il est alors bien connu que $\text{Sd } \text{N } E = \text{N } \xi E$ (voir [43]). D'autre part, les foncteurs Sd et κ^* respectent les monomorphismes (c'est évident pour le second, et cela résulte du lemme 3.1.8 pour Sd). On en déduit que $\text{Sd } \kappa^* X$ est un sous-objet de $\text{Sd } \text{N } E$, et il est facile de vérifier que les morphismes $\Delta_n \longrightarrow \text{N } \xi E$ qui se factorisent par $\text{Sd } \kappa^* X$ sont exactement les morphismes $\Delta_n \longrightarrow \Phi$. \square

La proposition ci-dessous est issue de [34], et la démonstration que nous en donnons ici est essentiellement l'originale.

PROPOSITION 3.1.21 (Kan [34]). *Pour tout ensemble simplicial X , $\text{Ex}^\infty X$ est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$, il existe un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}^2 \Lambda_n^k & \xrightarrow{\text{Sd} \alpha_{\Lambda_n^k}} & \text{Sd} \Lambda_n^k \\ & \searrow & \nearrow \psi_{n,k} \\ & \text{Sd}^2 \Delta_n & \end{array}$$

En effet, on définit une application (qui n'est pas nécessairement croissante) $f : \xi \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ en posant pour $U \in \xi \Delta_n$, $f(U) = \max U$ si U ne contient pas $\{0, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$, et $f(U) = k$ sinon. Cela détermine une application croissante

$$g : \xi^2 \Delta_n \rightarrow \xi \Delta_n, \quad \{U_1, U_2, \dots, U_l\} \mapsto \{f(U_1), \dots, f(U_l)\}.$$

On a par le lemme 3.1.20, $N \xi^2 \Delta_n = \text{Sd}^2 \Delta_n$, et la description de $\text{Sd}^2 \Lambda_n^k$ et de $\text{Sd} \Lambda_n^k$ par le même lemme permet de vérifier sans difficultés qu'en posant $\psi_{n,k} = N g$, le triangle voulu commute. On en déduit que pour tout morphisme $a : \Lambda_n^k \rightarrow \text{Ex} X$, il existe une flèche $b : \Delta_n \rightarrow \text{Ex}^2 X$ telle que le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \xrightarrow{a} & \text{Ex} X \xrightarrow{\beta_{\text{Ex} X}} \text{Ex}^2 X \\ \downarrow & \nearrow b & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

En effet, la donnée de a correspond par adjonction à la donnée d'un morphisme $u : \text{Sd} \Lambda_n^k \rightarrow X$, et on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sd}^2 \Lambda_n^k & \xrightarrow{\text{Sd} \alpha_{\Lambda_n^k}} & \text{Sd} \Lambda_n^k \xrightarrow{u} X \\ \downarrow & \nearrow \psi_{n,k} & \\ \text{Sd}^2 \Delta_n & & \end{array}$$

Le morphisme $u \psi_{n,k}$ correspond par adjonction à un unique morphisme b qui fait l'affaire. Vu que les objets Λ_n^k sont des limites inductives finies d'objets représentables, on vérifie facilement que les foncteurs $\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda_n^k, \cdot)$ commutent aux limites inductives filtrantes. On en déduit par construction de $\text{Ex}^\infty X$ que la flèche $\text{Ex}^\infty X \rightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions du type $\Lambda_n^k \rightarrow \Delta_n$, pour $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$. La proposition 3.1.4 achève donc cette démonstration. \square

PROPOSITION 3.1.22. *Toute limite inductive filtrante de fibrations de Kan (resp. de fibrations triviales) est une fibration de Kan (resp. une fibration triviale).*

DÉMONSTRATION. Soient $j : K \rightarrow L$ une inclusion d'ensembles simpliciaux de présentation finie (i.e. le foncteur $\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(M, \cdot)$ commute aux petites limites inductives filtrantes pour $M = K, L$), I une petite catégorie filtrante, X et Y deux foncteurs de I vers $\widehat{\Delta}$, et $p : X \rightarrow Y$ un morphisme de foncteurs tel que

pour tout $i \in \text{Ob } I$, $p(i)$ soit un élément de $r(j)$. On va montrer que $\varinjlim p$ vérifie aussi la propriété de relèvement à droite relativement à j . On se donne donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & \varinjlim X \\ j \downarrow & & \downarrow \varinjlim p \\ L & \xrightarrow{l} & \varinjlim Y \end{array} ,$$

et comme K et L sont de présentation finie, il existe deux factorisations de k et de l telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & X(i) & \longrightarrow & \varinjlim X \\ j \downarrow & & \downarrow p(i) & & \downarrow \varinjlim p \\ L & \longrightarrow & Y(i) & \longrightarrow & \varinjlim Y \end{array} .$$

Le carré de gauche admet un relèvement par hypothèse, ce qui en définit un pour le premier. La proposition résulte à présent des propositions 3.1.2 et 3.1.4. \square

COROLLAIRE 3.1.23. *Pour toute fibration de Kan p , $\text{Ex}^\infty p$ est une fibration entre objets fibrants.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte directement de la construction du foncteur Ex^∞ , du corollaire 3.1.16, des propositions 3.1.21, 3.1.22 et 2.2.29. \square

LEMME 3.1.24. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ un endofoncteur admettant un adjoint à droite D , et respectant les cofibrations et les cofibrations triviales. On se donne aussi un morphisme de foncteurs $\alpha : G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, et on note $\beta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow D$ le morphisme obtenu par adjonction, et on suppose que pour tout objet cofibrant X de \mathcal{C} , le morphisme α_X est une équivalence faible. Alors pour tout objet fibrant X , le morphisme $\beta_X : X \longrightarrow DX$ est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de [26, proposition 1.3.13 et lemme 1.3.18]. \square

3.1.25. Soit Y un ensemble simplicial. On définit un foncteur $\text{Sd}^Y : \widehat{\Delta}/Y \longrightarrow \widehat{\Delta}/Y$ par $\text{Sd}^Y(X, f) = (\text{Sd } X, \alpha_Y \text{Sd } f) = (\text{Sd } X, f\alpha_X)$, où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $\widehat{\Delta}$, vu comme un objet de $\widehat{\Delta}/Y$. Le morphisme de foncteurs $\alpha : \text{Sd} \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ induit trivialement un morphisme de foncteurs $\alpha^Y : \text{Sd}^Y \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}/Y}$.

LEMME 3.1.26. *Le foncteur Sd^Y respecte les extensions anodines de $\widehat{\Delta}/Y$, et $\alpha^Y : \text{Sd}^Y \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}/Y}$ est une \mathcal{W}_∞/Y -équivalence naturelle.*

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du corollaire 3.1.16 et du lemme 2.2.42. Pour ce qui est de la seconde assertion, on constate d'abord qu'en vertu de la proposition 3.1.2 et du lemme 2.2.40, l'ensemble

$$I_Y = \{ \partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n \longrightarrow Y \mid n \geq 0, \Delta_n \longrightarrow Y \}$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}/Y$. Comme pour tout morphisme $\Delta_n \rightarrow Y$, la flèche $\text{Sd } \Delta_n \rightarrow \Delta_n \rightarrow Y$ est une \mathcal{W}_∞/Y -équivalence (ce qu'on voit grâce au lemme 3.1.11, puisque Δ_n et $\text{Sd } \Delta_n$ sont les nerfs de catégories ayant un objet final), le lemme 3.1.9 implique que pour tout n , et pour toute flèche $\Delta_n \rightarrow Y$, le morphisme de $\widehat{\Delta}/Y$, $\text{Sd } \partial \Delta_n \rightarrow \partial \Delta_n \rightarrow Y$, est une \mathcal{W}_∞/Y -équivalence. Si X est un objet de $\widehat{\Delta}/Y$, le morphisme $\emptyset \rightarrow X$ est un rétracte d'un composé transfini d'images directes d'éléments de I_Y , et comme le foncteur Sd^Y commute aux petites limites inductives et respecte les monomorphismes, le lemme 2.3.7 montre que $\text{Sd}^Y X \rightarrow X$ est une \mathcal{W}_∞/Y -équivalence. \square

3.1.27. On note Ex^Y l'adjoint à droite de Sd^Y , $\beta^Y : 1_{\widehat{\Delta}} \rightarrow \text{Ex}^Y$ le morphisme de foncteurs obtenu à partir de α^Y par adjonction, et pour $n \geq 0$, $\text{Ex}^{Y,n}$ (resp. $\text{Sd}^{Y,n}$) le foncteur Ex^Y (resp. Sd^Y) itéré n fois. En composant les morphismes du type $\text{Sd}^{Y,n-1} \alpha^Y : \text{Sd}^{Y,n} \rightarrow \text{Sd}^{Y,n-1}$, on obtient un morphisme de foncteurs $\alpha^{Y,n} : \text{Sd}^{Y,n} \rightarrow 1_{\widehat{\Delta}/Y}$. De même, en composant les morphismes $\beta_{\text{Ex}^{Y,n}}^Y : \text{Ex}^{Y,n} \rightarrow \text{Ex}^{Y,n+1}$, on obtient un morphisme $\beta^{Y,n} : 1_{\widehat{\Delta}/Y} \rightarrow \text{Ex}^{Y,n}$, et on vérifie que $\beta^{Y,n}$ correspond à $\alpha^{Y,n}$ par adjonction. On a un système inductif indexé par les entiers $n \geq 0$

$$1_{\widehat{\Delta}/Y} \rightarrow \text{Ex}^{Y,1} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ex}^{Y,n} \rightarrow \text{Ex}^{Y,n+1} \rightarrow \dots ,$$

et on pose $\text{Ex}^{Y,\infty} = \varinjlim_n \text{Ex}^{Y,n}$. On a alors un morphisme de foncteurs $\beta^{Y,\infty} : 1_{\widehat{\Delta}/Y} \rightarrow \text{Ex}^{Y,\infty}$. Il est clair que si Y est l'objet final de $\widehat{\Delta}$, on retrouve les constructions précédentes. On va expliciter les objets du type $\text{Ex}^{Y,n}(X, p)$ pour plus de clarté. Si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\widehat{\Delta}$, on a un carré commutatif pour $0 \leq n \leq \infty$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta_X^n} & \text{Ex}^n X \\ p \downarrow & & \downarrow \text{Ex}^n p \\ Y & \xrightarrow{\beta_Y^n} & \text{Ex}^n Y \end{array} .$$

On peut alors former le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y \times_{\text{Ex}^n Y} \text{Ex}^n X & \longrightarrow & \text{Ex}^n X \\ q \downarrow & & \downarrow \text{Ex}^n p \\ Y & \xrightarrow{\beta_Y^n} & \text{Ex}^n Y \end{array} ,$$

et on vérifie facilement que si on voit $p : X \rightarrow Y$ comme un objet de $\widehat{\Delta}/Y$, on a l'identification $\text{Ex}^{Y,n}(X, p) = (Y \times_{\text{Ex}^n Y} \text{Ex}^n X, q)$.

PROPOSITION 3.1.28. *Toute fibration de Kan est une fibration.*

DÉMONSTRATION. Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration de Kan. On a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta_X^\infty} & \mathrm{Ex}^\infty X \\ p \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ex}^\infty p \\ Y & \xrightarrow{\beta_Y^\infty} & \mathrm{Ex}^\infty Y \end{array} ,$$

et on sait que $\mathrm{Ex}^\infty p$ est une fibration entre complexes de Kan (c'est le corollaire 3.1.23). On obtient donc un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \times_{\mathrm{Ex}^\infty Y} \mathrm{Ex}^\infty X \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & Y \end{array} ,$$

la flèche $q : Y \times_{\mathrm{Ex}^\infty Y} \mathrm{Ex}^\infty X \longrightarrow Y$ étant une fibration, puisque $\mathrm{Ex}^\infty p$ en est une. En vertu de la proposition 2.2.38, il suffit de montrer que la flèche $X \longrightarrow Y \times_{\mathrm{Ex}^\infty Y} \mathrm{Ex}^\infty X$ est une extension anodine. On voit déjà que c'est une cofibration, car les morphismes $\mathrm{Sd} \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ sont des épimorphismes, ce qui implique que β est un monomorphisme, et donc que β^∞ en est un, car c'est une limite inductive filtrante de monomorphismes. On remarque que (X, p) est un objet fibrant de $\widehat{\Delta}/Y$, en vertu du corollaire 2.2.29 et du lemme 2.2.42. On en déduit que les morphisme $\beta_{(X,p)}^{Y,n} : (X, p) \longrightarrow \mathrm{Ex}^{Y,n}(X, p)$ sont des \mathcal{W}_∞/Y -équivalences, grâce aux lemmes 3.1.24 et 3.1.26, et donc les morphismes

$$\beta_{\mathrm{Ex}^{Y,n}(X,p)}^Y : \mathrm{Ex}^{Y,n}(X, p) \longrightarrow \mathrm{Ex}^{Y,n+1}(X, p)$$

sont des Y -extensions anodines, car ce sont des cofibrations triviales de but fibrant (le lemme 3.1.26 implique en effet que les foncteurs $\mathrm{Ex}^{Y,n}$ respectent les objets fibrants par adjonction), ce qui permet d'appliquer le corollaire 2.2.28. Par conséquent, la flèche $(X, p) \longrightarrow \mathrm{Ex}^{Y,\infty}(X, p)$ est une Y -extension anodine. Or l'image de cette dernière dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur d'oubli n'est autre que le morphisme $X \longrightarrow Y \times_{\mathrm{Ex}^\infty Y} \mathrm{Ex}^\infty X$, et donc le lemme 2.2.42 achève cette démonstration. \square

THÉORÈME 3.1.29 (Quillen [41]). *La catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes, les cofibrations triviales, les extensions anodines, et les fibrations, les fibrations de Kan.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte des propositions 3.1.5, 2.2.38, et 3.1.28. \square

2. Caractérisation locale de la classe des ∞ -équivalences (1)

DÉFINITION 3.2.1. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme de \widehat{A} .

Le morphisme p est une \mathcal{W} -fibration faible si pour toute \mathcal{W} -équivalence $f : K \longrightarrow L$, et pour tout morphisme $L \longrightarrow Y$ de \widehat{A} , si on forme les carrés cartésiens

suivants,

$$\begin{array}{ccccc} K \times_Y X & \xrightarrow{g} & L \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{f} & L & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche g est une \mathcal{W} -équivalence.

Le morphisme p est \mathcal{W} -localement constant si pour tout morphisme $f : a' \rightarrow a$ de A , et pour tout morphisme $a \rightarrow Y$ de \widehat{A} , si on forme les carrés cartésiens suivants,

$$\begin{array}{ccccc} a' \times_Y X & \xrightarrow{g} & a \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a' & \xrightarrow{f} & a & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche g est une \mathcal{W} -équivalence.

Le morphisme p est une \mathcal{W} -équivalence universelle si pour toute flèche $Y' \rightarrow Y$, le morphisme image réciproque $p' : X' \rightarrow Y'$ est une \mathcal{W} -équivalence.

EXEMPLE 3.2.2. Il résulte du théorème 3.1.29 et de la proposition 2.4.19 que toute fibration de Kan est une \mathcal{W}_∞ -fibration faible, et donc un morphisme \mathcal{W}_∞ -localement constant. Plus généralement, pour toute petite catégorie A et pour tout A -localisateur propre \mathcal{W} , toute fibration au sens de \mathcal{W} est une \mathcal{W} -fibration faible.

PROPOSITION 3.2.3. Soit $p : X \rightarrow Y$ un morphisme d'ensemble simpliciaux. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout morphisme $Z \rightarrow Y$, le carré

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

(b) La flèche p est une \mathcal{W}_∞ -fibration faible.

(c) Le morphisme p est \mathcal{W}_∞ -localement constant.

DÉMONSTRATION. La preuve que nous donnons ici est inspirée de [44].

L'implication (a) \Rightarrow (b) résulte de la proposition 2.4.19, et il est évident que (b) \Rightarrow (c). Il ne reste donc plus qu'à montrer (c) \Rightarrow (a). On suppose à présent la condition (c) vérifiée. On a un foncteur $\phi : \widehat{\Delta}/Y \rightarrow \widehat{\Delta}/X$, défini sur les objets par $(Z \rightarrow Y) \mapsto (Z \times_Y X \rightarrow X)$, et on s'aperçoit facilement que $\mathcal{W} = \phi^{-1}(\mathcal{W}_\infty/X)$ est un Δ/Y -localisateur. La propriété (c) est alors équivalente à la suivante.

(c') Tout morphisme de $\widehat{\Delta}/Y$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \longrightarrow & \Delta_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

On doit en déduire que pour toute ∞ -équivalence $f : A \longrightarrow B$, et tout morphisme $B \longrightarrow Y$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

est une \mathcal{W} -équivalence (cela suffira grâce à la proposition 2.4.19). En vertu de 2.4.9 (c), on peut se contenter du cas où f est une cofibration triviale, et 2.4.9 (b) montre qu'il suffit de traiter le cas où f est de la forme

$$\partial\Delta_n \times \Delta_1 \cup \Delta_n \times \{e\} \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1, \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } e = 0, 1,$$

puis 2.4.9 (a) qu'il suffit de considérer le cas où f est de la forme

$$1_{\Delta_n} \times \delta_1^i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1 \quad \text{ou bien} \quad 1_{\partial\Delta_n} \times \delta_1^i : \partial\Delta_n \longrightarrow \partial\Delta_n \times \Delta_1.$$

Enfin, le lemme 3.1.9, appliqué aux foncteurs $X \longmapsto X$ et $X \longmapsto X \times \Delta_1$ pour le Δ/Y -localisateur \mathcal{W} , nous permet de nous contenter de montrer le cas où f est de la forme $1_{\Delta_n} \times \delta_1^i$.

Dans la démonstration de la proposition 3.1.14, on a déjà remarqué qu'il existe une suite de sous-objets de $\Delta_n \times \Delta_1$, de la forme

$$\Delta_{n+1} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = \Delta_n \times \Delta_1,$$

et telle qu'on ait des carrés cocartésiens dont toutes les flèches sont des monomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \longrightarrow & \Delta_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_k & \longrightarrow & L_{k+1} \end{array} \quad .$$

Cette décomposition et les sorites 2.4.9 permettent de montrer par récurrence sur k que les inclusions du type $\Delta_n \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1$ sont des \mathcal{W} -équivalences, ce qui achève cette démonstration. \square

COROLLAIRE 3.2.4. *Un morphisme \mathcal{W}_∞ -localement constant est une ∞ -équivalence si et seulement si c'est une ∞ -équivalence universelle.*

DÉMONSTRATION. Soient $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme \mathcal{W}_∞ -localement constant, et $v : Y' \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{\Delta}$. On forme le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

On suppose en outre que p est une ∞ -équivalence, et on veut montrer que le morphisme p' est une ∞ -équivalence. En vertu de la proposition 3.2.3, le morphisme p est une \mathcal{W}_∞ -fibration faible, et on vérifie immédiatement que les \mathcal{W}_∞ -fibrations faibles sont stables par changement de base. Factorisons v en une extension anodine $j : Y' \longrightarrow Y''$ suivie d'une fibration de Kan $r : Y'' \longrightarrow Y$, puis formons les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{i} & X'' & \xrightarrow{q} & X \\ p' \downarrow & & p'' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y'' & \xrightarrow{r} & Y \end{array}$$

Comme r est une fibration de Kan, c'est une \mathcal{W}_∞ -fibration faible (3.2.2), et p'' est une \mathcal{W}_∞ -fibration faible. On en déduit que p'' et i sont des ∞ -équivalences, ce qui implique que p' en est une aussi. \square

3.2.5. On définit le foncteur

$$\pi_0 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

comme l'adjoint à gauche du foncteur

$$p_\Delta^* : \mathcal{E}ns \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad E \longmapsto \Pi_E^* .$$

Si $\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$ désigne la catégorie $\widehat{\Delta}$, localisée par la classe des ∞ -équivalences, alors pour tout ensemble simplicial X , on a une bijection naturelle

$$(3.2.5.1) \quad \pi_0(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}}(*, X) .$$

On appelle 0-équivalences les morphismes de $\widehat{\Delta}$ qui induisent une bijection après application du foncteur π_0 .

LEMME 3.2.6. *Les 0-équivalences forment un Δ -localisateur qui contient les ∞ -équivalences.*

DÉMONSTRATION. L'identification (3.2.5.1) implique que toute Δ_1 -équivalence d'homotopie, et donc toute fibration triviale est une 0-équivalence. Comme le foncteur π_0 commute aux petites limites inductives, on en déduit aussitôt le lemme. \square

Le lemme ci-dessus et le corollaire 3.2.4 déterminent totalement \mathcal{W}_∞ dans le sens suivant.

THÉORÈME 3.2.7. *Soit \mathcal{W} un Δ -localisateur vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *Toute \mathcal{W} -équivalence est une 0-équivalence.*

- (ii) *Un morphisme \mathcal{W} -localement constant est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement s'il est une \mathcal{W} -équivalence universelle.*
- (iii) *Pour tout ensemble simplicial X , le morphisme canonique de X vers l'objet final $* \simeq \Delta_0$ de $\widehat{\Delta}$ est \mathcal{W} -localement constant.*

Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.

DÉMONSTRATION. On va procéder en plusieurs étapes.

3.2.7.1. *Toute ∞ -équivalence est une \mathcal{W} -équivalence.*

En effet, il résulte de (iii) que pour tout ensemble simplicial X , la projection $X \times \Delta_1 \rightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence, ce qui permet de conclure en vertu de la définition même de \mathcal{W}_∞ (cf. 3.1.3).

3.2.7.2. *Une fibration de Kan est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si elle est une \mathcal{W} -équivalence universelle.*

Toute fibration de Kan est \mathcal{W}_∞ -localement constante (voir l'exemple 3.2.2) et donc est \mathcal{W} -localement constante en vertu de 3.2.7.1. L'assertion résulte donc de la condition (ii).

3.2.7.3. *Soit X un complexe de Kan tel que la flèche canonique $X \rightarrow \Delta_0$ soit une \mathcal{W} -équivalence. Alors X est Δ_1 -contractile.*

Il résulte de la condition (i) que $\pi_0(X)$ est l'ensemble à un élément, et donc en particulier que X n'est pas vide. Soit x un 0-simplexe de X . Comme X est un complexe de Kan, le morphisme canonique

$$q : \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_1, X) \longrightarrow X \times X \simeq \underline{\mathbf{Hom}}(\partial\Delta_1, X)$$

est une fibration de Kan ([17, chap. VI, § 4.3]). D'autre part, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(X, x) & \longrightarrow & P(X, x) & \longrightarrow & \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_1, X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q \\ \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{(1_X, x)} & X \times X \\ & & \downarrow & & \downarrow pr_2 \\ & & \Delta_0 & \xrightarrow{x} & X \end{array} ,$$

on obtient un diagramme dont toutes les flèches verticales sont des fibrations de Kan. Le morphisme composé $\underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_1, X) \rightarrow X$ est une fibration triviale, et il résulte de 3.2.7.2 que $pr_2 : X \times X \rightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence universelle. Par conséquent, en vertu encore de 3.2.7.2, $\Omega(X, x)$ est un complexe de Kan dont la flèche canonique vers Δ_0 est une \mathcal{W} -équivalence. En itérant cette construction, on obtient une suite $\Omega^n(X, x)$ de complexes de Kan vérifiant la même propriété, telle que $\pi_0 \Omega^n(X, x)$ soit le n -ième groupe d'homotopie de X au point x . La condition (i), le théorème de Whitehead ([17, chap. VI, § 5.6.1]), et le lemme 2.2.24 impliquent donc l'assertion.

3.2.7.4. *Toute fibration de Kan qui est une \mathcal{W} -équivalence est une ∞ -équivalence.*

Considérons une fibration de Kan $p : X \longrightarrow Y$ qui soit aussi une \mathcal{W} -équivalence. La condition (i) implique que p induit une bijection après application du foncteur π_0 , et toutes les fibres de p sont Δ_1 -contractiles en vertu de 3.2.7.2 et 3.2.7.3. L'assertion résulte donc du théorème de Whitehead et de la longue suite exacte des groupes d'homotopie associée à une fibration de Kan ([17, chap. VI, § 3.3]).

3.2.7.5. *Toute \mathcal{W} -équivalence est une ∞ -équivalence.*

Cela résulte immédiatement de 3.2.7.1, de 3.2.7.4, et de l'existence pour tout morphisme de $\widehat{\Delta}$ d'une factorisation en une extension anodine suivie d'une fibration de Kan. \square

3. Réalisations simpliciales

3.3.1. Si A est une petite catégorie, on note $pr_1 = 1_A \times p_\Delta : A \times \Delta \longrightarrow A$ et $pr_2 = p_A \times 1_\Delta : A \times \Delta \longrightarrow \Delta$ les projections canoniques, ce qui induit deux foncteurs images inverses

$$pr_1^* = p_\Delta^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} \quad \text{et} \quad pr_2^* = p_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

Le foncteur pr_1^* est toujours pleinement fidèle. Si X et Y sont respectivement un préfaisceau sur A et un ensemble simplicial, on notera par abus $X \times Y$ le préfaisceau sur $A \times \Delta$, $pr_1^*X \times pr_2^*Y$.

LEMME 3.3.2. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{M} un modèle cellulaire de \widehat{A} . Alors l'ensemble d'inclusions*

$$\{ K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n \mid K \longrightarrow L \in \mathcal{M}, n \geq 0 \}$$

est un modèle cellulaire de $\widehat{A \times \Delta}$.

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 0$, on définit la catégorie $\Delta_{\leq n}$ comme la sous-catégorie pleine de Δ dont les objets sont les ensembles ordonnés Δ_k pour $k \leq n$, et on note

$$i_n : \Delta_{\leq n} \longrightarrow \Delta$$

le foncteur d'inclusion. On obtient de la sorte deux foncteurs

$$i_{n!} : \widehat{\Delta_{\leq n}} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad \text{et} \quad i_n^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta_{\leq n}} ,$$

le premier étant un adjoint à gauche du second. Suivant [17], cela permet de former un foncteur squelette

$$\text{Sk}^n = i_n^* i_{n!} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} ,$$

muni d'un morphisme de foncteurs canonique $\text{Sk}^n \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ (voir [17, chap. II, § 3]). On obtient en appliquant cette construction argument par argument un foncteur

$$\text{Sk}^n : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

On a ainsi un filtration de $1_{\widehat{\Delta}}$ ([17, chap. II, § 3.5, corollaire 1, et § 3.8])

$$\emptyset = \text{Sk}^{-1} \subset \text{Sk}^0 \subset \dots \subset \dots \text{Sk}^n \subset \text{Sk}^{n+1} \subset \dots \subset 1_{\widehat{\Delta}} ,$$

telle que $1_{\widehat{\Delta}} = \varinjlim_n \text{Sk}^n$. Pour chaque monomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$, on obtient grâce au lemme d'Eilenberg-Zilber ([17, chap. II, § 3.1]), un carré cartésien dans \widehat{A}

$$\begin{array}{ccc} (\text{Sk}^{n-1} X)_n & \longrightarrow & X_n \\ (\text{Sk}^{n-1} f)_n \downarrow & & \downarrow f_n \\ (\text{Sk}^{n-1} Y)_n & \longrightarrow & Y_n \end{array} .$$

On en déduit en utilisant le carré cocartésien [17, chap. III, § 3.2, Fig. 18], le carré cocartésien suivant dans $\widehat{A \times \Delta}$.

$$\begin{array}{ccc} ((X_n \cup (\text{Sk}^{n-1} Y)_n) \times \Delta_n) \cup (Y_n \times \partial\Delta_n) & \longrightarrow & X \cup \text{Sk}^{n-1} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_n \times \Delta_n & \longrightarrow & X \cup \text{Sk}^n Y \end{array}$$

L'égalité $Y = \cup_{n \geq 0} (X \cup \text{Sk}^n Y)$ montre donc que les monomorphismes de $\widehat{A \times \Delta}$ sont engendrés par les flèches de la forme

$$K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n ,$$

définies par un monomorphisme $K \longrightarrow L$ de \widehat{A} , et l'une des inclusions canoniques $\partial\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$, $n \geq 0$. L'assertion résulte donc de [26, lemme 4.2.4]. \square

3.3.3. Soient A une petite catégorie, et D un objet cosimplicial de \widehat{A} (*i.e.* un foncteur de Δ vers \widehat{A}). On note pour $n \geq 0$, $D_n = D\Delta_n$, et si f est une flèche de Δ , on note encore par abus f l'image de f par D . On a un foncteur

$$\underline{D} : A \times \Delta \longrightarrow \widehat{A} , \quad (a, \Delta_n) \longmapsto a \times D_n$$

lequel se prolonge de manière unique en un foncteur commutant aux petites limites inductives

$$\text{Real}_D = \underline{D}_! : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A} ,$$

et admettant donc un adjoint à droite

$$\text{Sing}_D = \underline{D}^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} .$$

Si $\underline{\text{Hom}}$ désigne le Hom interne de \widehat{A} , pour tout préfaisceau X sur A , on a

$$(\text{Sing}_D X)_n = \underline{\text{Hom}}(D_n, X) , \quad n \geq 0 .$$

Pour chaque morphisme $D \longrightarrow D'$ d'objets cosimpliciaux de \widehat{A} , on obtient canoniquement deux morphismes de foncteurs

$$\text{Real}_D \longrightarrow \text{Real}_{D'} \quad \text{et} \quad \text{Sing}_{D'} \longrightarrow \text{Sing}_D .$$

EXEMPLE 3.3.4. Si P est un l'objet cosimplicial constant de valeur l'objet final de \widehat{A} , alors le foncteur

$$\text{Sing}_P : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

est le foncteur p_Δ^* , qui à un préfaisceau X sur A associe l'objet simplicial constant de valeur X . Son adjoint à gauche Real_P s'identifie donc au foncteur limite inductive sur Δ° :

$$\varinjlim_{\Delta^\circ} : \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \widehat{A}) \longrightarrow \widehat{A} .$$

Si D est un objet cosimplicial quelconque de \widehat{A} , on a un unique morphisme canonique de D vers P , ce qui induit des morphismes de foncteurs

$$\text{Real}_D \longrightarrow \text{Real}_P = \varinjlim_{\Delta^\circ} \quad \text{et} \quad \text{Sing}_P = p_\Delta^* \longrightarrow \text{Sing}_D .$$

LEMME 3.3.5. Soient A une petite catégorie, et D un objet cosimplicial de \widehat{A} . Pour que le foncteur Real_D respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que la flèche

$$(\delta_1^1, \delta_1^0) : D_0 \amalg D_0 \longrightarrow D_1$$

soit un monomorphisme.

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que la condition est nécessaire. Nous allons montrer qu'elle est suffisante. Pour $n \geq 0$, on note $\partial D_n = \text{Real}_D \partial \Delta_n$. Il résulte du lemme 3.1.8 que pour tout objet K de \widehat{A} et tout entier $n \geq 0$ que

$$K \times \partial D_n = \text{Real}_D(K \times \partial \Delta_n) \longrightarrow \text{Real}_D(K \times \Delta_n) = K \times D_n$$

est un monomorphisme. Si $K \longrightarrow L$ est un monomorphisme On obtient donc un monomorphisme

$$K \times D_n \cup L \times \partial D_n \longrightarrow L \times D_n .$$

Or celui-ci est l'image par le foncteur Real_D du monomorphisme

$$K \times \Delta_n \cup L \times \partial \Delta_n \longrightarrow L \times \Delta_n .$$

Le lemme 3.3.2 permet ainsi d'achever la démonstration. \square

3.3.6. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Un \mathcal{W} -segment est un segment séparant $(I, \partial^0, \partial^1)$ de \widehat{A} tel que pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times I \longrightarrow X$ soit une \mathcal{W} -équivalence.

DÉFINITION 3.3.7. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale est un objet cosimplicial D de \widehat{A} vérifiant les axiomes suivants.

RC1 Le préfaisceau D_0 est un objet final de \widehat{A} .

RC2 Les morphismes $D_n \longrightarrow D_0$, $n \geq 0$, sont des \mathcal{W} -équivalences universelles (*i.e.* pour tout préfaisceau X sur A , les projections $X \times D_n \longrightarrow X$ sont des \mathcal{W} -équivalences).

RC3 La flèche

$$(\delta_1^1, \delta_1^0) : D_0 \amalg D_0 \longrightarrow D_1$$

est un monomorphisme.

Une telle résolution est *contractile* s'il existe un \mathcal{W} -segment $(I, \partial^0, \partial^1)$ de \widehat{A} , tel que pour tout entier $n \geq 0$, D_n soit I -contractile.

EXEMPLE 3.3.8. Soit A une petite catégorie.

Si \mathcal{W} est un A -localisateur et $u : A \rightarrow \widehat{A}$ un foncteur, tels que pour tout $a \in \text{Ob } A$, $u(a)$ soit connexe, et que le morphisme $u^* \Delta_1 \rightarrow *$ soit une \mathcal{W} -équivalence universelle. Alors

$$D : \Delta_n \mapsto u^* \Delta_n$$

est une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale contractile (car les préfaisceaux D_n sont tous D_1 -contractiles).

On définit ainsi la *résolution cosimpliciale de Lawvere de A* comme l'objet cosimplicial

$$i_A^* \Delta : \Delta_n \mapsto i_A^* \Delta_n .$$

En vertu du lemme 1.1.27, pour tout entier $n \geq 0$, le préfaisceau $i_A^* \Delta_n$ est un objet injectif de \widehat{A} , et par conséquent, pour tout A -localisateur \mathcal{W} , $i_A^* \Delta$ est une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale contractile.

LEMME 3.3.9. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur accessible. On considère un monomorphisme $K \rightarrow L$ de \widehat{A} , et on suppose que les foncteurs

$$X \mapsto X \times K \quad \text{et} \quad X \mapsto X \times L$$

respectent les \mathcal{W} -équivalences. Alors pour toute \mathcal{W} -fibration $p : X \rightarrow Y$ de \widehat{A} , la flèche

$$q : \underline{\text{Hom}}(L, X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(L, Y) \times_{\underline{\text{Hom}}(K, Y)} \underline{\text{Hom}}(K, X)$$

est une \mathcal{W} -fibration (Hom désignant le Hom interne de \widehat{A}).

DÉMONSTRATION. Les fibrations étant définies par le fait qu'elles vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales, on s'aperçoit aussitôt par adjonction que q est une \mathcal{W} -fibration si et seulement si pour toute \mathcal{W} -cofibration triviale $U \rightarrow V$, la flèche

$$U \times L \cup V \times K \rightarrow V \times L$$

est une \mathcal{W} -cofibration triviale. Or cette dernière propriété est une conséquence immédiate de l'hypothèse. \square

PROPOSITION 3.3.10. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et D une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale. On note $\mathcal{W}^{\Delta^\circ}$ le $A \times \Delta$ -localisateur formé des morphismes $X \rightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$, tels que pour tout $n \geq 0$, la flèche $X_n \rightarrow Y_n$ soit une \mathcal{W} -équivalence (cf. 2.3.12). Alors on a une inclusion

$$\text{Real}_D \mathcal{W}^{\Delta^\circ} \subset \mathcal{W} .$$

DÉMONSTRATION. Les mêmes considérations que pour la démonstration du corollaire 2.3.5 impliquent qu'il suffit de montrer cet énoncé dans le cas où \mathcal{W} est accessible. Dans ces conditions, en vertu du théorème 2.3.4, la catégorie \widehat{A} admet une structure de catégorie de modèles fermée (à engendrement cofibrant). On peut alors considérer la structure de catégorie de modèles fermée de Reedy induite

sur $\widehat{A \times \Delta}$ (voir [26, théorème 5.2.5]). On vérifie facilement que les cofibrations pour cette structure sont les morphismes $K \rightarrow L$ tels que pour tout $n \geq 0$, le morphisme de \widehat{A}

$$(\mathrm{Sk}^{n-1} L)_n \amalg_{(\mathrm{Sk}^{n-1} K)_n} K_n \rightarrow L_n$$

soit un monomorphisme. On en déduit grâce au lemme d'Eilenberg-Zilber [17, II, § 3.1] que ce sont exactement les monomorphismes de $\widehat{A \times \Delta}$. En particulier, tout les objets sont cofibrants pour cette structure. En outre, on s'aperçoit grâce à la caractérisation des fibrations pour la structure de Reedy, que si $X \rightarrow Y$ est un morphisme de \widehat{A} , alors la flèche $\mathrm{Sing}_D X \rightarrow \mathrm{Sing}_D Y$ est une fibration si et seulement si pour tout $n \geq 0$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(D_n, X) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(D_n, Y) \times_{\underline{\mathrm{Hom}}(\partial D_n, Y)} \underline{\mathrm{Hom}}(\partial D_n, X)$$

est une fibration de \widehat{A} (où ∂D_n désigne l'image par Real_D de $\partial \Delta_n$). Or il résulte de la définition même de résolution cosimpliciale et des lemmes 3.1.8 et 3.1.9 que les inclusions $\partial D_n \rightarrow D_n$ vérifient les hypothèses du lemme ci-dessus. On en déduit que le foncteur Sing_D respecte les fibrations, et donc par adjonction que le foncteur Real_D respecte les cofibrations triviales. L'assertion résulte ainsi du lemme de Ken Brown ([26, lemme 1.1.12]). \square

3.3.11. Soit $\delta : \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$ le foncteur diagonal (défini par $\delta \Delta_n = (\Delta_n, \Delta_n)$). Il induit un foncteur image inverse

$$\delta^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}, \quad X \mapsto (\Delta_n \mapsto X_{n,n}),$$

lequel admet un adjoint à droite $\delta_* : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$. Si on note $h : \Delta \rightarrow \widehat{\Delta}$ le plongement de Yoneda, on a les identifications

$$\delta^* = \mathrm{Real}_h \quad \text{et} \quad \delta_* = \mathrm{Sing}_h .$$

COROLLAIRE 3.3.12. *Soit \mathcal{W} un Δ -localisateur contenant \mathcal{W}_∞ , et soit $X \rightarrow Y$ un morphisme de $\widehat{\Delta \times \Delta}$ tel que pour tout $n \geq 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $X_{\bullet, n} \rightarrow Y_{\bullet, n}$ soit une \mathcal{W} -équivalence. Alors $\delta^* X \rightarrow \delta^* Y$ est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Comme cela l'a été remarqué dans la preuve de la proposition 3.1.5, demander l'inclusion $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$ revient à demander que le morphisme $\sigma_0^0 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ soit une \mathcal{W} -équivalence universelle. Le corollaire est donc une spécialisation immédiate de la proposition 3.3.10. \square

LEMME 3.3.13. *Soient A une petite catégorie, $(I, \partial^0, \partial^1)$ un segment de \widehat{A} , et deux morphismes I -homotopes $u, v \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{A}}(X, Y)$. Alors pour tout préfaisceau Z sur A , les morphismes induits*

$$u^*, v^* : \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, Z)$$

sont I -homotopes.

DÉMONSTRATION. On peut supposer qu'il existe une I -homotopie $h : X \times I \rightarrow Y$ de u vers v , ce qui induit un morphisme

$$h^* : \underline{\mathrm{Hom}}(Y, Z) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X \times I, Z) .$$

Or on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathbf{Hom}}(X \times I, Z) \simeq \underline{\mathbf{Hom}}(I, \underline{\mathbf{Hom}}(X, Z)) ,$$

et donc h induit par adjonction une flèche

$$\underline{\mathbf{Hom}}(Y, Z) \times I \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(X, Z)$$

qui est l'homotopie recherchée. \square

PROPOSITION 3.3.14 (Kan [34]). *Les morphismes de foncteurs*

$$\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{Ex} \quad \text{et} \quad \beta^\infty : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \mathbf{Ex}^\infty$$

sont des ∞ -équivalences naturelles (i.e. pour tout ensemble simplicial X , β_X et β_X^∞ sont des ∞ -équivalences).

DÉMONSTRATION. Soient $\Delta \xleftarrow{p} \Delta \times \Delta \xrightarrow{q} \Delta$ les deux projections canoniques. Elles induisent deux foncteurs images inverses

$$p^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta} \quad \text{et} \quad q^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta \times \Delta} ,$$

et on remarque qu'on a deux morphismes de foncteurs canoniques (3.3.3)

$$p^* \longrightarrow \delta_* \longleftarrow q^* .$$

On a d'autre part un objet cosimplicial σ de $\widehat{\Delta}$, et un morphisme d'objets cosimpliciaux $\alpha : \sigma \longrightarrow h$ (voir 3.1.12), ce qui induit un morphisme de foncteurs

$$\delta_* = \mathbf{Sing}_h \longrightarrow \mathbf{Sing}_\sigma .$$

Pour tout $n \geq 0$, $\sigma^* \Delta_n = \mathbf{Ex} \Delta_n$ est un objet injectif de $\widehat{\Delta}$ (grâce par exemple aux lemmes 1.1.24 et 3.1.20, et à la proposition 3.1.2), et donc toute $\mathbf{Ex} \Delta_1$ -équivalence d'homotopie est une ∞ -équivalence (cette propriété résulte aussi peut-être plus simplement du fait qu'il existe un morphisme de foncteurs de $1_{\widehat{\Delta}}$ vers \mathbf{Ex} , ce qui implique que toute $\mathbf{Ex} \Delta_1$ -homotopie est une Δ_1 -homotopie). En outre, σ est une \mathcal{W}_∞ -résolution cosimpliciale contractile (les catégories $\xi \Delta_n$ admettent un objet final). Si X est un ensemble simplicial, pour $m, n \geq 0$, on a l'égalité

$$(\mathbf{Sing}_\sigma X)_{m,n} = \mathbf{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_m \times \mathbf{Sd} \Delta_n, X) ,$$

laquelle montre qu'on a un diagramme commutatif naturel en X

$$\begin{array}{ccccc} p^* X & \longrightarrow & \delta_* X & \longleftarrow & q^* X \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow q^* \beta_X \\ p^* X & \longrightarrow & \mathbf{Sing}_\sigma X & \longleftarrow & q^* \mathbf{Ex} X \end{array} .$$

Or en vertu du lemme 3.3.13, pour tout $m \geq 0$, on a une Δ_1 -équivalence d'homotopie

$$(q^* X)_{m,\bullet} = X \longrightarrow (\delta_* X)_{m,\bullet} = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_m, X) ,$$

et comme le foncteur \mathbf{Ex} commute aux produits, une $\mathbf{Ex} \Delta_1$ -équivalence d'homotopie

$$(q^* \mathbf{Ex} X)_{m,\bullet} = \mathbf{Ex} X \longrightarrow (\mathbf{Sing}_\sigma X)_{m,\bullet} = \mathbf{Ex} \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_m, X) ,$$

puis pour tout $n \geq 0$, des Δ_1 -équivalences d'homotopie

$$(p^* X)_{\bullet,n} = X \longrightarrow (\delta_* X)_{\bullet,n} = \underline{\mathbf{Hom}}(\Delta_n, X)$$

$$(p^* X)_{\bullet, n} = X \longrightarrow (\mathbf{Sing}_\sigma X)_{\bullet, n} = \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbf{Sd} \Delta_n, X) .$$

Il résulte donc du corollaire 3.3.12 qu'en appliquant le foncteur δ^* , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \delta^* \delta_* X & \longleftarrow & X \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \beta_X \\ X & \longrightarrow & \delta^* \mathbf{Sing}_\sigma X & \longleftarrow & \mathbf{Ex} X \end{array} ,$$

dans lequel toutes les flèches horizontales sont des ∞ -équivalences. Cela implique que le morphisme β_X est une ∞ -équivalence, et le lemme 2.3.7 montre qu'il en est alors de même de β_X^∞ . \square

PROPOSITION 3.3.15. *Les ∞ -équivalences sont stables par limites inductives filtrantes.*

DÉMONSTRATION. Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble ordonné $\xi \Delta_n$ est fini, et donc $\mathbf{Sd} \Delta_n = \mathbf{N} \xi \Delta_n$ est un ensemble simplicial de présentation finie (cf. [17, chap. II, § 5.4]). Par conséquent, le foncteur $\underline{\mathbf{Hom}}_{\widehat{\Delta}}(\mathbf{Sd} \Delta_n, \cdot)$ commute aux petites limites inductives filtrantes. On en déduit que le foncteur \mathbf{Ex} commute aux petites limites inductives filtrantes, puis qu'il en est de même des foncteurs \mathbf{Ex}^n pour $n \geq 0$. Comme \mathbf{Ex}^∞ est une limite inductive des foncteurs \mathbf{Ex}^n , cela implique que ce dernier commute aussi aux petites limites inductives filtrantes. Considérons à présent une petite catégorie filtrante I , et le $I^\circ \times \Delta$ -localisateur \mathcal{W}_∞^I , formé des morphismes $X \longrightarrow Y$ de $\widehat{I^\circ \times \Delta} \simeq \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$, tels que pour tout $i \in \mathbf{Ob} I$, la flèche $X_i \longrightarrow Y_i$ soit une ∞ -équivalence. Alors en vertu du corollaire 2.3.15, $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W}_∞^I , et les fibrations, les morphismes p de $\widehat{I^\circ \times \Delta}$ tels que pour tout $i \in \mathbf{Ob} I$, p_i soit une fibration de Kan. Il résulte de la proposition 3.1.22 que le foncteur limite inductive

$$\varinjlim : \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

respecte les fibrations et les fibrations triviales, et donc en vertu du lemme de Ken Brown ([26, lemme 1.1.12]), qu'il respecte les équivalences faibles entre objets fibrants. Soit $X \longrightarrow Y$ une équivalence faible de $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{\Delta})$. Alors le morphisme $\mathbf{Ex}^\infty X \longrightarrow \mathbf{Ex}^\infty Y$ est une équivalence faible entre objets fibrants (propositions 3.1.21 et 3.3.14), et donc $\varinjlim \mathbf{Ex}^\infty X \longrightarrow \varinjlim \mathbf{Ex}^\infty Y$ est une ∞ -équivalence. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim X & \longrightarrow & \varinjlim \mathbf{Ex}^\infty X & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Ex}^\infty \varinjlim X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim Y & \longrightarrow & \varinjlim \mathbf{Ex}^\infty Y & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Ex}^\infty \varinjlim Y \end{array} ,$$

lequel permet de conclure en vertu de la proposition 3.3.14. \square

DÉFINITION 3.3.16. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. On rappelle que $\mathcal{W}^{\Delta^\circ}$ désigne le $A \times \Delta$ -localisateur des flèches p de $\widehat{A \times \Delta}$ telles que pour tout $n \geq 0$, p_n soit une \mathcal{W} -équivalence. La *complétion simpliciale* de \mathcal{W}

est le $A \times \Delta$ -localisateur \mathcal{W}_Δ engendré par $\mathcal{W}^{\Delta^\circ}$ et par les projections $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ pour tout préfaisceau X sur $A \times \Delta$.

PROPOSITION 3.3.17. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Si \mathcal{W} est accessible (resp. propre), alors il en est de même de sa complétion simpliciale \mathcal{W}_Δ .*

DÉMONSTRATION. Tout A -localisateur engendré par une petite famille de A -localisateurs accessibles est accessible, ce qui implique la première assertion en vertu du corollaire 2.3.12 et de la proposition 2.3.8. La seconde résulte de la proposition 2.4.16, assistée des corollaires 2.4.6 et 2.4.7. \square

LEMME 3.3.18. *Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et D une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale. Alors pour tout préfaisceau X sur $A \times \Delta$, l'image de la projection $X \times \Delta_1 \longrightarrow X$ par le foncteur \mathbf{Real}_D est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. On vérifie immédiatement grâce au lemme 3.3.5 et à la proposition 3.3.10 que $\mathbf{Real}_D^{-1} \mathcal{W}$ est un $A \times \Delta$ -localisateur. Soit X un préfaisceau sur A . On a déjà vu dans la preuve de la proposition 3.1.14 qu'il existe une suite de sous-objets de $\Delta_n \times \Delta_1$, de la forme

$$\Delta_{n+1} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = \Delta_n \times \Delta_1 ,$$

et telle qu'on ait des carrés cocartésiens dont toutes les flèches sont des monomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \longrightarrow & \Delta_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_k & \longrightarrow & L_{k+1} \end{array} .$$

Or un calcul explicite immédiat montre que pour tout morphisme $\Delta_m \longrightarrow \Delta_n$, la flèche induite,

$$X \times \Delta_m \longrightarrow X \times \Delta_n$$

est une $\mathbf{Real}_D^{-1} \mathcal{W}$ -équivalence. La décomposition ci-dessus et le lemme 2.3.7 impliquent donc que pour tout $n \geq 0$, la flèche

$$X \times \Delta_{n+1} \longrightarrow X \times \Delta_n \times \Delta_1$$

est une $\mathbf{Real}_D^{-1} \mathcal{W}$ -équivalence. On en déduit aussitôt que la projection

$$X \times \Delta_n \times \Delta_1 \longrightarrow X \times \Delta_n$$

est une $\mathbf{Real}_D^{-1} \mathcal{W}$ -équivalence. Le lemme 3.1.9, appliqué aux foncteurs de $\widehat{\Delta}$ vers \widehat{A} ,

$$K \longmapsto \mathbf{Real}_D(X \times K) \quad \text{et} \quad K \longmapsto \mathbf{Real}_D(X \times K \times \Delta_1) ,$$

et au morphisme de foncteurs induit par les projections

$$X \times K \times \Delta_1 \rightarrow X \times K ,$$

montre que pour tout entier $n \geq 0$, la projection

$$X \times \partial \Delta_n \times \Delta_1 \longrightarrow X \times \partial \Delta_n$$

est une $\text{Real}_D^{-1} \mathcal{W}$ -équivalence. On vérifie alors que pour tout monomorphisme $K \longrightarrow L$ de \widehat{A} , il en est de même de la projection

$$(K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n) \times \Delta_1 \longrightarrow K \times \Delta_n \cup L \times \partial\Delta_n .$$

La proposition 2.3.8 et le lemme 3.3.2 permettent de conclure. \square

LEMME 3.3.19. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. On considère deux \mathcal{W}_Δ -résolutions cosimpliciales D et E , un morphisme d'objets cosimpliciaux*

$$\phi : D \longrightarrow E ,$$

et on note \widetilde{D} et \widetilde{E} les foncteurs de $A \times \Delta$ vers $\widehat{A \times \Delta}$ définis respectivement par $\widetilde{D}(a, \Delta_n) = a \times D_n$ et $\widetilde{E}(a, \Delta_n) = a \times E_n$. On obtient deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et prolongeant \widetilde{D} et \widetilde{E}

$$\widetilde{D}_1, \widetilde{E}_1 : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta} ,$$

ainsi qu'un morphisme de foncteurs induit par ϕ , $\widetilde{D}_1 \longrightarrow \widetilde{E}_1$. Alors pour tout préfaisceau X sur $A \times \Delta$, la flèche $\widetilde{D}_1 X \longrightarrow \widetilde{E}_1 X$ est une \mathcal{W}_Δ -équivalence.

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que les foncteurs \widetilde{D}_1 et \widetilde{E}_1 respectent les monomorphismes (grâce aux lemmes 3.1.8 et 3.3.2). D'autre part, l'assertion est trivialement vérifiée lorsque X est de la forme $X = K \times S$ où K un préfaisceau sur A , et $S = \Delta_n$, $n \geq 0$. Le lemme 3.1.9 implique que cela reste vrai en remplaçant Δ_n par $\partial\Delta_n$. Le cas général résulte de la proposition 2.3.8 et du lemme 3.3.2. \square

PROPOSITION 3.3.20. *Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et D une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale. Alors on a les égalités*

$$\mathcal{W}_\Delta = \text{Real}_D^{-1} \mathcal{W} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} = p_\Delta^* \mathcal{W}_\Delta ,$$

et les foncteurs induits sur les catégories localisées

$$\text{Real}_D : \mathcal{W}_\Delta^{-1} \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1} \widehat{A} \quad \text{et} \quad p_\Delta^* : \mathcal{W}^{-1} \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_\Delta^{-1} \widehat{A \times \Delta}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION. La proposition 3.3.10 et le lemme 3.3.18 montrent qu'on a une inclusion $\text{Real}_D \mathcal{W}_\Delta \subset \mathcal{W}$. D'autre part, on a un isomorphisme canonique de foncteurs (il suffit de le vérifier pour les objets représentables de \widehat{A})

$$\text{Real}_D p_\Delta^* \simeq 1_{\widehat{A}} .$$

Comme $p_\Delta^* \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_\Delta$, on obtient un foncteur

$$p_\Delta^* : \mathcal{W}^{-1} \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_\Delta^{-1} \widehat{A \times \Delta} ,$$

puis on remarque qu'on a un isomorphisme de foncteurs $\text{Real}_D p_\Delta^* \simeq 1_{\mathcal{W}^{-1} \widehat{A}}$. On peut considérer D comme une \mathcal{W}_Δ -résolution cosimpliciale, et on a une \mathcal{W}_Δ -résolution cosimpliciale canonique Δ induite par le foncteur

$$p_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

et par le plongement de Yoneda de Δ dans $\widehat{\Delta}$. On définit alors une troisième \mathcal{W}_Δ -résolution cosimpliciale $D \times \Delta$ par $\Delta_n \mapsto D_n \times \Delta_n$. En vertu du lemme 3.3.19, les deux projections

$$D \longleftarrow D \times \Delta \longrightarrow \Delta$$

induisent deux \mathcal{W}_Δ -équivalences naturelles

$$\widetilde{D}_! \longleftarrow \widetilde{D \times \Delta}_! \longrightarrow \widetilde{\Delta}_! .$$

Or $\widetilde{\Delta}$ s'identifie au plongement de Yoneda de $A \times \Delta$ dans $\widehat{A \times \Delta}$, et donc on a un isomorphisme de foncteurs $\widetilde{\Delta}_! \simeq 1_{\widehat{A \times \Delta}}$. D'autre part, $\widetilde{D}_!$ s'identifie canoniquement au foncteur $p_\Delta^* \mathbf{Real}_D$, ce qui achève la démonstration (par la saturation forte de \mathcal{W} et \mathcal{W}_Δ). \square

COROLLAIRE 3.3.21. *Soit A une petite catégorie. Un A -localisateur est propre si et seulement si sa complétion simpliciale l'est.*

DÉMONSTRATION. C'est une condition nécessaire en vertu de la proposition 3.3.17. Soit \mathcal{W} un A -localisateur tel que \mathcal{W}_Δ soit propre. On montre que \mathcal{W} est accessible à l'aide de la proposition précédente et de 2.3.10. Pour voir que \mathcal{W} est propre, on procède comme suit. On choisit une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale contractile D (par exemple $i_A^* \Delta$, cf. 3.3.8), et le lemme 3.3.13 montre que le morphisme de foncteur $p_\Delta^* \longrightarrow \mathbf{Sing}_D$ est une \mathcal{W}_Δ -équivalence. En vertu de la proposition précédente, une flèche de \widehat{A} est donc une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image par \mathbf{Sing}_D est une \mathcal{W}_Δ -équivalence. L'assertion résulte à présent du fait que le foncteur \mathbf{Sing}_D envoie les fibrations au sens de \mathcal{W} sur des fibrations au sens de \mathcal{W}_Δ , et commute aux produits fibrés (puisqu'il admet un adjoint gauche \mathbf{Real}_D qui respecte les monomorphismes (3.3.5) et les équivalences faibles par la proposition ci-dessus). \square

CHAPITRE 4

Extensions de Kan homotopiques

1. Propriétés locales formelles

NOTATIONS 4.1.1. Si I est une petite catégorie, on désigne par $p_I : I \longrightarrow *$ le foncteur canonique de I vers la catégorie ponctuelle.

Si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, pour chaque objet j de J , on obtient les carrés cartésiens suivants dans $\mathcal{C}at$ (§ 1.1.3 et remarque 1.1.11).

$$\begin{array}{ccc}
 I/j & \xrightarrow{\xi(u,j)} & I \\
 u/j \downarrow & & \downarrow u \\
 J/j & \xrightarrow{\xi(1_J,j)} & J
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 j \backslash I & \xrightarrow{\zeta(u,j)} & I \\
 j \backslash u \downarrow & & \downarrow u \\
 j \backslash J & \xrightarrow{\zeta(1_J,j)} & J
 \end{array}$$

4.1.2. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des petites limites inductives et projectives. Si I est une petite catégorie, on note $\mathcal{C}^I = \underline{\mathbf{Hom}}(I, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs de I vers \mathcal{C} . Si $u : I \longrightarrow J$ est un foncteur entre petites catégories, on obtient un foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{C}^J \longrightarrow \mathcal{C}^I, \quad F \longmapsto F \circ u,$$

lequel admet un adjoint à gauche

$$u_! : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}^J,$$

et un adjoint à droite

$$u_* : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}^J.$$

On remarque que pour tout foncteur F de I vers \mathcal{C} , on a des isomorphismes canoniques (voir [35, § X.3, théorème 1])

$$(u_! F)_j \simeq \varinjlim_{I/j} \xi(u,j)^* F \quad \text{et} \quad (u_* F)_j \simeq \varprojlim_{j \backslash I} \zeta(u,j)^* F, \quad j \in \mathbf{Ob} J.$$

Autrement-dit, on a deux isomorphismes de foncteurs

$$j^* u_! \simeq p_{I/j!} \xi(u,j)^* \quad \text{et} \quad j^* u_* \simeq p_{j \backslash I_*} \zeta(u,j)^*,$$

où j désigne aussi le foncteur $* \longrightarrow J$ correspondant à l'objet j . Ces identifications peuvent s'interpréter en disant que le comportement local de $u_!$ et de u_* (*i.e.* le calcul de leurs fibres) dépend directement du comportement local de u (*i.e.* des catégories I/j ou $j \backslash I$).

DÉFINITION 4.1.3. Une catégorie de modèles fermée \mathcal{C} est *exponentielle à gauche* (resp. *exponentielle à droite*) si pour toute petite catégorie I , $\mathcal{C}^I = \underline{\mathbf{Hom}}(I, \mathcal{C})$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les flèches de \mathcal{C}^I qui sont des équivalences faibles de \mathcal{C} argument

par argument, et les cofibrations (resp. les fibrations), les flèches de \mathcal{C}^I qui sont des cofibrations (resp. des fibrations) de \mathcal{C} argument par argument. Une catégorie de modèles fermée est *exponentielle* si elle est exponentielle à gauche et à droite.

REMARQUE 4.1.4. Une catégorie de modèles fermée \mathcal{C} est exponentielle à gauche si et seulement si \mathcal{C}° est exponentielle à droite.

EXEMPLE 4.1.5. Si A est une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur accessible, alors en vertu des corollaires 2.3.12 et 2.3.15, la structure de catégorie de modèles fermée sur \widehat{A} associée à \mathcal{W} (théorème 2.3.4) est exponentielle.

EXEMPLE 4.1.6. Plus généralement, il résulte de la proposition 2.3.14 (en ayant recours aux mêmes types de méthodes que pour la preuve du corollaire 2.3.15) que toute catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant est exponentielle à droite (cf. [24, théorème 13.4.2]).

4.1.7. Soit \mathcal{C} une catégorie, et \mathcal{W} une partie de $\text{Fl}\mathcal{C}$. Si I est une petite catégorie, on note \mathcal{W}^I l'ensemble des flèches f de \mathcal{C}^I telles que pour tout $i \in \text{Ob } I$, $f_i \in \mathcal{W}$, et $\text{Ho}_{\mathcal{W}}\mathcal{C}^I$ ou $\text{Ho}\mathcal{C}^I$ la localisation de \mathcal{C}^I par \mathcal{W}^I . Si $u : I \longrightarrow J$ est un morphisme de Cat , alors le foncteur

$$u^* : \mathcal{C}^J \longrightarrow \mathcal{C}^I$$

vérifie la condition $u^*\mathcal{W}^J \subset \mathcal{W}^I$, et donc induit un foncteur, noté de la même manière,

$$u^* : \text{Ho}\mathcal{C}^J \longrightarrow \text{Ho}\mathcal{C}^I .$$

LEMME 4.1.8. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat , le foncteur $u^* : \mathcal{C}^J \longrightarrow \mathcal{C}^I$ est un morphisme de Quillen à droite de \mathcal{C}^J vers \mathcal{C}^I au sens de [26, définition 1.3.1].*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de vérifier que le foncteur u^* admet un adjoint à gauche et qu'il respecte les fibrations et les fibrations triviales. La première condition résulte du fait que \mathcal{C} admet des petites limites inductives, et la seconde est évidente. \square

COROLLAIRE 4.1.9. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat , le foncteur $u_! : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}^J$ est un foncteur de Quillen à gauche.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte du lemme précédent par adjonction. \square

PROPOSITION 4.1.10. *Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite. Alors pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, le foncteur*

$$u_! : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}^J$$

admet un foncteur dérivé à gauche

$$\text{Lu}_! : \text{Ho}\mathcal{C}^I \longrightarrow \text{Ho}\mathcal{C}^J ,$$

lequel est en outre un adjoint à gauche du foncteur

$$u^* : \text{Ho}\mathcal{C}^J \longrightarrow \text{Ho}\mathcal{C}^I .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte du lemme 4.1.8 et de [26, lemme 1.3.10]. \square

REMARQUE 4.1.11. La proposition ci-dessus admet un énoncé dual, à savoir que si \mathcal{C} est une catégorie de modèles fermée exponentielle à gauche, pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, le foncteur

$$u^* : \mathrm{Ho} \mathcal{C}^J \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{C}^I$$

admet un adjoint à droite

$$\mathrm{R}u_* : \mathrm{Ho} \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{C}^J .$$

Lorsque J est la catégorie ponctuelle, et lorsque cela aura un sens, on notera $\mathbf{L} \varinjlim$ (resp. $\mathbf{R} \varinjlim$) l'adjoint à gauche (resp. à droite) du foncteur u^* .

LEMME 4.1.12. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, I une petite catégorie, et i un objet de I . Le foncteur*

$$i^* : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour tout $i \in \mathrm{Ob} I$, le foncteur

$$i_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^I$$

respecte les fibrations triviales. Or pour chaque objet i' de I , on a une identification canonique

$$i'^* i_* \simeq \prod_{\mathrm{Hom}_I(i', i)} 1_{\mathcal{C}} ,$$

ce qui permet de conclure car les fibrations triviales sont stables par produits. \square

LEMME 4.1.13. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de Cat , et j un objet de J . Le foncteur image inverse*

$$\xi(u, j)^* : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{C}^{I/j}$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

DÉMONSTRATION. Comme le foncteur $\xi(u, j)^*$ respecte les équivalences faibles, il suffit de montrer qu'il respecte les cofibrations, ou bien, de manière équivalente, que $\xi(u, j)_*$ respecte les fibrations triviales. Par définition, cette dernière propriété signifie que pour tout objet i de I , le foncteur $i^* \xi(u, j)_*$ respecte les fibrations triviales, autrement dit, par adjonction, que le foncteur $\xi(u, j)^* i_!$ respecte les cofibrations. Or pour tout $i \in \mathrm{Ob} I$ et tout $(i', \mu') \in \mathrm{Ob} I/j$ (i.e. $i' \in \mathrm{Ob} I$ et $\mu' \in \mathrm{Hom}_J(u(i'), j)$), on a une identification naturelle

$$\mathrm{Hom}_I(i, i') = \prod_{\mu \in \mathrm{Hom}_J(u(i), j)} \mathrm{Hom}_{I/j}((i, \mu), (i', \mu')) ,$$

ce qui induit un isomorphisme canonique

$$\xi(u, j)^* i_! \simeq \prod_{\mu \in \mathrm{Hom}_J(u(i), j)} (i, \mu)_! ,$$

et permet de conclure, puisque les foncteurs $(i, \mu)_!$ respectent les cofibrations, celles-ci étant stables par sommes. \square

PROPOSITION 4.1.14. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, et $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de Cat . Pour tout objet j de J , on a un isomorphisme de foncteurs canonique*

$$j^* \mathbb{L}u_! \simeq \mathbb{L}p_{I/j_!} \xi(u, j)^* .$$

DÉMONSTRATION. On sait que le foncteur dérivé à gauche de deux morphismes de Quillen à gauche est canoniquement isomorphe au composé des deux foncteurs dérivés à gauche correspondants ([26, théorème 1.3.7]), et on a un isomorphisme canonique dans \mathcal{C}

$$j^* u_! \simeq p_{I/j_!} \xi(u, j)^* .$$

La proposition résulte donc du corollaire 4.1.9 et des lemmes 4.1.12 et 4.1.13. \square

REMARQUE 4.1.15. L'énoncé ci-dessus se dualise comme suit. Si \mathcal{C} est une catégorie de modèle fermée exponentielle à gauche, alors pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat , et tout objet j de J , on a un isomorphisme canonique dans $\mathit{Ho}\mathcal{C}$

$$j^* \mathbb{R}u_* \simeq \mathbb{R}p_{j \setminus I_*} \zeta(u, j)^* .$$

LEMME 4.1.16. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée, et I une petite catégorie, telles que \mathcal{C}^I admette une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles de \mathcal{C} argument par argument. Alors la famille de foncteurs*

$$i^* : \mathit{Ho}\mathcal{C}^I \longrightarrow \mathit{Ho}\mathcal{C} \quad , \quad i : * \longrightarrow I \quad , \quad i \in \mathit{Ob} I$$

est conservative (i.e. une flèche f de $\mathit{Ho}\mathcal{C}^I$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet i de I , f_i est un isomorphisme de $\mathit{Ho}\mathcal{C}$).

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathit{Ho}\mathcal{C}^I$. Comme \mathcal{C}^I admet une structure de catégorie de modèles fermée, on peut supposer que X est un objet cofibrant de \mathcal{C}^I , et que Y est un objet fibrant de \mathcal{C}^I . Il résulte alors de [41, § I.1, corollaire 1] que f est l'image d'une flèche $f_0 : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C}^I , ce qui prouve l'assertion, puisqu'en vertu de [41, § I.5, proposition 1], les équivalences faibles de \mathcal{C}^I forment une partie fortement saturée de $\mathit{Fl}\mathcal{C}^I$. \square

4.1.17. On considère une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite \mathcal{C} , ainsi qu'un triangle commutatif de Cat

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & S \end{array} .$$

On définit un morphisme de foncteurs canonique dans $\mathit{Ho}\mathcal{C}^S$

$$\mathbb{L}v_! p_I^* \longrightarrow \mathbb{L}w_! p_J^*$$

comme suit. On a un morphisme d'adjonction $\varepsilon : \mathbb{L}u_! u^* \longrightarrow 1_{\mathit{Ho}\mathcal{C}^J}$, ce qui induit un morphisme $\mathbb{L}w_! \varepsilon : \mathbb{L}w_! \mathbb{L}u_! u^* \longrightarrow \mathbb{L}w_!$. D'autre part, comme $wu = v$, on a $u^* w^* = v^*$, d'où un isomorphisme canonique $\mathbb{L}w_! \mathbb{L}u_! \simeq \mathbb{L}v_!$. On obtient donc un

morphisme $Lv_! u^* \longrightarrow Lw_!$, et l'égalité $u^* p_J^* = p_I^*$ induit le morphisme annoncé.

On a aussi un morphisme de foncteurs canonique dans \mathbf{HoC}

$$Lp_{I!} v^* \longrightarrow Lp_{J!} w^*$$

obtenu comme l'image par $Lp_{S!}$ du morphisme $Lv_! u^* w^* \longrightarrow Lw_! w^*$.

En particulier, lorsque S est la catégorie ponctuelle, on obtient de la sorte un morphisme canonique dans \mathbf{HoC}

$$Lp_{I!} p_I^* \longrightarrow Lp_{J!} p_J^*$$

(les deux constructions ci-dessus donnant le même résultat).

PROPOSITION 4.1.18. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle à droite, et*

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & S & \end{array}$$

un triangle commutatif de \mathbf{Cat} . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) *Pour tout objet s de S , le morphisme $Lp_{I/s!} p_{I/s}^* \longrightarrow Lp_{J/s!} p_{J/s}^*$, induit par $u/s : I/s \longrightarrow J/s$, est un isomorphisme dans \mathbf{HoC} .*
- (b) *Le morphisme canonique $Lv_! p_I^* \longrightarrow Lw_! p_J^*$ est un isomorphisme dans \mathbf{HoC}^S .*

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 4.1.16, la condition (b) est équivalente à la suivante.

- (b') *Pour tout objet s de S , $s^* Lv_! p_I^* \longrightarrow s^* Lw_! p_J^*$ est un isomorphisme dans \mathbf{HoC} .*

Or d'après la proposition 4.1.14, on a deux isomorphismes canoniques

$$s^* Lv_! \simeq Lp_{I/s!} \xi(v, s)^* \quad \text{et} \quad s^* Lw_! \simeq Lp_{J/s!} \xi(w, s)^* .$$

Les égalités $\xi(v, s)^* p_I^* = p_{I/s}^*$ et $\xi(w, s)^* p_J^* = p_{J/s}^*$ montrent l'équivalence entre (a) et (b'), et achèvent ainsi la démonstration. \square

REMARQUE 4.1.19. On a comme il se doit une formulation duale. Si \mathcal{C} est une catégorie de modèles exponentielle à gauche, et si

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & S & \end{array}$$

est un triangle commutatif de \mathbf{Cat} , les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) *Pour tout objet s de S , le morphisme $Rp_{s \setminus J_*} p_{s \setminus J}^* \longrightarrow Rp_{s \setminus I_*} p_{s \setminus I}^*$, induit par $s \setminus u : s \setminus I \longrightarrow s \setminus J$, est un isomorphisme dans \mathbf{HoC} .*
- (b) *Le morphisme canonique $Rw_* p_J^* \longrightarrow Rv_* p_I^*$ est un isomorphisme dans \mathbf{HoC}^S .*

LEMME 4.1.20. *Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles fermée exponentielle, et $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de \mathbf{Cat} . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) Le morphisme $\mathbf{L}p_{I!}p_I^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}p_J^*$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$.
 (b) Le morphisme $\mathbf{R}p_{J*}p_J^* \longrightarrow \mathbf{R}p_{I*}p_I^*$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION. L'un des morphismes s'obtient à partir du second par transposition, et le lemme résulte ainsi du lemme de Yoneda. \square

COROLLAIRE 4.1.21. Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles exponentielle, et

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & S & \end{array}$$

un triangle commutatif de \mathbf{Cat} . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Pour tout objet s de S , le morphisme $\mathbf{L}p_{s\setminus I!}p_{s\setminus I}^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{s\setminus J!}p_{s\setminus J}^*$, induit par $s\setminus u : s\setminus I \longrightarrow s\setminus J$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\mathcal{C}$.
 (b) Le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!}v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}w^*$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\mathcal{C}^S$.

DÉMONSTRATION. Cela résulte du lemme précédent et de l'énoncé dual de la proposition 4.1.18, puisque le morphisme $\mathbf{L}p_{I!}v^* \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!}w^*$ est le transposé du morphisme $\mathbf{R}w_*p_J^* \longrightarrow \mathbf{R}v_*p_I^*$. \square

PROPOSITION 4.1.22. Soit $\Phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un morphisme de Quillen à gauche entre deux catégories de modèles fermées exponentielles à droite. Alors pour chaque petite catégorie I , le foncteur induit par Φ sur les catégories de foncteurs $\Phi : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{D}^I$ est un foncteur de Quillen à gauche, et admet donc un foncteur dérivé à gauche

$$\mathbf{L}\Phi : \mathbf{Ho}\mathcal{C}^I \longrightarrow \mathbf{Ho}\mathcal{D}^I .$$

En outre, pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}u_! \mathbf{L}\Phi \simeq \mathbf{L}\Phi \mathbf{L}u_! .$$

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que le foncteur $\Phi : \mathcal{C}^I \longrightarrow \mathcal{D}^I$ admet un adjoint à droite et que ce dernier respecte les fibrations et les fibrations triviales, ce qui prouve la première assertion. La seconde résulte du corollaire 4.1.9, de [26, théorème 1.3.7], et du fait que pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, on a un isomorphisme canonique $u_! \Phi \simeq \Phi u_!$. \square

NOTATIONS 4.1.23. Soient A une petite catégorie et \mathcal{W} un A -localisateur. Si I est une petite catégorie, les éléments de \mathcal{W}^I seront désignés sous le terme de \mathcal{W} -équivalences étagées. Si cela ne présente pas de risques de confusions on parlera plus simplement de \mathcal{W} -équivalences. On note

$$\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) = \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}^I}\widehat{A}^I = (\mathcal{W}^I)^{-1} \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{A})$$

la localisation de $\underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{A})$ par les \mathcal{W} -équivalences étagées, ou bien encore, lorsque I est la catégorie ponctuelle, plus simplement

$$\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}}\widehat{A} = \mathcal{W}^{-1}\widehat{A} .$$

Si $u : I \longrightarrow J$ est un morphisme de Cat , il induit donc un foncteur image inverse

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) .$$

4.1.24. On fixe pour le moment une petite catégorie A , et deux A -localisateurs \mathcal{W} et \mathcal{W}' . On suppose en outre que \mathcal{W} est accessible, et que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. On vérifie que pour toute petite catégorie I , $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{A}(I)$ est la localisation de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ par les \mathcal{W}' -équivalences étagées. On a donc un foncteur de localisation

$$\gamma : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{A}(I) .$$

En outre, pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{A}(J) \\ u^* \downarrow & & \downarrow u^* \\ \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{A}(I) \end{array} .$$

D'autre part, le foncteur $u^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ admet un adjoint à gauche noté $\mathbf{Lu}_!$ (cf. l'exemple 4.1.5 et la proposition 4.1.10).

LEMME 4.1.25. *Pour tout morphisme $u : I \longrightarrow J$ de Cat , le foncteur*

$$\mathbf{Lu}_! : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J)$$

respecte les \mathcal{W}' -équivalences étagées.

DÉMONSTRATION. Dans le cas où \mathcal{W}' est aussi accessible, cela résulte de la forte saturation des A -localisateurs et de la proposition 4.1.22, appliquée au foncteur $\Phi = 1_{\widehat{A}}$. Dans le cas général, si f est une \mathcal{W}' -équivalence de \widehat{A}^I , on considère le A -localisateur accessible \mathcal{W}'' engendré par \mathcal{W} et par l'ensemble $\{f_i \mid i \in \mathbf{Ob} I\}$, et on obtient $\mathbf{Lu}_! f \in \mathcal{W}'' \subset \mathcal{W}'$. \square

PROPOSITION 4.1.26. *Soient A une petite catégorie et \mathcal{W} un A -localisateur. Pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ dans Cat , le foncteur image inverse*

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{Lu}_! : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) .$$

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 4.1.10, l'assertion est vérifiée lorsque \mathcal{W} est accessible, en particulier lorsque \mathcal{W} est le A -localisateur minimal. On en déduit le cas général grâce au lemme précédent. \square

PROPOSITION 4.1.27. *On considère deux petites catégories A et B , un A -localisateur \mathcal{W} , un B -localisateur \mathcal{W}' , et un foncteur $\mathcal{F} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ qui commute aux petites limites inductives, respecte les monomorphismes, et envoie les \mathcal{W} -équivalences sur des \mathcal{W}' -équivalences. Alors pour chaque petite catégorie I , \mathcal{F} induit un foncteur*

$$\mathcal{F} : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{B}(I) ,$$

et pour tout foncteur $u : I \longrightarrow J$ entre petites catégories, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}u_! \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \mathbf{L}u_! .$$

DÉMONSTRATION. Lorsque \mathcal{W} et \mathcal{W}' sont accessibles, cela résulte de la proposition 4.1.22. Le lemme 4.1.25 montre que cela implique aussi le cas général. \square

LEMME 4.1.28. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et I une petite catégorie. Pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$, il existe deux morphismes $g : X \longrightarrow Z$ et $s : Y \longrightarrow Z$ de $\mathbf{Hom}(I, \widehat{A})$, le morphisme s étant une \mathcal{W} -équivalence étagée, tels que le diagramme suivant commute dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow s \\ & & Z \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Comme cela a été vu dans la preuve du corollaire 2.3.5, il existe un $I^\circ \times A$ -localisateur accessible $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}^I$, tel que la flèche f soit l'image d'une flèche de $\mathcal{W}'^{-1} \widehat{I^\circ \times A}$ par le foncteur canonique. Cela montre l'assertion si on demande seulement que s soit une \mathcal{W}' -équivalence. En effet, $\widehat{I^\circ \times A}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée dont tous les objets sont cofibrants, et dont les équivalences faibles sont les \mathcal{W}' -équivalences (théorème 2.3.4), ce qui permet d'exhiber une \mathcal{W}' -équivalence $s : Y \longrightarrow Z$ de but \mathcal{W}' -fibrant. Mais alors les morphismes de X vers Z sont des classes d'homotopie de morphismes de $\widehat{I^\circ \times A}$, ce qui implique l'assertion. \square

PROPOSITION 4.1.29. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et I une petite catégorie. Une flèche de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout objet i de I , son image par le foncteur $i^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du lemme précédent et du corollaire 2.3.5. \square

PROPOSITION 4.1.30. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. On considère le triangle commutatif suivant dans \mathbf{Cat} .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & S \end{array}$$

1. Le foncteur

$$u^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$$

admet un adjoint à gauche

$$\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) ,$$

et ce dernier est le foncteur dérivé à gauche du foncteur

$$u_! : \widehat{A}^I \longrightarrow \widehat{A}^J .$$

2. Pour tout objet j de J , on a un isomorphisme de foncteurs canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$

$$j^* \mathbb{L}u_! \simeq \mathbb{L}p_{I/j_!} \xi(u, j)^* .$$

3. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout objet s de S , le morphisme $\mathbb{L}p_{I/s_!} p_{I/s}^* \longrightarrow \mathbb{L}p_{J/s_!} p_{J/s}^*$, induit par $u/s : I/s \longrightarrow J/s$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$.

(b) Le morphisme canonique $\mathbb{L}v_! p_I^* \longrightarrow \mathbb{L}w_! p_J^*$ est un isomorphisme.

4. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout objet s de S , le morphisme $\mathbb{L}p_{s \setminus I_!} p_{s \setminus I}^* \longrightarrow \mathbb{L}p_{s \setminus J_!} p_{s \setminus J}^*$, induit par $s \setminus u : s \setminus I \longrightarrow s \setminus J$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$.

(b) Le morphisme canonique $\mathbb{L}p_{I_!} v^* \longrightarrow \mathbb{L}p_{J_!} w^*$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Dans le cas où \mathcal{W} est accessible, cela résulte des propositions 4.1.10, 4.1.14 et 4.1.18, et du corollaire 4.1.21. Dans le cas général, le point 1 est immédiat (cf. 4.1.26). Le point 2 résulte de la 2-functorialité de la localisation et du lemme 4.1.25. Les équivalences 3 et 4 résultent elles aussi du cas accessible et du lemme ci-dessous. \square

LEMME 4.1.31. On considère un diagramme commutatif du type suivant dans \mathbf{Cat} .

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & J \\ \downarrow v & & \downarrow w \\ & S & \\ \downarrow v' & & \downarrow w' \\ & S' & \end{array}$$

Pour que le morphisme de foncteurs

$$\mathbb{L}v'_! v^* \longrightarrow \mathbb{L}w'_! w^*$$

soit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(S')$, il faut et il suffit que son analogue le soit dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ pour un A -localisateur accessible $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$.

DÉMONSTRATION. Le lemme 4.1.25 montre que c'est une condition suffisante. Il suffit donc de montrer qu'elle est nécessaire. Choisissons un cardinal α tel que tout préfaisceau sur $A \times S^\circ$ soit la limite inductive α -filtrante de ses sous-objets α -accessibles, et tel que tout A -localisateur soit stable par limites inductives α -filtrantes (cf. 2.1.16 et 2.3.18). Alors pour tout petit ensemble ordonné α -filtrant K , le foncteur limite inductive

$$\varinjlim_K : \widehat{A}^K \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les monomorphismes et les \mathcal{W} -équivalences étagées. En vertu de la proposition 4.1.27, appliquée aux foncteurs \varinjlim_K pour les ensembles ordonnés K de sous-objets α -accessibles de préfaisceaux sur $A \times S^\circ$, pour que le morphisme

$$\mathbb{L}v'_! v^* \longrightarrow \mathbb{L}w'_! w^*$$

soit un isomorphisme, il faut et il suffit que pour tout préfaisceau α -accessible X sur $A \times S^\circ$, le morphisme

$$\mathbb{L}v'_!v^*X \longrightarrow \mathbb{L}w'_!w^*X$$

soit un isomorphisme. Le lemme 4.1.25 et la proposition 4.1.29 permettent de conclure. \square

2. La construction de Bousfield-Kan

Dans cette section, on fixe une fois pour toutes une petite catégorie A , un A -localisateur \mathcal{W} , et une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale D .

4.2.1. On note $\text{dis} : \mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}at$ le foncteur qui à un petit ensemble E associe la catégorie discrète ayant E comme ensemble d'objets, et on obtient de la sorte un foncteur $\text{dis} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \mathcal{C}at)$, défini argument par argument. On introduit alors le foncteur

$$\text{Sim} : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}at$$

comme le composé

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{(\cdot)^\circ} \mathcal{C}at \xrightarrow{\text{N}} \widehat{\Delta} \xrightarrow{\text{dis}} \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \mathcal{C}at) \xrightarrow{J} \mathcal{C}at .$$

Si C est une petite catégorie, la catégorie $\text{Sim } C$ est appelée la *catégorie des simplexes de C* . On a alors une projection canonique (1.2.9)

$$\vartheta_C = \theta_{\text{dis} \text{N} C^\circ} : \text{Sim } C \longrightarrow \Delta^\circ ,$$

qui identifie $\text{Sim } C$ à la catégorie cofibrée associée au foncteur $\text{dis} \text{N} C^\circ$. La catégorie $\text{Sim } C$ admet donc la description explicite suivante. Les objets sont les couples (Δ_n, f) , où $f \in \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, C^\circ)$, les flèches $(\Delta_{n_0}, f_0) \longrightarrow (\Delta_{n_1}, f_1)$ sont les applications croissantes $k : \Delta_{n_1} \longrightarrow \Delta_{n_0}$ telles que $f_0 k = f_1$. D'autre part, l'inclusion canonique de Δ dans $\mathcal{C}at$ (A.1.13) induit un morphisme de foncteurs (voir A.1.4)

$$\alpha : i_\Delta \text{N} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} ,$$

et on vérifie que pour toute petite catégorie C , on a l'identification

$$\text{Sim } C = (i_\Delta \text{N} C^\circ)^\circ = (\Delta/C^\circ)^\circ .$$

On obtient ainsi un morphisme de foncteurs

$$\tau : \text{Sim} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} .$$

4.2.2. Soit I une petite catégorie. On définit le foncteur *colimite homotopique*

$$p_{I!} : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \widehat{A}$$

comme le composé

$$\underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \xrightarrow{\tau_I^*} \underline{\text{Hom}}(\text{Sim } I, \widehat{A}) \xrightarrow{\vartheta_{I!}} \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \widehat{A}) \xrightarrow{\sim} \widehat{A \times \Delta} \xrightarrow{\text{Real}_D} \widehat{A} .$$

Si F est un foncteur de I vers \widehat{A} , on écrira parfois $\underline{\text{holim}}_I F$ ou encore $\underline{\text{holim}} F$ pour $\underline{p}_I F$. On peut d'autre part expliciter le foncteur $\vartheta_{I!} \tau_I^* F$ par la formule

$$(4.2.2.1) \quad \begin{aligned} (\vartheta_{I!} \tau_I^* F)_n &= \coprod_{f: \Delta_n \rightarrow I^\circ} F_{f(n)} \\ &= \coprod_{i_n \rightarrow \dots \rightarrow i_0} F_{i_n} . \end{aligned}$$

Ce foncteur admet un adjoint à droite

$$\underline{p}_I^* : \widehat{A} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) ,$$

explicitable en tant que le composé

$$\widehat{A} \xrightarrow{\text{Sing}_D} \widehat{A} \times \widehat{\Delta} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \widehat{A}) \xrightarrow{\vartheta_I^*} \underline{\text{Hom}}(\text{Sim } I, \widehat{A}) \xrightarrow{\tau_{I*}} \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) .$$

Plus précisément encore, si X est un préfaisceau sur A , $\underline{p}_I^* X$ est le foncteur

$$(4.2.2.2) \quad i \longmapsto \underline{\text{Hom}}(\text{Real}_D N(I^\circ/i), X) .$$

Les flèches $N(I^\circ/i) \longrightarrow *$ induisent donc un morphisme de foncteurs

$$\underline{p}_I^* \longrightarrow \underline{p}_I^* ,$$

puis par adjonction, un morphisme de foncteurs

$$\underline{\text{holim}} \longrightarrow \underline{\text{lim}} .$$

Plus généralement, si $u : I \longrightarrow J$ est un morphisme de Cat , on définit un foncteur

$$\underline{u}_! : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(J, \widehat{A})$$

en posant pour chaque foncteur F de I vers \widehat{A} , et chaque objet j de J ,

$$(4.2.2.3) \quad (\underline{u}_! F)_j = \underline{p}_{I/j!} \xi(u, j)^* F = \underline{\text{holim}}_{I/j} \xi(u, j)^* F .$$

On a en outre un morphisme canonique

$$\underline{\text{holim}}_{I/j} \xi(u, j)^* F \longrightarrow \underline{\text{lim}}_{I/j} \xi(u, j)^* F \simeq (\underline{u}_! F)_j ,$$

duquel on déduit un morphisme de foncteurs

$$\underline{u}_! \longrightarrow u_! .$$

EXEMPLE 4.2.3. Dans le cas où $A = \Delta$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$, et où D est le plongement de Yoneda de Δ dans $\widehat{\Delta}$, si I est une petite catégorie arbitraire, le foncteur

$$\underline{\text{holim}} : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{\Delta}) \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

est exactement le foncteur colimite homotopique défini dans [5].

LEMME 4.2.4. Soit $u : I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories. Alors on a un isomorphisme canonique $\underline{u}_! \simeq u_! \underline{1}_{I!}$.

DÉMONSTRATION. Le cas où J est la catégorie ponctuelle est un exercice classique laissé au lecteur. Nous allons montrer en quoi la formule $\underline{\text{holim}}_J \simeq \underline{\lim}_{I/j} \underline{1}_I$, implique le cas général. Soit F un foncteur de I vers \widehat{A} , et soit j un objet de J . Alors on a un isomorphisme canonique pour tout objet $(i, l : u(i) \rightarrow j)$ de I/j ,

$$(I/j)/(i, l : u(i) \rightarrow j) \simeq I/i .$$

On en déduit grâce à la formule (4.2.2.3) que

$$\underline{1}_{I/j} F|_{I/j} \simeq (\underline{1}_I, F)|_{I/j} .$$

On obtient les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} (\underline{u}_1 F)_j &\simeq \underline{\text{holim}}_{I/j} F|_{I/j} \\ &\simeq \underline{\lim}_{I/j} \underline{1}_{I/j} F|_{I/j} \\ &\simeq \underline{\lim}_{I/j} (\underline{1}_I, F)|_{I/j} \\ &\simeq (\underline{u}_1 (\underline{1}_I, F))_j , \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. \square

PROPOSITION 4.2.5. *Si $u : I \rightarrow J$ et $v : J \rightarrow K$ sont deux flèches composables de Cat , on a un morphisme canonique $\iota_{v,u} : \underline{v}_1 \underline{u}_1 \rightarrow \underline{vu}_1$. On obtient de la sorte un foncteur relâché dans le sens où si $u : I \rightarrow J$, $v : J \rightarrow K$ et $w : K \rightarrow L$ sont trois flèches composables de Cat , alors le carré suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} \underline{w}_1 \underline{v}_1 \underline{u}_1 & \xrightarrow{\underline{w}_1 \iota_{v,u}} & \underline{w}_1 \underline{vu}_1 \\ \downarrow \iota_{w,v} \underline{u}_1 & & \downarrow \iota_{w,vu} \\ \underline{wv}_1 \underline{u}_1 & \xrightarrow{\iota_{wv,u}} & \underline{wvu}_1 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. On a un morphisme de foncteurs $v_1 \underline{1}_J, u_1 \underline{1}_I \rightarrow v_1 u_1 \underline{1}_I$, induit par le morphisme canonique de l'endofoncteur $\underline{1}_J$ vers l'identité, ce qui définit le morphisme annoncé en vertu du lemme ci-dessus. La propriété de cohérence se vérifie immédiatement et est laissée au lecteur. \square

LEMME 4.2.6. *Soit I une petite catégorie. Le foncteur*

$$\underline{\text{holim}} : \underline{\text{Hom}}(I, \widehat{A}) \rightarrow \widehat{A}$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences et les monomorphismes. En outre, le foncteur induit

$$\underline{\text{holim}} : \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \rightarrow \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$$

est un adjoint à gauche du foncteur

$$p_I^* : \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \rightarrow \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) .$$

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte de la formule (4.2.2.1), des lemmes 2.3.7 et 3.3.5, et de la proposition 3.3.10. Pour la seconde on commence par considérer le cas où \mathcal{W} est accessible. Alors $\underline{\text{holim}}$ est un foncteur de Quillen à gauche au sens des structures de catégories de modèles fermées du théorème 2.3.4 et du corollaire 2.3.12. Le foncteur \underline{p}_I^* est donc un foncteur de Quillen à droite, et par conséquent admet un foncteur dérivé à droite $\mathbf{R}\underline{p}_I^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$, adjoint à droite de $\underline{\text{holim}}$. D'autre part, pour tout objet fibrant X et tout objet $i \in \mathbf{Ob} I$, comme la flèche $\mathbf{Real}_D \mathbf{N}(I^\circ/i) \longrightarrow *$ est une \mathcal{W} -équivalence universelle, le morphisme $X \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbf{Real}_D \mathbf{N}(I^\circ/i), X)$ est une \mathcal{W} -équivalence ([26, lemme 1.3.18]). On en déduit qu'on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) : p_I^* \simeq \mathbf{R}\underline{p}_I^*$. Dans le cas général, on considère le A -localisateur \mathcal{W}' engendré par les projections $X \times D_n \longrightarrow X$, $X \in \mathbf{Ob} \widehat{A}$, $n \geq 0$. On sait que \mathcal{W}' est accessible (proposition 2.3.8), que D est une \mathcal{W}' -résolution cosimpliciale, et que pour toute petite catégorie I , $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}'} \widehat{A}(I)$ est la localisation de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ par les \mathcal{W} -équivalences étagées. Comme en vertu de ce qui précède, les foncteurs $\underline{\text{holim}}$ et p_I^* (au sens de \mathcal{W}') sont des couples de foncteurs adjoints et respectent les \mathcal{W} -équivalences, on s'aperçoit aussitôt qu'ils induisent des couples de foncteurs adjoints après localisation. \square

PROPOSITION 4.2.7. *Soit $u : I \longrightarrow J$ un morphisme de Cat . Le foncteur*

$$\underline{u}_! : \underline{\mathbf{Hom}}(I, \widehat{A}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(J, \widehat{A})$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences et les cofibrations. En particulier, il induit un foncteur

$$\underline{u}_! : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) ,$$

lequel s'avère être un adjoint à gauche du foncteur $u^ : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$.*

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du lemme 4.2.6 et de la formule (4.2.2.3). Pour ce qui est de la seconde assertion, on sait que le foncteur image inverse $u^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ admet un adjoint à gauche $\mathbf{L}u_! : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J)$, qui n'est autre que le foncteur dérivé à gauche de $u_!$ (proposition 4.1.30). D'autre part, le morphisme canonique $\underline{u}_! \longrightarrow u_!$, et la propriété universelle du foncteur dérivé induisent un morphisme canonique $\underline{u}_! \longrightarrow \mathbf{L}u_!$. On remarque que dans le cas où J est la catégorie ponctuelle, ce dernier est un isomorphisme (lemme 4.2.6), ce qui achève la démonstration en vertu des propositions 4.1.29 et 4.1.30, et de la formule (4.2.2.3). \square

REMARQUE 4.2.8. Le foncteur $\underline{u}_!$ ne dépend donc pas du choix de la résolution cosimpliciale à \mathcal{W} -équivalence près.

COROLLAIRE 4.2.9. *Si $u : I \longrightarrow J$ et $v : J \longrightarrow K$ sont deux morphismes composables de Cat , alors le morphisme canonique $\underline{v}_! \underline{u}_! \longrightarrow \underline{vu}_!$ est une \mathcal{W} -équivalence étagée.*

DÉMONSTRATION. Ce morphisme, vu dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(K)$, est le morphisme canonique des foncteurs dérivés à gauche correspondants, et correspond donc par adjonction à l'identité $u^* v^* = (vu)^*$, ce qui prouve l'assertion en vertu du corollaire 2.3.5. \square

3. Réalisations homotopiques des catégories

Dans cette section, on se donne une petite catégorie A et un A -localisateur \mathcal{W} .

NOTATIONS 4.3.1. Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme de Cat , et si F est un objet de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(Y)$, on notera parfois par abus $F|_X$ l'image inverse de F par u .

DÉFINITION 4.3.2. Une flèche $u : X \rightarrow Y$ de Cat est une \mathcal{W} -équivalence si le morphisme canonique $\mathbb{L}p_{X!} p_X^* \rightarrow \mathbb{L}p_{Y!} p_Y^*$, induit par u dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$, est un isomorphisme. On note \mathcal{W}_{Cat} la classe des \mathcal{W} -équivalences. Pour alléger la terminologie, on parlera de morphismes \mathcal{W} -asphériques ou \mathcal{W} -coasphériques plutôt que \mathcal{W}_{Cat} -asphériques ou \mathcal{W}_{Cat} -coasphériques, etc.

PROPOSITION 4.3.3. La classe \mathcal{W}_{Cat} est un localisateur fondamental.

DÉMONSTRATION. La vérification de l'axiome LF1 est immédiate et est laissée au lecteur. Pour montrer l'axiome LF2, on remarque que si X est une petite catégorie, la flèche canonique $p_X : X \rightarrow *$ est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si le foncteur $p_X^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \rightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X)$ est pleinement fidèle. D'autre part, si X est une petite catégorie admettant un objet final e , le foncteur $e : * \rightarrow X$ est un adjoint à droite pleinement fidèle du foncteur $p_X : X \rightarrow *$. Or $Y \mapsto \underline{\mathbf{Hom}}(Y, \widehat{A})$ est un 2-foncteur en un sens évident, et on en déduit qu'il en est de même de $Y \mapsto \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(Y)$. Un calcul immédiat montre qu'alors le foncteur $p_X^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \rightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X)$ est pleinement fidèle et admet pour adjoint à gauche le foncteur $e^* : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X) \rightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$. Il ne reste donc plus qu'à montrer l'axiome LF3. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & S \end{array}$$

un morphisme de Cat/S . En vertu de la proposition 4.1.30, u est \mathcal{W} -asphérique au-dessus de S si et seulement si le morphisme canonique $\mathbb{L}v_! p_X^* \rightarrow \mathbb{L}w_! p_Y^*$ est un isomorphisme. Si c'est le cas, on obtient un isomorphisme

$$\mathbb{L}p_{X!} p_X^* \simeq \mathbb{L}p_{S!} \mathbb{L}v_! p_X^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}p_{S!} \mathbb{L}w_! p_Y^* \simeq \mathbb{L}p_{Y!} p_Y^* ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Jusqu'à la fin de cette section, on considère une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale D , fixée une fois pour toutes.

4.3.4. Considérons le triangle commutatif suivant dans Cat .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & S \end{array}$$

On définit un morphisme canonique

$$\underline{v}_! u^* \rightarrow \underline{w}_!$$

comme suit. Pour chaque objet x de X , on a un foncteur

$$u_x : x \setminus X \longrightarrow v(x) \setminus Y \quad , \quad (x', x \longrightarrow x') \longmapsto (u(x'), v(x) \longrightarrow v(x') = wu(x)) \ .$$

Cela permet de définir grâce à la formule (4.2.2.2) un morphisme de foncteurs $u^* \underline{p}_Y^* \longrightarrow \underline{p}_X^*$, et donc par adjonction, un morphisme de foncteurs $\underline{\text{holim}}_X \longrightarrow \underline{\text{holim}}_Y u_!$. Le morphisme d'adjonction $u_! u^* \longrightarrow 1$ composé avec $\underline{\text{holim}}_Y$ induit une flèche $\underline{\text{holim}}_Y u_! u^* \longrightarrow \underline{\text{holim}}_Y$, et donc on a un morphisme $\underline{\text{holim}}_X u^* \longrightarrow \underline{\text{holim}}_Y$. Pour chaque objet s de S , on obtient de la sorte un morphisme de foncteurs $\underline{\text{holim}}_{X/s} \xi(v, s)^* u^* \longrightarrow \underline{\text{holim}}_{Y/s} \xi(w, s)^*$, et on vérifie grâce à la formule (4.2.2.3) que cela définit le morphisme annoncé. On peut en outre montrer grâce à la propriété universelle des foncteurs dérivés que l'image de ce morphisme dans $\text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(S)$ n'est autre que le morphisme canonique $\mathbf{L}v_! u^* \longrightarrow \mathbf{L}w_!$.

On en déduit d'autre part un morphisme canonique $\underline{v}_! v^* \longrightarrow \underline{w}_! w^*$ en composant avec w^* .

LEMME 4.3.5. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & S \end{array}$$

un triangle commutatif de Cat . Si u est \mathcal{W} -coasphérique au-dessus de S , alors le morphisme canonique $\underline{\text{holim}}_X v^* \longrightarrow \underline{\text{holim}}_Y w^*$ est une \mathcal{W} -équivalence naturelle.

DÉMONSTRATION. En vertu du corollaire 2.3.5, ce morphisme est une \mathcal{W} -équivalence naturelle si et seulement si le morphisme $\mathbf{L} \underline{\text{lim}} v^* \longrightarrow \mathbf{L} \underline{\text{lim}} w^*$ est un isomorphisme. La proposition 4.1.30 prouve donc ce lemme. \square

4.3.6. Soient S une petite catégorie, et $\Phi : S \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur. On définit un foncteur

$$\underline{\Phi}_! : \underline{\text{Hom}}(S^\circ, \text{Cat}) \longrightarrow \widehat{A}$$

comme suit. Si F est un préfaisceau sur S à valeurs dans Cat , on a un fibration canonique $\zeta_F : \nabla F \longrightarrow S$ (voir 1.2.11). On pose alors $\underline{\Phi}_! F = \underline{\text{holim}}_{\nabla F} \zeta_F^* \Phi$, ce qui définit $\underline{\Phi}_!$ sur les objets. Si $u : F \longrightarrow F'$ est une flèche de $\underline{\text{Hom}}(S^\circ, \text{Cat})$, on a un triangle commutatif dans Cat

$$\begin{array}{ccc} \nabla F & \xrightarrow{\nabla u} & \nabla F' \\ & \searrow \zeta_F & \swarrow \zeta_{F'} \\ & & S \end{array} \ .$$

On obtient ainsi un morphisme $\underline{\Phi}_! F = \underline{\text{holim}}_{\nabla F} \zeta_F^* \Phi \longrightarrow \underline{\text{holim}}_{\nabla F'} \zeta_{F'}^* \Phi = \underline{\Phi}_! F'$.

PROPOSITION 4.3.7. *Le foncteur $\underline{\Phi}_! : \underline{\text{Hom}}(S^\circ, \text{Cat}) \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences. On note pour chaque petite catégorie I $\mathbf{L}\underline{\Phi}_! : \text{Hot}_{S, \mathcal{W}_{\text{Cat}}}(I) \longrightarrow \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$ le foncteur induit.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du lemme ci-dessus et de l'énoncé dual de la proposition 1.2.7. \square

REMARQUE 4.3.8. Les foncteurs $\mathbf{L}\Phi_!$ ci-dessus ne dépendent pas du choix de la \mathcal{W} -résolution cosimpliciale D . En fait, on aurait pu les définir directement par la formule $\mathbf{L}\Phi_! F = \mathbf{L}\varinjlim \zeta_F^* \Phi$ dans la cas où I est la catégorie ponctuelle, et à l'aide de la formule du théorème 1.2.19 dans le cas général.

4.3.9. Si X est une petite catégorie, le foncteur $\Phi_!$ induit un foncteur du même nom

$$\Phi_! : \mathbf{Hom}(X \times S^\circ, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(X, \widehat{\mathcal{A}}).$$

Pour chaque foncteur F de X vers $\mathbf{Hom}(S^\circ, \mathbf{Cat})$, on définit un morphisme naturel en F

$$\mathbf{holim}_X \Phi_! F \longrightarrow \Phi_! \int_X F$$

comme suit. Soit x un objet de X . On obtient le diagramme commutatif suivant, dont tous les carrés sont cartésiens (voir 1.2.9 et 1.2.11).

$$\begin{array}{ccccc}
 \nabla F_x & \xrightarrow{\ell_x} & \int \nabla F|_{X/x \times S^\circ} & \xrightarrow{\xi(\theta_{f_F, x})} & \int \nabla F \\
 \zeta_{F_x} \downarrow & & \int \zeta_{F|_{X/x \times S}} \downarrow & & \int \zeta_F \downarrow \\
 S & \xrightarrow{(x, 1_x) \times 1_S} & X/x \times S & \xrightarrow{\xi(1_X, x) \times 1_S} & X \times S \\
 p_S \downarrow & & 1_{X/x} \times p_S \downarrow & & 1_X \times p_S \downarrow \\
 * & \xrightarrow{(x, 1_x)} & X/x & \xrightarrow{\xi(1_X, x)} & X
 \end{array}$$

θ_{f_F}

On produit ainsi un morphisme canonique

$$\mathbf{holim} \zeta_{F_x}^* \Phi = \mathbf{holim} \ell_x^* \zeta_{f_F|_{X/x \times S^\circ}}^* \Phi \longrightarrow \mathbf{holim} \zeta_{f_F|_{X/x \times S^\circ}}^* \Phi = (\theta_{f_F} \zeta_{f_F}^* \Phi)_x$$

et donc un morphisme $\Phi_! F \longrightarrow \theta_{f_F} \zeta_{f_F}^* \Phi$. On a aussi l'égalité $\mathbf{holim} \zeta_{f_F}^* \Phi = \Phi_! \int F$, et par conséquent, le morphisme canonique obtenu grâce à la proposition 4.2.5, $\mathbf{holim} \theta_{f_F} \longrightarrow \mathbf{holim}$, permet de définir le morphisme annoncé.

PROPOSITION 4.3.10. *Pour tout foncteur F de X vers $\mathbf{Hom}(S^\circ, \mathbf{Cat})$, la flèche naturelle $\mathbf{holim}_X \Phi_! F \longrightarrow \Phi_! \int_X F$ est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit x un objet de X . On reprend les constructions et les notations du paragraphe précédent. Comme θ_{f_F} est une cofibration, c'est en particulier un foncteur propre (1.2.4), ce qui implique que le foncteur ℓ_x est \mathcal{W} -coasphérique (il admet un adjoint à gauche). Par conséquent, en vertu du lemme 4.3.5, le morphisme $\mathbf{holim} \ell_x^* \longrightarrow \mathbf{holim}$ est une \mathcal{W} -équivalence naturelle. On en déduit que le morphisme défini ci-dessus, $\Phi_! F \longrightarrow \theta_{f_F} \zeta_{f_F}^* \Phi$, est une \mathcal{W} -équivalence. L'assertion résulte à présent du corollaire 4.2.9. \square

SCHOLIE 4.3.11. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un foncteur entre petites catégories. On a défini au paragraphe 1.2.16 un foncteur $\underline{u}_! : \underline{\mathbf{Hom}}(X \times S^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(Y \times S^\circ, \mathcal{C}at)$. On a alors une \mathcal{W} -équivalence naturelle $\underline{u}_! \Phi_! \longrightarrow \Phi_! \underline{u}_!$. En effet, si F est un foncteur de X vers $\underline{\mathbf{Hom}}(S^\circ, \mathcal{C}at)$, et si $y \in \mathbf{Ob} Y$, on vérifie sans peine qu'on a l'identification $(\underline{u}_! F)_y = \int F|_{X/y \times S}$. En vertu de la proposition ci-dessus et de la formule (4.2.2.3), on a donc une \mathcal{W} -équivalence canonique $(\underline{u}_! \Phi_! F)_y \longrightarrow (\Phi_! \underline{u}_! F)_y$, ce qui prouve l'assertion.

On en déduit que les foncteurs $\mathbf{L}\Phi_! : \mathbf{Hot}_{S, \mathcal{W}_{\mathcal{C}at}}(X) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X)$, induits par les foncteurs $\Phi_! : \underline{\mathbf{Hom}}(X \times S^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(X, \widehat{A})$, commutent aux extensions de Kan homotopiques dans le sens où pour tout objet F de $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}(X)$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}u_! \mathbf{L}\Phi_! F \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}\Phi_! \mathbf{L}u_! F .$$

Les deux énoncés ci-dessous ne seront pas utilisés dans la suite. Ils expliquent en quoi les foncteurs du type $\mathbf{L}\Phi_!$ envisagés ci-dessus déterminent les objets Φ qui les définissent.

PROPOSITION 4.3.12. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{L}\Phi_! \mathbf{dis} h_S \xrightarrow{\sim} \Phi ,$$

$\mathbf{dis} h_S$ désignant le plongement de Yoneda de S dans $\underline{\mathbf{Hom}}(S^\circ, \mathcal{C}at)$.

DÉMONSTRATION. On vérifie par un calcul explicite que $\nabla \int \mathbf{dis} h_S$ s'identifie à la catégorie $\underline{\mathbf{F}}S$ des flèches de S . La fibration canonique de $\underline{\mathbf{F}}S$ vers S correspond au foncteur "source"

$$\sigma : \{s \longrightarrow s'\} \longmapsto s ,$$

et la cofibration canonique de $\underline{\mathbf{F}}S$ vers S au foncteur "but"

$$\tau : \{s \longrightarrow s'\} \longmapsto s' .$$

L'objet $\mathbf{L}\Phi_! \mathbf{dis} h_S$ peut donc être défini par

$$\mathbf{L}\Phi_! \mathbf{dis} h_S = \mathbf{L}\tau_! \sigma^* \Phi .$$

On a un morphisme de foncteurs évident $\sigma \longrightarrow \tau$ duquel on déduit un morphisme de foncteurs $\sigma^* \longrightarrow \tau^*$. Ce dernier et les morphismes d'adjonction définissent un morphisme

$$\mathbf{L}\tau_! \sigma^* \longrightarrow \mathbf{L}\tau_! \tau^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(S)} .$$

On a donc un morphisme canonique

$$\mathbf{L}\tau_! \sigma^* \Phi \longrightarrow \Phi .$$

Pour $s \in \mathbf{Ob} S$, la restriction de $\sigma^* \Phi$ à la fibre $s \setminus S$ de τ en s est égale à $p_{s \setminus S}^* \Phi_s$; la catégorie $s \setminus S$ étant asphérique, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L} \varinjlim_{s \setminus S} p_{s \setminus S}^* \Phi_s \simeq \Phi_s .$$

Or l'inclusion $s \setminus S = (\underline{\mathbf{F}}S)_s \longrightarrow (\underline{\mathbf{F}}S)/s$ est coasphérique (les cofibrations sont propres), et par conséquent, la proposition 4.1.30 permet de voir qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{L} \varinjlim_{s \setminus S} p_{s \setminus S}^* \Phi_s \simeq \mathbf{L} \varinjlim \sigma^* \Phi \simeq (\mathbf{L} \tau_! \sigma^* \Phi)_s .$$

On en déduit un isomorphisme

$$(\mathbf{L} \tau_! \sigma^* \Phi)_s \xrightarrow{\sim} \Phi_s .$$

La proposition 4.1.29 achève donc cette démonstration. \square

COROLLAIRE 4.3.13. *Soient S une petite catégorie et Φ, Ψ deux objets de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(S)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Les objets Φ et Ψ sont isomorphes dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(S)$.*
- (ii) *Les foncteurs $\mathbf{L}\Phi_!$ et $\mathbf{L}\Psi_!$ sont isomorphes.*

4. Densité homotopique

4.4.1. On fixe une petite catégorie A , un A -localisateur \mathcal{W} , et on choisit une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale D , par exemple celle de Lawvere (cf. 3.3.8).

Si I est une petite catégorie, et si F est un foncteur de I vers \widehat{A} , on dit que F est \mathcal{W} -régulier si le morphisme canonique $\underline{\mathbf{holim}} F \longrightarrow \underline{\mathbf{lim}} F$ est une \mathcal{W} -équivalence (pour cela, il suffit que $\mathbf{L} \varinjlim F \longrightarrow \underline{\mathbf{lim}} F$ soit un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ en vertu du corollaire 2.3.5). Pour chaque préfaisceau X sur A , on a un foncteur

$$\phi_X : A/X \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad (a, a \longrightarrow X) \longmapsto a \quad ,$$

et un isomorphisme canonique dans \widehat{A} , $\underline{\mathbf{lim}} \phi_X \xrightarrow{\sim} X$. On dit que X est \mathcal{W} -régulier si le foncteur ϕ_X l'est (i.e. si $\mathbf{L} \varinjlim \phi_X \longrightarrow X$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$).

EXEMPLE 4.4.2. Soient I une petite catégorie, et F un foncteur de I vers \widehat{A} . Il résulte du lemme 2.3.7 que F est \mathcal{W} -régulier dans les cas suivants :

1. I est l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 2\}$, et la flèche $F_0 \longrightarrow F_1$ est un monomorphisme ;
2. I est un ensemble bien ordonné, et pour tous $i < i'$ dans I , la flèche $F_i \longrightarrow F_{i'}$ est un monomorphisme ;
3. I est une catégorie discrète.

4.4.3. Soit h_A le plongement de Yoneda de A dans \widehat{A} . Il induit un foncteur $\mathbf{L} h_{A!} : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{cat}} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$, induit par le foncteur $h_{A!} : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \widehat{A}$ (cf. 4.3.6 et 4.3.7). D'autre part, on a un foncteur $\mathbf{dis} : \widehat{A} \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ (4.2.1), et on remarque que si X est un préfaisceau sur A , on a l'égalité $\nabla_A \mathbf{dis} X = A/X$, et donc que $\mathbf{L} \varinjlim_{A/X} \phi_X = \mathbf{L} h_{A!} \mathbf{dis} X$. On en déduit que X est \mathcal{W} -régulier si et seulement si la flèche canonique

$$\underline{h}_{A!} \mathbf{dis} X \longrightarrow \underline{\mathbf{lim}} \phi_X \simeq X$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉFINITION 4.4.4. Soit A une petite catégorie. Un A -localisateur \mathcal{W} est *régulier* si tout préfaisceau sur A est \mathcal{W} -régulier. Si \mathcal{W} est un A -localisateur, on note $\overline{\mathcal{W}}$ sa *complétion régulière*, c'est-à-dire le plus petit A -localisateur régulier contenant \mathcal{W} .

REMARQUE 4.4.5. La complétion régulière du A -localisateur \mathcal{W} est le A -localisateur engendré par \mathcal{W} et par les flèches $\underline{h}_{A_!} \text{dis } X \longrightarrow X$, $X \in \text{Ob } \widehat{A}$. On en déduit que tout A -localisateur qui contient un \overline{A} -localisateur régulier est régulier (cela résulte de la proposition 4.1.27 et de la remarque 4.3.8). En particulier, un A -localisateur est régulier si et seulement s'il contient la complétion régulière du A -localisateur minimal.

DÉFINITION 4.4.6. On reprend les hypothèses de 4.4.1, et on considère le localisateur fondamental \mathcal{W}_{Cat} , associé à \mathcal{W} . Si I est une petite catégorie, un foncteur $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ est *\mathcal{W} -parfait* s'il est \mathcal{W} -régulier, et si les fibres du foncteur canonique (cf. 1.2.9)

$$\int_I A/F \longrightarrow A/\varinjlim_I F$$

sont \mathcal{W}_{Cat} -asphériques.

REMARQUE 4.4.7. Comme le foncteur canonique de $\int A/F$ vers $A/\varinjlim F$ est une fibration (1.3.1), la condition ci-dessus implique que celui-ci est une \mathcal{W}_{Cat} -équivalence universelle. On en déduit que pour tout objet a de A , le foncteur induit sur les fibres au-dessus de a ,

$$\int_I \text{dis } F_a \longrightarrow \text{dis } \varinjlim_I F_a ,$$

est une \mathcal{W}_{Cat} -équivalence.

EXEMPLE 4.4.8. Les trois types de foncteurs \mathcal{W} -réguliers définis au numéro 4.4.2 sont aussi des exemples de foncteurs \mathcal{W} -parfaits (cela résulte de 1.3.5).

LEMME 4.4.9. Soient I une petite catégorie et $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur \mathcal{W} -parfait. Alors on a une \mathcal{W} -équivalence canonique

$$\underline{\text{holim}}_I \underline{h}_{A_!} \text{dis } F \xrightarrow{\sim} \underline{h}_{A_!} \text{dis } \varinjlim_I F .$$

DÉMONSTRATION. Demander que les fibres du foncteur canonique

$$\int A/F \longrightarrow A/\varinjlim F$$

soient des \mathcal{W}_{Cat} -équivalences implique que le morphisme

$$\int \text{dis } F \longrightarrow \text{dis } \varinjlim F$$

est une \mathcal{W}_{Cat} -équivalence terme à terme dans $\underline{\text{Hom}}(A^\circ, \text{Cat})$ (cf. remarque 4.4.7). Cela implique que le morphisme

$$\underline{h}_{A_!} \int \text{dis } F \longrightarrow \underline{h}_{A_!} \text{dis } \varinjlim F$$

est une \mathcal{W} -équivalence. Or il résulte de la proposition 4.3.10 qu'on a une \mathcal{W} -équivalence canonique

$$\underline{\text{holim}}_I \underline{h}_{A_!} \text{dis } F \longrightarrow \underline{h}_{A_!} \int \text{dis } F .$$

Le lemme est donc conséquence de la stabilité de \mathcal{W} par composition. \square

LEMME 4.4.10. *Soient I une petite catégorie, et $F : I \longrightarrow \widehat{A}$ un foncteur \mathcal{W} -parfait. Si pour tout objet i de I , le préfaisceau F_i est \mathcal{W} -régulier, alors il en est de même de $\varinjlim F$.*

DÉMONSTRATION. La flèche $\underline{\mathrm{h}}_{A!} \mathrm{dis} F \longrightarrow F$ est une \mathcal{W} -équivalence étagée, puisque pour tout $i \in \mathrm{Ob} I$, F_i est \mathcal{W} -régulier. On a donc une \mathcal{W} -équivalence

$$\underline{\mathrm{holim}}_I \underline{\mathrm{h}}_{A!} \mathrm{dis} F \longrightarrow \underline{\mathrm{holim}}_I F .$$

Grâce au lemme précédent, on obtient le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{holim}}_I \underline{\mathrm{h}}_{A!} \mathrm{dis} F & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{h}}_{A!} \mathrm{dis} \varinjlim_I F \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{holim}}_I F & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_I F \end{array}$$

Cela implique aussitôt l'assertion. \square

LEMME 4.4.11. *Soient I un petite catégorie, et F un foncteur de I vers \widehat{A} . On suppose que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *I est l'ensemble ordonné $\{1 > 0 < 2\}$, et la flèche $F_0 \longrightarrow F_1$ est un monomorphisme ;*
2. *I est un ensemble bien ordonné, et pour tous $i < i'$ dans I , la flèche $F_i \longrightarrow F_{i'}$ est un monomorphisme ;*
3. *I est une catégorie discrète.*

Alors si pour tout objet i de I , F_i est \mathcal{W} -régulier, il en est de même de $\varinjlim F$.

DÉMONSTRATION. Comme les foncteurs considérés sont \mathcal{W} -parfaits (4.4.8), il s'agit d'une application directe du lemme précédent. \square

PROPOSITION 4.4.12. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Pour que \mathcal{W} soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe un modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} dont tous les éléments soient des morphismes entre préfaisceaux \mathcal{W} -réguliers.*

DÉMONSTRATION. Cette condition est trivialement nécessaire. Pour montrer la réciproque, on considère un modèle cellulaire \mathcal{M} de \widehat{A} vérifiant la condition ci-dessus. Si X est un préfaisceau sur A , grâce à l'argument du petit objet appliqué à \mathcal{M} , il est un rétracte d'un préfaisceau Y tel que la flèche $\emptyset \longrightarrow Y$ soit un composé transfini d'images directes d'éléments de \mathcal{M} . On montre alors que Y est \mathcal{W} -régulier par induction transfinie, en explicitant une telle construction de $\emptyset \longrightarrow Y$ et le lemme 4.4.11 (nous laissons au lecteur le soin de prouver que le préfaisceau vide est \mathcal{W} -régulier, ce qui permet de commencer la récurrence). On s'aperçoit aussitôt (par un simple jeu de functorialité) que les préfaisceaux \mathcal{W} -réguliers sont stables par rétractes, ce qui montre que X est \mathcal{W} -régulier. \square

COROLLAIRE 4.4.13. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Si \mathcal{W} est accessible, il en est de même de sa complétion régulière $\overline{\mathcal{W}}$.*

DÉMONSTRATION. Soient S un petit ensemble de flèches de \widehat{A} qui engendre \mathcal{W} , et \mathcal{M} un modèle cellulaire de \widehat{A} . On pose

$$T = S \cup \{ \underline{h}_{A!} \text{ dis } X \longrightarrow X \mid K \longrightarrow L \in \mathcal{M}, X \in \{K, L\} \} .$$

Alors le A -localisateur engendré par T est la complétion régulière de \mathcal{W} . \square

4.4.14. Soient A une petite catégorie, \mathcal{W} un A -localisateur, et X un préfaisceau sur A . On vérifie immédiatement que la classe \mathcal{W}/X de flèches de $\widehat{A}/X = \widehat{A/X}$, des \mathcal{W} -équivalences au-dessus de X est un A/X -localisateur (on adopte ici les notations du lemme 2.2.40). En outre, si \mathcal{W} est accessible, il en est de même de \mathcal{W}/X (cette assertion résulte du fait plus général que si \mathcal{C} est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, et si X désigne un objet de \mathcal{C} , alors \mathcal{C}/X est une catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant).

PROPOSITION 4.4.15. *Si A est une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur régulier, alors pour tout préfaisceau X sur A , \mathcal{W}/X est régulier.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur d'oubli \mathcal{U} de \widehat{A}/X vers \widehat{A} commute aux limites inductives et respecte les monomorphismes et les \mathcal{W} -équivalences. Pour chaque petite catégorie I , il induit donc un foncteur

$$(4.4.15.1) \quad \mathcal{U} : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A/X}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) ,$$

et pour chaque foncteur F de I vers \widehat{A} , il résulte de la proposition 4.1.27 que le morphisme canonique $\mathbf{L} \varinjlim \mathcal{U}F \longrightarrow \mathcal{U} \mathbf{L} \varinjlim F$ est un isomorphisme. En outre, pour toute petite catégorie I , le foncteur (4.4.15.1) est conservatif. En effet, si $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ est une flèche de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A/X}(I)$, il résulte du lemme 4.1.28 qu'on peut supposer qu'elle est une flèche de $\widehat{A^I}/X$. Il résulte alors du corollaire 2.3.5 que ϕ est un isomorphisme si et seulement si son image par \mathcal{U} est une \mathcal{W} -équivalence, ce qui prouve l'assertion. On peut à présent montrer la proposition. Soit Y un préfaisceau sur A/X . On remarque grâce à la commutation des foncteurs \mathcal{U} et $\mathbf{L} \varinjlim$ que l'image par \mathcal{U} du morphisme canonique $\mathbf{L} \varinjlim \phi_Y \longrightarrow Y$ est le morphisme canonique $\mathbf{L} \varinjlim \phi_{\mathcal{U}Y} \longrightarrow \mathcal{U}Y$. Comme \mathcal{U} est conservatif au niveau des catégories homotopiques, on en déduit que Y est \mathcal{W}/X -régulier si et seulement si $\mathcal{U}Y$ est \mathcal{W} -régulier, ce qui achève la démonstration. \square

On fixe pour les quatre lemmes à venir une petite catégorie A , ainsi qu'un A -localisateur \mathcal{W} .

Le but de cette suite d'énoncés est de préparer la preuve du fait que la notion de A -localisateur régulier est stable par passage aux catégories de foncteurs (4.4.21).

LEMME 4.4.16. *Soient I une petite catégorie. On rappelle qu'on note*

$$\mathbf{Lh}_{A!} : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{\text{cat}}}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$$

le foncteur induit par $\underline{h}_{A!}$. Alors pour tout foncteur \mathcal{W} -régulier argument par argument F de I vers \widehat{A} (i.e. tel que pour tout objet i de I , le préfaisceau F_i soit

\mathcal{W} -régulier) on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I)$

$$\mathbf{Lh}_{A!} \mathbf{dis} F \simeq F .$$

DÉMONSTRATION. Pour tout objet i de I , l'hypothèse implique qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Lh}_{A!} \mathbf{dis} F_i = (\mathbf{Lh}_{A!} \mathbf{dis} F)_i \simeq F_i .$$

L'assertion résulte donc aussitôt de la proposition 4.1.29. \square

LEMME 4.4.17. *Tout préfaisceau représentable sur A est \mathcal{W} -régulier.*

DÉMONSTRATION. Si $a \in \mathbf{Ob} A$, alors la catégorie A/a admet un objet final, ce qui implique par 2-fonctorialité que les foncteurs $\mathbf{L}\varinjlim_{A/a}$ et $\varinjlim_{A/a}$ sont tous deux isomorphes au foncteur d'évaluation en $(a, 1_a) \in \mathbf{Ob} A/a$. \square

LEMME 4.4.18. *Pour toute petite catégorie I , on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(A \times I^\circ \times I)$*

$$\mathbf{Lh}_{A!} \mathbf{dis} h_{A \times I^\circ} \simeq h_{A \times I^\circ} .$$

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 4.4.16, il suffit de montrer que le foncteur

$$h_{A \times I^\circ} : A \times I^\circ \times I \longrightarrow \widehat{A}$$

est \mathcal{W} -régulier argument par argument. Or pour tous $a \in \mathbf{Ob} A$ et $i, j \in \mathbf{Ob} I$, on a l'égalité

$$h_{A \times I^\circ}(a, i, j) = \coprod_{\mathbf{Hom}_I(i, j)} a .$$

Les sommes étant des diagrammes \mathcal{W} -parfaits (4.4.8), l'assertion résulte de 4.4.11 et de 4.4.17. \square

4.4.19. Soit I une petite catégorie. Le foncteur

$$h_{A \times I^\circ} : A \times I^\circ \longrightarrow \widehat{A \times I^\circ}$$

induit en vertu de 4.3.7 un foncteur

$$\mathbf{Lh}_{A \times I^\circ!} : \mathbf{Hot}_{A \times I^\circ, \mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}} \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}^I} \widehat{A \times I^\circ} .$$

Un simple jeu d'écriture permet aussi de le voir comme un foncteur

$$\mathbf{Lh}_{A \times I^\circ!} : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) .$$

On a par ailleurs le foncteur

$$\mathbf{Lh}_{A!} : \mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}}(I) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) .$$

LEMME 4.4.20. *Les deux foncteurs ci-dessus, $\mathbf{Lh}_{A \times I^\circ!}$ et $\mathbf{Lh}_{A!}$, sont canoniquement isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $F : I \longrightarrow \mathbf{Hom}(A^\circ, \mathbf{Cat})$ un objet de $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}}(I)$. On a une fibration canonique

$$\varpi_F : \nabla F = \nabla_{A \times I^\circ} F \longrightarrow A \times I^\circ .$$

Le théorème 1.2.19 appliqué à F (dans le cas où X est la catégorie ponctuelle) donne un isomorphisme canonique dans $\mathbf{Hot}_{A \times I^\circ, \mathcal{W}_{Cat}}$:

$$\mathbf{L} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \nabla F}} \varpi_F^*(\mathbf{dis} h_{A \times I^\circ}) \simeq F .$$

Vu dans $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}_{Cat}}(I)$, cet isomorphisme s'écrit

$$\mathbf{L}q_!(\varpi_F \times 1_I)^*(\mathbf{dis} h_{A \times I^\circ}) \simeq F ,$$

où $q : \nabla F \times I \longrightarrow I$ désigne la seconde projection. Par définition de $\mathbf{L}h_{A \times I^\circ!}$, on a

$$\mathbf{L}h_{A \times I^\circ!} F = \mathbf{L}q_!(\varpi_F \times 1_I)^*(h_{A \times I^\circ}) ,$$

et il résulte du scholie 4.3.11 qu'on a les isomorphismes suivants.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}h_{A!} F &\simeq \mathbf{L}h_{A!} \mathbf{L}q_!(\varpi_F \times 1_I)^*(\mathbf{dis} h_{A \times I^\circ}) \\ &\simeq \mathbf{L}q_!(\varpi_F \times 1_I)^* \mathbf{L}h_{A!}(\mathbf{dis} h_{A \times I^\circ}) \end{aligned}$$

L'assertion résulte donc immédiatement du lemme 4.4.18. \square

PROPOSITION 4.4.21. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur régulier. Pour toute petite catégorie I , le $A \times I^\circ$ -localisateur \mathcal{W}^I des \mathcal{W} -équivalences étagées est régulier.*

DÉMONSTRATION. Soit F un objet de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$. En vertu du lemme 4.4.16, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}h_{A!} \mathbf{dis} F \simeq F ,$$

et d'après le lemme 4.4.20, un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}h_{A!} \mathbf{dis} F \simeq \mathbf{L}h_{A \times I^\circ!} \mathbf{dis} F .$$

On en déduit aussitôt que les objets $\mathbf{L}h_{A \times I^\circ!} \mathbf{dis} F$ et F sont canoniquement isomorphes dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \simeq \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \times \widehat{I}^\circ$, ce qu'il fallait démontrer. \square

PROPOSITION 4.4.22. *Tout Δ -localisateur est régulier.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} un Δ -localisateur. On sait que les inclusions d'ensembles simpliciaux $\partial \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$, $n \geq 0$, forment un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}$. Dans la démonstration du lemme 3.1.9, on a introduit la notion de sous-objet homogène de Δ_n , *i.e.* de la forme $K = \cup_{i \in I} \text{Im} \delta_n^i$, $I \subset \{0, \dots, n\}$. On va montrer alors par récurrence sur n que tout sous-objet homogène de Δ_n est \mathcal{W} -régulier. Comme l'ensemble simplicial vide est \mathcal{W} -régulier, le cas $n = 0$ est immédiat. Si $n > 0$, et si $K = \cup_{i \in I} \text{Im} \delta_n^i$ est un sous-objet homogène de Δ_n , on procède par récurrence sur le cardinal de l'ensemble I . Si I est vide, il n'y a rien à montrer, et sinon, on considère $J = I \setminus \{\min I\}$, et $L = \cup_{j \in J} \text{Im} \delta_n^j$. On a alors un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L \cap \Delta_{n-1} & \longrightarrow & \Delta_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & K \end{array}$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes. En outre, $L \cap \Delta_{n-1}$ est un sous-objet homogène de Δ_{n-1} . Il résulte donc des lemmes 4.4.17 et 4.4.11, ainsi

que de l'hypothèse de récurrence, que K est \mathcal{W} -régulier. En particulier, les bords $\partial\Delta_n$ sont des ensembles simpliciaux \mathcal{W} -réguliers, ce qui achève la démonstration en vertu de la proposition 4.4.12. \square

4.4.23. Soit A est une petite catégorie. On appelle Δ_1 -équivalences les éléments du $\Delta \times A$ -localisateur \mathcal{W}_{Δ_1} engendré, par les projections $X \times \Delta_1 \rightarrow X$, $X \in \mathbf{Ob} \widehat{\Delta \times A}$. Il est immédiat que toute Δ_1 -équivalence est une ∞ -équivalence étagée.

PROPOSITION 4.4.24. *Les ∞ -équivalences étagées forment la complétion régulière des Δ_1 -équivalences.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} la complétion régulière des Δ_1 -équivalences. Il résulte des propositions 4.4.22 et 4.4.21 que les ∞ -équivalences étagées forment un $\Delta \times A$ -localisateur régulier, et donc que toute \mathcal{W} -équivalence est une ∞ -équivalence étagée. D'autre part, il résulte de la proposition 2.3.8 et du corollaire 4.4.13 que \mathcal{W} est accessible, ce qui va nous permettre d'utiliser la structure de catégorie de modèles fermée du théorème 2.3.4. Cela permet déjà une première réduction : il suffit de montrer que toute ∞ -équivalence étagée dont la source et le but sont fibrants au sens de \mathcal{W} est une \mathcal{W} -équivalence.

Considérons le foncteur

$$\mathcal{H}om : \widehat{\Delta \times A}^\circ \times \widehat{\Delta \times A} \longrightarrow \widehat{\Delta} , \quad (F, G) \longmapsto (\Delta_n \longmapsto \mathbf{Hom}_{\widehat{\Delta \times A}}(F \times \Delta_n, G)) .$$

Il est remarquable que pour tout préfaisceau G sur $\Delta \times A$, et pour tout objet a de A , $\mathcal{H}om(a, G)$ est l'ensemble simplicial G_a des sections de G au-dessus de a . Par conséquent, une flèche $G \rightarrow G'$ de $\widehat{\Delta \times A}$ est une ∞ -équivalence étagée si et seulement si pour tout objet a de A , $\mathcal{H}om(a, G) \rightarrow \mathcal{H}om(a, G')$ est une ∞ -équivalence. On vérifie en outre que $\pi_0 \mathcal{H}om(F, G)$ est le quotient de l'ensemble $\mathbf{Hom}_{\widehat{\Delta \times A}}(F, G)$ par la relation de Δ_1 -homotopie, et par conséquent que si G est fibrant au sens de \mathcal{W} , on a une bijection canonique $\pi_0 \mathcal{H}om(F, G) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}}(F, G)$ (cf. [41, § I.1, corollaire 1]). Lorsque G est fibrant au sens de \mathcal{W} , le foncteur

$$\widehat{\Delta \times A}^\circ \longrightarrow \widehat{\Delta} , \quad F \longmapsto \mathcal{H}om(F, G)$$

est un foncteur de Quillen à droite. En effet, si F désigne un préfaisceau sur $A \times \Delta$, on vérifie aussitôt que la classe des flèche $K \rightarrow L$ de $\widehat{\Delta}$ telles que

$$F \times K \longrightarrow F \times L$$

soit une \mathcal{W} -équivalence est un Δ -localisateur qui contient les projections

$$K \times \Delta_n \longrightarrow K , \quad K \in \mathbf{Ob} \widehat{\Delta} , n \geq 0 ,$$

et donc qu'elle contient les ∞ -équivalences (3.1.3). Pour toute cofibration $F \rightarrow F'$ dans $\widehat{A \times \Delta}$ et toute extension anodine $K \rightarrow L$ de $\widehat{\Delta}$, on a donc une \mathcal{W} -cofibration triviale

$$F' \times K \cup F \times L \longrightarrow F' \times L .$$

En outre, il résulte des lemmes 3.1.8 et 3.1.9 que pour tout $n \geq 0$, et toute \mathcal{W} -cofibration triviale $F \rightarrow F'$ de $\widehat{A \times \Delta}$, l'inclusion

$$F' \times \Delta_n \cup F \times \partial \Delta_n \longrightarrow F' \times \Delta_n$$

est une \mathcal{W} -cofibration triviale. Des arguments standard d'adjonction prouvent alors que $\mathcal{H}om(\cdot, G)$ est un foncteur de Quillen à droite. En vertu de la proposition 4.1.22, pour chaque petite catégorie I , on a donc un foncteur dérivé à droite

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om(\cdot, G) : \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}(I)^\circ \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}(I^\circ),$$

et pour chaque foncteur ϕ de I dans $\widehat{A \times \Delta}$, un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathbf{L}\varinjlim_I \phi, G) \simeq \mathbf{R}\varprojlim_{I^\circ} \mathbf{R}\mathcal{H}om(\phi, G).$$

Soit $q : G \longrightarrow G'$ une ∞ -équivalence étagée, G et G' étant fibrants au sens de \mathcal{W} . Alors pour tout objet a de A , on a un isomorphisme

$$\mathcal{H}om(a, G) = \mathbf{R}\mathcal{H}om(a, G) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om(a, G') = \mathcal{H}om(a, G'),$$

et comme les projections $a \times \Delta_n \longrightarrow a$ sont des \mathcal{W} -équivalences, on en déduit des isomorphismes $\mathbf{R}\mathcal{H}om(a \times \Delta_n, G) \simeq \mathbf{R}\mathcal{H}om(a \times \Delta_n, G')$. Si F est un préfaisceau sur $\Delta \times A$, on obtient ainsi les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}}(F, G) &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\mathcal{H}om(F, G) \\ &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathbf{L}\varinjlim \phi_F, G) \\ &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\varprojlim \mathbf{R}\mathcal{H}om(\phi_F, G) \\ &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\varprojlim \mathbf{R}\mathcal{H}om(\phi_F, G') \\ &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathbf{L}\varinjlim \phi_F, G') \\ &\simeq \pi_0 \mathbf{R}\mathcal{H}om(F, G') \\ &\simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}}(F, G'). \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda implique alors que q est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}$, et donc en vertu du corollaire 2.3.5, que q est une \mathcal{W} -équivalence, ce qui achève la démonstration. \square

THÉORÈME 4.4.25. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) \mathcal{W} est régulier.
- (b) La complétion simpliciale de \mathcal{W} est régulière.
- (c) La complétion simpliciale de \mathcal{W} contient les ∞ -équivalences étagées.

DÉMONSTRATION. L'implication (a) \Rightarrow (b) est conséquence de la proposition 4.4.21, et il résulte de la proposition 4.4.24 que (b) \Leftrightarrow (c). Supposons que la complétion simpliciale \mathcal{W}_Δ de \mathcal{W} soit un $A \times \Delta$ -localisateur régulier, et considérons un préfaisceau X sur A . On note

$$p : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

l'inclusion canonique. En vertu de la proposition 3.3.20, on a l'égalité $p^{-1}\mathcal{W}_\Delta = \mathcal{W}$, et comme le foncteur p commute aux petites limites inductives et respecte

les monomorphismes, il résulte de la proposition 4.1.27 que pour chaque petite catégorie I on a un carré commutatif à isomorphisme de foncteurs canonique près

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) & \xrightarrow{p} & \mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_{\Delta}} \widehat{A \times \Delta}(I) \\ \downarrow \mathcal{L} \lim_{\rightarrow I} & & \downarrow \mathcal{L} \lim_{\rightarrow I} \\ \mathrm{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A} & \xrightarrow{p} & \mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_{\Delta}} \widehat{A \times \Delta} \end{array} .$$

En outre, en vertu de la seconde assertion de 3.3.20 les flèches horizontales de ce carré sont des équivalences de catégories. Il suffit par conséquent de montrer que le morphisme

$$\mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X} p\phi_X \longrightarrow pX$$

est un isomorphisme. Comme \mathcal{W}_{Δ} est régulier par hypothèse, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{L} \lim_{\rightarrow A \times \Delta / pX} \phi_{pX} \simeq pX .$$

En outre, on remarque que $A \times \Delta / X$ est isomorphe à la catégorie produit $A/X \times \Delta$, et les projections

$$a \times \Delta_n \rightarrow a \quad , \quad a \in \mathrm{Ob} A , n \geq 0 ,$$

étant des \mathcal{W}_{Δ} -équivalences, le foncteur ϕ_{pX} est isomorphe dans la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}_{\mathcal{W}_{\Delta}} \widehat{A \times \Delta}(A/X \times \Delta)$ au foncteur $q^*p\phi_X$, où q désigne la projection de $A/X \times \Delta$ vers A/X . On a donc par functorialité un isomorphisme canonique

$$\mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X \times \Delta} q^*p\phi_X \simeq \mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X \times \Delta} \phi_{pX} .$$

La catégorie Δ admettant un objet final, elle est coasphérique (1.1.10), ce qui implique que q est coasphérique (1.1.8). En vertu de la proposition 4.1.30, on a donc un isomorphisme canonique

$$\mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X \times \Delta} q^*p\phi_X \simeq \mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X} p\phi_X .$$

On en déduit les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X} p\phi_X &\simeq \mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X \times \Delta} q^*p\phi_X \\ &\simeq \mathcal{L} \lim_{\rightarrow A/X \times \Delta} \phi_{pX} \\ &\simeq pX , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

COROLLAIRE 4.4.26. *Pour toute petite catégorie A , le A -localisateur régulier minimal est stable par produits finis.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} le A -localisateur régulier minimal. Il résulte du théorème ci-dessus et de la proposition 3.3.20 que la complétion simpliciale de \mathcal{W} est le $A \times \Delta$ -localisateur engendré par les ∞ -équivalences étagées et par les projections

$$X \times L \longrightarrow X \quad , \quad X \in \text{Ob } \widehat{A \times \Delta} \quad ,$$

où L désigne l'objet de Lawvere de \widehat{A} . Comme les ∞ -équivalences sont stables par produits finis, il en est de même des ∞ -équivalences étagées, et donc le corollaire 2.3.9 implique que la complétion simpliciale de \mathcal{W} est stable par produits finis. Une nouvelle application de la proposition 3.3.20 implique alors l'assertion. \square

COROLLAIRE 4.4.27. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur. Si \mathcal{W} est propre, il en est de même de sa complétion régulière.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire 3.3.21 implique que \mathcal{W}_Δ est propre, et il résulte de la proposition 4.4.24 que la complétion régulière de \mathcal{W}_Δ est le $A \times \Delta$ -localisateur engendré par \mathcal{W}_Δ et par les ∞ -équivalences étagées. La preuve est s'achève donc grâce au théorème 3.1.29, à la proposition 2.4.16, et aux corollaires 2.4.6 et 3.3.21. \square

COROLLAIRE 4.4.28. *Soient A une petite catégorie et \mathcal{W} un A -localisateur régulier. Les \mathcal{W} -équivalences sont stables par limites inductives filtrantes.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 3.3.20, il suffit de montrer que la complétion simpliciale de \mathcal{W} est stable par petites limites inductives filtrantes, et le théorème 4.4.25 implique que celle-ci contient les ∞ -équivalences étagées. Or la proposition 3.3.15 implique immédiatement que les ∞ -équivalences étagées sont stables par petites limites inductives filtrantes. On peut alors conclure par l'argument évoqué dans la preuve de 2.3.18. \square

PROPOSITION 4.4.29. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur régulier. Un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$ est une \mathcal{W} -équivalence (4.3.2) si et seulement si pour tout préfaisceau représentable a sur A , le morphisme canonique $\text{L}p_{I!}p_I^*(a) \longrightarrow \text{L}p_{J!}p_J^*(a)$ est un isomorphisme de $\text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$.*

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que c'est une condition nécessaire, et réciproquement, si u vérifie cette condition, pour tout préfaisceau X sur A , on a les isomorphismes canoniques suivants

$$\begin{aligned} \text{L}p_{I!}p_I^*X &\simeq \text{L}p_{I!}p_I^*\text{L}\varinjlim \phi_X \\ &\simeq \text{L}\varinjlim \text{L}p_{I!}p_I^*\phi_X \\ &\simeq \text{L}\varinjlim \text{L}p_{J!}p_J^*\phi_X \\ &\simeq \text{L}p_{J!}p_J^*\text{L}\varinjlim \phi_X \\ &\simeq \text{L}p_{J!}p_J^*X \quad , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 4.4.30. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur régulier. On considère un préfaisceau X sur A , et on définit un foncteur*

$$\rho_X : A \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad a \longmapsto X \times a \quad .$$

Alors le morphisme canonique $\mathbb{L}\varinjlim \rho_X \longrightarrow X$, induit par les projections $X \times a \longrightarrow X$, est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$.

DÉMONSTRATION. En vertu du corollaire 1.3.3, on a une \mathcal{W}_{Cat} -équivalence argument par argument

$$\int \text{dis } \rho_X \longrightarrow \text{dis } X .$$

On en déduit des isomorphismes canoniques (4.3.11)

$$\mathbb{L}\varinjlim_{A} \underline{h}_{A!} \text{dis } \rho_X \simeq \underline{h}_{A!} \mathbb{L}\varinjlim \text{dis } \rho_X \simeq \underline{h}_{A!} \text{dis } X .$$

L'assertion résulte donc des isomorphismes

$$\underline{h}_{A!} \text{dis } X \simeq X \quad \text{et} \quad \underline{h}_{A!} \text{dis } \rho_X \simeq \rho_X$$

dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ et $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(A)$ respectivement. \square

COROLLAIRE 4.4.31. *Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} un A -localisateur régulier. On considère un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A . Si pour tout objet a de A , et toute section $a \longrightarrow Y$ de Y au-dessus de a , le morphisme $X \times_Y a \longrightarrow a$ est une \mathcal{W} -équivalence, alors p est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer A par A/Y et \mathcal{W} par \mathcal{W}/Y , on peut supposer que Y est l'objet final de \widehat{A} . Les hypothèses impliquent alors qu'on a un isomorphisme $\rho_X \simeq h_A$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(A)$, et donc on obtient des isomorphismes

$$X \simeq \mathbb{L}\varinjlim \rho_X \simeq \mathbb{L}\varinjlim h_A \simeq * .$$

Le corollaire 2.3.5 achève donc la démonstration. \square

À la poursuite des modèles

1. Modeleurs élémentaires

5.1.1. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une petite catégorie. On rappelle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ désigne la classe de flèches $i_A^{-1}\mathcal{W}$. Pour chaque petite catégorie I , on note $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I)$ la localisation de la catégorie des foncteurs de I vers \widehat{A} par la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^I$ des \mathcal{W} -équivalences étagées, *i.e.* pour reprendre les notations du chapitre précédent, $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} = \text{Ho}_{\mathcal{W}_{\widehat{A}}}\widehat{A}$.

PROPOSITION 5.1.2. *Tout localisateur fondamental est fortement saturé, et donc, en particulier, est stable par rétractes.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On choisit une \mathcal{W} -catégorie test A (voir les exemples 1.1.28 et 1.1.29). Alors un morphisme de Cat est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image par i_A^* est une \mathcal{W} -équivalence, et comme le foncteur i_A^* induit une équivalence de catégories entre les catégories localisées, l'assertion résulte des corollaires 2.3.5 et 1.3.10. \square

PROPOSITION 5.1.3. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. Alors les foncteurs i_A et i_A^* induisent pour toute petite catégorie I un couple de foncteurs adjoints*

$$i_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) \longrightarrow \text{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \quad \text{et} \quad i_A^* : \text{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}(I) .$$

En outre, pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$, on a un isomorphisme de foncteurs canonique

$$\mathbb{L}u_! i_A \xrightarrow{\sim} i_A \mathbb{L}u_! .$$

Enfin, lorsque A est \mathcal{W} -asphérique, les foncteurs i_A et i_A^* sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du fait que les foncteurs i_A et i_A^* respectent les \mathcal{W} -équivalences (1.1.16, (e)). La seconde est conséquence de la première, puisque $\mathbb{L}u_! i_A$ et $i_A \mathbb{L}u_!$ sont tous deux des adjoints à gauche de $u^* i_A^* = i_A^* u^*$. Enfin, la troisième résulte du fait que dans ce cas, $i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\text{Cat}}$ est une \mathcal{W} -équivalence, et $1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$ une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence. \square

PROPOSITION 5.1.4. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Une petite catégorie A est une \mathcal{W} -catégorie test locale si et seulement si $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est un A -localisateur régulier. Si c'est le cas, c'est une \mathcal{W} -catégorie test si et seulement si elle est \mathcal{W} -asphérique.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire 1.3.10 implique qu'il suffit de vérifier que si A est une \mathcal{W} -catégorie test locale, alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est régulier. Considérons une petite catégorie I , et un foncteur F de I vers \widehat{A} . Le foncteur canonique $K(i_A F) : \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F$ correspond dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ au morphisme obtenu par adjonction à partir du morphisme $i_A F \longrightarrow p_I^* \varinjlim i_A F$ dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$. En vertu de la proposition 5.1.3, $K(i_A F)$ est donc isomorphe dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ à l'image par le foncteur i_A du morphisme canonique $\mathbf{L} \varinjlim F \longrightarrow \varinjlim F$. Il suffit par conséquent de montrer que pour tout préfaisceau X sur A , le foncteur canonique $K(i_A \phi_X) : \int i_A \phi_X \longrightarrow \varinjlim i_A \phi_X \simeq A/X$ est une \mathcal{W} -équivalence, ce qui résulte de la proposition 1.3.2 (appliquée à la catégorie A/X et à l'objet final de \widehat{A}/X). \square

DÉFINITION 5.1.5. Soit A une petite catégorie.

Un A -localisateur test est un A -localisateur régulier \mathcal{W} tel que pour tout préfaisceau représentable a sur A , le morphisme canonique de a vers l'objet final de \widehat{A} soit une \mathcal{W} -équivalence.

Un localisateur fondamental \mathcal{W} est *modelable par A* si A est une \mathcal{W} -catégorie test.

Un *modeleur élémentaire* est un couple (A, \mathcal{W}) , où A est une petite catégorie, et où \mathcal{W} est un A -localisateur test. Un modeleur élémentaire (A, \mathcal{W}) est *accessible* si le A -localisateur \mathcal{W} est accessible.

REMARQUE 5.1.6. Si S est un petit ensemble de flèches de \widehat{A} , alors le A -localisateur test engendré par S est accessible. En effet, il peut être vu comme la complétion régulière du A -localisateur engendré par S et par l'ensemble des morphismes $a \longrightarrow *$, $a \in \mathbf{Ob} A$, ce qui permet de conclure en vertu du corollaire 4.4.13. De même, si S est un petit ensemble de flèches de \mathbf{Cat} , le localisateur fondamental modelable par A engendré par S est accessible, puisqu'il est le localisateur fondamental engendré par S et par les foncteurs $A \longrightarrow *$ et $i_A(a \times i_A^* \Delta_1) \longrightarrow *$, $a \in \mathbf{Ob} A$ (cf. le théorème 1.1.16).

LEMME 5.1.7. *Soit (A, \mathcal{W}) un modeleur élémentaire. Un foncteur entre petites catégories $u : I \longrightarrow J$ est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si le morphisme canonique $\mathbf{L}p_{I!} p_I^*(*) \longrightarrow \mathbf{L}p_{J!} p_J^*(*)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$.*

DÉMONSTRATION. Les morphismes $a \longrightarrow *$, $a \in \mathbf{Ob} A$, sont des \mathcal{W} -équivalences, et donc pour toute petite catégorie I , on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}p_{I!} p_I^*(a) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}p_{I!} p_I^*(*) .$$

Ce lemme résulte donc de la proposition 4.4.29. \square

LEMME 5.1.8. *Soit (A, \mathcal{W}) un modeleur élémentaire. Alors on a pour tout objet X de $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$, un isomorphisme naturel dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$, $\mathbf{L}p_{A/X!} p_{A/X}^*(*) \simeq X$. En outre, on a l'égalité $\mathcal{W} = i_A^{-1} \mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}$, et A est $\mathcal{W}_{\mathbf{Cat}}$ -asphérique.*

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau sur A . On a alors un isomorphisme canonique $\mathbf{L} \varinjlim h_A|_{A/X} = \mathbf{L} \varinjlim \phi_X \simeq X$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$. D'autre part, si P désigne le foncteur constant de A dans \widehat{A} de valeur l'objet final de \widehat{A} , on a un isomorphisme $h_A \simeq P$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(A)$, d'où par functorialité un isomorphisme

$\mathbb{L} \varinjlim h_A|_{A/X} \simeq \mathbb{L} \varinjlim P|_{A/X}$. Or $\mathbb{L} \varinjlim P|_{A/X}$ s'identifie à $\mathbb{L} p_{A/X!} p_{A/X}^*(*)$, ce qui donne un isomorphisme canonique $\mathbb{L} p_{A/X!} p_{A/X}^*(*) \simeq X$. Le lemme précédent montre donc que $\mathcal{W} = i_A^{-1} \mathcal{W}_{Cat}$. Il implique aussi que A est \mathcal{W}_{Cat} -asphérique, une fois remarqué que la colimite homotopique du diagramme indexé par la catégorie ponctuelle, constant de valeur l'objet final de \widehat{A} , est l'objet final de \widehat{A} . \square

REMARQUE 5.1.9. Si on choisit une \mathcal{W} -résolution cosimpliciale D , la colimite homotopique $\mathbb{L} p_{A/X!} p_{A/X}^*(*)$ s'identifie à $\mathbf{Real}_D N A/X$. Lorsque $D = i_A^* \Delta$ est la résolution cosimpliciale de Lawvere, cet isomorphisme $\mathbb{L} p_{A/X!} p_{A/X}^*(*) \rightarrow X$ peut s'expliciter avant localisation comme suit. On a un morphisme canonique $\mathbf{Real}_{i_A^* \Delta} N A/X \rightarrow i_A^* A/X$, dont on peut montrer qu'il est une \mathcal{W} -équivalence (corollaire 5.3.8), et on a un morphisme d'adjonction $X \rightarrow i_A^* i_A X = i_A^* A/X$. L'isomorphisme peut alors être défini comme le composé de ce dernier avec l'inverse dans $\mathbf{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ du précédent.

THÉORÈME 5.1.10. *Soit A une petite catégorie. L'application $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}_{Cat}$ (cf. 4.3.2) établit une bijection croissante pour l'inclusion, entre l'ensemble des A -localisateurs test et celui des localisateurs fondamentaux modelables par A , l'application inverse étant définie par $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1} \mathcal{W}$. En outre, cette correspondance conserve l'accessibilité dans le sens où un localisateur fondamental modelable par A est accessible si et seulement si le A -localisateur (test) correspondant l'est.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} un A -localisateur test. Alors en vertu de la proposition 4.3.3, \mathcal{W}_{Cat} est un localisateur fondamental, et en vertu du lemme 5.1.8, A est \mathcal{W}_{Cat} -asphérique et $\mathcal{W} = i_A^{-1} \mathcal{W}_{Cat}$. Le corollaire 1.3.10 implique donc que A est une \mathcal{W}_{Cat} -catégorie test, ce qui montre que l'application est bien définie et injective. La surjectivité résulte de la proposition 5.1.4 et du fait que si \mathcal{W} est un localisateur fondamental modelable par A , on a les égalités suivantes

$$i_A^{-1} \mathcal{W} = \mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1} (\mathcal{W}_{\widehat{A}})_{Cat} ,$$

puisqu'on en déduit les identifications

$$\mathcal{W} = i_A^* \mathcal{W}_{\widehat{A}} = (\mathcal{W}_{\widehat{A}})_{Cat} .$$

Les problèmes d'accessibilité se trouvent trivialement résolus grâce à la remarque 5.1.6. \square

COROLLAIRE 5.1.11. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible, et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. Alors \widehat{A} admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les éléments de $i_A^{-1} \mathcal{W}$.*

DÉMONSTRATION. Lorsque A est une \mathcal{W} -catégorie test, cela résulte des théorèmes 2.3.4 et 5.1.10. Dans le cas général, on choisit une \mathcal{W} -catégorie test B (par exemple B peut être une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés finis non vides, ou bien la catégorie des simplexes), et un foncteur test $i : B \rightarrow \mathbf{Cat}$ (par exemple simplement le foncteur $b \mapsto B/b$). En vertu du corollaire A.1.12, le foncteur composé $i^* i_A : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ commute aux petites

limites inductives et aux produits fibrés. Comme i est un foncteur test, on vérifie immédiatement que $i_A^{-1}i^{*-1}\mathcal{W}_{\widehat{B}} = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il en résulte, grâce peut-être au lemme 1.1.27, que le foncteur i^*i_A vérifie les conditions de la proposition 2.3.10, et donc cette dernière achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 5.1.12. *Le localisateur fondamental minimal est formé des morphismes de $\mathcal{C}at$ dont l'image par le foncteur nerf $N : \mathcal{C}at \rightarrow \widehat{\Delta}$ est une ∞ -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On sait que pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\Delta_n \times \Delta_1 \rightarrow \Delta_n$ est une \mathcal{W} -équivalence, et que l'inclusion canonique $i : \Delta \rightarrow \mathcal{C}at$ est un \mathcal{W} -foncteur test (1.1.29). On en déduit que pour tout ensemble simplicial X , la projection $X \times \Delta_1 \rightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence (le foncteur $\Delta/(X \times \Delta_1) \rightarrow \Delta/X$ est \mathcal{W} -asphérique). Cela implique que $\mathcal{W}_\infty \subset i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ par définition des ∞ -équivalences (3.1.3). D'autre part, il est évident que pour tout $n \geq 0$, la flèche $\Delta_n \rightarrow \Delta_0 = *$ est une ∞ -équivalence (puisque c'est une Δ_1 -équivalence d'homotopie), et comme \mathcal{W}_∞ est un Δ -localisateur régulier (proposition 4.4.22), il résulte du théorème 5.1.10 que \mathcal{W}_∞ correspond au localisateur fondamental minimal. Or ce dernier s'identifie à $N^{-1}\mathcal{W}_\infty$ car i est un foncteur test. \square

REMARQUE 5.1.13. Le Δ -localisateur des ∞ -équivalences peut donc être défini comme le Δ -localisateur engendré par les flèches $\Delta_n \rightarrow \Delta_0$, $n \geq 0$, car tout Δ -localisateur est régulier, ce qui implique que ce dernier est le Δ -localisateur test minimal.

5.1.14. On notera par abus \mathcal{W}_∞ le localisateur fondamental minimal, et les \mathcal{W}_∞ -équivalences seront appelées aussi des ∞ -équivalences. On emploiera volontier les adjectifs ∞ -asphérique, ∞ -coasphérique, *etc.*, au lieu de \mathcal{W}_∞ -asphérique, \mathcal{W}_∞ -coasphérique *etc.* On note Hot_∞ la localisation de $\mathcal{C}at$ par les ∞ -équivalences. Il résulte du corollaire 5.1.12 que Hot_∞ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathcal{H}_\infty = \text{Ho}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$. En vertu d'un théorème de Milnor, elle est encore équivalente à la catégorie des CW -complexes quotientée par la relation d'homotopie. Plus généralement, tout modeleur élémentaire accessible définit canoniquement une sous-catégorie pleine de Hot_∞ . Une formulation précise de cette dernière assertion prend la forme ci-dessous.

COROLLAIRE 5.1.15. *Si (A, \mathcal{W}) est un modeleur élémentaire accessible, la catégorie $\text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ s'identifie canoniquement à la localisation de Hot_∞ par les $\mathcal{W}_{\mathcal{C}at}$ -équivalences, et le foncteur de localisation de Hot_∞ vers $\text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$ admet un adjoint à droite pleinement fidèle.*

COROLLAIRE 5.1.16. *Tout localisateur fondamental est stable par limites inductives filtrantes.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Comme l'inclusion canonique de la catégorie des simplexes Δ dans $\mathcal{C}at$ est un \mathcal{W} -foncteur test, on a l'égalité $\mathcal{W} = N^{-1}i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$. Or en vertu de la proposition 5.1.4, $i_\Delta^{-1}\mathcal{W}$ est un Δ -localisateur régulier, et donc le corollaire 4.4.28 implique qu'il est stable par limites

inductives filtrantes. Il est d'autre part bien connu que le foncteur nerf commute aux petites limites inductives filtrantes, ce qui prouve le corollaire. \square

LEMME 5.1.17. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur \mathcal{W} -asphérique dans $\mathcal{C}at$. Alors pour tout préfaisceau X sur B , le foncteur naturel*

$$u/X : A/u^*X \longrightarrow B/X$$

est \mathcal{W} -asphérique. En conséquence, une flèche de \widehat{B} est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image dans \widehat{A} par le foncteur image inverse

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

en est une.

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau sur B . On a le carré cartésien suivant dans $\mathcal{C}at$.

$$\begin{array}{ccc} A/u^*X & \xrightarrow{u/X} & B/X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

Comme le foncteur d'oubli de B/X vers B est une fibration, c'est en particulier un foncteur \mathcal{W} -lisse, et donc en vertu de l'énoncé dual de la caractérisation (b) du théorème 1.2.5, le foncteur u/X est encore \mathcal{W} -asphérique. Par conséquent, si $X \longrightarrow Y$ est une flèche de \widehat{B} , on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/u^*X & \longrightarrow & A/u^*Y \\ u/X \downarrow & & \downarrow u/Y \\ B/X & \longrightarrow & B/Y \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des \mathcal{W} -équivalences, ce qui prouve le lemme. \square

PROPOSITION 5.1.18. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible, et soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur \mathcal{W} -asphérique entre deux catégories test. Alors le couple de foncteurs adjoints*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A} \quad \text{et} \quad u_* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est une équivalence de Quillen.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, le foncteur u^* respecte les \mathcal{W} -équivalences, et il est immédiat qu'il respecte les monomorphismes, puisqu'admettant un adjoint à gauche, il respecte les limites projectives. Il est ainsi établi qu'on a obtenu une adjonction de Quillen. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que le foncteur u^* induit une équivalence de catégories entre les catégories homotopiques. Or en vertu du lemme ci-dessus, on a une \mathcal{W} -équivalence naturelle du foncteur $i_A u^*$ vers le foncteur i_B . On obtient donc un triangle

commutatif à isomorphisme de foncteurs près

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \\ & \searrow i_B & \swarrow i_A \\ & \text{Hot}_{\mathcal{W}} & \end{array}$$

dont les deux flèches obliques sont des équivalences de catégories (puisque A et B sont des catégories test), ce qui permet de conclure. \square

REMARQUE 5.1.19. On verra plus loin que cet énoncé est encore vérifié si on suppose seulement que A et B sont des catégories test locales.

PROPOSITION 5.1.20. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible, et A, B , une paire de catégories test. Alors le foncteur*

$$i_B^* i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une interprétation de la preuve du corollaire 5.1.11 : en vertu du corollaire A.1.12, ce foncteur commute aux petites limites inductives, et donc admet un adjoint à droite. Il est d'autre part immédiat qu'il respecte les monomorphismes et les équivalences faibles. \square

2. Ubiquité de la propreté

LEMME 5.2.1. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental et A une petite catégorie. Un préfaisceau X sur A est \mathcal{W} -localement asphérique si et seulement si pour tout préfaisceau Y sur A , la projection $X \times Y \longrightarrow Y$ est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Le préfaisceau X est \mathcal{W} -localement asphérique si et seulement si pour tout préfaisceau représentable a sur A , la projection $X \times a \longrightarrow a$ est une \mathcal{W} -équivalence. Cela montre que la condition invoquée est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, on remarque que si Y est un préfaisceau sur A , et si (a, u) est un objet de A/Y , alors on a une identification canonique

$$i_A(X \times Y)/(a, u) \simeq i_A(X \times a),$$

ce qui montre que si X est \mathcal{W} -localement asphérique, alors le foncteur

$$i_A(X \times Y) \longrightarrow i_A Y$$

est \mathcal{W} -asphérique. \square

DÉFINITION 5.2.2. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Un \mathcal{W} -contracteur est un couple (B, I) où B est une petite catégorie non vide, et où I est préfaisceau localement \mathcal{W} -asphérique sur B (*i.e.* tel que pour tout objet b de B , la projection $B \times b \longrightarrow b$ soit une \mathcal{W} -équivalence), tel que I admette une structure de segment séparant, et tel que tout préfaisceau représentable b sur B soit I -contractile. Un foncteur $i : A \longrightarrow \widehat{B}$ est I -contractile si le préfaisceau sur A i^*I est localement asphérique, admet une structure de segment séparant, et si pour tout objet a de A , le préfaisceau $i(a)$ est I -contractile.

REMARQUE 5.2.3. Il résulte du théorème 1.1.16 et du lemme 1.1.27 que si (B, I) est un \mathcal{W} -contracteur, alors B est une \mathcal{W} -catégorie test, et que pour toute petite catégorie A , s'il existe un foncteur I -contractile i de A dans \widehat{B} , alors A est une \mathcal{W} -catégorie test locale.

5.2.4. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, (B, I) un \mathcal{W} -contracteur, et $i : A \longrightarrow \widehat{B}$ un foncteur I -contractile. On note

$$A \xleftarrow{p} A \times B \xrightarrow{q} B$$

les projections canoniques, et

$$\widehat{A} \xrightarrow{p^*} \widehat{A \times B} \xleftarrow{q^*} \widehat{B}$$

les foncteurs image inverse correspondants. Mis à part les deux lemmes suivants, tous les énoncés jusqu'au numéro 5.2.8 se placeront sous ces hypothèses.

LEMME 5.2.5. *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une flèche de $\widehat{A \times B}$. Si pour tout objet b de B , $\varphi_b : X_b \longrightarrow Y_b$ est une \mathcal{W} -équivalence dans \widehat{A} , alors le morphisme φ est une \mathcal{W} -équivalence dans $\widehat{A \times B}$.*

DÉMONSTRATION. Si X est un préfaïceau sur $A \times B$, alors $i_{A \times B}X$ est une catégorie fibrée au-dessus de $A \times B$, et donc au-dessus de B (par la projection de $A \times B$ vers B). D'autre part, pour chaque objet b de B , $i_A X_b$ s'identifie canoniquement à la fibre en b du foncteur $i_{A \times B}X \longrightarrow B$. Comme ce dernier est une fibration, il est \mathcal{W} -lisse, et donc la condition sur φ ci-dessus revient à demander que le foncteur $i_{A \times B}\varphi$ soit \mathcal{W} -coasphérique au-dessus de B (grâce à la version duale de la proposition 1.2.7). \square

LEMME 5.2.6. *Si la catégorie B n'est pas vide, un morphisme de \widehat{A} est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{A \times B}$ en est une.*

DÉMONSTRATION. Si X est un préfaïceau sur A , on a une identification canonique

$$i_A X \times B \simeq i_{A \times B} p^* X .$$

Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ une flèche de \widehat{A} . Comme tout localisateur fondamental est stable par produits finis (corollaire 1.1.9) si φ est une \mathcal{W} -équivalence, alors $p^*\varphi$ en est une. Réciproquement, si $p^*\varphi$ est une \mathcal{W} -équivalence, comme tout choix d'un objet de B fait de $i_A\varphi$ un rétracte de $i_{A \times B}\varphi = i_A\varphi \times 1_B$, il résulte de la proposition 5.1.2 que $i_A\varphi$ est une \mathcal{W} -équivalence. \square

LEMME 5.2.7. *Il existe deux \mathcal{W} -équivalences naturelles dans $\widehat{A \times B}$*

$$p^* i^* \longrightarrow j^* \longleftarrow q^* .$$

DÉMONSTRATION. On va procéder en adaptant la preuve de la proposition 3.3.14. On définit un foncteur

$$j : A \times B \longrightarrow \widehat{B}$$

par $j(a, b) = ia \times b$. Cela induit donc un foncteur

$$j^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A \times B} .$$

Si X est un préfaisceau sur B , alors pour $(a, b) \in \mathbf{Ob}(A \times B)$, on a $(j^*X)_{a,b} = \mathbf{Hom}_{\widehat{B}}(ia \times b, X)$. On obtient deux morphismes de foncteurs induits par les flèches $ia \longrightarrow *$ et $b \longrightarrow *$

$$p^*i^* \longrightarrow j^* \longleftarrow q^* .$$

Nous allons vérifier que ce sont des \mathcal{W} -équivalences. Soit X un préfaisceau sur B . Si $a \in \mathbf{Ob} A$, alors en vertu du lemme 3.3.13, le morphisme

$$(q^*X)_a = X \longrightarrow \mathbf{Hom}(ia, X) = (j^*X)_a$$

est une I -équivalence d'homotopie, et si $b \in \mathbf{Ob} B$, comme le foncteur i^* commute aux produits, le même lemme implique que

$$(p^*i^*X)_b = i^*X \longrightarrow i^*\mathbf{Hom}(b, X) = (j^*X)_b$$

est une i^*I -équivalence d'homotopie. Le lemme 5.2.5 achève ainsi la démonstration. \square

PROPOSITION 5.2.8. *Le foncteur $i^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences. Si en outre A est non vide, alors on a l'égalité*

$$(i^*)^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}} = \mathcal{W}_{\widehat{B}} .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte des lemmes 5.2.6 et 5.2.7. \square

5.2.9. Soit A une petite catégorie. On a un foncteur $A \longrightarrow \widehat{\Delta}$ défini par $a \longmapsto \mathbf{N}A/a$, et on note par abus

$$i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$$

le foncteur induit. Il résulte du corollaire A.1.12 que ce dernier est un adjoint à droite du foncteur

$$\mathbf{N}i_A : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{\Delta} .$$

Cet abus d'écriture et la pleine fidélité du foncteur nerf permettent d'écrire pour toute petite catégorie C , $i_A^*C = i_A^*\mathbf{N}C$.

COROLLAIRE 5.2.10. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Pour toute \mathcal{W} -catégorie test locale A , le foncteur $i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences.*

DÉMONSTRATION. Les conditions décrites dans le paragraphe 5.2.4 sont vérifiées en posant $B = \Delta$, $I = \Delta_1$, et $ia = \mathbf{N}A/a$. La proposition 5.2.8 montre donc l'assertion. \square

COROLLAIRE 5.2.11. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Pour toute \mathcal{W} -catégorie test locale A , et pour tout préfaisceau X sur A , le foncteur*

$$X \times i_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A} , \quad K \longmapsto X \times i_A^*K$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences.

DÉMONSTRATION. Le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \widehat{A}/X = \widehat{A}/\widehat{X} \longrightarrow \widehat{A}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences, et pour tout ensemble simplicial K , on a l'égalité $\mathcal{U}i_{A/X}^*K = X \times i_A^*K$, ce qui permet de conclure en vertu du corollaire précédent. \square

PROPOSITION 5.2.12. *Il existe deux ∞ -équivalences naturelles*

$$\mathbf{N}i_{\Delta} \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \text{et} \quad 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow i_{\Delta}^*$$

DÉMONSTRATION. On considère cette fois le plongement de Yoneda de Δ dans $\widehat{\Delta}$, le foncteur $\Delta \rightarrow \widehat{\Delta}$, $\Delta_n \mapsto N\Delta/\Delta_n$, et le foncteur $j : \Delta \times \Delta \rightarrow \widehat{\Delta}$, $(\Delta_m, \Delta_n) \mapsto N\Delta/\Delta_m \times \Delta_n$. On a un morphisme fonctoriel $N\Delta/\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ (A.1.4), ce qui détermine en le prolongeant par limites inductives (grâce au corollaire A.1.12) un morphisme de foncteurs $Ni_\Delta \rightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$, et donc par adjonction un morphisme de foncteurs $1_{\widehat{\Delta}} \rightarrow i_\Delta^*$. En vertu du lemme 5.2.7, si δ_* désigne l'adjoint à droite du foncteur diagonal, il existe un diagramme commutatif dans $\widehat{\Delta} \times \widehat{\Delta}$

$$\begin{array}{ccccc} p^* & \longrightarrow & \delta_* & \longleftarrow & q^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ p^*i_\Delta^* & \longrightarrow & j^* & \longleftarrow & q^* \end{array} ,$$

dont toutes les flèches horizontales sont des ∞ -équivalences. Le lemme 5.2.6 implique donc que le morphisme de foncteurs $1_{\widehat{\Delta}} \rightarrow i_\Delta^*$ est une ∞ -équivalence. Comme les deux foncteurs Ni_Δ et i_Δ^* respectent les ∞ -équivalences, on en déduit par transposition que $Ni_\Delta \rightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ est une ∞ -équivalence. \square

LEMME 5.2.13. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. Pour tout ensemble simplicial K , le foncteur

$$\widehat{A} \rightarrow \widehat{A} \quad , \quad X \mapsto X \times i_A^*K$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences.

DÉMONSTRATION. On commence par considérer le cas où K est le nerf d'une petite catégorie C . Si on demande en outre que C admette un objet final, cela résulte du théorème 1.1.16. Dans le cas général, pour chaque préfaisceau X sur A , la projection de $X \times i_A^*C$ vers i_A^*C et le morphisme d'adjonction $i_A i_A^*C \rightarrow C$ permettent de voir $i_A(X \times i_A^*C)$ comme une catégorie au-dessus de C . Pour chaque objet c de C , on a alors une identification canonique

$$i_A(X \times i_A^*C)/c \simeq i_A(X \times i_A^*C/c) .$$

On en déduit que si φ est une \mathcal{W} -équivalence dans \widehat{A} , alors le foncteur $i_A(\varphi \times 1_{i_A^*C})$ est \mathcal{W} -asphérique au-dessus de C . On peut à présent en venir au cas où K est un ensemble simplicial quelconque. En vertu de la proposition 5.2.12, on a une \mathcal{W} -équivalence $N\Delta/K \rightarrow K$, et il résulte du corollaire 5.2.11 que pour chaque préfaisceau X sur A , le morphisme induit $X \times i_A^*\Delta/K \rightarrow X \times i_A^*K$ est une \mathcal{W} -équivalence. Par conséquent, le foncteur $X \mapsto X \times i_A^*\Delta/K$ respecte les $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalences si et seulement si le foncteur $X \mapsto X \times i_A^*K$ fait de même. \square

THÉORÈME 5.2.14. Pour toute petite catégorie A , le A -localisateur test minimal est propre.

DÉMONSTRATION. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{W} le A -localisateur test minimal. En vertu du théorème 5.1.10, on sait que ce dernier est accessible. Si \mathcal{W}_{reg} désigne le A -localisateur régulier minimal (i.e. la complétion régulière du A -localisateur minimal), alors \mathcal{W} peut être défini comme le A -localisateur engendré par \mathcal{W}_{reg} et par les flèches $a \rightarrow *$, $a \in \text{Ob } A$. Or on sait que \mathcal{W}_{reg} est propre (voir la remarque 2.4.5 et le corollaire 4.4.27). Comme toute fibration

au sens de \mathcal{W} en est une au sens de \mathcal{W}_{reg} , il résulte du théorème 2.4.4 qu'il suffit de montrer que pour tout objet a de A , le morphisme $a \longrightarrow *$ est une \mathcal{W} -équivalence propre à droite, *i.e.* que pour tout objet fibrant X au sens de \mathcal{W} , la projection $X \times a \longrightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence. Soit X un objet fibrant de \widehat{A} au sens de \mathcal{W} . Nous allons montrer une assertion un peu plus forte, à savoir que le foncteur $Y \longmapsto X \times Y$ respecte les \mathcal{W} -équivalences. Le théorème 5.1.10 implique que le localisateur fondamental \mathcal{W}_{cat} est accessible, et comme Δ est une \mathcal{W}_{cat} -catégorie test, que le Δ -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}_{cat}$ est accessible. On peut donc choisir une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -équivalence de but fibrant $Ni_A X \longrightarrow K$. On remarque que le foncteur Ni_A respecte les cofibrations triviales, et donc que par adjonction, le foncteur i_A^* respecte les fibrations. Par conséquent, i_A^*K est un objet fibrant de \widehat{A} au sens de \mathcal{W} . Or en vertu du corollaire 5.2.10, le morphisme $i_A^*A/X \longrightarrow i_A^*K$ est une \mathcal{W} -équivalence, et comme A est une \mathcal{W}_{cat} -catégorie test, le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow i_A^*A/X$ est une \mathcal{W} -équivalence. Le morphisme composé $X \longrightarrow i_A^*K$ est donc une \mathcal{W} -équivalence entre objets fibrants, ce qui implique qu'il est une $i_A^*\Delta_1$ -équivalence d'homotopie. On en déduit que pour tout préfaisceau Y sur A , le morphisme $Y \times X \longrightarrow Y \times i_A^*K$ est aussi une $i_A^*\Delta_1$ -équivalence d'homotopie, et donc une \mathcal{W} -équivalence. Le lemme 5.2.13 permet ainsi d'achever la démonstration. \square

COROLLAIRE 5.2.15. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible et A une \mathcal{W} -catégorie test. Alors pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme d'adjonction $\eta_X : X \longrightarrow i_A^*A/X$ est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence propre à droite.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W}' le A -localisateur test minimal. Comme $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, toute fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ en est une au sens de \mathcal{W}' , et donc toute \mathcal{W}' -équivalence propre à droite est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence propre à droite. Or η_X est une \mathcal{W}' -équivalence puisque A est une \mathcal{W}'_{cat} -catégorie test, et il résulte du théorème ci-dessus que toutes les \mathcal{W}' -équivalences sont propres à droite. \square

DÉFINITION 5.2.16. Un localisateur fondamental \mathcal{W} est *propre* si pour toute \mathcal{W} -catégorie test A , le A -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est propre.

EXEMPLE 5.2.17. En vertu des théorèmes 5.1.10 et 5.2.14, le localisateur fondamental minimal est propre.

THÉORÈME 5.2.18. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) \mathcal{W} est propre.
- (ii) Il existe une \mathcal{W} -catégorie test A telle que le A -localisateur induit $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit propre.
- (iii) Le Δ -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe une \mathcal{W} -catégorie test A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A -localisateur propre. Les foncteurs Ni_A et i_A^* respectent les \mathcal{W} -équivalences (voir la proposition 5.2.8 pour le second), et les morphismes d'adjonction

$$Ni_A i_A^* \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \text{et} \quad 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* Ni_A = i_A^* i_A$$

sont des \mathcal{W} -équivalences naturelles (car les deux foncteurs incriminés respectent les équivalences faibles et induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre après localisation, ce qui permet de conclure par forte saturation). On en déduit que $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = i_A^*{}^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Comme en vertu du théorème 5.1.10 $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ et $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ sont accessibles, nous avons à disposition nos structures de catégorie de modèles favorites. Or le foncteur Ni_A respecte les cofibrations triviales, et par conséquent, le foncteur i_A^* respecte les fibrations. Ce dernier commute en outre aux petites limites projectives (car il admet un adjoint à gauche), et donc en particulier aux produits fibrés. On en déduit aussitôt que le Δ -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre.

On suppose à présent que le Δ -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre, et on considère une \mathcal{W} -catégorie test A . On va montrer que le A -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre. On sait déjà que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est accessible (théorème 5.1.10).

5.2.18.1. Soient X un ensemble simplicial, Y un préfaisceau sur A , et $p : X \rightarrow Ni_A Y$ une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$. On se donne une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence $u : Y' \rightarrow Y$, puis on forme les carrés cartésiens suivants dans \widehat{A} .

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^* X \\ q' \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow i_A^* p \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_A^* i_A Y \end{array}$$

Alors le morphisme v est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence.

On forme le carré cartésien ci-dessous dans $\widehat{\Delta}$.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{w} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Ni_A Y' & \xrightarrow{Ni_A u} & Ni_A Y \end{array}$$

Comme c'est le cas pour p , p' est une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, et comme $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ est propre, w est une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -équivalence. On obtient le cube commutatif suivant, dont les faces latérales sont des carrés cartésiens (en fait, il résulte de la proposition A.1.16 que toutes ses faces sont cartésiennes).

$$\begin{array}{ccccc} & & i_A^* X' & \xrightarrow{i_A^* w} & i_A^* X \\ & \nearrow \theta' & \downarrow v & & \downarrow \theta \\ Z' & \xrightarrow{\quad} & Z & \xrightarrow{\quad} & i_A^* X \\ & \downarrow q' & \downarrow i_A^* p' & & \downarrow i_A^* p \\ & & i_A^* i_A Y' & \xrightarrow{i_A^* i_A u} & i_A^* i_A Y \\ & \downarrow q & \downarrow q & & \downarrow q \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_A^* i_A Y \\ & \nearrow \eta_{Y'} & & & \nearrow \eta_Y \end{array}$$

Comme le foncteur i_A^* respecte les fibrations, les morphismes $i_A^* p$ et $i_A^* p'$ sont des fibrations au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$. Il résulte donc du corollaire 5.2.15 que les flèches θ et

θ' sont des $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalences. D'autre part, le corollaire 5.2.10 implique que i_A^*w est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence, ce qui prouve l'assertion.

5.2.18.2. *Toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} admet une factorisation de la forme $f = qj$, où $j : X \longrightarrow Z$ est une cofibration triviale au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, telle qu'il existe une fibration $p : K \longrightarrow \mathbf{N}i_A Y$ au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$, et un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^* K \\ q \downarrow & & \downarrow i_A^* p \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_A^* i_A Y \end{array} .$$

On factorise $\mathbf{N}i_A f$ en une cofibration triviale $i : \mathbf{N}i_A X \longrightarrow K$ suivie d'une fibration $p : K \longrightarrow \mathbf{N}i_A Y$. On forme alors le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^* K \\ q \downarrow & & \downarrow i_A^* p \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_A^* i_A Y \end{array}$$

En vertu de la proposition A.1.16, on obtient le diagramme commutatif ci-dessous, dont tous les carrés sont cartésiens, et dont toutes les flèches horizontales sont des cofibrations (*i.e.* des monomorphismes).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_A^* i_A X \\ \downarrow j & & \downarrow i_A^* i \\ Z & \xrightarrow{\theta} & i_A^* K \\ \downarrow q & & \downarrow i_A^* p \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_A^* i_A Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} i_A^* i_A f \\ i_A^* i_A f \\ i_A^* i_A f \end{array}$$

Comme le foncteur i_A^* respecte les monomorphismes, on s'aperçoit aussitôt que j est une cofibration. Le corollaire 5.2.15 implique que les morphismes η_X , η_Y et θ sont des $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalences. Comme le foncteur i_A^* respecte les \mathcal{W} -équivalences, on en déduit que j est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -équivalence.

5.2.18.3. *Le A -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre.*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration au sens de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. On considère une factorisation de f de la forme décrite en 5.2.18.2, dont on reprend les notations. Comme f vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à j , il existe un morphisme $r : Z \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_X & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

Considérons à présent une $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ -équivalence $v : Y' \longrightarrow Y$. On forme les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{w} & Z \\ q' \downarrow & & \downarrow q \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

On s'aperçoit immédiatement que par functorialité, u est un rétracte de w , et il résulte de 5.2.18.1 que w est une $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ -équivalence. Par conséquent, u est une $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ -équivalence. \square

COROLLAIRE 5.2.19. *Soit $\mathcal{W}_i, i \in I$ une petite famille de localisateurs fondamentaux propres. Alors le localisateur fondamental engendré par $\cup_i \mathcal{W}_i$ est propre.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} le localisateur fondamental en question. On choisit une petite catégorie A telle que pour tout $i \in I$, A soit une \mathcal{W}_i -catégorie test (il suffit pour cela de prendre une \mathcal{W}_{∞} -catégorie test). Alors en vertu du théorème 5.1.10, $i_A^{-1}\mathcal{W}$ est le A -localisateur engendré par $\cup_i i_A^{-1}\mathcal{W}_i$. Le théorème ci-dessus et le corollaire 2.4.6 permettent ainsi de conclure. \square

COROLLAIRE 5.2.20. *Soit $C_i, i \in I$ une petite famille de petites catégories. Alors le plus petit localisateur fondamental qui rend les catégories C_i asphériques est propre.*

DÉMONSTRATION. On choisit une \mathcal{W}_{∞} -catégorie test A . Soit \mathcal{W} le localisateur fondamental engendré par les foncteurs $C_i \longrightarrow *$. Comme pour tout $i \in I$, la catégorie C_i est \mathcal{W} -asphérique, le préfaisceau $i_A^*C_i$ est localement \mathcal{W} -asphérique. Par conséquent, pour tout préfaisceau X sur A , la projection $X \times i_A^*C_i \longrightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence (lemme 5.2.1). On en déduit que $\mathcal{W}_{\hat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est le A -localisateur engendré par celles-ci et par le A -localisateur test minimal (cf. 5.1.10). Comme ce dernier est propre, il résulte des corollaires 2.4.6 et 2.4.7 que $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ est propre. Le théorème 5.2.18 achève donc la démonstration. \square

Le corollaire ci-dessus caractérise (modulo des questions ensemblistes) les localisateurs fondamentaux propres, comme le montre l'énoncé suivant.

THÉORÈME 5.2.21. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe une famille \mathcal{F} de petites catégories telle que \mathcal{W} soit le plus petit localisateur fondamental faisant des éléments de \mathcal{F} des catégories asphériques.*
- (i') *Il existe une famille \mathcal{M} de morphismes de \mathbf{Cat} telle que \mathcal{W} soit le plus petit localisateur fondamental faisant des éléments de \mathcal{M} des foncteurs asphériques.*
- (i'') *Il existe une famille \mathcal{T} de petites catégories telle que \mathcal{W} soit le plus petit localisateur fondamental modelable par les éléments de \mathcal{T} .*
- (ii) *Le localisateur fondamental \mathcal{W} est propre.*

DÉMONSTRATION. Les équivalences entre les énoncés (i), (i') et (i'') sont laissées au lecteur (celles-ci ne seront pas utilisées dans la suite). Nous allons montrer l'équivalence entre (i) et (ii). Le fait que (i) implique (ii) résulte du corollaire 2.4.7 (en procédant comme dans la démonstration de 5.2.20). Il suffit donc de montrer la réciproque. Supposons que \mathcal{W} est propre. En vertu du théorème 5.2.18, le Δ -localisateur correspondant est propre, et le théorème 5.1.10 montre qu'il suffit d'exhiber une famille d'ensembles simpliciaux telle que $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ soit le plus petit Δ -localisateur test faisant des éléments de celle-ci des objets asphériques. On rappelle qu'on a nécessairement l'inclusion $\mathcal{W}_{\infty} \subset \mathcal{W}$. On note \mathcal{W}_a le plus petit Δ -localisateur tel que pour tout ensemble simplicial \mathcal{W} -asphérique X , le morphisme de X vers l'objet final de $\widehat{\Delta}$ soit une équivalence faible.

5.2.21.1. Soit $p : Y \longrightarrow Y'$ une fibration de Kan dont le but est fibrant au sens de \mathcal{W} . Alors pour tout n -simplexe y de Y , $n \geq 0$, si le carré

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta_n & \xrightarrow{y} & Y' \end{array}$$

est cartésien, il est homotopiquement cartésien au sens de \mathcal{W} .

Comme \mathcal{W}_{∞} est propre, et comme p est une fibration de Kan, ce carré est homotopiquement cartésien au sens de \mathcal{W}_{∞} . Le morphisme y admet une factorisation de la forme $y = qj$,

$$\Delta_n \xrightarrow{j} E \xrightarrow{q} Y',$$

où j est une \mathcal{W} -cofibration triviale, et où q est une \mathcal{W} -fibration. L'ensemble simplicial E est à la fois \mathcal{W} -fibrant et \mathcal{W} -asphérique, ce qui implique qu'il est injectif, et donc Δ_1 -contractile. D'autre part, en vertu de la proposition 2.4.19, le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} E \times_{Y'} Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{q} & Y' \end{array}$$

est homotopiquement cartésien au sens de \mathcal{W}_{∞} (resp. de \mathcal{W}), puisque \mathcal{W}_{∞} (resp. \mathcal{W}) est propre, et p (resp. q) est une fibration au sens de \mathcal{W}_{∞} (resp. de \mathcal{W}). La flèche canonique induite par j , de F vers $E \times_{Y'} Y$, est donc une \mathcal{W}_{∞} -équivalence. Les deux carrés sont ainsi équivalents au sens de \mathcal{W}_{∞} , et par suite, au sens de \mathcal{W} , ce qui prouve l'assertion.

5.2.21.2. Soit $p : Y \longrightarrow Y'$ une fibration de Kan dont le but est fibrant au sens de \mathcal{W} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Le morphisme p est une \mathcal{W} -équivalence.
- (b) Pour tout $n \geq 0$, et tout morphisme $u : \Delta_n \longrightarrow Y'$, le produit fibré de Y et Δ_n au-dessus de Y' , $\Delta_n \times_{Y'} Y$, est \mathcal{W} -asphérique.
- (c) Le morphisme p est une \mathcal{W} -équivalence universelle, i.e. reste une \mathcal{W} -équivalence après tout changement de base.

Supposons l'assertion (a) vérifiée. Alors pour tout morphisme de Δ_n vers Y' , le produit fibré $\Delta_n \times_{Y'} Y$ est \mathcal{W} -asphérique en vertu de 5.2.21.1, ce qui implique (b). On remarque qu'un morphisme p vérifie la condition (b) si et seulement si le foncteur induit $i_{\Delta} p$ est \mathcal{W} -asphérique. Cela prouve qu'un tel morphisme est une \mathcal{W} -équivalence. Comme une telle propriété est stable par changement de base, cela montre que (b) implique (c). L'implication de (c) vers (a) est triviale.

5.2.21.3. *Le Δ -localisateur \mathcal{W}_a est un Δ -localisateur test contenu dans $i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$. En particulier, toute ∞ -équivalence est dans \mathcal{W}_a .*

L'inclusion $\mathcal{W}_a \subset i_{\Delta}^{-1}\mathcal{W}$ est immédiate. Vu que \mathcal{W}_a contient toutes les flèches du type $\Delta_n \rightarrow \Delta_0$, $n \geq 0$, l'assertion résulte du théorème 5.1.10 et de la remarque 5.1.13.

5.2.21.4. *Toute \mathcal{W} -équivalence universelle est dans \mathcal{W}_a .*

Si φ est une \mathcal{W} -équivalence universelle, alors le foncteur $i_{\Delta}\varphi$ est asphérique dans le localisateur fondamental défini par \mathcal{W}_a . Comme ce dernier est test (en vertu de 5.2.21.3), cela implique que φ est dans \mathcal{W}_a .

5.2.21.5. *Toute \mathcal{W} -équivalence de but fibrant au sens de \mathcal{W} est dans \mathcal{W}_a .*

Soit f une \mathcal{W} -équivalence de but \mathcal{W} -fibrant. Elle admet une factorisation de la forme $f = pi$, où i est une ∞ -équivalence, et où p est une fibration de Kan. Les morphismes i et f étant dans \mathcal{W} , il en est de même de p . L'assertion résulte donc de 5.2.21.2 et 5.2.21.4.

5.2.21.6. *Toute \mathcal{W} -équivalence est dans \mathcal{W}_a .*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une \mathcal{W} -équivalence. On choisit une \mathcal{W} -équivalence de but \mathcal{W} -fibrant $j : Y \rightarrow Y'$. Alors en vertu de 5.2.21.5, j et jf sont dans \mathcal{W}_a , ce qui implique l'assertion, et achève la démonstration du théorème. \square

3. Types d'homotopie relatifs

5.3.1. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. Les foncteurs $N i_A$ et i_A^* respectent les \mathcal{W} -équivalences, (grâce au corollaire 5.2.10 pour le second), et par conséquent induisent pour chaque petite catégorie X , une paire de foncteurs adjoints

$$N i_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(X) \quad \text{et} \quad i_A^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(X) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X) .$$

PROPOSITION 5.3.2. *Les foncteurs $N i_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(X)$ sont conservatifs.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.5, du lemme 4.1.28, de l'égalité $N^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = \mathcal{W}$, et de la définition des \mathcal{W} -équivalences dans \widehat{A} . \square

PROPOSITION 5.3.3. *Pour tout foncteur entre petites catégories $u : X \rightarrow Y$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(Y)$*

$$Lu_! N i_A \simeq N i_A Lu_! .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte du fait que $\mathbf{L}u_! \mathbf{N}i_A$ et $\mathbf{N}i_A \mathbf{L}u_!$ sont des adjoints à gauche du foncteur $u^* i_A^* = i_A^* u^*$. \square

LEMME 5.3.4. *On considère un préfaisceau X sur A , et on définit un foncteur $\rho_X : A \longrightarrow \widehat{A}$ par $\rho_X a = a \times X$. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$*

$$\mathbf{L} \varinjlim \rho_X \xrightarrow{\sim} X .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte des propositions 5.1.4 et 4.4.30. \square

PROPOSITION 5.3.5. *Pour tout foncteur entre petites catégories $u : X \longrightarrow Y$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(Y)$*

$$\mathbf{L}u_! i_A^* \simeq i_A^* \mathbf{L}u_! .$$

DÉMONSTRATION. L'assertion est démontrée dans le cas où A est \mathcal{W} -asphérique (*i.e.* est une \mathcal{W} -catégorie test), puisque les foncteurs $\mathbf{N}i_A$ et i_A^* sont alors des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. On rappelle que h_A désigne le plongement de Yoneda de A dans \widehat{A} . On définit un foncteur

$$\Psi : \widehat{\Delta} \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A, \widehat{A})$$

par $\Psi K = h_A \times i_A^* K$, *i.e.* $(\Psi K)_a = a \times i_A^* K$, $a \in \mathbf{Ob} A$. Pour chaque objet a de A , on note $\mathcal{U}_a : \widehat{A/a} = \widehat{A}/a \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'oubli, et on constate que $\mathcal{U}_a i_{A/a}^* = a \times i_A^*$. Les foncteurs \mathcal{U}_a respectent les \mathcal{W} -équivalences (on a même les égalités $\mathcal{U}_a^{-1} \mathcal{W}_{\widehat{A}} = \mathcal{W}_{A/a}$), et donc pour chaque petite catégorie X , ils induisent des foncteurs

$$\mathcal{U}_a : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A/a}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(X) .$$

Il résulte du corollaire 5.2.11 que le foncteur Ψ respecte les \mathcal{W} -équivalences, et donc que pour toute petite catégorie X , il induit un foncteur

$$\Psi : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(A \times X) .$$

Pour chaque foncteur $u : X \longrightarrow Y$ entre petites catégories, on a des isomorphismes canoniques $\mathbf{L}u_! \mathcal{U}_a \simeq \mathcal{U}_a \mathbf{L}u_!$ et $\mathbf{L}u_! i_{A/a}^* \simeq i_{A/a}^* \mathbf{L}u_!$, le premier étant justifié par la proposition 4.1.27, et le second par le fait que A/a est \mathcal{W} -asphérique. Pour tout objet a de A , en vertu de la proposition 4.1.27 (appliquée deux fois aux foncteurs d'évaluation en a), on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} a^* \mathbf{L}u_! \Psi &\simeq \mathbf{L}u_! a^* \Psi \\ &\simeq \mathbf{L}u_! i_{A/a}^* \\ &\simeq i_{A/a}^* \mathbf{L}u_! \\ &\simeq a^* \Psi \mathbf{L}u_! \end{aligned}$$

Il résulte donc de la proposition 4.1.29 qu'on a un isomorphisme canonique $\mathbf{L}u_! \Psi \simeq \Psi \mathbf{L}u_!$. Le lemme qui précède donne un isomorphisme $\mathbf{L} \varinjlim_A \Psi \simeq i_A^*$, et on vérifie que $\mathbf{L} \varinjlim_A \mathbf{L}u_! \simeq \mathbf{L}u_! \mathbf{L} \varinjlim_A$, ce qui permet de conclure. \square

REMARQUE 5.3.6. Dans la proposition ci-dessus, on peut en fait remplacer i_A^* par i^* pour tout \mathcal{W} -foncteur test local $i : A \longrightarrow \mathcal{C}at$.

5.3.7. La résolution cosimpliciale de Lawvere $i_A^* \Delta$ se prolonge de manière unique à isomorphisme près en un foncteur commutant aux petites limites inductives $|\cdot|_{i_A^* \Delta} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A}$. On a un morphisme de foncteurs canonique $|\cdot|_{i_A^* \Delta} \longrightarrow i_A^*$ qui est l'identité sur les simplexes de type Δ_n , $n \geq 0$, défini grâce au fait que pour tout ensemble simplicial K , on a un isomorphisme canonique $\varinjlim i_A^* \phi_K \simeq |K|_{i_A^* \Delta}$ (ϕ_K désignant le foncteur de Δ/K vers $\widehat{\Delta}$ qui associe à chaque morphisme $\Delta_n \longrightarrow K$ le simplexe Δ_n). On remarque que pour tout ensemble simplicial K , $|K|_{i_A^* \Delta} = \text{Real}_{i_A^* \Delta} K$, ce qui implique que le foncteur $|\cdot|_{i_A^* \Delta}$ envoie les ∞ -équivalences sur des \mathcal{W} -équivalences (d'après 3.3.20, 5.1.4 et 4.4.25).

COROLLAIRE 5.3.8. *Le morphisme de foncteurs $|\cdot|_{i_A^* \Delta} \longrightarrow i_A^*$ est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. On veut prouver que pour tout ensemble simplicial K , le morphisme $|K|_{i_A^* \Delta} \longrightarrow i_A^* K$ est une \mathcal{W} -équivalence, ou encore, de manière équivalente (grâce à la forte saturation des A -localisateurs), que c'est un isomorphisme dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}$. Comme les ∞ -équivalences forment un Δ -localisateur régulier, les propositions 4.1.27 et 5.3.5 impliquent qu'il suffit de le vérifier lorsque K est de la forme Δ_n . Or dans ce cas, c'est une égalité. \square

5.3.9. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une catégorie test locale. On considère la résolution cosimpliciale de Lawvere $i_A^* \Delta$, ce qui définit un foncteur de réalisation

$$\text{Real}_{i_A^* \Delta} : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \widehat{A} .$$

On obtient de la sorte deux foncteurs, $i_{A \times \Delta}$ et $i_A \text{Real}_{i_A^* \Delta}$ de $\widehat{A \times \Delta}$ vers Cat .

PROPOSITION 5.3.10. *Il existe un foncteur*

$$\Omega : \widehat{A \times \Delta} \longrightarrow \text{Cat}$$

et deux \mathcal{W} -équivalences naturelles

$$i_{A \times \Delta} \longleftarrow \Omega \longrightarrow i_A \text{Real}_{i_A^* \Delta} .$$

DÉMONSTRATION. On déduit facilement du lemme 5.2.5 que la complétion simpliciale de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est contenue dans $\mathcal{W}_{A \times \Delta}$. Les objets cosimpliciaux de $\widehat{A \times \Delta}$, $i_A^* \Delta$, $i_A^* \Delta \times \Delta$ et Δ , induisent donc en vertu du lemme 3.3.19 des \mathcal{W} -équivalences naturelles

$$\widetilde{i_A^* \Delta} \longleftarrow \widetilde{i_A^* \Delta \times \Delta} \longrightarrow \widetilde{\Delta} \simeq 1_{\widehat{A \times \Delta}} .$$

On pose $\Omega = i_{A \times \Delta} \widetilde{i_A^* \Delta \times \Delta}$. On a donc deux \mathcal{W} -équivalences naturelles

$$i_{A \times \Delta}^* \widetilde{i_A^* \Delta} \longleftarrow \Omega \longrightarrow i_{A \times \Delta}^* .$$

On remarque que $i_{A \times \Delta} \widetilde{i_A^* \Delta} = i_A \text{Real}_{i_A^* \Delta} \times \Delta$. Comme la catégorie Δ est \mathcal{W} -sphérique, la projection évidente induit une \mathcal{W} -équivalence naturelle

$$i_{A \times \Delta} \widetilde{i_A^* \Delta} = i_A \text{Real}_{i_A^* \Delta} \times \Delta \longrightarrow i_A \text{Real}_{i_A^* \Delta} ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 5.3.11. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une catégorie test locale. Le $A \times \Delta$ -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A \times \Delta}}$ est la complétion simpliciale du A -localisateur $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Si p désigne la projection de $A \times \Delta$ vers A , alors le foncteur image inverse p^* de \widehat{A} vers $\widehat{A \times \Delta}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences et induit une équivalence de catégories*

$$p^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta} .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement des propositions 3.3.20 et 5.3.10. \square

5.3.12. Soit A une petite catégorie. On a le foncteur catégorie fibrée associée

$$\mathcal{Z} : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at/A \quad , \quad F \longmapsto (\nabla F, \zeta_F) \quad .$$

Si (C, γ) est un objet de $\mathcal{C}at/A$, i.e. un foncteur $\gamma : C \longrightarrow A$, on lui associe un préfaisceau $\Xi(C, \gamma)$ sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$ par $\Xi(C, \gamma)_a = a \setminus C$, $a \in \mathbf{Ob} A$. On obtient de la sorte un foncteur

$$\Xi : \mathcal{C}at/A \longrightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \quad .$$

Si \mathcal{W} est un localisateur fondamental, on rappelle qu'une \mathcal{W} -équivalence de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ est un morphisme φ tel que pour tout objet a de A , φ_a soit une \mathcal{W} -équivalence. On dira qu'un morphisme $u : (C, \gamma) \longrightarrow (D, \delta)$ de $\mathcal{C}at/A$ est une \mathcal{W} -équivalence si Ξu en est une (ce qui revient à dire que u est \mathcal{W} -coasphérique au-dessus de A).

LEMME 5.3.13. *Le foncteur \mathcal{Z} est un adjoint à droite du foncteur Ξ . En outre, les morphismes d'adjonction*

$$\varepsilon : \Xi \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)} \quad \text{et} \quad \eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}at/A} \longrightarrow \mathcal{Z} \Xi$$

sont des \mathcal{W} -équivalences naturelles.

DÉMONSTRATION. Si F est un préfaisceau sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$, pour chaque objet a de A ,

$$(\Xi \mathcal{Z} F)_a = a \setminus \nabla F \simeq \nabla F|_{a \setminus A} ,$$

et donc, en reprenant la construction de la preuve du théorème 1.2.19 (dans le cas où X est la catégorie ponctuelle, ce qui simplifie un tant soit peu les choses), on obtient une \mathcal{W} -équivalence naturelle $\varepsilon : \Xi \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbf{1}_{\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)}$. On définit un morphisme de foncteurs $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}at/A} \longrightarrow \mathcal{Z} \Xi$ de la manière suivante. Si (C, γ) est une catégorie au-dessus de A , pour chaque objet a de A , on a un foncteur $\eta_C : C \longrightarrow \nabla \Xi(C, \gamma)$, défini par $\eta_C(c) = (c, \mathbf{1}_{\gamma(c)})$ sur les objets, et $\eta_C(f) = (\gamma(f), f)$ sur les flèches. On vérifie immédiatement que cette construction est fonctorielle au-dessus de A . Nous laissons le lecteur se persuader que ε et η font de (Ξ, \mathcal{Z}) un couple de foncteurs adjoints. Comme on sait déjà que ε est une \mathcal{W} -équivalence naturelle, il résulte formellement de la définition même des \mathcal{W} -équivalences dans $\mathcal{C}at/A$ que η est une \mathcal{W} -équivalence naturelle. \square

5.3.14. On définit \mathcal{W}/A comme la partie des flèches de $\mathcal{C}at/A$ dont l'image par le foncteur d'oubli $\mathcal{C}at/A \longrightarrow \mathcal{C}at$ est une \mathcal{W} -équivalence. Il résulte de la version duale de la proposition 1.2.7 que toutes les \mathcal{W} -équivalences de $\mathcal{C}at/A$ sont des \mathcal{W}/A -équivalences. On note $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//A$ la localisation de $\mathcal{C}at/A$ par \mathcal{W}/A . Cette

catégorie sera appelée la *catégorie des A -types d'homotopie* (relativement à \mathcal{W}). On dira qu'une flèche de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ est une \mathcal{W}/A -équivalence si son image par le foncteur \mathcal{Z} en est une. Le lemme 5.3.13 implique aussitôt que le foncteur Ξ respecte les \mathcal{W}/A -équivalences, et que les foncteurs induits par \mathcal{Z} et Ξ au niveau des catégories localisées sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. D'autre part, le foncteur de localisation de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ vers $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//A$ se factorise par la catégorie $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}$, localisée de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ par les \mathcal{W} -équivalences. On obtient donc en particulier l'énoncé qui suit.

PROPOSITION 5.3.15. *La localisation de la catégorie $\mathbf{Hot}_{A, \mathcal{W}}$ par \mathcal{W}/A est canoniquement équivalente à la catégorie des A -types d'homotopie relativement à \mathcal{W} .*

5.3.16. On fixe un localisateur fondamental \mathcal{W} . Soit A une petite catégorie. Le foncteur nerf induit un foncteur

$$N : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$$

et en composant avec le foncteur $i_{A \times \Delta}$, on obtient un foncteur

$$i_{A \times \Delta} N : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at .$$

Ce foncteur est comparable au foncteur

$$\nabla_A : \underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{C}at$$

de la manière suivante.

LEMME 5.3.17. *Il existe une \mathcal{W} -équivalence naturelle $i_{A \times \Delta} N \longrightarrow \nabla_A$.*

DÉMONSTRATION. Soit F un préfaisceau sur A à valeurs dans $\mathcal{C}at$. On a une \mathcal{W} -équivalence $i_\Delta N F \longrightarrow F$, d'où une \mathcal{W} -équivalence $\nabla_A i_\Delta N F \longrightarrow \nabla_A F$. Or un calcul explicite montre que $\nabla_A i_\Delta N F = i_{A \times \Delta} N F$. \square

PROPOSITION 5.3.18. *Le foncteur nerf induit une équivalence de catégorie de la localisation de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ par les \mathcal{W}/A -équivalences vers la catégorie $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta}$.*

DÉMONSTRATION. On sait que le foncteur nerf induit une équivalence de catégories de $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(A^\circ)$ vers $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta}(A^\circ)$, et il résulte du lemme ci-dessus qu'un morphisme de $\underline{\mathbf{Hom}}(A^\circ, \mathcal{C}at)$ est une \mathcal{W}/A -équivalence si et seulement si son nerf est une \mathcal{W} -équivalence dans $\widehat{A \times \Delta}$, ce qui implique l'assertion. \square

COROLLAIRE 5.3.19. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. Alors le foncteur $j_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at/A$ (cf. A.1.1) envoie les \mathcal{W} -équivalences sur des \mathcal{W}/A -équivalences, et le foncteur induit*

$$j_A : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \longrightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//A$$

est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. La première assertion est évidente. Il reste donc à montrer qu'on obtient de cette manière une équivalence de catégories. Soit p la projection

de $A \times \Delta$ vers A . On sait par le corollaire 5.3.11 que le foncteur image inverse p^* définit une équivalence de catégories

$$p^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A \times \Delta} .$$

D'autre part, on vérifie que pour tout préfaisceau X sur A , $j_A X$ est la catégorie fibrée sur A associée au préfaisceau en catégories discrètes $\text{dis } X$, et que $p^* X = N \text{dis } X$. Il résulte donc de la proposition précédente qu'on obtient une équivalence de catégories

$$\text{dis} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{W}/A)^{-1} \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \text{Cat}) .$$

On en arrive au diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A} & \xrightarrow{j_A} & \text{Hot}_{\mathcal{W}} // A \\ & \searrow \text{dis} & \nearrow \mathcal{Z} \\ & (\mathcal{W}/A)^{-1} \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \text{Cat}) & \end{array}$$

Or le foncteur \mathcal{Z} est une équivalence de catégories (cf. de 5.3.13 à 5.3.15), ce qui implique que j_A en est une aussi. \square

PROPOSITION 5.3.20. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, A une \mathcal{W} -catégorie test, et C une petite catégorie. Le foncteur i_A^* induit un foncteur*

$$i_A^*/C : \text{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/i_A^* C$$

qui envoie les \mathcal{W}/C -équivalences sur des \mathcal{W} -équivalences. En outre, ce dernier définit une équivalence de catégories entre la localisation de $\widehat{A}/i_A^ C$ par les \mathcal{W} -équivalences et la catégorie des C -types d'homotopie relativement à \mathcal{W} .*

DÉMONSTRATION. Le morphisme d'adjonction $\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\text{Cat}}$ est une \mathcal{W} -équivalence, et on a un foncteur

$$k_C : \widehat{A}/i_A^* C \longrightarrow \text{Cat}/C \quad , \quad (X, \xi) \longmapsto (A/X, \varepsilon_C i_A \xi) .$$

Le morphisme ε induit une \mathcal{W} -équivalence naturelle ε/C de $k_C i_A^*/C$ vers $1_{\text{Cat}/C}$. D'autre part, k_C est un adjoint à gauche de i_A^*/C , et ε/C est l'un des morphismes d'adjonction. Il est enfin immédiat que $k_C^{-1}(\mathcal{W}/C) = i_A^{-1}/i_A^* C \mathcal{W}$, ce qui implique que le morphisme d'adjonction de $1_{\widehat{A}/i_A^* C}$ vers i_A^*/C est une \mathcal{W} -équivalence naturelle, et achève la démonstration. \square

5.3.21. Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. On considère un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A . On s'aperçoit aussitôt que le foncteur d'oubli par u

$$u_! : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}/Y$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences, et induit par conséquent un foncteur

$$u_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}/X \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}/Y .$$

PROPOSITION 5.3.22. *Si \mathcal{W} est accessible, un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de \widehat{A} est une \mathcal{W} -équivalence propre à droite si et seulement si le foncteur d'oubli par u*

$$u_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y$$

est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. En regard du corollaire 5.1.11 qui donne un sens à l'énoncé, c'est une spécialisation de la proposition 2.4.21. \square

COROLLAIRE 5.3.23. *Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A . On suppose qu'il existe un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, tel que A soit une \mathcal{W}' -catégorie test locale, et tel que u soit une \mathcal{W}' -équivalence propre à droite. Alors le foncteur $u_! : \widehat{A}/X \longrightarrow \widehat{A}/Y$ induit une équivalence de catégories après localisation par les \mathcal{W} -équivalences.*

DÉMONSTRATION. Lorsque $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$, cela résulte de la proposition précédente. On remarque que pour toute petite catégorie C , on a une équivalence de catégories canonique

$$\mathcal{W}_{\widehat{C}}^{-1}\widehat{C} \simeq \mathcal{W}_{\widehat{C}}^{-1}\mathcal{W}'^{-1}\widehat{C}.$$

Le cas particulier implique donc le cas général. \square

LEMME 5.3.24. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de Cat . On suppose qu'il existe un localisateur fondamental propre $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ tel que u soit une \mathcal{W}' -équivalence. Alors le foncteur d'oubli par u , de Cat/X vers Cat/Y respecte les \mathcal{W} -équivalences, et induit une équivalence de catégories*

$$u_! : \text{Hot}_{\mathcal{W}}//X \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//Y.$$

DÉMONSTRATION. La première assertion est évidente et ne dépend d'ailleurs pas des hypothèses faites sur u . Pour montrer la seconde, on choisit une \mathcal{W}' -catégorie test A , et on remarque qu'on a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//X & \xrightarrow{u_!} & \text{Hot}_{\mathcal{W}}//Y \\ i_A^*/X \downarrow & & \downarrow i_A^*/Y \\ \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/i_A^*X & \xrightarrow{i_A^*(u)_!} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/i_A^*Y \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (en vertu de la proposition 5.3.20). Il résulte du théorème 5.2.18 que $i_A^*(u)$ est une \mathcal{W}' -équivalence propre à droite, et donc le corollaire précédent implique que le foncteur $i_A^*(u)_!$ est une équivalence de catégories. \square

PROPOSITION 5.3.25. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et $p : X \longrightarrow Y$ un foncteur \mathcal{W} -asphérique. Alors le foncteur d'oubli par p induit une équivalence de catégories*

$$p_! : \text{Hot}_{\mathcal{W}}//X \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//Y.$$

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W}' le localisateur fondamental minimal parmi ceux qui rendent asphériques les catégories X/y , $y \in \mathbf{Ob} Y$. Comme p est \mathcal{W} -asphérique, on a l'inclusion $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, et par conséquent, l'assertion résulte du corollaire 5.2.20 et du lemme ci-dessus. \square

COROLLAIRE 5.3.26. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur \mathcal{W} -asphérique entre deux \mathcal{W} -catégories test locales. Alors le foncteur image inverse*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences et induit une équivalence de catégories

$$u^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}.$$

Si en outre \mathcal{W} est accessible, le foncteur u^ est l'adjoint à gauche d'une équivalence de Quillen.*

DÉMONSTRATION. On a en vertu du lemme 5.1.17 une \mathcal{W} -équivalence naturelle de $i_A u^*$ vers i_B , laquelle peut s'interpréter en un morphisme de $u_! j_A u^*$ vers j_B dans \mathbf{Cat}/B ($u_!$ désignant le foncteur d'oubli par u , de \mathbf{Cat}/A vers \mathbf{Cat}/B). Cela implique en particulier que le foncteur u^* respecte les \mathcal{W} -équivalences, et donc en passant aux catégories homotopiques, on obtient ainsi un carré commutatif à isomorphisme de foncteurs près,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A} \\ j_B \downarrow & & \downarrow j_A \\ \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//B & \xleftarrow{u_!} & \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//A \end{array},$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (5.3.19). Vu que le foncteur $u_!$ est une équivalence de catégories (en vertu de la proposition ci-dessus), cela prouve la première partie du corollaire. La seconde en résulte aussitôt, puisque le foncteur u^* admet un adjoint à droite et respecte les monomorphismes. \square

PROPOSITION 5.3.27. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental, A une \mathcal{W} -catégorie test, $i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un \mathcal{W} -foncteur test, et C une petite catégorie. Le foncteur i^* induit un foncteur $i^*/C : \mathbf{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/i^*C$ (cf. A.1.8) qui envoie les \mathcal{W}/C -équivalences sur des \mathcal{W} -équivalences. En outre, ce dernier définit une équivalence de catégories entre la localisation de \widehat{A}/i^*C par les \mathcal{W} -équivalences et la catégorie des C -types d'homotopie relativement à \mathcal{W} .*

DÉMONSTRATION. La première assertion est évidente. Nous allons montrer que le foncteur i^*/C induit une équivalence de catégories après localisation. On note \mathcal{W}' le localisateur fondamental minimal parmi ceux qui rendent asphériques les catégories A et $A/a \times i^* \Delta_1$, $a \in \mathbf{Ob} A$. Le corollaire 5.2.20 montre que \mathcal{W}' est propre, et la proposition 1.1.20 que i est un \mathcal{W}' -foncteur test et que $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. Par conséquent, on a une \mathcal{W}' -équivalence $i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathbf{Cat}}$, ce qui induit par adjonction une \mathcal{W}' -équivalence $\nu : i^* \longrightarrow i_A^*$. On définit un foncteur $\mu : \mathbf{Cat}/C \longrightarrow \widehat{A}/i_A^*C$ comme le composé du foncteur i^*/C et du foncteur d'oubli induit par ν_C . Le

morphisme de foncteurs ν définit une \mathcal{W} -équivalence naturelle de μ vers i_A^*/C . On obtient ainsi un diagramme commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//C & \xrightarrow{i^*/C} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i^*C} \\ & \searrow i_A^*/C & \swarrow \nu_{C!} \\ & & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i_A^*C} \end{array}$$

En vertu de la proposition 5.3.20 et du corollaire 5.3.23, les foncteurs i_A^*/C et $\nu_{C!}$ sont des équivalences de catégories, et par conséquent, il en est de même de i^*/C . \square

SCHOLIE 5.3.28. Sous les hypothèses de la proposition ci-dessus, on peut expliciter un quasi-inverse de l'équivalence de catégories induite par le foncteur i^*/C (ce qui donne une autre démonstration). On a en effet un morphisme de foncteurs $\alpha : i_A i^* \rightarrow 1_{\text{cat}}$, et pour tout objet c de C , on a un isomorphisme canonique $(A/i^*C)/c \simeq A/i^*(C/c)$ (cf. proposition A.1.5). Il résulte donc de la proposition 1.1.20 que le foncteur α_C est \mathcal{W} -asphérique, et par conséquent, la proposition 5.3.25 implique que le foncteur d'oubli par α_C induit une équivalence de catégories de la catégorie des A/i^*C -types d'homotopie vers celle des C -types d'homotopie. D'autre part, comme A/i^*C est encore une \mathcal{W} -catégorie test locale, le foncteur j_{A/i^*C} définit une équivalence de catégories de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i^*C}$ vers $\text{Hot}_{\mathcal{W}}//A/i^*C$ (cf. 5.3.19). En composant ces deux foncteurs, on obtient une équivalence de catégories

$$\alpha_{C!} j_{A/i^*C} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A/i^*C} \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{W}}//C .$$

Nous laissons le lecteur se persuader qu'il s'agit bien là du quasi-inverse annoncé.

THÉORÈME 5.3.29. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible. Si \mathcal{W} est propre, alors pour toute \mathcal{W} -catégorie test locale A , le A -localisateur des \mathcal{W} -équivalences est propre. Réciproquement, s'il existe une \mathcal{W} -catégorie test locale non vide A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit propre, alors \mathcal{W} est propre.*

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps que \mathcal{W} est propre, et considérons une \mathcal{W} -catégorie test locale A . On rappelle que pour tout préfaisceau X sur A , la catégorie A/X est encore une \mathcal{W} -catégorie test locale. Par conséquent, le foncteur $j_{A/X}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X$ et la catégorie des A/X -types d'homotopie relativement à \mathcal{W} (corollaire 5.3.19). Soit $u : X \rightarrow Y$ une \mathcal{W} -équivalence. On obtient le carré commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/X & \xrightarrow{u!} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}}\widehat{A}/Y \\ j_{A/X} \downarrow & & \downarrow j_{A/Y} \\ \text{Hot}_{\mathcal{W}}//A/X & \xrightarrow{(i_A u)!} & \text{Hot}_{\mathcal{W}}//A/Y \end{array}$$

Comme on vient de le rappeler, les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories, et il résulte du lemme 5.3.24 que le foncteur $(i_A u)!$ ci-dessus est une

équivalence de catégories. On en déduit que le foncteur $u_!$ en est une. Le corollaire 5.1.11 implique que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est accessible, et donc la proposition 5.3.22 montre que u est une \mathcal{W} -équivalence propre à droite. On a ainsi montré que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est propre.

Supposons à présent qu'il existe une \mathcal{W} -catégorie test locale non-vide A telle que $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ soit un A -localisateur propre, et choisissons un objet a de A . Alors A/a est une \mathcal{W} -catégorie test locale, et comme elle admet un objet final, elle est \mathcal{W} -asphérique, et donc est une \mathcal{W} -catégorie test. On vérifie aussitôt que le A/a -localisateur des \mathcal{W} -équivalences est propre, et donc le théorème 5.2.18 implique que \mathcal{W} est propre. \square

REMARQUE. On n'a considéré dans la seconde partie de l'énoncé ci-dessus que des catégories test locales non vides, car pour tout localisateur fondamental, la catégorie vide est toujours test locale.

4. Caractérisation locale de la classe des ∞ -équivalences (2)

5.4.1. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Un morphisme $u : A \rightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est \mathcal{W} -localement constant si pour toute flèche $b \rightarrow b'$ de B , le foncteur induit $A/b \rightarrow A/b'$ est une \mathcal{W} -équivalence.

LEMME 5.4.2. Soient A une petite catégorie, et F un foncteur de A vers $\mathcal{C}at$ tel que pour toute flèche $a \rightarrow a'$ de A , le foncteur induit $F_a \rightarrow F_{a'}$ soit une ∞ -équivalence. On considère un foncteur entre petites catégories $u : A' \rightarrow A$, puis on forme le carré cartésien de type (1.2.9.1) ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} \int F|_{A'} & \xrightarrow{v} & \int F \\ \theta_{F|_{A'}} \downarrow & & \downarrow \theta_F \\ A' & \xrightarrow{u} & A \end{array} .$$

Alors l'image de ce dernier dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur nerf est un carré homotopiquement cartésien au sens de \mathcal{W}_{∞} . En particulier, pour toute ∞ -équivalence $u' : A'' \rightarrow A'$ dans $\mathcal{C}at$, si on forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int F|_{A''} & \xrightarrow{v'} & \int F|_{A'} \\ \theta_{F|_{A''}} \downarrow & & \downarrow \theta_{F|_{A'}} \\ A'' & \xrightarrow{u'} & A' \end{array} ,$$

le foncteur v' est une ∞ -équivalence.

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 3.2.3, il suffit de montrer que le morphisme d'ensembles simpliciaux $N\theta_F$ est \mathcal{W}_{∞} -localement constant. Considérons un entier $n \geq 0$, et notons n le foncteur de Δ_0 vers Δ_n qui pointe l'objet n . Ce foncteur est coasphérique, et donc dans ce cas, pour tout foncteur

$w : \Delta_n \longrightarrow A$, si on forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} F_{u(n)} & \xrightarrow{\ell_{u(n)}} & \int F|_{\Delta_n} \\ \downarrow & & \downarrow \theta_{F|_{\Delta_n}} \\ \Delta_0 & \xrightarrow{n} & \Delta_n \end{array} ,$$

comme θ_F est propre, il résulte du théorème 1.2.5 que le foncteur $\ell_{u(n)}$ est coasphérique, et donc en particulier une ∞ -équivalence. On en déduit que pour tout i , $0 \leq i \leq n$, l'inclusion canonique $\ell_{u(i)}$, de $F_{u(i)}$ dans $\int F|_{\Delta_n}$, est une ∞ -équivalence. En effet, le foncteur $F_{u(i \leq n)} : F_{u(i)} \longrightarrow F_{u(n)}$ est une ∞ -équivalence par hypothèse, et on a un morphisme de foncteurs de $\ell_{u(i)}$ vers $\ell_{u(n)} \circ F_{u(i \leq n)}$ qui peut être interprété comme une Δ_1 -homotopie dans la catégorie des ensembles simpliciaux, ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 5.4.3 (Quillen [43]). *Soient $u : A \longrightarrow B$ un morphisme \mathcal{W}_∞ -localement constant dans $\mathcal{C}at$, et b un objet de B . Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} A/b & \longrightarrow & \mathbb{N} A \\ \mathbb{N} u/b \downarrow & & \downarrow \mathbb{N} u \\ \mathbb{N} B/b & \longrightarrow & \mathbb{N} B \end{array}$$

est homotopiquement cartésien dans $\widehat{\Delta}$ au sens de \mathcal{W}_∞ .

DÉMONSTRATION. On définit un foncteur $F(u)$ de B vers $\mathcal{C}at$ par $F(u)_b = A/b$, et on fixe un objet b de B . On a alors le cube commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} & & A/b & \xrightarrow{\quad} & A \\ K(F(u)|_{B/b}) \nearrow & & \downarrow & \nearrow K(F(u)) & \downarrow \\ \int F(u)/b & \xrightarrow{\quad} & \int F(u) & & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B/b & \xrightarrow{\quad} & B & & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B/b & \xrightarrow{\quad} & B & & B \end{array}$$

On va montrer à présent que les foncteurs $K(F(u))$ et $K(F(u)|_{B/b}) = K(F(u)/b)$ sont des fibrations à fibres asphériques, et par conséquent que ce sont des ∞ -équivalences. Dans le cas où u est une identité, la proposition 1.3.2 montre qu'on obtient de la sorte une fibration à fibres asphériques, et donc une \mathcal{W}_∞ -équivalence universelle. Le cas général résulte du fait qu'on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int F(u) & \longrightarrow & \int F(1_B) \\ K(F(u)) \downarrow & & \downarrow K(F(1_B)) \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array} .$$

Le lemme ci-dessus implique que la face du cube au premier plan est un carré homotopiquement cartésien après application du foncteur nerf , ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 5.4.4. *On considère une petite catégorie S , et un morphisme de $\mathcal{C}at/S$*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \xi & \swarrow \eta \\ & S & \end{array},$$

tel que les foncteurs ξ et η soient \mathcal{W}_∞ -localement constants. Alors le foncteur φ est une ∞ -équivalence si et seulement s'il est ∞ -asphérique au-dessus de S .

COROLLAIRE 5.4.5. *Un morphisme \mathcal{W}_∞ -localement constant de $\mathcal{C}at$ est une ∞ -équivalence si et seulement s'il est ∞ -asphérique.*

5.4.6. On définit le foncteur *composantes connexes*

$$\pi_0 : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

comme l'adjoint à gauche du foncteur qui associe à chaque petit ensemble la catégorie discrète correspondante. Si X est un ensemble simplicial, on obtient une bijection canonique $\pi_0 X \simeq \pi_0 \Delta/X$. On vérifie enfin sans difficultés que pour toute petite catégorie C , on a une bijection canonique $\pi_0 C \simeq \pi_0 NC$. Un morphisme de $\mathcal{C}at$ sera appelé une *0-équivalence* s'il induit une bijection après application du foncteur π_0 . On vérifie immédiatement que les 0-équivalences forment un localisateur fondamental grâce au fait que le foncteur π_0 commute aux petites limites inductives. Ce qui précède implique en outre que le Δ -localisateur correspondant au localisateur fondamental des 0-équivalences est celui des 0-équivalences au sens du paragraphe 3.2.5. On obtient dès lors un analogue du théorème 3.2.7 en termes de localisateurs fondamentaux.

THÉORÈME 5.4.7. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental satisfaisant les conditions suivantes.*

- (a) *Toute \mathcal{W} -équivalence est une 0-équivalence.*
- (b) *Un foncteur \mathcal{W} -localement constant est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement s'il est \mathcal{W} -asphérique.*

Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.

DÉMONSTRATION. Comme \mathcal{W}_∞ est par définition le localisateur fondamental minimal, il suffit de montrer que toute \mathcal{W} -équivalence est une ∞ -équivalence. En vertu du théorème 5.1.10 et du corollaire 5.1.12, il suffit même de montrer que le Δ -localisateur (test) $i_\Delta^{-1}\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\hat{\Delta}}$ est contenu dans celui des ∞ -équivalences. Pour cela, on va montrer qu'il vérifie les conditions du théorème 3.2.7. La condition (i) correspond à la condition (a), et la condition (iii) exprime simplement le fait que pour tout ensemble simplicial X , les projections $X \times \Delta_n \rightarrow X$ sont des $\mathcal{W}_{\hat{\Delta}}$ -équivalences. Il reste donc à montrer la condition (ii). On remarque qu'en vertu du corollaire A.1.15, si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, il est $\mathcal{W}_{\hat{\Delta}}$ -localement constant si et seulement le foncteur correspondant $i_{\Delta} p : \Delta/X \rightarrow \Delta/Y$ est \mathcal{W} -localement constant. On en déduit grâce à la condition (b) et au même corollaire qu'un morphisme $\mathcal{W}_{\hat{\Delta}}$ -localement constant est

une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -équivalence si et seulement si ses fibres sont \mathcal{W} -asphériques. Cela implique que si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -localement constant et une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -équivalence, alors il est une $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}}$ -équivalence universelle. En effet, pour tout morphisme d'ensembles simpliciaux $Y' \rightarrow Y$, les fibres du morphisme image réciproque $p' : X' \rightarrow Y'$ sont toutes \mathcal{W} -asphériques, ce qui signifie que le foncteur $i_{\Delta} p'$ est \mathcal{W} -asphérique. \square

PROPOSITION 5.4.8. *Soit A une \mathcal{W}_{∞} -catégorie test locale. Alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}, \infty} = i_A^{-1} \mathcal{W}_{\infty}$ est le A -localisateur régulier engendré par les flèches de A (vues comme des flèches de \widehat{A} par le plongement de Yoneda).*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} le A -localisateur régulier engendré par les flèches de A . En vertu du corollaire 4.4.13, \mathcal{W} est accessible, puisqu'il peut être défini comme la complétion régulière du A -localisateur engendré par les flèches de A . Si $a \rightarrow a'$ est une flèche de A , comme les catégories A/a et A/a' sont ∞ -asphériques, le foncteur induit $A/a \rightarrow A/a'$ est une ∞ -équivalence. Comme le A -localisateur des ∞ -équivalences est régulier (proposition 5.1.4), toute \mathcal{W} -équivalence est une ∞ -équivalence. Pour montrer l'inclusion inverse, on procède en plusieurs étapes.

5.4.8.1. *Soit a un objet de A . On note \mathcal{W}_a le A/a -localisateur test minimal (qui est donc la classe des ∞ -équivalences de \widehat{A}/a), et $\mathcal{U}_a : \widehat{A}/a \rightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'oubli. Alors $\mathcal{U}_a \mathcal{W}_a \subset \mathcal{W}$.*

En effet, en vertu de la proposition 4.4.15, $\mathcal{U}_a^{-1} \mathcal{W} = \mathcal{W}/a$ est un A/a -localisateur régulier qui contient les flèches de A/a , et donc le théorème 5.1.10 implique que $\mathcal{W}_a \subset \mathcal{W}/a$.

5.4.8.2. *Soit $p : X \rightarrow Y$ une fibration au sens de \mathcal{W} dans \widehat{A} . Alors le foncteur $i_{Ap} : A/X \rightarrow A/Y$ est \mathcal{W}_{∞} -localement constant.*

Soit $u : a \rightarrow b$ une flèche de A , et $b \rightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux. On forme les carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Y a & \xrightarrow{v} & X \times_Y b & \longrightarrow & X \\ r \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow p \\ a & \xrightarrow{u} & b & \longrightarrow & Y \end{array}$$

On veut montrer que v est une ∞ -équivalence dans \widehat{A} . Or 5.4.8.1 implique que le foncteur \mathcal{U}_a envoie les cofibrations triviales au sens de \mathcal{W}_a sur des cofibrations triviales au sens de \mathcal{W} , et donc par adjonction que q est une fibration au sens de \mathcal{W}_a dans \widehat{A}/a . Comme \mathcal{W}_a est un A/a -localisateur propre (5.2.14), on en déduit que v est une ∞ -équivalence de \widehat{A}/a . Il résulte alors de 5.4.8.1 que v est une \mathcal{W} -équivalence.

5.4.8.3. *Si une fibration au sens de \mathcal{W} est une ∞ -équivalence alors elle est une \mathcal{W} -équivalence.*

Soit $p : X \longrightarrow Y$ une fibration au sens de \mathcal{W} . Il résulte de 5.4.8.2 et du corollaire 5.4.5 que si $p \in \mathcal{W}_\infty$, alors $i_A p$ est un foncteur ∞ -asphérique. Autrement-dit, pour tout objet a de A , et toute section $s : a \longrightarrow Y$ de Y au-dessus de a , le morphisme $X \times_Y a \longrightarrow a$ est une ∞ -équivalence. Mais alors 5.4.8.1 implique que ce dernier est aussi une \mathcal{W} -équivalence. En vertu du corollaire 4.4.31, le morphisme p est donc une \mathcal{W} -équivalence.

5.4.8.4. $\mathcal{W}_{\widehat{A}, \infty} \subset \mathcal{W}$.

Soit f une ∞ -équivalence. En considérant la structure de catégorie de modèles fermée associée à \mathcal{W} , ce morphisme admet une factorisation de la forme $f = pi$, où i est une cofibration triviale et p est une fibration. Comme $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}, \infty}$, p est une ∞ -équivalence, et f est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si p en est une. L'assertion résulte donc de 5.4.8.3. \square

COROLLAIRE 5.4.9. *Soit A une petite catégorie. Le $\Delta \times A$ -localisateur des ∞ -équivalences est le plus petit parmi ceux qui contiennent les ∞ -équivalences simpliciales terme à terme et les flèches de $\Delta \times A$.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{W} le plus petit $\Delta \times A$ -localisateur contenant les ∞ -équivalences étagées et les flèches de $\Delta \times A$. Il résulte de 4.4.24 que \mathcal{W} contient un $\Delta \times A$ -localisateur régulier et est donc lui-même régulier. On conclut par 5.4.8 que $i_{\Delta \times A}^{-1} \mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$. L'inclusion inverse résulte de 5.2.5. \square

COROLLAIRE 5.4.10. *Soit $u : A \longrightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Si u est \mathcal{W}_∞ -localement constant, alors le couple*

$$u^* : \widehat{\Delta \times B} \longrightarrow \widehat{\Delta \times A} \quad \text{et} \quad u_* : \widehat{\Delta \times A} \longrightarrow \widehat{\Delta \times B}$$

est une adjonction de Quillen pour les structures de catégorie de modèles fermée associées au localisateur fondamental \mathcal{W}_∞ .

DÉMONSTRATION. Comme u est localement constant, il en est de même de $1_\Delta \times u$. Autrement dit, pour toute flèche $\beta : (\Delta_m, b) \longrightarrow (\Delta_n, b')$ de $\Delta \times B$, le foncteur induit

$$\Delta \times A / u^*(\Delta_m, b) = \Delta \times A / (\Delta_m, b) \longrightarrow \Delta \times A / (\Delta_n, b') = \Delta \times A / u^*(\Delta_n, b')$$

est une ∞ -équivalence. De manière équivalente, la flèche β est envoyée par u^* sur une ∞ -équivalence de $\Delta \times A$. Or il est immédiat que $(u^*)^{-1} \mathcal{W}_{\widehat{\Delta \times A}}$ est un $\Delta \times B$ -localisateur qui contient les ∞ -équivalences simpliciales terme à terme. Le corollaire précédent permet ainsi de conclure. \square

5. Représentations

LEMME 5.5.1. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental et $u : A \longrightarrow B$ un foncteur lisse. Alors le foncteur image inverse induit par u*

$$u^* : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$$

envoie les \mathcal{W} -équivalences locales de \widehat{B} sur des \mathcal{W} -équivalences locales de \widehat{A} . Si en outre u est surjectif sur les objets, alors un morphisme de \widehat{B} est une \mathcal{W} -équivalence locale si et seulement si son image par u^ en est une.*

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau sur B , et soit a un objet de A . En posant $b = ua$, le foncteur u induit deux foncteurs évidents $u_a : A/a \rightarrow B/b$ et $u_{X,a} : A/u^*X \times a \rightarrow B/X \times b$. On obtient le cube commutatif suivant, dont les faces sont des carrés cartésiens, mis à part celles de gauche et de droite.

$$\begin{array}{ccccc}
 A/u^*X \times a & \longrightarrow & A/a & & \\
 \downarrow u_{X,a} & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & A/u^*X & \xrightarrow{\quad} & A \\
 & & \downarrow & \downarrow u_a & \downarrow u \\
 B/X \times b & \longrightarrow & B/b & & B \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & B/X & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

En vertu de la version duale du théorème 1.2.5, le foncteur u_a est \mathcal{W} -lisse à fibres \mathcal{W} -asphériques, ce qui implique qu'il est une \mathcal{W} -équivalence universelle (1.2.8). Par conséquent, le foncteur $u_{X,a}$ est une \mathcal{W} -équivalence. On en déduit que pour toute flèche f de \widehat{B} telle que $f \times 1_b$ soit une \mathcal{W} -équivalence, la flèche $u^*f \times 1_a$ est une \mathcal{W} -équivalence, ce qui prouve le lemme. \square

THÉORÈME 5.5.2. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On considère un foncteur \mathcal{W} -lisse $u : A \rightarrow B$. Alors si B est une \mathcal{W} -catégorie test locale, il en est de même de A .*

DÉMONSTRATION. La catégorie B étant supposée être une \mathcal{W} -catégorie test locale, le préfaisceau $i_B^* \Delta_1$ est \mathcal{W} -localement asphérique. Il résulte donc du lemme 5.5.1 que le préfaisceau $u^* i_B^* \Delta_1$ est \mathcal{W} -localement asphérique. Or ce dernier peut être muni de manière évidente d'une structure de segment séparant, et donc les lemmes 5.2.1 et 1.1.27, et le théorème 1.1.16 impliquent que A est une \mathcal{W} -catégorie test locale. \square

DÉFINITION 5.5.3. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Une \mathcal{W} -catégorie test locale stricte est une \mathcal{W} -catégorie test locale A telle qu'un morphisme $X \rightarrow Y$ de \widehat{A} soit une \mathcal{W} -équivalence si et seulement s'il est une \mathcal{W} -équivalence locale (i.e. si et seulement si pour tout objet a de A , le morphisme $X \times a \rightarrow Y \times a$ est une \mathcal{W} -équivalence).

REMARQUE 5.5.4. Une \mathcal{W} -catégorie test locale est stricte si et seulement si la classe des \mathcal{W} -équivalences de \widehat{A} est stable par produits finis. Il est immédiat que c'est une condition suffisante. Réciproquement, si A est stricte, et si $X \rightarrow Y$ est une \mathcal{W} -équivalence de \widehat{A} , il suffit de montrer que pour tout préfaisceau Z sur A , le morphisme $X \times Z \rightarrow Y \times Z$ est une \mathcal{W} -équivalence, ou encore, de manière équivalente, que le foncteur $A/(X \times Z) \rightarrow A/(Y \times Z)$ est une \mathcal{W} -équivalence. Or en procédant comme dans la preuve du lemme 5.2.1, on vérifie que ce dernier est \mathcal{W} -asphérique au-dessus de A/Z , ce qui implique l'assertion.

Une \mathcal{W} -catégorie test est stricte si et seulement si tout produit de deux préfaisceaux représentables sur celle-ci est \mathcal{W} -asphérique (cela résulte facilement de [36, proposition 7.1]). En particulier, toute \mathcal{W} -catégorie test admettant des produits finis est stricte.

EXEMPLE 5.5.5. La catégorie des ensembles ordonnés finis (resp. des catégories finies) admettant un élément maximal (resp. un objet final) est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test stricte. Plus généralement, si (A, I) est un \mathcal{W} -contracteur, alors A est une \mathcal{W} -catégorie test stricte (puisque les I -équivalences d'homotopie sont stables par produits finis). En particulier, la catégorie des simplexes Δ est une \mathcal{W} -catégorie test stricte pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} .

PROPOSITION 5.5.6. *Soit A une \mathcal{W}_∞ -catégorie test locale. Pour qu'elle soit stricte, il faut et il suffit que toutes ses flèches (vues comme des morphismes de préfaisceaux sur A par le plongement de Yoneda) soient des ∞ -équivalences locales.*

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que cette condition est nécessaire. Supposons que toutes les flèches entre préfaisceaux représentables sur A soient des ∞ -équivalences locales. Alors pour toute flèche $a \rightarrow a'$ de A , et tout préfaisceau X sur A , la flèche induite

$$a \times X \rightarrow a' \times X$$

est une ∞ -équivalence. En vertu de la proposition 5.4.8, les ∞ -équivalences de \widehat{A} sont les éléments du A -localisateur régulier engendré par les flèches de A . On sait d'autre part par le corollaire 4.4.26 que le A -localisateur régulier minimal est stable par produits finis. Il résulte donc du corollaire 2.3.9 que le A -localisateur engendré par le A -localisateur régulier minimal et par les flèches de A est stable par produits finis. \square

PROPOSITION 5.5.7. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On considère un foncteur \mathcal{W} -lisse $u : A \rightarrow B$ dont le but est une \mathcal{W} -catégorie test locale stricte. Alors le foncteur image inverse induit par u*

$$u^* : \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$$

respecte les \mathcal{W} -équivalences. Si en outre u est surjectif sur les objets, et si A est aussi une \mathcal{W} -catégorie test locale stricte (pour cela, il faut et il suffit que toutes les \mathcal{W} -équivalences de \widehat{A} soient des \mathcal{W} -équivalences locales), alors on a l'égalité

$$(u^*)^{-1}\mathcal{W}_{\widehat{A}} = \mathcal{W}_{\widehat{B}} \quad .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du lemme 5.5.1, puisque toute \mathcal{W} -équivalence locale de \widehat{A} est une \mathcal{W} -équivalence (son image par le foncteur i_A étant alors \mathcal{W} -asphérique au-dessus de A). \square

5.5.8. Soit A une petite catégorie. Si \mathbb{A} est un préfaisceau en petites catégories sur A (ou de manière équivalente, un objet catégorie dans \widehat{A}), on définit $\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$, la catégorie des représentations de \mathbb{A} , de la manière suivante. Un objet de $\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ est un couple (X, ξ) où X est la donnée pour tout $a \in A$ d'un préfaisceau d'ensembles X_a sur la catégorie \mathbb{A}_a , et ξ est la donnée pour chaque flèche $\alpha : a \rightarrow a'$ de A , d'un morphisme $\xi_\alpha : X_{a'} \rightarrow \mathbb{A}_\alpha^* X_a$ de préfaisceaux sur $\mathbb{A}_{a'}$, tel que pour tout objet a de A , on ait l'égalité $\xi_{1_a} = 1_{X_a}$, et pour toute paire de flèches composables de A ,

$$a \xrightarrow{\alpha} a' \xrightarrow{\alpha'} a'' \quad ,$$

le diagramme ci-dessous commute.

$$X_{a''} \xrightarrow{\xi_{\alpha'}} \mathbb{A}_{\alpha'}^* X_{a'} \xrightarrow{\mathbb{A}_{\alpha'}^* \xi_{\alpha}} \mathbb{A}_{\alpha'}^* \mathbb{A}_{\alpha}^* X_a = \mathbb{A}_{\alpha' \alpha}^* X_a$$

$$\searrow \xi_{\alpha' \alpha} \nearrow$$

Une flèche φ de (X, ξ) vers (Y, η) est la donnée pour chaque objet a de A d'un morphisme $\varphi_a : X_a \longrightarrow Y_a$ dans $\widehat{\mathbb{A}}_a$, telle que pour toute flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X_{a'} & \xrightarrow{\xi_{\alpha}} & \mathbb{A}_{\alpha}^* X_a \\ \varphi_{a'} \downarrow & & \downarrow \mathbb{A}_{\alpha}^* \varphi_a \\ Y_{a'} & \xrightarrow{\eta_{\alpha}} & \mathbb{A}_{\alpha}^* Y_a \end{array}$$

EXEMPLE 5.5.9. Si A est une petite catégorie, et si \mathbb{M} est un A -monoïde, *i.e.* un préfaisceau en monoïdes sur A , on peut considérer \mathbb{M} comme un préfaisceau en catégories (puisque un monoïde est une petite catégorie n'ayant qu'un seul objet). La catégorie $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est la catégorie des préfaisceaux sur A munis d'une action de \mathbb{M} à droite. En effet, si M est un monoïde vu comme une petite catégorie, on vérifie immédiatement que la catégorie des préfaisceaux sur M est la catégorie des ensembles munis d'une action de M à droite, et l'explicitation de la catégorie $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ ci-dessus prend alors le sens annoncé. On note dans ce cas $B\mathbb{M} = \nabla\mathbb{M}$ la *catégorie classifiante associée* à \mathbb{M} .

LEMME 5.5.10. Soient A une petite catégorie et \mathbb{A} un préfaisceaux en petites catégories sur A . On rappelle que $\nabla\mathbb{A}$ désigne la catégorie fibrée sur A associée à \mathbb{A} . Alors la catégorie des représentations de \mathbb{A} est canoniquement équivalente à celle des préfaisceaux sur $\nabla\mathbb{A}$.

DÉMONSTRATION. On rappelle que la catégorie $\nabla\mathbb{A}$ est définie comme suit. Les objets sont les couples (a, x) , $a \in \mathbf{Ob} \mathbb{A}$, $x \in \mathbf{Ob} \mathbb{A}_a$, les flèches $(a, x) \longrightarrow (a', x')$ sont les couples (α, u) , où $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A , et $u : x \longrightarrow \mathbb{A}_{\alpha}(x')$ une flèche de \mathbb{A}_a . Si $(\alpha, u) : (a, x) \longrightarrow (a', x')$ et $(\alpha', u') : (a', x') \longrightarrow (a'', x'')$ sont deux flèches composables, alors

$$(\alpha', u') \circ (\alpha, u) = (\alpha' \circ \alpha, \mathbb{A}_{\alpha}(u') \circ u) .$$

Pour chaque objet a de A , on a un foncteur canonique

$$\ell_a : \mathbb{A}_a \longrightarrow \nabla\mathbb{A} \quad , \quad x \longmapsto (a, x) ,$$

et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , on a un morphisme de foncteurs

$$\tilde{\alpha} : \ell_a \mathbb{A}_{\alpha} \longrightarrow \ell_{a'} \quad , \quad \tilde{\alpha}_x = (\alpha, 1_{\mathbb{A}_{\alpha}(x)}) \quad , \quad x \in \mathbf{Ob} \mathbb{A}_{a'} .$$

Si X est un préfaisceau sur $\nabla\mathbb{A}$, pour chaque objet a de A , on pose $\tilde{X}_a = \ell_a^* X$, et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$, le morphisme de foncteurs $\tilde{\alpha}$ induit un morphisme

$$\xi_{\alpha} = \tilde{\alpha}^* : \ell_{a'}^* X = \tilde{X}_{a'} \longrightarrow \mathbb{A}_{\alpha}^* \tilde{X}_a = \mathbb{A}_{\alpha}^* \ell_a^* X .$$

On obtient de la sorte un foncteur

$$\widehat{\nabla\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{A}) \quad , \quad X \longmapsto (\tilde{X}, \xi) .$$

Inversement, si (X, ξ) est une représentation de \mathbb{A} , On définit un préfaisceau \overline{X} sur $\nabla\mathbb{A}$ de la manière suivante. Si (a, x) est un objet de \mathbb{A} , on pose

$$\overline{X}_{(a,x)} = (X_a)_x ,$$

et si $(\alpha, u) : (a, x) \longrightarrow (a', x')$, est une flèche de \mathbb{A} , on obtient une application

$$\overline{X}_{(a',x')} = (X_{a'})_{x'} \longrightarrow (\mathbb{A}_\alpha^* X_a)_{x'} = (X_a)_{\mathbb{A}_\alpha(x')} \longrightarrow (X_a)_x = \overline{X}_{(a,x)} .$$

Une vérification immédiate montre que $X \longmapsto \overline{X}$ définit un foncteur quasi-inverse du précédent. \square

5.5.11. Si \mathcal{W} est un localisateur fondamental, A une petite catégorie, et \mathbb{A} un préfaisceau en petites catégories sur A , on définit les \mathcal{W} -équivalences dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ comme la classe des flèches dont l'image dans $\widehat{\nabla\mathbb{A}}$ est une \mathcal{W} -équivalence.

COROLLAIRE 5.5.12. *Soient \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible et A une \mathcal{W} -catégorie test locale. On considère un préfaisceau en petites catégories \mathbb{A} sur A . Alors la catégorie des représentations de \mathbb{A} admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes et dont les équivalences faibles sont les \mathcal{W} -équivalences. Si de plus \mathcal{W} est propre, alors cette structure est propre.*

En outre, il existe une équivalence de catégories canonique entre la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}\mathcal{R}ep(\mathbb{A})$ et la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}//\nabla\mathbb{A}$ des $\nabla\mathbb{A}$ -types d'homotopie relativement à \mathcal{W} .

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme ci-dessus, cela résulte des théorèmes 5.5.2 et 5.3.29, ainsi que des corollaires 5.1.11 et 5.3.19. \square

La fin de cette section a pour but de montrer que l'on obtient par le corollaire ci-dessus la théorie homotopique classique dans le cas des représentations de groupes simpliciaux. La procédure garde cependant un sens pour un localisateur fondamental (accessible) arbitraire lorsqu'on considère une catégorie test locale stricte A et un A -monoïde \mathbb{M} . C'est par conséquent dans ce cadre que nous aborderons le problème.

5.5.13. On fixe à présent un localisateur fondamental accessible \mathcal{W} , une \mathcal{W} -catégorie test locale stricte A , et un A -monoïde \mathbb{M} . On a alors la catégorie classifiante de ce dernier, \mathbf{BM} , et une fibration canonique

$$q : \mathbf{BM} \longrightarrow A \quad .$$

La catégorie \mathbf{BM} admet la description suivante. L'ensemble des objets de \mathbf{BM} s'identifie canoniquement à celui des objets de A . Si a et a' sont deux objets de \mathbf{BM} , un morphisme $a \longrightarrow a'$ est un couple (α, g) où $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A , et g un élément du monoïde \mathbb{M}_a . Enfin, si $(\alpha, g) : a \longrightarrow a'$ et $(\alpha', g') : a' \longrightarrow a''$ sont deux flèches composables de \mathbf{BM} , leur composition est définie par la formule

$$(\alpha', g') (\alpha, g) = (\alpha' \alpha, \mathbb{M}_\alpha(g') g) .$$

Le foncteur q est défini comme étant l'identité sur les objets, et par la formule $q(\alpha, g) = \alpha$ pour les flèches.

On définit un foncteur

$$s : A \longrightarrow \mathbf{BM}$$

de la manière suivante. Pour chaque objet a de A , on pose $sa = a$, et pour chaque flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , on pose $s\alpha = (\alpha, e_a)$ (e_a désignant l'élément neutre du monoïde \mathbb{M}_a). Il est évident que s est une section de q .

Les deux foncteurs q et s induisent des foncteurs image inverse (on identifie la catégorie des préfaisceaux sur $\mathbb{B}\mathbb{M}$ et celle des représentations de \mathbb{M})

$$q^* : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \quad \text{et} \quad s^* : \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \longrightarrow \widehat{A} .$$

Le foncteur q^* est le foncteur qui à un préfaisceau X sur A associe le préfaisceau X muni de l'action triviale de \mathbb{M} , et le foncteur s^* est le foncteur d'oubli de l'action de \mathbb{M} . Le foncteur s^* admet deux adjoints, l'un à gauche et l'autre à droite, et donc commute aux petites limites inductives et projectives. En particulier, il respecte les monomorphismes et les produits cartésiens. L'adjoint à gauche de s^* , noté

$$s_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \quad ,$$

est le foncteur qui à un préfaisceau X sur A associe le préfaisceau $X \times M$, où M désigne le préfaisceau \mathbb{M} dont on a oublié la structure de monoïde, l'action de \mathbb{M} étant triviale sur le premier facteur, et par translations à droite sur le second. Autrement dit, si X est un préfaisceau sur A , $s_!X$ s'identifie canoniquement à la représentation produit $q^*X \times s_!(*)$ ($*$ désignant l'objet final de \widehat{A}).

LEMME 5.5.14. *Le foncteur $s_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ respecte les \mathcal{W} -équivalences.*

DÉMONSTRATION. Soit φ une \mathcal{W} -équivalence de \widehat{A} . La catégorie A étant supposée être une \mathcal{W} -catégorie test stricte, φ est en fait une \mathcal{W} -équivalence locale. Etant donné que q est une fibration, c'est un foncteur \mathcal{W} -lisse, et donc $q^*\varphi$ est une \mathcal{W} -équivalence locale de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ en vertu du lemme 5.5.1. On en déduit que pour toute représentation R de \mathbb{M} , le morphisme $i_{\mathbb{B}\mathbb{M}}(\varphi \times 1_R)$ est \mathcal{W} -asphérique au-dessus de $\mathbb{B}\mathbb{M}/R$, et donc que c'est une \mathcal{W} -équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$. Le cas particulier où $R = M$ achève ainsi la démonstration. \square

REMARQUE 5.5.15. On a en fait montré que le foncteur $s_!$ envoie les \mathcal{W} -équivalences de \widehat{A} sur des \mathcal{W} -équivalences locales de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$.

5.5.16. On dira qu'une flèche de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est une s^* -équivalence (resp. une s^* -fibration) si son image par le foncteur s^* est une \mathcal{W} -équivalence (resp. une fibration au sens de \mathcal{W}) dans \widehat{A} . On note \mathcal{W}_{s^*} la classe des s^* -équivalences.

PROPOSITION 5.5.17. *La classe des s^* -équivalences est un $\mathbb{B}\mathbb{M}$ -localisateur accessible et régulier.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur $s_!$ respecte les monomorphismes, et par conséquent, toute fibration triviale de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est une s^* -équivalence. Comme le foncteur s^* commute aux petites limites inductives et projectives, il résulte de la proposition 2.3.10 que les s^* -équivalences forment un $\mathbb{B}\mathbb{M}$ -localisateur accessible. Il reste donc à montrer la régularité. Soit D une \mathcal{W}_{s^*} -résolution cosimpliciale dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$. On s'aperçoit aussitôt que s^*D est une $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ -résolution cosimpliciale, et on obtient en outre le carré commutatif à isomorphisme de foncteurs près

ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) & \xrightarrow{s^*} & \widehat{A} \\
 \text{Real}_D \uparrow & & \uparrow \text{Real}_{s^*D} \\
 \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \mathcal{R}ep(\mathbb{M})) & \xrightarrow{(1_\Delta \times s)^*} & \widehat{\Delta \times A}
 \end{array}$$

Soit φ une flèche de $\underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \mathcal{R}ep(\mathbb{M}))$. Si φ est une ∞ -équivalence simpliciale terme à terme, il en est de même de $(1_\Delta \times s)^*\varphi$, et comme $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ est régulier, il résulte de la proposition 3.3.20 et du théorème 4.4.25 que $\text{Real}_{s^*D}(1_\Delta \times s)^*\varphi$ est une \mathcal{W} -équivalence dans \widehat{A} . La commutativité du carré ci-dessus montre donc que $\text{Real}_D \varphi$ est une s^* -équivalence. En vertu encore de la proposition 3.3.20 et du théorème 4.4.25, la complétion simpliciale de \mathcal{W}_{s^*} est régulière, et donc \mathcal{W}_{s^*} est un BM -localisateur régulier. \square

PROPOSITION 5.5.18. *La catégorie des représentations de \mathbb{M} admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les s^* -équivalences et les fibrations les s^* -fibrations. Cette structure est propre dès que le localisateur fondamental \mathcal{W} l'est.*

DÉMONSTRATION. Vu que les s^* -équivalences forment un BM -localisateur et que les foncteurs $s_!$ et s^* respectent les monomorphismes, on vérifie immédiatement que le couple de foncteurs adjoints $(s_!, s^*)$ vérifie les conditions de la proposition 2.3.14, laquelle implique alors la première assertion. La démonstration de l'énoncé concernant la propriété est laissée au lecteur. \square

5.5.19. La catégorie $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ admet donc à présent deux structures de catégories de modèles fermées, l'une dont les cofibrations sont les monomorphismes et les équivalences faibles les \mathcal{W} -équivalences, appelée la \mathcal{W} -structure, et la seconde décrite dans la proposition ci-dessus, appelée la s^* -structure. On note $s^* - \text{Ho } \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ la catégorie homotopique associée à la s^* -structure.

LEMME 5.5.20. *Le foncteur identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est une adjonction de Quillen de la s^* -structure vers la \mathcal{W} -structure. En particulier, toute s^* -équivalence entre objets s^* -cofibrants est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Comme toutes les s^* -cofibrations sont des monomorphismes (il suffit pour le vérifier de montrer que l'ensemble générateur des s^* -cofibrations est formé de monomorphismes, ce qui résulte du fait que le foncteur $s_!$ respecte les monomorphismes en vertu de 5.5.14), il est suffisant de montrer que toute s^* -cofibration triviale est une \mathcal{W} -équivalence (la seconde assertion étant de toutes façons une conséquence de la première en vertu du lemme de Ken Brown [26, lemme 1.1.12]). Le foncteur $s_!$ respecte les cofibrations et les \mathcal{W} -équivalences, ce qui implique que toute fibration au sens de \mathcal{W} est une s^* -fibration. Par conséquent, toute s^* -cofibration triviale vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement aux \mathcal{W} -fibrations, ce qui achève la démonstration. \square

5.5.21. On a vu que \mathcal{W}_{s^*} est un BM -localisateur accessible. Autrement dit, la catégorie des représentations de \mathbb{M} admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant dont les cofibrations sont les monomorphismes

et dont les équivalences faibles sont les s^* -équivalences. L'identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est donc une équivalence de Quillen de la s^* -structure vers cette dernière. Comme \mathcal{W}_{s^*} est régulier, pour tout préfaisceau X sur $\mathbb{B}\mathbb{M}$, si ϕ_X désigne comme de coutume le foncteur

$$\mathbb{B}\mathbb{M}/X \longrightarrow \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \quad , \quad (a, a \longrightarrow X) \longmapsto a \quad ,$$

le morphisme canonique

$$\mathbb{L} \varinjlim \phi_X \longrightarrow X$$

est un isomorphisme dans $s^* - \mathbf{Ho} \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ (même si le foncteur $\mathbb{L} \varinjlim$ peut être construit à partir de la s^* -structure, il ne dépend pas de la structure de catégorie de modèles fermée, mais seulement de la classe des équivalences faibles).

PROPOSITION 5.5.22. *Toute s^* -équivalence est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit $L \longrightarrow 1_{\mathcal{R}ep(\mathbb{M})}$ une résolution s^* -cofibrante fonctorielle. Le foncteur L envoie les s^* -équivalences sur des s^* -équivalences entre objets s^* -cofibrants, et donc sur des \mathcal{W} -équivalences (lemme 5.5.20). Par conséquent, il induit un foncteur

$$L = \mathbb{L}1_{\mathcal{R}ep(\mathbb{M})} : s^* - \mathbf{Ho} \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \mathcal{R}ep(\mathbb{M}) \quad ,$$

qui n'est autre que le foncteur dérivé à gauche de l'identité de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ relativement à l'adjonction de Quillen de la s^* -structure vers la \mathcal{W} -structure. Lorsque X est une représentation s^* -cofibrante de \mathbb{M} , le morphisme $LX \longrightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence. Soit a un objet de $\mathbb{B}\mathbb{M}$. Alors a peut être vu comme l'image par $s_!$ de l'objet de A correspondant, et par conséquent, est s^* -cofibrant. Il s'en suit que $La \longrightarrow a$ est une \mathcal{W} -équivalence. Considérons à présent une représentation X de \mathbb{M} . On rappelle que ϕ_X désigne le foncteur de $\mathbb{B}\mathbb{M}/X$ vers $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$, composé du foncteur d'oubli de $\mathbb{B}\mathbb{M}/X$ vers $\mathbb{B}\mathbb{M}$ et du plongement de Yoneda de $\mathbb{B}\mathbb{M}$ dans $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$, *i.e.* défini par

$$(a, u : a \longrightarrow X) \longmapsto a \quad .$$

Ce qui précède montre que le morphisme de foncteurs

$$L\phi_X \longrightarrow \phi_X$$

est une \mathcal{W} -équivalence argument par argument, et donc induit un isomorphisme dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$

$$\mathbb{L} \varinjlim L\phi_X \xrightarrow{\sim} \mathbb{L} \varinjlim \phi_X \quad .$$

En vertu de la proposition 4.1.22 appliquée au foncteur $1_{\mathcal{R}ep(\mathbb{M})}$ (vu comme un morphisme de Quillen à gauche de la s^* -structure vers la \mathcal{W} -structure), le foncteur L commute aux colimites homotopiques, *i.e.* on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$

$$\mathbb{L} \varinjlim L\phi_X \xrightarrow{\sim} LL \varinjlim \phi_X \quad .$$

Vu que les $\mathbb{B}\mathbb{M}$ -localisateurs considérés sont réguliers, on obtient ainsi des isomorphismes canoniques dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \mathcal{R}ep(\mathbb{M})$

$$LX \simeq LL \varinjlim \phi_X \simeq \mathbb{L} \varinjlim L\phi_X \simeq \mathbb{L} \varinjlim \phi_X \simeq X \quad .$$

La forte saturation du $\mathbb{B}\mathbb{M}$ -localisateur des \mathcal{W} -équivalences implique que le morphisme $LX \rightarrow X$ est une \mathcal{W} -équivalence. Par conséquent, si f est une flèche de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$, alors $f \in \mathcal{W}$ si et seulement si $Lf \in \mathcal{W}$. Le lemme 5.5.20 implique donc que toute s^* -équivalence est une \mathcal{W} -équivalence. \square

COROLLAIRE 5.5.23. *Soient A une \mathcal{W}_∞ -catégorie test locale stricte et \mathbb{G} un préfaisceau en groupes sur A . Alors un morphisme de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ est une ∞ -équivalence si et seulement si son image par le foncteur d'oubli*

$$\mathcal{R}ep(\mathbb{G}) \longrightarrow \widehat{A}$$

est une ∞ -équivalence. En particulier, la catégorie classifiante $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test locale stricte.

DÉMONSTRATION. La seconde assertion est bien une conséquence de la première, puisque A est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test stricte, et le foncteur s^* commute aux produits. On reprend la terminologie adoptée ci-dessus (avec $\mathbb{G} = \mathbb{M}$). La classe des s^* -équivalences est un $\mathbb{B}\mathbb{G}$ -localisateur régulier, et contient toutes les flèches entre préfaisceaux représentables sur $\mathbb{B}\mathbb{G}$. En effet, si

$$(\alpha, g) : a \longrightarrow a'$$

est une flèche de $\mathbb{B}\mathbb{G}$, on peut l'écrire comme suit (on rappelle que e_a désigne l'élément neutre du groupe \mathbb{G}_a)

$$(\alpha, g) = (\alpha, e_a)(1_a, g) .$$

Comme $(1_a, g)$ est un isomorphisme (d'inverse $(1_a, g^{-1})$), il suffit de montrer que les flèches de la forme

$$(\alpha, e_a) : a \longrightarrow a'$$

sont des s^* -équivalences. Dans ce cas, on a l'égalité $(\alpha, e_a) = s_! \alpha$, et donc les identifications

$$s^*(\alpha, e_a) = s^* s_! \alpha = \alpha \times 1_G ,$$

G désignant le préfaisceau sur A sous-jacent à \mathbb{G} . Comme A est stricte, $\alpha \times 1_G$ est bien une \mathcal{W}_∞ -équivalence. Il résulte à présent de la proposition 5.4.8 que toute ∞ -équivalence de $\mathcal{R}ep(\mathbb{M})$ est une s^* -équivalence. La proposition ci-dessus achève donc la démonstration. \square

REMARQUE 5.5.24. Soit \mathbb{G} un groupe simplicial. Comme la catégorie des simplexes Δ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test stricte, le corollaire ci-dessus montre que les ∞ -équivalences de $\mathcal{R}ep(\mathbb{G})$ sont les équivalences faibles usuelles pour la théorie homotopique des représentations de \mathbb{G} (la structure de catégorie de modèles classique correspondant à celle de la proposition 5.5.18 plutôt qu'à celle du corollaire 5.5.12).

Zoologie (1) : catégories test

1. Catégories squelettiques

Le but de cette section est de dégager une classe de petites catégories dont la catégorie des préfaisceaux admette un modèle cellulaire explicite et simple à manipuler. L'exercice consiste en fait à formaliser les propriétés de la catégorie des simplexes en suivant l'exposition de [17].

DÉFINITION 6.1.1. Une *catégorie squelettique* est la donnée d'un quadruplet (A, A_+, A_-, λ_A) , où A est une petite catégorie, A_+ et A_- sont des sous-catégories de A , et $\lambda_A : \mathbf{Ob} A \rightarrow \mathbb{N}$ est une application, tel que les axiomes suivants soient vérifiés.

- Sq1 Si $a \rightarrow a'$ est une flèche de A_+ (resp. de A_-) qui n'est pas une identité, alors $\lambda_A(a) < \lambda_A(a')$ (resp. $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$).
- Sq2 Chaque flèche α de A admet une unique factorisation de la forme $\alpha = \delta \pi$, où δ est une flèche de A_+ , et π une flèche de A_- .
- Sq3 Toutes les flèches de A_- admettent des sections, et deux flèches de A_- sont égales si et seulement si elles admettent les mêmes sections.

En pratique, on dira que A est une catégorie squelettique, la référence à A_+ , A_- et à λ_A étant implicite.

REMARQUE 6.1.2. Les axiomes Sq1 et Sq2 impliquent que A est une catégorie de Reedy (voir [26, définition 5.2.1]). On vérifie immédiatement que $\mathbf{Ob} A = \mathbf{Ob} A_+ = \mathbf{Ob} A_-$, et que les seuls isomorphismes de A sont les identités.

EXEMPLE 6.1.3. Les catégories vide et ponctuelle sont squelettiques.

EXEMPLE 6.1.4. Soit Δ la catégorie des simplexes. On note Δ_+ (resp. Δ_-) la sous-catégorie de Δ formée des monomorphismes (resp. des épimorphismes) de Δ . On a une application évidente

$$\lambda_\Delta : \mathbf{Ob} \Delta \rightarrow \mathbb{N} \quad , \quad \Delta_n \mapsto n \quad ,$$

ce qui définit une structure de catégorie squelettique sur Δ .

LEMME 6.1.5. *La notion de catégorie squelettique est stable par localisation. Autrement-dit, si A est une catégorie squelettique, et si X est un préfaisceau sur A , alors la catégorie A/X est naturellement munie d'une structure de catégorie squelettique. Si $u_X : A/X \rightarrow A$ désigne le foncteur d'oubli, celle-ci est définie en posant*

$$(A/X)_+ = u_X^{-1} A_+ \quad , \quad (A/X)_- = u_X^{-1} A_- \quad ,$$

et $\lambda_{A/X} : \mathbf{Ob} A/X \rightarrow \mathbb{N} \quad , \quad (a, a \rightarrow X) \mapsto \lambda_A(a) \quad .$

DÉMONSTRATION. L'axiome Sq1 est vérifié immédiatement. Soit

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & a' \\ & \searrow u & \swarrow u' \\ & & X \end{array}$$

une flèche de A/X . On factorise α dans A en

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a',$$

où π est une flèche de A_- , et δ une flèche de A_+ , puis on pose $u'' = u' \delta$. On obtient de la sorte la factorisation ci-dessous dans A/X .

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \frown & & \smile & \\ a & \xrightarrow{\pi} & a'' & \xrightarrow{\delta} & a' \\ & \searrow u & \downarrow u'' & \swarrow u' & \\ & & X & & \end{array}$$

L'unicité de cette factorisation résulte de la propriété analogue dans A . L'axiome Sq2 est ainsi vérifié, et l'axiome Sq3 résulte du fait que le foncteur d'oubli u_X est fidèle, et que pour toute flèche α de A/X , l'ensemble des sections de α est canoniquement en bijection avec celui des sections de $u_X(\alpha)$. \square

REMARQUE 6.1.6. Si A et B sont deux catégories squelettiques, on pose $\lambda_{A \times B}(a, b) = \lambda_A(a) + \lambda_B(b)$, et $(A \times B)_\varepsilon = A_\varepsilon \times B_\varepsilon$, $\varepsilon = +, -$, ce qui fait de $A \times B$ une catégorie squelettique.

On fixe à présent une catégorie squelettique A .

DÉFINITION 6.1.7. Soit a un objet de A . Une flèche $a \rightarrow a'$ de A est une dégénérescence de a si $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$.

Un objet a de A est *dégénéré* s'il admet une dégénérescence. Un objet de A est *non dégénéré* s'il n'est pas dégénéré.

Soit X un préfaisceau sur A . Si a est un objet de A , une section u de X au-dessus de a est *dégénérée* si l'objet correspondant de A/X (à savoir (a, u)) l'est, *i.e.* s'il existe une flèche $\alpha : a \rightarrow a'$ de A , ainsi qu'une section u' de X au-dessus de a' , tels que $\lambda_A(a') < \lambda_A(a)$ et $u = X_\alpha(u')$. Une section de X au-dessus d'un objet de A est *non dégénérée* si elle n'est pas dégénérée.

PROPOSITION 6.1.8. *Un objet a de A est dégénéré si et seulement s'il existe une flèche de A_- de source a qui n'est pas un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. C'est une condition suffisante en vertu de l'axiome Sq1. Réciproquement, si a est dégénéré, alors il existe une dégénérescence $\alpha : a \rightarrow a'$ de a . En vertu de l'axiome Sq2, α admet une factorisation de la forme

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a',$$

où π est une flèche de A_- , et δ une flèche de A_+ . Or π n'est pas un isomorphisme, car sinon, les isomorphismes de A étant des identités, on aurait l'égalité $\alpha = \delta$, et donc l'axiome Sq1 impliquerait l'inégalité stricte $\lambda_A(a) < \lambda_A(a')$. \square

COROLLAIRE 6.1.9. *Soit X un préfaisceau sur A . Une section u de X au-dessus d'un objet a de A est dégénérée si et seulement s'il existe une flèche $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A_- qui n'est pas un isomorphisme, et une section u' de X au-dessus de a' tels que $u = X_\alpha(u')$.*

PROPOSITION 6.1.10. *Soit a un objet de A . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *L'objet a est non dégénéré.*
- (ii) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , on a l'inégalité $\lambda_A(a) \leq \lambda_A(a')$.*
- (iii) *Le seul morphisme de A_- de source a est l'identité.*
- (iv) *Tout morphisme de A de source a est un morphisme de A_+ .*

DÉMONSTRATION. L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est une traduction immédiate de la définition, l'implication (ii) \Rightarrow (iii) résulte de l'axiome Sq1. Supposons l'énoncé (iii) vérifié. Si $\alpha : a \longrightarrow a'$ est une flèche de A , il admet une factorisation de la forme

$$a \xrightarrow{\pi} a'' \xrightarrow{\delta} a' ,$$

où $\pi \in \text{Fl } A_-$ et $\delta \in \text{Fl } A_+$. Or (iii) implique que π est une identité, et donc que $\alpha \in \text{Fl } A_+$. On a ainsi montré (iii) \Rightarrow (iv), et (iv) \Rightarrow (ii) est une évidence en regard de l'axiome Sq1. \square

COROLLAIRE 6.1.11. *Soient X un préfaisceau sur A , a un objet de A , et u une section de X au-dessus de a . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *La section u est non dégénérée.*
- (ii) *Pour tous $\alpha : a \longrightarrow a' \in \text{Fl } A$, $u' \in X_{a'}$, tels que $u = X_\alpha(u')$, on a l'inégalité $\lambda_A(a) \leq \lambda_A(a')$.*
- (iii) *Si $\alpha : a \longrightarrow a' \in \text{Fl } A_-$ et $u' \in X_{a'}$ vérifient $u = X_\alpha(u')$, alors α est une identité.*
- (iv) *Si $\alpha : a \longrightarrow a' \in \text{Fl } A$ et $u' \in X_{a'}$ vérifient $u = X_\alpha(u')$, alors α est une flèche de A_+ .*

PROPOSITION 6.1.12. *Pour tout objet a de A , il existe un unique couple (π, b) , où $\pi : a \longrightarrow b$ est une flèche de A_- , et où b est non dégénéré. On dira que ce couple est la décomposition d'Eilenberg-Zilber de a .*

DÉMONSTRATION. Considérons l'ensemble E_a des couples de la forme (π, b) , où b est un objet de A , et π une flèche de a vers b dans la catégorie A_- . Il est non vide puisqu'il contient l'élément $(a, 1_a)$. L'ensemble des entiers naturels étant bien ordonné, cela implique que E_a admet un élément (π, b) tel que $\lambda_A(b)$ soit minimal. La proposition 6.1.10 montre que b est alors nécessairement non dégénéré. Il reste donc à prouver l'unicité. Considérons deux éléments (π, b) et (π', b') de E_a tels que b et b' soient non dégénérés. En vertu de l'axiome Sq3, π admet une section σ , ce qui définit un morphisme $\pi' \sigma : b \longrightarrow b'$, et donc la proposition 6.1.10 implique que $\lambda_A(b) \leq \lambda_A(b')$. Les rôles de π et de π' étant interchangeables, on en déduit que $\lambda_A(b) = \lambda_A(b')$. L'objet b étant non dégénéré, en vertu de la proposition 6.1.10, $\pi' \sigma$ est une flèche de A_+ , et donc il résulte de l'axiome Sq1 qu'elle est

nécessairement une identité. On a ainsi l'égalité $b = b'$, et le raisonnement qui précède montre aussi que π et π' admettent les mêmes sections. Par conséquent, l'axiome Sq3 implique que $\pi = \pi'$, ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 6.1.13. *Soient X un préfaisceau sur A , a un objet de A , et u une section de X au-dessus de a . Alors il existe un unique couple (π, v) , où $\pi : a \longrightarrow b$ est une flèche de A_- et v une section non dégénérée de X au-dessus de b , tel que $u = X_\pi(v)$. Un tel couple sera appelé la décomposition d'Eilenberg-Zilber de u .*

6.1.14. On note $A_{-1} = \emptyset$, et pour $n \geq 0$, on considère la sous-catégorie pleine A_n de A définie par l'égalité $\text{Ob } A_n = \lambda_A^{-1}\{0, \dots, n\}$. Pour $n \geq -1$, on note $i_n : A_n \longrightarrow A$ l'inclusion pleine canonique. Les catégories A_n admettent des structures de catégories squelettiques évidentes. Soit $n \geq -1$ un entier. On note $\text{Sk}^n A$ le crible de A engendré par la sous-catégorie A_n . Autrement dit, $\text{Sk}^n A$ est la sous-catégorie pleine de A dont les objets sont les éléments a de $\text{Ob } A$ tels qu'il existe une flèche dans A de source a et de but un objet de A_n (i.e. un objet a' de A tel que $\lambda_A(a') \leq n$).

PROPOSITION 6.1.15. *Soit a un objet de A . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) a est un objet de $\text{Sk}^n A$.
- (ii) Il existe une flèche de A_- de source a et de but un objet de A_n .
- (iii) Si (π, b) désigne la décomposition d'Eilenberg-Zilber de a , b est un objet de A_n .

DÉMONSTRATION. Les implications (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) sont évidentes. Il suffit par conséquent de montrer que (i) \Rightarrow (iii). Supposons que a soit un objet de $\text{Sk}^n A$, et considérons la décomposition d'Eilenberg-Zilber (π, b) de a . Comme π est une flèche de A_- , elle admet une section (axiome Sq3), et comme $\text{Sk}^n A$ est par définition un crible cela implique que b est un objet de $\text{Sk}^n A$. Il existe donc une flèche de A de b vers un objet a' de A_n , et en vertu de la proposition 6.1.10, on a l'inégalité $\lambda_A(b) \leq \lambda_A(a')$. Cela implique que b est un objet de A_n et achève ainsi la démonstration. \square

6.1.16. Soit X un préfaisceau sur A . Le crible $\text{Sk}^n(A/X)$ de A/X définit un unique sous-préfaisceau de X , noté $\text{Sk}^n X$, et appelé le n -ième squelette de X . On a donc par définition $A/\text{Sk}^n X = \text{Sk}^n(A/X)$. Le préfaisceau $\text{Sk}^n X$ peut-être défini en posant pour tout $a \in \text{Ob } A$,

$$(\text{Sk}^n X)_a = \{u \in X_a \mid \exists \alpha : a \longrightarrow a', \lambda_A(a') \leq n, \exists u' \in X_{a'}, X_\alpha(u') = u\}.$$

On vérifie immédiatement que pour toute flèche $X \longrightarrow Y$ de préfaisceaux sur A , on a le carré commutatif suivant dans $\mathcal{C}at$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sk}^n(A/X) & \longrightarrow & A/X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sk}^n(A/Y) & \longrightarrow & A/Y \end{array}$$

L'association $X \longmapsto \text{Sk}^n X$ définit ainsi un endofoncteur de \widehat{A} .

COROLLAIRE 6.1.17. Soient X un préfaisceau sur A et u une section de X au-dessus d'un objet a de A . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $u \in (\text{Sk}^n X)_a$.
- (ii) Il existe une flèche $a \rightarrow a'$ de A_- telle que $\lambda_A(a') \leq n$, et une section u' de X au-dessus de a' vérifiant l'équation $X_\pi(u') = u$.
- (iii) Si (π, v) est la décomposition d'Eilenberg-Zilber de u , le but de π est un objet de A_n .

6.1.18. Soit C un crible de A . Alors C correspond à un sous-objet de l'objet final de \widehat{A} , et donc est muni d'une structure naturelle de catégorie squelettique (lemme 6.1.5).

PROPOSITION 6.1.19. Soit C un crible de A . Alors l'inclusion de C dans A induit naturellement le carré cartésien suivant dans Cat .

$$\begin{array}{ccc} \text{Sk}^n C & \longrightarrow & \text{Sk}^n A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & A \end{array}$$

DÉMONSTRATION. On a le carré cartésien ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & A \end{array}$$

ce qui montre qu'on a un foncteur naturel de $\text{Sk}^n C$ dans le produit fibré $C \cap \text{Sk}^n A$ de C et $\text{Sk}^n A$ au-dessus de A . On vérifie aussitôt que cela fait de $\text{Sk}^n C$ un crible de $C \cap \text{Sk}^n A$. En particulier, ce foncteur est pleinement fidèle et injectif sur les objets, et par conséquent, il suffit de montrer qu'il est surjectif sur les objets. Soit a un objet de $C \cap \text{Sk}^n A$. En vertu de la proposition 6.1.15, il existe une flèche $\pi : a \rightarrow a'$ dans A_- dont le but a' est un objet de la catégorie A_n . Or il résulte de l'axiome $\text{Sq}\exists$ que cette flèche admet une section, et donc, vu que C est un crible de A , que a' est un objet de C . On en déduit immédiatement que a est un objet de $\text{Sk}^n C$. \square

COROLLAIRE 6.1.20. Soit $X \rightarrow Y$ un monomorphisme de \widehat{A} . Alors pour $n \geq -1$, le carré suivant est cartésien.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sk}^n X & \longrightarrow & \text{Sk}^n Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

DÉMONSTRATION. A/X est un crible de A/Y , et on rappelle qu'on a par définition les égalités $\text{Sk}^n(A/X) = A/\text{Sk}^n X$ et $\text{Sk}^n(A/Y) = A/\text{Sk}^n Y$. La proposition 6.1.19 montre que l'image du carré considéré dans l'énoncé par le foncteur

$$j_A : \widehat{A} \rightarrow \text{Cat}/A \quad , \quad X \mapsto (A/X, A/X \rightarrow A)$$

est le carré cartésien ci-dessous dans Cat/A

$$\begin{array}{ccc} A/\text{Sk}^n X & \longrightarrow & A/\text{Sk}^n Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/X & \longrightarrow & A/Y \end{array} .$$

Or on peut montrer que le foncteur j_A est pleinement fidèle (proposition A.1.2), ce qui implique l'assertion. \square

PROPOSITION 6.1.21. *Soit $n \geq -1$ un entier, et soit X un préfaisceau sur A . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\text{Sk}^n X = X$.
- (ii) *Pour tout objet a de A , s'il existe une section non dégénérée de X au-dessus de a , alors $\lambda_A(a) \leq n$.*
- (iii) *Pour toute section u de X au-dessus d'un objet a de A , si (π, v) désigne la décomposition d'Eilenberg-Zilber de u , v est une section de X au-dessus d'un objet de A_n .*
- (iv) *Pour toute section u de X au-dessus d'un objet a de A , il existe une flèche $\pi : a \rightarrow a'$ de A_- et une section v de X au-dessus de a' tels que $u = X_\pi(v)$ et $\lambda_A(a') \leq n$.*

DÉMONSTRATION. Les équivalences entre les énoncés (i), (iii) et (iv) résultent du corollaire 6.1.17, et il est immédiat que (ii) équivaut à (iii). \square

LEMME 6.1.22. *Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A . On considère un objet a de A , puis l'évaluation $\varphi_a : X_a \rightarrow Y_a$ de φ en a .*

- (i) *Pour tout objet a de A , l'application φ_a envoie les sections dégénérées sur des sections dégénérées.*
- (ii) *Si φ_a est une injection, alors elle envoie les sections non dégénérées sur des sections non dégénérées.*

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que le foncteur $A/\varphi : A/X \rightarrow A/Y$ envoie les dégénérescences sur des dégénérescences, ce qui prouve l'assertion (i). On suppose à présent que φ_a est une injection, et on considère une section non dégénérée u de X au-dessus de a . Si $\varphi_a(u)$ est une section dégénérée de Y au-dessus de a , alors en vertu du corollaire 6.1.9, il existe un carré commutatif dans \widehat{A}

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\pi} & a' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} ,$$

tel que $a' \in \text{Ob } A$, le morphisme π étant une flèche de A_- qui n'est pas un isomorphisme. L'axiome Sq3 nous assure de l'existence d'une section σ de π . On obtient dès lors les égalités suivantes :

$$\varphi_a(u) = \varphi u = u' \pi = u' \pi \sigma \pi = \varphi u \sigma \pi = \varphi_a(u \sigma \pi) .$$

L'injectivité de φ_a impose donc l'égalité $u = u\sigma\pi$, ce qui est une contradiction car u est non dégénérée. \square

LEMME 6.1.23. *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A . On suppose qu'il existe un entier $n \geq -1$ tel que $\text{Sk}^n X = X$, et si a est un objet de A_n , l'évaluation de φ en l'objet a est une application injective. Alors φ est un monomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Soit a un objet de A , et soient u_0 et u_1 deux sections de X au-dessus de a . Pour $i = 0, 1$, on note (π_i, v_i) la décomposition d'Eilenberg-Zilber de u_i , et b_i le but de π_i . Comme $X = \text{Sk}^n X$, la proposition 6.1.21 implique les inégalités

$$\lambda_A(b_i) \leq n \quad , \quad i = 0, 1 \quad ,$$

et donc il résulte du lemme 6.1.22, (ii) que les sections $\varphi_{b_i}(v_i) = \varphi v_i$, $i = 0, 1$ sont non dégénérées. L'unicité de la décomposition d'Eilenberg-Zilber implique que $(\pi_i, \varphi v_i)$ est la décomposition en question de φu_i . Par conséquent, si $\varphi_a(u_0) = \varphi_a(u_1)$, i.e. si $\varphi u_0 = \varphi u_1$, alors l'unicité de la décomposition d'Eilenberg-Zilber implique que $\pi_0 = \pi_1$ et que $\varphi v_0 = \varphi v_1$. Comme alors $b_0 = b_1$, l'application $\varphi_{b_0} = \varphi_{b_1}$ étant injective, on a nécessairement l'égalité $u_0 = u_1$. \square

6.1.24. Soit $n \geq -1$. Le foncteur $i_n : A_n \longrightarrow A$ induit un foncteur image inverse

$$i_n^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}_n \quad ,$$

lequel admet un adjoint à gauche $i_{n!}$, et un adjoint à droite i_{n*} .

$$\widehat{A}_n \xrightarrow{i_{n!}} \widehat{A} \qquad \widehat{A}_n \xrightarrow{i_{n*}} \widehat{A}$$

Le foncteur i_n étant pleinement fidèle (par construction), les deux foncteurs $i_{n!}$ et i_{n*} sont aussi pleinement fidèles. On note

$$\varepsilon : i_{n!} i_n^* \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$$

le morphisme d'adjonction non-trivial (l'autre, défini de $1_{\widehat{A}_n}$ vers $i_n^* i_{n!}$ est un isomorphisme, puisque $i_{n!}$ est pleinement fidèle).

PROPOSITION 6.1.25. *Pour tout entier n , $n \geq -1$, le morphisme d'adjonction*

$$\varepsilon : i_{n!} i_n^* \longrightarrow 1_{\widehat{A}}$$

est un monomorphisme. En outre si X est un préfaisceau sur A , alors l'image du morphisme

$$\varepsilon_X : i_{n!} i_n^* X \longrightarrow X$$

dans X est le sous-préfaisceau $\text{Sk}^n X$.

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau sur A . On vérifie immédiatement que $\text{Sk}^n i_{n!} i_n^* X = i_{n!} i_n^* X$, ce qui implique que l'image de ε_X dans X est contenue dans $\text{Sk}^n X$. Comme le foncteur $i_{n!}$ est pleinement fidèle, le morphisme

$$i_n^* \varepsilon_X : i_n^* i_{n!} i_n^* X \longrightarrow i_n^* X$$

est un isomorphisme, et donc en vertu du lemme 6.1.23, ε_X est un monomorphisme. D'autre part, on vérifie immédiatement que le crible $A/i_{n!} i_n^* X$ de A/X

contient la sous-catégorie $(A/X)_n$, ce qui implique qu'il contient le crible engendré par cette dernière, à savoir $\text{Sk}^n(A/X) = A/\text{Sk}^n X$. L'image du morphisme ε_X est donc bien le préfaisceau $\text{Sk}^n X$. \square

6.1.26. Soit a un objet de A . Le *bord de a* est le préfaisceau $\partial a = \text{Sk}^{\lambda_A(a)-1} a$. On a donc une inclusion canonique $\ell_a : \partial a \longrightarrow a$.

D'autre part, on dispose à présent d'une suite d'inclusion de foncteurs

$$\emptyset = \text{Sk}^{-1} \subset \text{Sk}^0 \subset \text{Sk}^1 \subset \dots \subset \text{Sk}^n \subset \text{Sk}^{n+1} \subset \dots ,$$

et pour tout préfaisceau X sur A , on a l'égalité

$$X = \bigcup_{n \geq -1} \text{Sk}^n X .$$

LEMME 6.1.27. Soient X un préfaisceau sur A et n un entier, $n \geq 0$. Pour chaque objet a de A , $\lambda_A(a) \leq n$, on a une inclusion

$$\coprod_{a \in \text{Ob } A_n} (X_a \times \partial a \cup (\text{Sk}^{n-1} X)_a \times a) \longrightarrow \coprod_{a \in \text{Ob } A_n} X_a \times a$$

(les ensembles X_a et $(\text{Sk}^{n-1} X)_a$ étant vus comme des préfaisceaux constants), explicitable en tant que somme d'identités et d'inclusions canoniques $\partial a \longrightarrow a$. En outre, il existe un carré cocartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{a \in \text{Ob } A_n} (X_a \times \partial a \cup (\text{Sk}^{n-1} X)_a \times a) & \xrightarrow{u} & \text{Sk}^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{a \in \text{Ob } A_n} X_a \times a & \xrightarrow{v} & \text{Sk}^n X \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. La première assertion est un exercice laissé au lecteur. Le morphisme v est défini par les morphismes d'évaluation

$$X_a \times a \longrightarrow X \quad , \quad (a \xrightarrow{u} X, a' \xrightarrow{\alpha} a) \longmapsto (a' \xrightarrow{u\alpha} X) .$$

Il est clair que la restriction de v à

$$\coprod_{a \in \text{Ob } A_n} (X_a \times \partial a \cup (\text{Sk}^{n-1} X)_a \times a)$$

se factorise en un unique morphisme u . Pour montrer que ce carré est cocartésien, comme ses sommets sont dans l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle et commutant aux petites limites inductives i_{n1} , il suffit de montrer que sa restriction à la catégorie A_n est un carré cocartésien dans la catégorie des préfaisceaux sur A_n . Autrement dit, il suffit de vérifier que pour tout objet a de A_n , l'évaluation en a de ce carré est une somme amalgamée d'ensembles. On constate que dans le cas d'un objet a de A_{n-1} , les flèches verticales sont des identités, ce qui montre l'assertion dans cette situation. Il reste donc à vérifier le cas d'un objet b de A tel que $\lambda_A(b) = n$. Or si on pose

$$U_{X,n,b} = \coprod_{a \in \text{Ob } A_n} (X_a \times (\partial a)_b \cup (\text{Sk}^{n-1} X)_a \times a_b) ,$$

l'évaluation du carré en b est isomorphe au carré trivialement cocartésien ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} U_{X,n,b} & \longrightarrow & (\mathrm{Sk}^{n-1} X)_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{X,n,b} \amalg ((\mathrm{Sk}^n X)_b \setminus (\mathrm{Sk}^{n-1} X)_b) & \longrightarrow & (\mathrm{Sk}^n X)_b \end{array} ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 6.1.28. *Soit \mathcal{M} l'ensemble des inclusions de la forme*

$$\partial a \longrightarrow a \quad , \quad a \in \mathrm{Ob} A .$$

Alors la classe de morphismes $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$ s'identifie à la classe des monomorphismes de \widehat{A} . En particulier, \mathcal{M} est un modèle cellulaire de \widehat{A} .

DÉMONSTRATION. Comme tous les éléments de \mathcal{M} sont des inclusions, il est clair que tout élément de $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$ est un monomorphisme. Il s'agit donc de montrer l'inclusion inverse. On remarque qu'en vertu du lemme 6.1.27, pour tout préfaisceau X sur A , l'inclusion canonique $\emptyset \longrightarrow X$ est dans $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$. Soit $X \longrightarrow Y$ une inclusion de préfaisceaux sur A . On fixe pour le moment un entier $n \geq 0$, puis on pose pour chaque préfaisceau X sur A ,

$$U_{X,n} = \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} (X_a \times \partial a \cup (\mathrm{Sk}^{n-1} X)_a \times a) .$$

On forme ensuite le carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} U_{X,n} & \longrightarrow & U_{Y,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} X_a \times a & \longrightarrow & T \end{array}$$

On a une flèche canonique φ de T vers $\amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} Y_a \times a$ qui s'identifie à la somme de l'identité

$$\amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} (X_a \cup (\mathrm{Sk}^{n-1} Y)_a) \times a \longrightarrow \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} (X_a \cup (\mathrm{Sk}^{n-1} Y)_a) \times a$$

et de la somme d'inclusions de bords

$$\amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} (Y_a \setminus (X_a \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y)) \times \partial a \longrightarrow \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} ((Y_a \setminus (X_a \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y)) \times a) .$$

Le morphisme φ est donc obtenu par composition de sommes d'éléments de $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$. On a le diagramme commutatif suivant.

$$(6.1.28.1) \quad \begin{array}{ccccc} \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} X_a \times a & \longleftarrow & U_{X,n} & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \amalg_{a \in \mathrm{Ob} A_n} Y_a \times a & \longleftarrow & U_{Y,n} & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{n-1} Y \end{array}$$

En vertu du corollaire 6.1.20, on a un carré cartésien

$$(6.1.28.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Sk}^n X \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y & \longrightarrow & X \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sk}^n Y & \longrightarrow & X \cup \mathrm{Sk}^n Y \end{array} .$$

Comme ce dernier n'est formé que d'inclusions, et comme $X \cup \mathrm{Sk}^n Y = X \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y \cup \mathrm{Sk}^n Y$, on en déduit qu'il est aussi cocartésien. En vertu du lemme 6.1.27, en complétant le diagramme (6.1.28.1) en carrés cocartésiens, on montre que le carré suivant est cocartésien.

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^n X \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{a \in \mathrm{Ob} A_n} Y_a \times a & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^n Y \end{array}$$

Par conséquent, le carré cocartésien (6.1.28.2) montre que l'inclusion de $X \cup \mathrm{Sk}^{n-1} Y$ vers $X \cup \mathrm{Sk}^n Y$ est un élément de $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$. Vu que Y est la réunion de ses squelettes, on en déduit que l'inclusion de X dans Y est un composé dénombrable à droite d'éléments de $\mathrm{Cell}(\mathcal{M})$, ce qui achève la démonstration. \square

6.1.29. Soit A une catégorie squelettique. On remarque que tout monomorphisme de A est dans A_+ . En effet, si α est un monomorphisme, il admet une factorisation de la forme $\alpha = \delta\pi$, où $\pi \in \mathrm{Fl} A_-$ et $\delta \in \mathrm{Fl} A_+$. Il est immédiat que π est un monomorphisme, et comme π admet une section, π est un isomorphisme. On en déduit que π est une identité, et partant, que $\alpha = \delta$.

Un monomorphisme de A est *strict* s'il n'est pas un isomorphisme. On va définir la notion de *sous-objet homogène* K d'un objet a de A par récurrence sur $\lambda_A(a) = n$, $n \geq 0$. Si $n = 0$, le seul sous-objet homogène de a est le préfaisceau vide. Si $n > 0$, un sous-préfaisceau K de a est un sous-objet homogène s'il existe un entier m , $m \geq 0$, une suite finie

$$K_0 \subset \dots \subset K_m$$

de sous-objets de a , et pour chaque entier p , $1 \leq p \leq m$, un monomorphisme strict $a_p \longrightarrow a$ vérifiant les conditions suivantes.

- (a) K_0 est le préfaisceau vide et $K_m = K$.
- (b) Pour tout entier p , $1 \leq p \leq m$, on a l'égalité $K_p = K_{p-1} \cup a_p$.
- (c) Pour tout entier p , $1 \leq p \leq m$, si on forme le carré cartésien suivant,

$$\begin{array}{ccc} K_{p-1} \cap a_p & \longrightarrow & a_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{p-1} & \longrightarrow & a \end{array} ,$$

$K_{p-1} \cap a_p$ est un sous-objet homogène de a_p .

On dira alors que K est de *longueur* $\leq m$.

DÉFINITION 6.1.30. Une catégorie squelettique A est *régulière* si pour tout objet a de A , ∂a est un sous-objet homogène de a .

EXEMPLE 6.1.31. La catégorie des simplexes Δ est une catégorie squelettique régulière (cf. la preuve du lemme 3.1.9).

LEMME 6.1.32. *La notion de catégorie squelettique régulière est stable par localisation, i.e. si A est une catégorie squelettique régulière, alors pour tout préfaisceau X sur A , il en est de même de la catégorie A/X .*

DÉMONSTRATION. Soit X un préfaisceau sur une catégorie squelettique régulière A . On sait déjà que A/X est squelettique (lemme 6.1.5), et on constate sans difficultés que le modèle cellulaire de \widehat{A}/X induit par la structure de catégorie squelettique sur A/X est l'ensemble des flèches de la forme

$$\begin{array}{ccc} \partial a & \xrightarrow{\ell_a} & a \\ & \searrow & \swarrow u \\ & & X \end{array}, \quad a \in \text{Ob } A, \quad u \in \text{Hom}_{\widehat{A}}(a, X) = X_a.$$

L'assertion en résulte aussitôt. □

PROPOSITION 6.1.33. *Soit A une catégorie squelettique régulière. Alors pour tout préfaisceau X sur A , tout A/X -localisateur est régulier.*

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, il suffit de montrer que tout A -localisateur est régulier. Considérons un A -localisateur \mathcal{W} . Le lemme 4.4.17 et les propositions 4.4.12 et 6.1.28 impliquent qu'il suffit de montrer que pour tout objet a de A , le préfaisceau ∂a est \mathcal{W} -régulier. Comme on a supposé A régulière, il suffit donc de montrer que pour tout objet a de A , tout sous-objet homogène K de a de longueur $\leq m$ est \mathcal{W} -régulier. On peut alors conclure en procédant par récurrence sur $\lambda_A(a)$ et sur m , et en utilisant les limites inductives \mathcal{W} -régulières de l'exemple 4.4.2 (i.e. en reproduisant la preuve du cas particulier qu'est la proposition 4.4.22). □

DÉFINITION 6.1.34. Soit A une petite catégorie. Un A -prélocalisateur est un ensemble \mathcal{W} de flèches de \widehat{A} vérifiant les axiomes suivants.

PL1 \mathcal{W} est faiblement saturé.

PL2 Pour tout diagramme commutatif dans \widehat{A} du type

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xleftarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_2 \\ B_1 & \xleftarrow{\beta_1} & B_0 & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 \end{array},$$

dans lequel α_1 et β_1 sont des monomorphismes, et f_0, f_1, f_2 sont des éléments de \mathcal{W} , la flèche canonique $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B_1 \amalg_{B_0} B_2$ est un élément de \mathcal{W} .

PL3 Si λ est un ensemble bien ordonné, $X, Y : \lambda \longrightarrow \widehat{A}$ une paire de foncteurs, et $\phi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de foncteurs tels que pour tous $\nu \leq \mu \in \lambda$, les flèches naturelles $X(\nu) \longrightarrow X(\mu)$ et $Y(\nu) \longrightarrow Y(\mu)$ sont des monomorphismes, $\phi(\mu) : X(\mu) \longrightarrow Y(\mu)$ étant dans \mathcal{W} , alors $\varinjlim \phi : \varinjlim X \longrightarrow \varinjlim Y$ est un élément de \mathcal{W} .

EXEMPLE 6.1.35. Il résulte du lemme 2.3.7 que tout A -localisateur est un A -prélocalisateur.

REMARQUE 6.1.36. On vérifie que tout A -prélocalisateur \mathcal{W} vérifie les axiomes L1 et L3 de la définition de A -localisateur. Par conséquent, pour que \mathcal{W} soit un A -localisateur, il faut et il suffit qu'il satisfasse à l'axiome L2 (ou bien à l'une des conditions énoncées dans le lemme 1.1.27).

EXEMPLE 6.1.37. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Alors pour toute petite catégorie A , $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A -prélocalisateur (l'axiome LP1 étant trivialement vérifié, cela résulte de la proposition 1.3.5).

LEMME 6.1.38. Soient A une catégorie squelettique régulière, B une petite catégorie, \mathcal{W} un B -prélocalisateur, Φ et Ψ deux foncteurs commutant aux petites limites inductives et respectant les monomorphismes, de la catégorie des préfaisceaux sur A vers celle des préfaisceaux sur B , et α un morphisme de foncteurs de Φ vers Ψ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout préfaisceau représentable a sur A , le morphisme

$$\alpha_a : \Phi(a) \longrightarrow \Psi(a)$$

est dans \mathcal{W} .

(b) Pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme

$$\alpha_X : \Phi(X) \longrightarrow \Psi(X)$$

est dans \mathcal{W} .

DÉMONSTRATION. Supposons l'assertion (a) vérifiée. Si \mathcal{M} désigne l'ensemble des inclusions du type $\partial a \longrightarrow a$, $a \in \mathbf{Ob} A$, on sait que la classe des monomorphismes de \widehat{A} s'identifie à $\mathbf{Cell}(\mathcal{M})$, ce qui implique en vertu des axiomes PL2 et PL3 qu'il suffit de montrer que $\alpha_{\partial a} \in \mathcal{W}$ pour tout $a \in \mathbf{Ob} A$. Comme A est régulière, il suffit donc de montrer que pour tout objet a de A , et tout sous-objet homogène K de a dans \widehat{A} , α_K est dans \mathcal{W} , ce qui résulte d'une double récurrence évidente sur la construction de K . \square

PROPOSITION 6.1.39. Soit A une catégorie squelettique régulière. On considère une donnée homotopique élémentaire sur A ,

$$\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma),$$

et un A -prélocalisateur \mathcal{W} tels que pour tout objet a de A , le morphisme

$$\sigma_a : a \otimes I \longrightarrow a$$

soit un élément de \mathcal{W} . Alors \mathcal{W} est un A -localisateur, et pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme

$$\sigma_X : X \otimes I \longrightarrow X$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 1.1.27, il suffit de montrer la seconde assertion, à savoir que pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme σ_X est dans \mathcal{W} . Le lemme 6.1.38 appliqué au cas où $A = B$, $\Phi = I$ et $\Psi = 1_{\hat{A}}$ permet de conclure. \square

COROLLAIRE 6.1.40. Soit A une catégorie squelettique régulière. On considère une donnée homotopique élémentaire sur A

$$\mathcal{I} = (I, \partial^0, \partial^1, \sigma) ,$$

et un localisateur fondamental \mathcal{W} , tels que pour tout objet a de A , le morphisme

$$\sigma_a : a \otimes I \longrightarrow a$$

soit une \mathcal{W} -équivalence. Alors A est une \mathcal{W} -catégorie test locale, et pour tout préfaisceau X sur A , le morphisme

$$\sigma_X : X \otimes I \longrightarrow X$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉMONSTRATION. Vu que $i_A^{-1}\mathcal{W}$ est un A -prélocalisateur, l'assertion résulte du corollaire 1.3.10 et de la proposition ci-dessus. \square

2. Ensembles cubiques

6.2.1. On note $\square_0 = \{0\}$ et pour $n \geq 1$, \square_n désigne l'ensemble produit $\{0, 1\}^n$. Pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on définit une application

$$\delta_n^{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \longrightarrow \square_n$$

par la formule

$$\delta_n^{i,\varepsilon}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \dots, x_{n-1}) ,$$

et pour $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n+1$, une application

$$\sigma_n^i : \square_{n+1} \longrightarrow \square_n$$

par la formule

$$\sigma_n^i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) .$$

On définit la *catégorie des cubes* \square comme la sous-catégorie de $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles \square_n , $n \geq 0$, engendrée par les flèches $\delta_n^{i,\varepsilon}$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon = 0, 1$, et les flèches σ_n^i , $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n+1$. Nous laissons le lecteur vérifier l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.2.2. \square est la sous-catégorie de $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles \square_n , $n \geq 0$, et dont les flèches sont les applications

$$f : \square_m \longrightarrow \square_n , \quad f = (f_1, \dots, f_n) , \quad f_j : \square_m \longrightarrow \square_1 , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

satisfaisant les deux conditions suivantes.

- (a) Pour tout j , $1 \leq j \leq n$, f_j est une application constante (de valeur 0 où 1) ou bien une projection du type

$$pr_i : \square_m \longrightarrow \square_1 , \quad (x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_i , \quad 1 \leq i \leq m .$$

(b) Pour tous $j_1, j_2, 1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ si $f_{j_1} = pr_{i_1}$ et $f_{j_2} = pr_{i_2}$, alors $i_1 < i_2$.

6.2.3. Les applications $\delta_n^{i,\varepsilon}$ et σ_n^i vérifient les relations cocubiques ci-dessous.

$$(6.2.3.1) \quad \begin{aligned} \delta_n^{j,\eta} \delta_{n-1}^{i,\varepsilon} &= \delta_n^{i,\varepsilon} \delta_{n-1}^{j-1,\eta} & i < j \\ \sigma_n^j \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \sigma_{n+1}^{j+1} & i \leq j \\ \sigma_n^j \delta_{n+1}^{i,\varepsilon} &= \begin{cases} \delta_n^{i,\varepsilon} \sigma_{n-1}^{j-1} & i < j \\ \delta_n^{i-1,\varepsilon} \sigma_{n-1}^j & i > j \\ 1_{\square_n} & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

On peut montrer que la catégorie des cubes est totalement déterminée par ces relations. Celles-ci et un peu de patience mènent au lemme suivant.

LEMME 6.2.4. *Tout morphisme $\varphi : \square_m \longrightarrow \square_n$ de \square est de la forme*

$$\varphi = \delta_n^{l_0,\varepsilon_0} \delta_{n-1}^{l_1,\varepsilon_1} \cdots \delta_{n-i+1}^{l_{i-1},\varepsilon_{i-1}} \sigma_{m-1-j}^{k_j} \sigma_{m-j}^{k_{j-1}} \cdots \sigma_{m-1}^{k_0} .$$

où $n - i = m - 1 - j$. En particulier, tout monomorphisme $i : \square_m \longrightarrow \square_n$ s'écrit

$$i = \delta_n^{l_0,\varepsilon_0} \delta_{n-1}^{l_1,\varepsilon_1} \cdots \delta_{m+1}^{l_{n-m-1},\varepsilon_{n-m-1}} ,$$

et tout épimorphisme $\pi : \square_m \longrightarrow \square_n$ s'écrit

$$\pi = \sigma_n^{k_{m-n-1}} \sigma_{n+1}^{k_{m-n-2}} \cdots \sigma_{m-1}^{k_0} .$$

6.2.5. La catégorie des cubes \square admet une structure de catégorie monoïdale stricte induite par le produit cartésien d'ensembles (ce qui résulte immédiatement de la description de \square obtenue par la proposition 6.2.2). Autrement dit, il existe un foncteur

$$\otimes : \square \times \square \longrightarrow \square \quad , \quad (\square_m, \square_n) \longmapsto \square_m \otimes \square_n = \square_{m+n}$$

faisant de \square un catégorie monoïdale dont l'objet unité est l'oblet final de \square , à savoir \square_0 . La catégorie des cubes, munie de cette structure, est caractérisée par une propriété universelle. On note $\square_{\leq 1}$ la sous-catégorie pleine de \square dont les objets sont les ensembles \square_0 et \square_1 . Il s'agit donc de la catégorie représentée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \square_0 & & \square_0 \\ \delta_1^{1,0} \searrow & & \nearrow 1_{\square_0} \\ & \square_1 & \xrightarrow{\sigma_0^1} \square_0 \\ \delta_1^{1,1} \nearrow & & \nwarrow 1_{\square_0} \\ \square_0 & & \square_0 \end{array} .$$

PROPOSITION 6.2.6. *Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale. La catégorie des foncteurs monoïdaux de \square vers \mathcal{C} est canoniquement équivalente à celle des foncteurs de $\square_{\leq 1}$ vers \mathcal{C} qui envoient \square_0 sur l'objet unité de \mathcal{C} , dans le sens où tout foncteur*

$$\Phi_1 : \square_{\leq 1} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que $\Phi_1(\square_0)$ soit l'objet unité de \mathcal{C} se prolonge de manière unique à isomorphisme canonique près en un foncteur monoïdal

$$\Phi : \square \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\square_n \longmapsto \Phi_1(\square_1)^{\otimes n} = \Phi_1(\square_1) \otimes (\Phi_1(\square_1) \otimes (\dots \Phi_1(\square_1) \dots)) .$$

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$. on a l'égalité

$$\delta_n^{i,\varepsilon} = 1_{\square_{i-1}} \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_{\square_{n-i}} ,$$

et pour $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n + 1$, l'égalité

$$\sigma_n^i = 1_{\square_{i-1}} \otimes \sigma_0^1 \otimes 1_{\square_{n-i+1}} .$$

La structure monoïdale de \square et ces égalités suffisent pour retrouver les relations (6.2.3.1), lesquelles caractérisent \square , ce qui implique la proposition. \square

EXEMPLE 6.2.7. On peut réaliser la catégorie $\square_{\leq 1}$ comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des simplexes Δ , en envoyant \square_0 sur Δ_0 , \square_1 sur l'ensemble ordonné Δ_1 , σ_0^1 sur σ_0^0 , et $\delta_1^{1,\varepsilon}$ sur $\delta_1^{1-\varepsilon}$. L'inclusion canonique de Δ dans $\mathcal{C}at$ nous donne donc par composition une inclusion pleine de $\square_{\leq 1}$ dans $\mathcal{C}at$ qui envoie \square_0 sur la catégorie ponctuelle. Or cette dernière est l'objet unité pour la structure de catégorie monoïdale de $\mathcal{C}at$ définie par le produit cartésien. On obtient donc par prolongement un foncteur monoïdal

$$i : \square \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad \square_n \longmapsto \Delta_1^n .$$

Ce foncteur sera appelé le *plongement canonique de \square dans $\mathcal{C}at$* (on remarque cependant qu'il est fidèle et injectif sur les objets sans être plein).

EXEMPLE 6.2.8. Si A est une petite catégorie, toute donnée homotopique élémentaire sur A détermine, à isomorphisme canonique près, un foncteur monoïdal de la catégorie des cubes vers celle des endofoncteurs de la catégorie des préfaisceaux sur A . On peut par ailleurs montrer que cela détermine canoniquement une action des ensembles cubiques (*i.e.* des préfaisceaux sur \square) sur \widehat{A} , dotée de bons comportements homotopiques.

6.2.9. Nous allons à présent montrer que la catégorie des cubes est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test, et que le plongement canonique de \square dans $\mathcal{C}at$ est un \mathcal{W}_∞ -foncteur test. Nous allons donner dans un premier temps une démonstration élémentaire de ce fait, puis développer les propriétés homotopiques intrinsèques de $\widehat{\square}$, lesquelles nous donnerons des informations supplémentaires sur la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\square}$, ainsi qu'une seconde preuve du fait que \square est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test.

Soit A une petite catégorie. Un *précylindre fonctoriel* est un triplet

$$(I, \partial^0, \partial^1) ,$$

où I est un endofoncteur de A , et ∂^ε , $\varepsilon = 0, 1$, deux morphismes de foncteurs de l'identité de A vers I . Une *augmentation* d'un tel précylindre est une famille

$$\sigma = (\sigma_a : I(a) \longrightarrow a)_{a \in \text{Ob } A}$$

de morphismes de A , telle que pour tout objet a de A et pour $\varepsilon = 0, 1$, on ait l'égalité $\sigma_a \partial_a^\varepsilon = 1_a$. Un précyindre admettant une augmentation sera dit *augmenté*. Un *cylindre fonctoriel* est un quadruplet

$$(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$$

tel que le triplet $(I, \partial^0, \partial^1)$ soit un précyindre fonctoriel, σ désignant un morphisme de foncteurs de I vers l'identité de A , tel que la famille de flèches σ_a , $a \in \mathbf{Ob} A$, définissant σ soit une augmentation du précyindre fonctoriel considéré.

REMARQUE 6.2.10. Si $(I, \partial^0, \partial^1)$ est un précyindre fonctoriel dans une petite catégorie A admettant une augmentation σ , alors pour tout objet a de A , la flèche σ_a permet de définir un précyindre fonctoriel dans la catégorie A/a ,

$$(I|_{A/a}, \partial^0|_{A/a}, \partial^1|_{A/a}) ,$$

défini comme suit. Pour tout objet (a', α) de A/a , on pose

$$I|_{A/a}(a', \alpha : a' \longrightarrow a) = (I(a'), \sigma_a I(\alpha) : I(a') \longrightarrow a) ,$$

et pour toute flèche $f : (a', \alpha) \longrightarrow (a'', \alpha')$ de A/a , on pose

$$I|_{A/a}(f) = I(f) .$$

Les morphismes de foncteurs ∂^0 et ∂^1 induisent les morphismes de foncteurs $\partial^0|_{A/a}$ et $\partial^1|_{A/a}$.

LEMME 6.2.11. *On fixe un localisateur fondamental \mathcal{W} . Soient A une petite catégorie,*

$$i : A \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

un foncteur, et

$$(I, \partial^0, \partial^1)$$

un précyindre fonctoriel dans A . On suppose les conditions suivantes vérifiées.

(a) *Pour tout objet a de A , le foncteur $i\partial_a^0 : i(a) \longrightarrow iI(a)$ est une immersion ouverte, i.e. un isomorphisme sur un crible U_a de la catégorie $iI(a)$, et le foncteur $i\partial_a^1 : i(a) \longrightarrow iI(a)$ se factorise par le cocrible complémentaire de U_a , $F_a = iI(a) \setminus U_a$.*

(b) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , on a $iI(\alpha)(F_a) \subset F_{a'}$.*

Alors pour toute petite catégorie C admettant un objet final e_C , le foncteur d'oubli

$$A/C = A/i^*C \longrightarrow A$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉMONSTRATION. On définit un foncteur

$$D : A/C \longrightarrow A/C$$

comme suit. On pose pour chaque objet (a, u) de A/C

$$D(a, u : i(a) \longrightarrow C) = (I(a), v_u : iI(a) \longrightarrow C) ,$$

où v_u est l'unique foncteur dont la restriction à U_a est u , i.e. tel que $v_u|_{U_a} = v_u|_{i(a)} = v_u i(\partial_a^0) = u$, et dont la restriction au crible complémentaire F_a est le foncteur constant de valeur e_C (cette définition prend un sens à la lumière du

lemme 1.1.22, lequel est applicable grâce à la condition (a) et au fait que e_C est un objet final de C). Si α est une flèche de (a, u) vers (a', u') dans A/C , On pose simplement $D(f) = I(f)$. Le fait que l'on obtient bien de la sorte un foncteur résulte de vérifications élémentaires utilisant la propriété (b). On définit ensuite un morphisme de foncteurs

$$\delta^0 : 1_{A/C} \longrightarrow D$$

par la formule

$$\delta_{(a,u)}^0 = \partial_a^0, \quad (a, u) \in \text{Ob } A/C .$$

On considère enfin le foncteur

$$j : A \longrightarrow A/C, \quad a \longmapsto (a, e_C : i(a) \longrightarrow C) ,$$

où e_C désigne aussi le foncteur constant de valeur e_C . En composant j avec le foncteur d'oubli r de A/C vers A , on obtient un endofoncteur $K = jr$ de A/C , et on définit un morphisme de foncteurs

$$\delta^1 : K \longrightarrow D$$

par la formule

$$\delta_{(a,u)}^1 = \partial_a^1, \quad (a, u) \in \text{Ob } A/C .$$

On interprète δ^0 et δ^1 comme des homotopies de l'identité de A/C vers D et de $K = jr$ vers D respectivement. Cela implique que jr est une \mathcal{W} -équivalence, et comme $rj = 1_A$, cela implique que r en est une aussi, ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 6.2.12. *On fixe un localisateur fondamental \mathcal{W} . Soient A une petite catégorie,*

$$i : A \longrightarrow \text{Cat}$$

un foncteur, et

$$(I, \partial^0, \partial^1)$$

un pré-cylindre fonctoriel augmenté dans A . On suppose les conditions suivantes vérifiées.

- (a) *Pour tout objet a de A , le foncteur $i\partial_a^0 : i(a) \longrightarrow iI(a)$ est une immersion ouverte, i.e. un isomorphisme sur un crible U_a de la catégorie $iI(a)$, et le foncteur $i\partial_a^1 : i(a) \longrightarrow iI(a)$ se factorise par le cocrible complémentaire de U_a , $F_a = iI(a) \setminus U_a$.*
- (b) *Pour tout morphisme $\alpha : a \longrightarrow a'$ de A , on a $iI(\alpha)(F_a) \subset F_{a'}$.*
- (c) *Pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ admet un objet final.*

Alors i est un \mathcal{W} -foncteur test local (en particulier, A est donc une \mathcal{W} -catégorie test locale).

DÉMONSTRATION. Comme on a supposé le pré-cylindre fonctoriel augmenté, on vérifie que pour tout objet a de A , le foncteur composé

$$A/a \longrightarrow A \xrightarrow{i} \text{Cat}$$

et le cylindre induit dans A/a grâce à l'augmentation,

$$(I|_{A/a}, \partial^0|_{A/a}, \partial^1|_{A/a}) ,$$

satisfont les hypothèses du lemme 6.2.11. On en déduit que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, la projection $i^*C \times a \longrightarrow a$ est une \mathcal{W} -équivalence (dans \widehat{A}/a et donc dans \widehat{A}). La proposition 1.1.20 implique dès lors l'assertion. \square

COROLLAIRE 6.2.13. *La catégorie des cubes est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test, et l'inclusion canonique de \mathbf{Q} dans $\mathcal{C}at$ est un \mathcal{W}_∞ -foncteur test.*

DÉMONSTRATION. On définit un cylindre fonctoriel dans \mathbf{Q} par

$$I(\mathbf{Q}_n) = \mathbf{Q}_n \otimes \mathbf{Q}_1 \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

$$\sigma_{\mathbf{Q}_n} = \sigma_n^{n+1} \quad \text{et} \quad \partial_{\mathbf{Q}_n}^\varepsilon = \delta_{n+1}^{n+1, \varepsilon} \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad \varepsilon = 0, 1 \quad .$$

Les hypothèses de la proposition 6.2.12 sont vérifiées pour celui-ci et pour l'inclusion canonique de \mathbf{Q} dans $\mathcal{C}at$, ce qui montre que i est un \mathcal{W}_∞ -foncteur test local. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que \mathbf{Q} est une catégorie \mathcal{W}_∞ -asphérique, ce qui est immédiat puisqu'elle admet un objet final (à savoir \mathbf{Q}_0). \square

6.2.14. On appellera *ensembles cubiques* les préfaisceaux sur la catégorie des cubes. Si X est un ensemble cubique, et si $n \geq 0$, on notera X_n l'évaluation de X en l'objet \mathbf{Q}_n . Comme annoncé, nous allons à présent développer la théorie homotopique des ensembles cubiques.

PROPOSITION 6.2.15. *On note \mathbf{Q}_+ (resp. \mathbf{Q}_-) la sous-catégorie de \mathbf{Q} dont les objets sont les ensembles \mathbf{Q}_n , $n \geq 0$, et dont les flèches sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes) de \mathbf{Q} . On a en outre une application évidente*

$$\lambda_{\mathbf{Q}} : \text{Ob } \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad \mathbf{Q}_n \longmapsto n \quad .$$

La catégorie des cubes est ainsi munie d'une structure de catégorie squelettique.

DÉMONSTRATION. L'axiome Sq1 est évident. Pour ce qui est de l'axiome Sq2, l'existence des factorisations résulte du lemme 6.2.4, et l'unicité résulte de l'unicité à bijection unique près de la factorisation de toute application en une surjection suivie d'une injection. Pour montrer que tout épimorphisme de \mathbf{Q} admet une section, il suffit de le vérifier pour les morphismes de la forme σ_n^i , ce qui résulte immédiatement des relations cocubiques (6.2.3.1). Considérons enfin deux épimorphismes de \mathbf{Q} ,

$$\pi : \mathbf{Q}_m \longrightarrow \mathbf{Q}_n \quad \text{et} \quad \pi' : \mathbf{Q}_m \longrightarrow \mathbf{Q}_n \quad ,$$

et supposons qu'ils admettent les mêmes sections. On remarque que toute flèche de la forme $p : \mathbf{Q}_0 \longrightarrow \mathbf{Q}_m$ se factorise par une section de π et donc de π' , ce qui implique que $\pi p = \pi' p$. Autrement-dit, pour tout $x \in \mathbf{Q}_m$, on a $\pi(x) = \pi'(x)$. Cela montre que l'axiome Sq3 est vérifié. \square

LEMME 6.2.16. Soient \mathcal{C} une catégorie, et $F : \square \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Pour $n \geq 0$ et $1 \leq i < j \leq n+2$, le carré suivant est cartésien.

$$\begin{array}{ccc} F\square_n & \xrightarrow{F\delta_{n+1}^{i,\varepsilon}} & F\square_{n+1} \\ F\delta_{n+1}^{j-1,\eta} \downarrow & & \downarrow F\delta_{n+2}^{j,\eta} \\ F\square_{n+1} & \xrightarrow{F\delta_{n+2}^{i,\varepsilon}} & F\square_{n+2} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. On note $\delta^{i,\varepsilon}$ pour $F\delta_n^{i,\varepsilon}$, et σ^i pour $F\sigma_n^i$, etc. Les équations (6.2.3.1) montrent que ce carré est commutatif. Soient u et v deux flèches d'un objet X de \mathcal{C} vers $F\square_{n+1}$ telles que $\delta^{j,\eta} v = \delta^{i,\varepsilon} u$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} v &= \sigma^j \delta^{j,\eta} v = \sigma^j \delta^{i,\varepsilon} u = \delta^{i,\varepsilon} \sigma^{j-1} u, \\ u &= \sigma^i \delta^{i,\varepsilon} u = \sigma^i \delta^{j,\eta} v = \delta^{j-1,\eta} \sigma^i v. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\sigma^i v = \sigma^i \delta^{i,\varepsilon} \sigma^{j-1} u = \sigma^{j-1} u$. Il est évident que cette factorisation est unique, puisque tous les monomorphismes de \square admettent des rétractions. \square

LEMME 6.2.17. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$, le carré suivant est cartésien dans $\widehat{\square}$.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \square_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \delta_n^{i,0} \\ \square_{n-1} & \xrightarrow{\delta_n^{i,1}} & \square_n \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Cette assertion est équivalente à l'affirmation qu'il n'existe pas de carré commutatif du type

$$\begin{array}{ccc} \square_m & \longrightarrow & \square_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \delta_n^{i,0} \\ \square_{n-1} & \xrightarrow{\delta_n^{i,1}} & \square_n \end{array}$$

pour $m \geq 0$. Comme il existe toujours un morphisme de \square_0 vers \square_m , on peut se contenter de vérifier l'inexistence de tels diagrammes commutatifs lorsque $m = 0$, ce qui est une constatation immédiate. \square

PROPOSITION 6.2.18. La catégorie des cubes est une catégorie squelettique régulière.

DÉMONSTRATION. On commence par montrer par récurrence sur n que tout sous-objet de \square_n de la forme

$$K = \bigcup_{(i,\varepsilon) \in I} \text{Im } \delta_n^{i,\varepsilon},$$

où I est un sous-ensemble de l'ensemble produit $\{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}$, est un sous-objet homogène. L'assertion est évidente pour $n = 0, 1$, ce qui permet de supposer

$n \geq 2$. Soit (i_0, ε_0) un élément de I , et soit $J = I \setminus \{(i_0, \varepsilon_0)\}$. On pose $L = \bigcup_{(i,\varepsilon) \in J} \text{Im } \delta_n^{i,\varepsilon}$. Alors on a

$$L \cap \text{Im } \delta_n^{i_0, \varepsilon_0} = \bigcup_{(i,\varepsilon) \in J} (\text{Im } \delta_n^{i,\varepsilon} \cap \text{Im } \delta_n^{i_0, \varepsilon_0}) .$$

Or il résulte du lemme 6.2.16 que $\text{Im } \delta_n^{i,\varepsilon} \cap \text{Im } \delta_n^{i_0, \varepsilon_0}$ est un préfaisceau représentable lorsque $i \neq i_0$, et du lemme 6.2.17 que c'est le préfaisceau vide lorsque $i = i_0$ et $\varepsilon \neq \varepsilon_0$. On en déduit que $L \cap \text{Im } \delta_n^{i_0, \varepsilon_0}$ est un sous-objet homogène de \mathbf{Q}_{n-1} , ce qui implique notre assertion. La proposition résulte à présent du fait que pour $n \geq 0$, le bord $\partial \mathbf{Q}_n$ de \mathbf{Q}_n est le préfaisceau

$$\partial \mathbf{Q}_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n, \varepsilon=0,1} \text{Im } \delta_n^{i,\varepsilon} ,$$

puisque d'après ce qui précède, cette présentation montre qu'il est un sous-objet homogène de \mathbf{Q}_n . \square

NOTATIONS 6.2.19. Pour $n \geq 0$, on note

$$i_n : \partial \mathbf{Q}_n \longrightarrow \mathbf{Q}_n$$

l'inclusion canonique du bord de \mathbf{Q}_n dans $\widehat{\mathbf{Q}}$.

LEMME 6.2.20. Soient A une petite catégorie, et

$$\Phi : \widehat{\mathbf{Q}} \longrightarrow \widehat{A}$$

un foncteur commutant aux petites limites inductives. Pour que Φ respecte les monomorphismes, il faut et il suffit que pour tout $n \geq 1$, et pour tout i , $1 \leq i \leq n$, le morphisme

$$(\Phi(\delta_n^{i,0}), \Phi(\delta_n^{i,1})) : \Phi(\mathbf{Q}_{n-1}) \amalg \Phi(\mathbf{Q}_{n-1}) \longrightarrow \Phi(\mathbf{Q}_n)$$

soit un monomorphisme.

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire puisque les morphismes de type $(\delta_n^{i,0}, \delta_n^{i,1})$ sont des monomorphismes de $\widehat{\mathbf{Q}}$ (6.2.17). Montrons la réciproque. Comme les morphismes i_n , $n \geq 0$ forment un modèle cellulaire de $\widehat{\mathbf{Q}}$ (6.1.28), il suffit de montrer que pour tout $n \geq 0$, $\Phi(i_n)$ est un monomorphisme. Comme $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, le cas $n = 0$ est évident, et le cas $n = 1$ est en fait vérifié par hypothèse. On peut donc supposer que $n \geq 2$. La démonstration utilise alors les lemmes 6.2.16 et 6.2.17, et repose sur le même principe que celle de 3.1.8. Les détails sont laissés au lecteur. \square

6.2.21. Le produit tensoriel de la catégorie des cubes se prolonge de manière unique à isomorphisme unique près en un produit tensoriel

$$\otimes : \widehat{\mathbf{Q}} \times \widehat{\mathbf{Q}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{Q}} \quad , \quad (X, Y) \longmapsto X \otimes Y$$

tel que pour tout ensemble cubique X , les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

commutent aux petites limites inductives. La catégorie des ensembles cubiques est ainsi munie d'une structure de catégorie monoïdale, dont l'objet unité est l'objet final \mathbf{Q}_0 . Cela permet d'énoncer la propriété universelle suivante, dont la démonstration résulte immédiatement de la proposition 6.2.6.

PROPOSITION 6.2.22. Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale admettant des petites limites inductives, et telle que pour tout objet X de \mathcal{C} , les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

commutent aux petites limites inductives. Alors la catégorie des foncteurs monoïdaux et commutant aux petites limites inductives de la catégorie $\widehat{\square}$ vers \mathcal{C} est canoniquement équivalente à celle des foncteurs de la catégorie $\square_{\leq 1}$ vers \mathcal{C} qui envoient l'objet \square_0 sur l'objet unité de \mathcal{C} .

EXEMPLE 6.2.23. Le foncteur monoïdal $\square \longrightarrow \widehat{\Delta}$ qui associe au n -cube \square_n le produit Δ_1^n , induit un unique foncteur commutant aux petites limites inductives

$$i_! : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\Delta} .$$

La proposition ci-dessus implique que le foncteur $i_!$ est monoïdal pour le produit cartésien d'ensembles simpliciaux, *i.e.* que pour toute paire d'ensembles cubiques X et Y , on a un isomorphisme canonique

$$i_!(X \otimes Y) \simeq i_!(X) \times i_!(Y) .$$

En outre, le foncteur $i_!$ admet un adjoint à droite

$$i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square} ,$$

défini par la formule

$$i^*(X)_n = \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta_1^n, X) \quad , \quad X \in \text{Ob } \widehat{\Delta} \quad , \quad n \geq 0 .$$

PROPOSITION 6.2.24. Pour tout ensemble cubique X , les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les monomorphismes. En outre, pour toute paire de monomorphismes de $\widehat{\square}$,

$$A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad K \longrightarrow L ,$$

le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes K & \longrightarrow & A \otimes L \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \otimes K & \longrightarrow & B \otimes L \end{array}$$

est cartésien, ou encore, de manière équivalente (puisque les flèches de ce carré sont toutes des monomorphismes), la flèche canonique

$$A \otimes L \amalg_{A \otimes K} B \otimes K \longrightarrow B \otimes L$$

est un monomorphisme. Comme de coutume, on écrira dans ce cas

$$A \otimes L \amalg_{A \otimes K} B \otimes K = A \otimes L \cup B \otimes K .$$

DÉMONSTRATION. Soient X et Y deux ensembles cubiques. On va montrer que le morphisme

$$X \otimes Y \amalg X \otimes Y \xrightarrow{(1_X \otimes \delta_1^{1,0} \otimes 1_Y, 1_X \otimes \delta_1^{1,1} \otimes 1_Y)} X \otimes \square_1 \otimes Y$$

est un monomorphisme. De manière équivalente, il s'agit de vérifier qu'il n'existe pas de carré commutatif dans $\widehat{\square}$ de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \square_n & \longrightarrow & X \otimes Y \\ \downarrow & & \downarrow 1_X \otimes \delta_1^{1,0} \otimes 1_Y \\ X \otimes Y & \xrightarrow{1_X \otimes \delta_1^{1,1} \otimes 1_Y} & X \otimes \square_1 \otimes Y \end{array}$$

Or si cela était le cas, comme \square_0 est à la fois l'objet final $\widehat{\square}$ et l'objet neutre de la structure monoïdale que nous considérons, il existerait par functorialité un tel carré dans le cas où $X = Y = \square_0$, ce qui est en contradiction avec le lemme 6.2.17. Par conséquent, pour tout ensemble cubique X , les foncteurs

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les monomorphismes. En effet, en vertu de ce qui précède, pour $n \geq 0$, et pour $1 \leq i \leq n$, comme on a la décomposition monoïdale

$$\delta_n^{i,\varepsilon} = 1_{\square_{i-1}} \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_{\square_{n-i}} ,$$

les morphismes

$$X \otimes \square_{n-1} \amalg X \otimes \square_{n-1} \xrightarrow{(1_X \otimes \delta_n^{i,0}, 1_X \otimes \delta_n^{i,1})} X \otimes \square_n$$

sont des monomorphismes, ce qui permet d'invoquer le lemme 6.2.20. Considérons à présent deux entiers $n, m \geq 0$. Alors le carré induit par les inclusions canoniques des bords de \square_m et \square_n ,

$$\begin{array}{ccc} \partial \square_m \otimes \partial \square_n & \longrightarrow & \square_m \otimes \partial \square_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial \square_m \otimes \square_n & \longrightarrow & \square_m \otimes \square_n \end{array} ,$$

est cartésien. En effet, on sait qu'il est formé de monomorphismes, et il résulte des lemmes 6.2.16 et 6.2.17 que

$$\partial \square_m \otimes \square_n \cap \square_m \otimes \partial \square_n = \bigcup_{(i,j,\varepsilon,\eta) \in I} \text{Im} \left(\delta_{m+n}^{i,\varepsilon} \delta_{m+n-1}^{j,\eta} \right) ,$$

où I est l'ensemble

$$I = \{ (i, j, \varepsilon, \eta) \mid 1 \leq j \leq m, m+1 \leq i \leq m+n, \varepsilon, \eta = 0, 1, \} ,$$

ce qui est une présentation possible de $\partial \square_m \otimes \partial \square_m$. Le morphisme canonique

$$\square_m \otimes \partial \square_m \amalg_{\partial \square_m \otimes \partial \square_n} \partial \square_m \otimes \square_m \longrightarrow \square_m \otimes \square_m$$

est donc un monomorphisme, ce qui achève la démonstration, en vertu de [26, lemme 4.2.4]. \square

6.2.25. On considère à présent le foncteur i_i de l'exemple 6.2.23, ainsi que son adjoint à droite i^* . On remarque que si C est une petite catégorie, $i^* \mathbb{N}C$ s'identifie canoniquement à l'ensemble cubique i^*C , où cette fois i^* désigne le foncteur de $\mathcal{C}at$ dans $\widehat{\square}$ induit par le plongement canonique de \square dans $\mathcal{C}at$.

Grâce à la proposition ci-dessus, le produit tensoriel à droite par \square_1 définit une donnée homotopique élémentaire sur \square , les morphismes

$$\partial_X^\varepsilon : X \longrightarrow X \otimes \square_1$$

étant définis par $\partial_X^\varepsilon = 1_X \otimes \delta_1^{1,\varepsilon}$ et les morphismes

$$\sigma_X : X \otimes \square_1 \longrightarrow X$$

par $\sigma_X = 1_X \otimes \sigma_0^1$. On dira que cette donnée homotopique est la *donnée homotopique canonique sur \square* , et sera notée \square_1 .

PROPOSITION 6.2.26. *La catégorie des cubes est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test, et pour tout ensemble cubique X , les foncteurs*

$$Y \longmapsto X \otimes Y \quad \text{et} \quad Y \longmapsto Y \otimes X$$

respectent les ∞ -équivalences. En outre, le \square -localisateur des ∞ -équivalences est le plus petit \square -prélocalisateur contenant les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geq 0$.

DÉMONSTRATION. La catégorie \square est ∞ -asphérique, puisqu'elle admet un objet final, et donc il suffit de montrer qu'elle est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test locale. Comme pour tout $n \geq 0$, la flèche

$$1_{\square_n} \otimes \sigma_0^1 : \square_n \otimes \square_1 = \square_{n+1} \longrightarrow \square_n$$

est une ∞ -équivalence, les propositions 6.2.18 et 6.2.24, et le corollaire 6.1.40, impliquent la première assertion. On en déduit aussi que pour tout ensemble cubique X , tout entier $n \geq 0$, le morphisme $X \otimes \square_n \longrightarrow X$ est une ∞ -équivalence. Par conséquent, pour toute ∞ -équivalence $X \longrightarrow Y$ dans $\widehat{\square}$, les flèches

$$X \otimes \square_n \longrightarrow Y \otimes \square_n \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

sont encore des ∞ -équivalences. Le lemme 6.1.38 implique dès lors la deuxième assertion. Il reste à caractériser les ∞ -équivalences de $\widehat{\square}$ en termes de \square -prélocalisateurs. Le même argument que ci-dessus, mais assisté cette fois de la proposition 6.1.39, montre que le plus petit \square -prélocalisateur contenant les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geq 0$ est en fait le \square -localisateur engendré par les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geq 0$. D'autre part, comme \square est une catégorie squelettique régulière, tout \square -localisateur est régulier (proposition 6.1.33), et donc il résulte du théorème 5.1.10 que les ∞ -équivalences de $\widehat{\square}$ sont les éléments du \square -localisateur engendré par les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geq 0$, ce qui achève la démonstration. \square

PROPOSITION 6.2.27. *Le foncteur $i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square}$ détecte les ∞ -équivalences, i.e. un morphisme d'ensembles simpliciaux est une ∞ -équivalence si et seulement si sont image par le foncteur i^* en est une.*

DÉMONSTRATION. C'est une application directe de la proposition 5.2.8 pour $A = \square$ et $B = \Delta$, une fois remarqué que comme le plongement canonique de \square dans \mathcal{Cat} est un \mathcal{W}_∞ -foncteur test, l'ensemble cubique $i^*\Delta_1$ est localement \mathcal{W}_∞ -asphérique. \square

LEMME 6.2.28. *Le foncteur $i_! : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ respecte les monomorphismes.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur $i_!$ envoie l'inclusion $\partial \square_1 \longrightarrow \square_1$ sur son analogue $\partial \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1$ qui est un monomorphisme. Comme le foncteur $i_!$ est monoïdal, et comme les monomorphismes sont stables par produits finis, on en déduit aussitôt que les conditions du lemme 6.2.20 sont vérifiées, ce qui implique l'assertion. \square

PROPOSITION 6.2.29. *Le foncteur $i_!$ respecte les ∞ -équivalences, et les morphismes d'adjonction*

$$i_! i^* \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \text{et} \quad 1_{\widehat{\square}} \longrightarrow i^* i_!$$

sont des ∞ -équivalences dans $\widehat{\Delta}$ et dans $\widehat{\square}$ respectivement. En particulier, le couple $(i_!, i^*)$ est une équivalence de Quillen.

DÉMONSTRATION. On sait que le plongement canonique de \square dans \mathcal{Cat} est un \mathcal{W}_∞ -foncteur test (corollaire 6.2.13). Par conséquent, le foncteur induit

$$i^* : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{\square}$$

définit une équivalence de catégories

$$i^* : \text{Hot}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square},$$

Hot_∞ désignant la localisation de \mathcal{Cat} par les ∞ -équivalences. On sait par ailleurs que pour des raisons similaires, le foncteur nerf induit une équivalence de catégories

$$N : \text{Hot}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}.$$

Comme le foncteur $i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square}$ respecte les ∞ -équivalences, il induit un foncteur entre les catégories homotopiques correspondantes noté aussi par abus i^* , et on en déduit le triangle commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}_\infty & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \\ & \searrow N & \nearrow i^* \\ & & \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} \end{array}$$

Par conséquent, le foncteur

$$i^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square}$$

est une équivalence de catégories. D'autre part le foncteur $i_!$ respecte les ∞ -équivalences. En effet, comme le foncteur $i_!$ commute aux petites limites inductives, il résulte du lemme 6.2.28 que $i_!^{-1} \mathcal{W}_\infty$ est un \square -prélocalisateur, et il est évident qu'il contient les flèches $\square_n \longrightarrow \square_0$, $n \geq 0$, ce qui implique grâce à la dernière assertion de la proposition 6.2.26 que c'est un \square -localisateur qui contient les ∞ -équivalences. On vérifie aussitôt que le foncteur induit

$$i_! : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\square} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$$

est un adjoint à gauche du foncteur i^* , les morphismes d'adjonction étant induits par leurs analogues avant localisation, et donc que c'est une équivalence de catégories. La forte saturation des localisateurs permet alors de montrer que les morphismes d'adjonction de $i_!$ et i^* sont des ∞ -équivalences avant localisation. \square

6.2.30. Le foncteur $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$ respecte les ∞ -équivalences de $\widehat{\mathbf{Q}}$, et donc induit un foncteur

$$\otimes : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\mathbf{Q}} \times \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\mathbf{Q}} .$$

Comme $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\mathbf{Q}}$ est une catégorie équivalente à la catégorie Hot_∞ , cela induit un foncteur

$$\otimes : \text{Hot}_\infty \times \text{Hot}_\infty \longrightarrow \text{Hot}_\infty .$$

COROLLAIRE 6.2.31. *Le foncteur $\otimes : \text{Hot}_\infty \times \text{Hot}_\infty \longrightarrow \text{Hot}_\infty$ est le foncteur produit cartésien $(X, Y) \mapsto X \times Y$.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de de catégories de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\mathbf{Q}}$ vers $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$ est induite par le foncteur monoïdal $\hat{\iota}$. Il suffit donc de vérifier que le produit cartésien d'ensembles simpliciaux induit bien le produit cartésien dans Hot_∞ , ce qui est bien connu (cela se déduit par exemple du fait que Δ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test stricte). \square

REMARQUE 6.2.32. Le produit cartésien d'ensembles cubiques ne respecte pas les ∞ -équivalences en général. On peut par exemple calculer explicitement le type d'homotopie de l'ensemble cubique $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_1$: il s'agit d'une sphère dans laquelle on a tendu une corde, objet dont le lecteur conviendra certainement qu'il n'est même pas simplement connexe.

Cependant, comme la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\mathbf{Q}}$ est propre, si X est un ensemble cubique fibrant, le produit par X respecte les équivalences faibles.

6.2.33. Pour clore cette section concernant les ensembles cubiques, nous allons donner une description plus précise des fibrations pour la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\mathbf{Q}}$ (dont les équivalences faibles sont les ∞ -équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes).

On a vu que le produit tensoriel par \mathbf{Q}_1 définit une donnée homotopique canonique sur \mathbf{Q} , notée encore \mathbf{Q}_1 . Pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on définit le sous-objet homogène $\mathbf{\Pi}_n^{i,\varepsilon}$ de \mathbf{Q}_n par

$$\mathbf{\Pi}_n^{i,\varepsilon} = \bigcup_{(j,\eta) \neq (i,\varepsilon)} \text{Im } \delta_n^{j,\eta} ,$$

et on note $u_n^{i,\varepsilon}$ l'inclusion dans \mathbf{Q}_n .

$$u_n^{i,\varepsilon} : \mathbf{\Pi}_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{Q}_n$$

On définit l'ensemble J comme celui des flèches du type $u_n^{i,\varepsilon}$, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$. On obtient ainsi une donnée homotopique sur \mathbf{Q} :

$$(\mathbf{Q}_1, J) .$$

Si I désigne l'ensemble des inclusions du type

$$\partial \mathbf{Q}_n \longrightarrow \mathbf{Q}_n \quad , \quad n \geq 0 ,$$

on sait que I est un modèle cellulaire de $\widehat{\mathbf{Q}}$, et donc par le procédé du paragraphe 2.2.11, on obtient un petit ensemble d'extensions anodines

$$\Lambda_{\mathbf{Q}_1}(I, J) ,$$

puis une classe d'extensions anodines

$$l(r(\Lambda_{\square_1}(I, J))) .$$

D'autre part, la donnée homotopique (\square_1, J) définit une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles, les éléments d'un \square -localisateur noté \mathcal{W} .

LEMME 6.2.34. *On considère deux carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y'' \end{array}$$

tels que les flèches

$$Y \amalg_X X' \longrightarrow Y' \quad \text{et} \quad Y' \amalg_{X'} X'' \longrightarrow Y''$$

soient des extensions anodines. Alors la flèche

$$Y \amalg_X X'' \longrightarrow Y''$$

est une extension anodine.

DÉMONSTRATION. On a un carré cocartésien canonique :

$$\begin{array}{ccc} Y \amalg_X X' & \longrightarrow & Y \amalg_X X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y' \amalg_{X'} X'' \end{array} .$$

L'assertion résulte ainsi de la stabilité des extensions anodines par composition et par images directes. \square

LEMME 6.2.35. *Soient $m \geq 0$, $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ et $\varepsilon = 0, 1$. Les carrés commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \square_n^{i,\varepsilon} \otimes \partial \square_m & \longrightarrow & \square_n \otimes \partial \square_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square_n^{i,\varepsilon} \otimes \square_m & \longrightarrow & \square_n \otimes \square_m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \partial \square_m \otimes \square_n^{i,\varepsilon} & \longrightarrow & \partial \square_m \otimes \square_n^{i,\varepsilon} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square_m \otimes \partial \square_n & \longrightarrow & \square_m \otimes \square_n \end{array}$$

induisent les identifications

$$\square_n^{i,\varepsilon} \otimes \square_m \cup \square_n \otimes \partial \square_m = \square_{n+m}^{i,\varepsilon} \quad \text{et} \quad \square_m \otimes \partial \square_n \cup \partial \square_m \otimes \square_n^{i,\varepsilon} = \square_{m+n}^{i+m,\varepsilon} .$$

DÉMONSTRATION. Il résulte de la proposition 6.2.24 qu'on obtient bien de la sorte des sous-préfaïceaux de \square_{m+n} . Les identifications annoncées sont elles conséquences des lemmes 6.2.16 et 6.2.17. \square

LEMME 6.2.36. (i) *Tous les cornets, i.e. les éléments de J , sont des ∞ -équivalences.*

(ii) *On a l'égalité $\Lambda_{\square_1}(I, J) = J$.*

(iii) Pour toute paire, $i : X \longrightarrow Y$, $j : K \longrightarrow L$, de monomorphismes de d'ensembles cubiques, les inclusions

$$X \otimes \square_1 \otimes K \cup Y \otimes \{\varepsilon\} \otimes L \longrightarrow Y \otimes \square_1 \otimes L \quad , \quad \varepsilon = 0, 1 ,$$

induites par les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \square_0 \otimes K & \xrightarrow{i \otimes 1_{\square_0} \otimes j} & Y \otimes \square_0 \otimes L \\ \downarrow 1_X \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_K & & \downarrow 1_Y \otimes \delta_1^{1,\varepsilon} \otimes 1_L \\ X \otimes \square_1 \otimes K & \xrightarrow{i \otimes 1_{\square_1} \otimes j} & Y \otimes \square_1 \otimes L \quad , \end{array}$$

sont des extensions anodines. En particulier, pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$, les morphismes

$$\delta_n^{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \longrightarrow \square_n$$

sont des extensions anodines.

DÉMONSTRATION. (i) Les deux inclusions $\square_1^{1,\varepsilon} \longrightarrow \square_1$, $\varepsilon = 0, 1$, sont les morphismes $\delta_1^{1,\varepsilon}$ et sont donc des ∞ -équivalences. Pour montrer que $\square_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \square_n$ est une ∞ -équivalence, on procède par récurrence sur $n \geq 1$ grâce au lemme précédent.

(ii) En reprenant les notations de 2.2.11, le lemme 6.2.35 montre que $J = \Lambda^0$ et implique que $\Lambda(J) \subset J$, ce qui prouve l'assertion.

(iii) En vertu de la proposition 6.2.24, de 6.2.35 et de [26, lemme 4.2.4], si $K \longrightarrow L$ est une extension anodine et $X \longrightarrow Y$ un monomorphisme, les flèches

$$L \otimes X \cup K \otimes Y \longrightarrow L \otimes Y \quad \text{et} \quad X \otimes L \cup Y \otimes K \longrightarrow Y \otimes L$$

sont des extensions anodines. L'assertion résulte ainsi du lemme 6.2.34. Il reste à vérifier que cela permet de réaliser les applications du type $\delta_n^{i,\varepsilon}$ comme des extensions anodines. Pour cela, il suffit de voir que lorsque $Y = \square_{i-1}$, $L = \square_{n-i}$ et $X = K = \emptyset$, on obtient par cette construction $\delta_n^{i,\varepsilon}$. \square

THÉORÈME 6.2.37. La catégorie des ensembles cubiques admet une structure de catégorie de modèles fermée propre, dont les équivalences faibles sont les ∞ -équivalences, et les cofibrations, les monomorphismes. Cette structure est engendrée par le couple (I, J) , où I désigne l'ensemble des inclusions de bords

$$i_n : \partial \square_n \longrightarrow \square_n \quad , \quad n \geq 0 ,$$

et J celui des inclusions de cornets

$$u_n^{i,\varepsilon} : \square_n^{i,\varepsilon} \longrightarrow \square_n \quad , \quad n \geq 1 , \quad 1 \leq i \leq n , \quad \varepsilon = 0, 1 .$$

DÉMONSTRATION. La première assertion résulte du fait que \mathcal{W}_∞ est un localisateur fondamental propre et que \square est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test. Il s'agit de montrer que la structure de catégorie de modèles fermée obtenue est engendrée par le couple (I, J) . On sait déjà que I est un modèle cellulaire de $\widehat{\square}$. Il suffit donc de montrer que J engendre bien les cofibrations triviale.

On a considéré au numéro 6.2.33 une donnée homotopique sur $\widehat{\square}$,

$$(\square_1, J) ,$$

laquelle définit un \square -localisateur noté \mathcal{W} , ainsi qu'une notion d'extensions anodines dans $\widehat{\square}$. La construction du paragraphe 2.2.41 montre que cette donnée homotopique induit pour chaque ensemble cubique X , une donnée homotopique sur $\widehat{\square}/X$:

$$(\square_{1,X}, J_X) .$$

On note \mathcal{W}_X le \square/X -localisateur des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\square}/X$ induite par celle-ci. Cette donnée homotopique définit aussi une notion d'extensions anodines dans $\widehat{\square}/X$.

6.2.37.1. *Pour tout ensemble cubique X , toute \mathcal{W}_X -équivalence est une ∞ -équivalence.*

Soit X un ensemble cubique. La formule (2.2.41.1) et 6.2.36, (ii) montrent que la classe des extensions anodines au-dessus de X est engendrée par le petit ensemble J_X , c'est-à-dire par les morphismes du type

$$\begin{array}{ccc} \square_n^{i,\varepsilon} & \xrightarrow{u_n^{i,\varepsilon}} & \square_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array} \quad n \geq 1, 1 \leq i \leq n, \varepsilon = 0, 1 .$$

D'autre part, en vertu de la proposition 2.3.2, \mathcal{W}_X est le \square/X -localisateur engendré par J_X . Or comme une flèche de $\widehat{\square}/X$ est une ∞ -équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{\square}$ en est une, 6.2.36, (i) implique que tous les éléments de J_X sont des ∞ -équivalences. Comme \square est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test, \square/X est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test locale, et donc les ∞ -équivalences de $\widehat{\square}/X$ forment un \square/X -localisateur, ce qui prouve l'assertion.

6.2.37.2. *Pour tout ensemble cubique X , \mathcal{W}_X est exactement le \square/X -localisateur des ∞ -équivalences.*

Soit X un ensemble cubique. On sait que \square est une catégorie squelettique régulière, et donc il résulte de la proposition 6.1.33 que \mathcal{W}_X est un \square/X -localisateur régulier. D'autre part, on sait que les flèches de $\widehat{\square}$ du type $\delta_n^{i,\varepsilon}$ sont des extensions anodines (6.2.36, (iii)). En vertu du lemme 2.2.42, toutes les flèches de $\widehat{\square}/X$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} \square_{n-1} & \xrightarrow{\delta_n^{i,\varepsilon}} & \square_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

sont des extensions anodines, et donc, en particulier, des \mathcal{W}_X -équivalences. On en déduit aussitôt que les flèches de la forme

$$\begin{array}{ccc} \square_{n+1} & \xrightarrow{\sigma_n^i} & \square_n \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

sont aussi des \mathcal{W}_X -équivalences. La proposition 5.4.8 implique alors que toute ∞ -équivalence est une \mathcal{W}_X -équivalence, ce qui permet de conclure en vertu de 6.2.37.1.

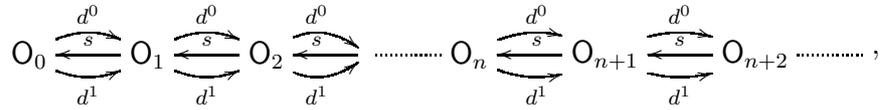
6.2.37.3. *Toute cofibration triviale de $\widehat{\square}$ au sens de \mathcal{W} est une extension anodine.*

Il résulte de 6.2.37.2 que pour tout ensemble cubique X , une flèche de $\widehat{\square}/X$ est une \mathcal{W}_X -équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{\square}$ par le foncteur d'oubli est une \mathcal{W} -équivalence. La proposition 2.2.44 prouve donc l'assertion.

Ceci achève la démonstration du théorème, puisqu'une nouvelle application de 6.2.37.2 dans le cas où $X = \square_0$ montre que $\mathcal{W} = i_{\square}^{-1}\mathcal{W}_{\infty}$. \square

3. Le contre-exemple globulaire

6.3.1. La *catégorie des globes*, notée \mathbb{O} , est la catégorie engendrée par le graphe ci-dessous,



avec les relations

$$\begin{aligned} d^0 d^0 &= d^1 d^0 \\ d^1 d^1 &= d^0 d^1 \\ s d^0 &= 1 = s d^1 . \end{aligned}$$

Pour $m \leq n$ et $e = 0, 1$, on note $d^{e,n-m} : \mathcal{O}_m \longrightarrow \mathcal{O}_n$ le morphisme composé

$$\mathcal{O}_m \xrightarrow{d^e} \mathcal{O}_{m+1} \xrightarrow{d^e} \cdots \xrightarrow{d^e} \mathcal{O}_{n-1} \xrightarrow{d^e} \mathcal{O}_n ,$$

et $s^{n-m} : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_m$ le morphisme composé

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{n-1} \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{m+1} \xrightarrow{s} \mathcal{O}_m .$$

Le principe de construction de cette catégorie est celui de la décomposition des boules selon le modèle sphérique. On peut en effet définir un foncteur de la catégorie des globes à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques en envoyant chaque objet \mathcal{O}_n sur la boule unité B^n de \mathbb{R}^n . Les opérateurs de type d^e correspondent à l'envoi B^n sur un hémisphère de B^{n+1} , et ceux de type s écrasent B^{n+1} sur l'un de ses équateurs.

La catégorie des préfaisceaux sur \mathbb{O} est appelée la *catégorie des ensembles globulaires*.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 6.3.2. *Tout morphisme de \mathbb{O} admet une unique décomposition de la forme*

$$\mathcal{O}_m \xrightarrow{s^{m-p}} \mathcal{O}_p \xrightarrow{d^{e,n-p}} \mathcal{O}_n ,$$

où $m \geq p \leq n$, et $e = 0, 1$. *En particulier, les monomorphismes (resp. les épimorphismes) de \mathbb{O} sont les flèches de la forme $d^{e,n}$, $e = 0, 1$, $n \geq 0$ (resp. s^n , $n \geq 0$). Chaque épimorphisme de \mathbb{O} qui n'est pas une identité admet exactement*

deux sections, et chaque monomorphisme de \mathbb{O} admet exactement une rétraction. Si $m, n \geq 0$, il existe un épimorphisme de \mathbb{O}_m vers \mathbb{O}_n si et seulement si $m \geq n$, et un tel épimorphisme est alors unique. L'objet \mathbb{O}_0 est donc un objet final de la catégorie \mathbb{O} .

PROPOSITION 6.3.3. *La catégorie des globes est une catégorie squelettique.*

DÉMONSTRATION. On note \mathbb{O}_+ (resp. \mathbb{O}_-) la sous-catégorie de \mathbb{O} ayant les mêmes objets mais dont les flèches sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes), et $\lambda_{\mathbb{O}}(\mathbb{O}_n) = n$ pour $n \geq 0$. Le lemme ci-dessus implique aussitôt l'assertion. \square

6.3.4. On note pour $n \geq 0$, $\partial \mathbb{O}_n$ le bord de \mathbb{O}_n . On a donc $\partial \mathbb{O}_0 = \emptyset$, et pour $n > 0$, $\mathbb{O}_n = \text{Im } d^0 \cup \text{Im } d^1$ (d^e désignant la face de \mathbb{O}_{n-1} vers \mathbb{O}_n). Pour $n \geq 0$ on note $i_n : \partial \mathbb{O}_n \rightarrow \mathbb{O}_n$ l'inclusion canonique.

COROLLAIRE 6.3.5. *L'ensemble des inclusions $i_n : \partial \mathbb{O}_n \rightarrow \mathbb{O}_n$, $n \geq 0$, est un modèle cellulaire de $\widehat{\mathbb{O}}$.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte des propositions 6.1.28 et 6.3.3. \square

LEMME 6.3.6. *Pour tout $n \geq 0$, le carré suivant est cartésien.*

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{O}_n & \xrightarrow{i_n} & \mathbb{O}_n \\ i_n \downarrow & & \downarrow d^0 \\ \mathbb{O}_n & \xrightarrow{d^1} & \mathbb{O}_{n+1} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit u et v , deux flèches de \mathbb{O} , de \mathbb{O}_m vers \mathbb{O}_n , telles que $d^0 u = d^1 v$. Comme $sd^e = 1$ pour $e = 0, 1$, on a nécessairement $u = v$. En outre, u admet une factorisation unique de la forme

$$\mathbb{O}_m \xrightarrow{s^{m-p}} \mathbb{O}_p \xrightarrow{d^{e, n-p}} \mathbb{O}_n, \quad m \geq p \leq n.$$

Pour montrer que u se factorise par \mathbb{O}_n , il suffit de montrer que $p < n$. Or si $p = n$, alors $u = s^{m-n}$, d'où $d^0 s^{m-n} = d^1 s^{m-n}$. Comme s^{m-n} admet une section, cela implique que $d^0 = d^1$, ce qui est contradictoire. L'unicité d'une telle factorisation résulte du fait que i_n est un monomorphisme de $\widehat{\mathbb{O}}$. \square

COROLLAIRE 6.3.7. *La catégorie des globes est une catégorie squelettique régulière.*

DÉMONSTRATION. Le lemme ci-dessus implique que pour $n \geq 1$, le carré suivant est à la fois cartésien et cocartésien,

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{O}_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & \mathbb{O}_{n-1} \\ i_{n-1} \downarrow & & \downarrow d^0 \\ \mathbb{O}_{n-1} & \xrightarrow{d^1} & \partial \mathbb{O}_n \end{array},$$

ce qui implique aussitôt l'assertion. \square

SCHOLIE 6.3.8. Soit X un ensemble globulaire. On lui associe un graphe $Gr(X)$ par $\text{Ob } Gr(X) = X_0$ et par $\text{Fl } Gr(X) = X_1 - \text{Im } X_s$, où $X_s : X_0 \longrightarrow X_1$ est l'application correspondant à la flèche $s : \mathbf{O}_0 \longrightarrow \mathbf{O}_1$. On peut montrer par un calcul explicite que le groupoïde fondamental de la catégorie \mathbb{O}/X est le groupoïde libre engendré par $Gr(X)$. Cela implique que \mathbb{O} ne peut pas être une \mathcal{W}_∞ -catégorie test (faible), ni même une \mathcal{W}_1 -catégorie test (voir 7.1.4), contrairement à ce qui est affirmé parfois dans [21].

Pour consruire des catégories test suivant le principe de la décomposition des sphères, on peut considérer cependant la catégorie \mathbb{O} et l'“enrichir” d'une autre combinatoire plus riche.

On peut considérer par exemple Ξ , la catégorie monoïdale (stricte) engendrée par la catégorie des globes telle que \mathbf{O}_0 soit l'objet unité, ce qui correspond à l'introduction de la combinatoire cubique. On obtient ainsi une catégorie test grâce à la proposition 6.2.12, et on peut montrer qu'on a même obtenu de la sorte une catégorie squelettique régulière (en explicitant Ξ à partir de \mathbb{O} par un énoncé du même type que 6.2.2, et en utilisant que c'est le cas pour \mathbb{O}). Cela devrait permettre d'obtenir un énoncé du même type que le théorème 6.2.37 pour Ξ .

Une autre possibilité consiste à enrichir \mathbb{O} de la combinatoire simpliciale : il s'agit de la catégorie Θ de Joyal. Le fait que l'on obtient de la sorte une catégorie test résulte de [3, théorème 3.9] et du théorème 5.1.10. En fait, il résulte de [3, lemme 2.4, a), b)] que Θ est une catégorie squelettique, et un peut plus d'inspection montre qu'elle est régulière. Autrement dit, la théorie exposée ici permet de donner une preuve purement combinatoire de [3, théorème 3.9], *i.e.* du fait que Θ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test et que la catégorie des préfaisceaux sur Θ admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à engendrement cofibrant, dont les équivalences faibles sont les ∞ -équivalences, les cofibrations, les monomorphismes, et dont les fibrations sont déterminées par des propriétés de relèvement relativement à un ensemble explicite de cornets. Une démonstration complète fera l'objet d'une rédaction ultérieure.

Zoologie (2) : localisateurs fondamentaux

1. Types d'homotopie tronqués

7.1.1. Soit $n \geq -1$ un entier. On désigne par $\Delta_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine de Δ dont les objets sont les simplexes Δ_m , $m \leq n$, i_n désignant l'inclusion canonique de $\Delta_{\leq n}$ dans Δ . On obtient de la sorte un triplet de foncteurs adjoints $(i_{n!}, i_n^*, i_{n*})$, où

$$i_n^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta_{\leq n}}$$

est le foncteur image inverse associé à i_n . Le n -ème *foncteur squelette*,

$$\text{Sk}^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad ,$$

est défini par la formule $\text{Sk}^n = i_{n!} i_n^*$, et le n -ème *foncteur cosquelette*,

$$\text{Cosk}^n : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad ,$$

par la formule $\text{Cosk}^n = i_{n*} i_n^*$. On a en outre deux morphismes d'adjonction

$$\varepsilon^n : \text{Sk}^n \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}} \quad \text{et} \quad \eta^n : 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow \text{Cosk}^n \quad .$$

Ces derniers induisent des isomorphismes après application du foncteur i_n^* , puisque les foncteurs $i_{n!}$ et i_{n*} sont pleinement fidèles. Il est d'autre part immédiat que le n -ème foncteur squelette est un adjoint à gauche du n -ème foncteur cosquelette.

PROPOSITION 7.1.2. *Soit X un complexe de Kan. Pour tout n , $-1 \leq n$, l'ensemble simplicial $\text{Cosk}^n X$ est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. Soient $q \geq 1$ et $1 \leq k \leq q$ des entiers, et u un morphisme de Λ_q^k vers $\text{Cosk}^n X$. Si $q \leq n+1$, alors $\text{Sk}^n \Lambda_q^k = \Lambda_q^k$, et donc on a une factorisation de u de la forme

$$\Lambda_q^k \xrightarrow{v} X \xrightarrow{\eta_X^n} \text{Cosk}^n X \quad .$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_u$

Comme X est un complexe de Kan, v se complète en un morphisme de Δ_q vers X , et donc il en est de même de u . Si $q > n+1$, alors $\text{Sk}^n \Lambda_q^k = \text{Sk}^n \Delta_q$, et donc u admet une (unique) complétion en un q -simplexe de $\text{Cosk}^n X$. \square

PROPOSITION 7.1.3. *Soient X un complexe de Kan, x un 0-simplexe de X , et $n \geq 1$ un entier. Pour tout entier $i \geq n$, le groupe d'homotopie $\pi_i(\text{Cosk}^n X, x)$ est trivial, et pour tout entier i , $0 \leq i \leq n-1$, le morphisme η_X^n induit un isomorphisme*

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\text{Cosk}^n X, x) \quad .$$

DÉMONSTRATION. Lorsque (X, x) est un complexe de Kan pointé, $\pi_i(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie pointée de morphismes pointés d'une i -sphère (pointée) S^i vers (X, x) . Dans la catégorie des ensembles simpliciaux, le bord $\partial \Delta_{i+1}$ de Δ_i a le type d'homotopie d'une i -sphère. Or pour $i \geq n$, on a les égalités

$$\mathrm{Sk}^n \partial \Delta_{i+1} = \mathrm{Sk}^n \mathrm{Sk}^i \Delta_{i+1} = \mathrm{Sk}^n \Delta_{i+1} .$$

Par conséquent, tout morphisme de $\partial \Delta_{i+1}$ vers $\mathrm{Cosk}^n X$ se factorise par un ensemble simplicial contractile, ce qui implique la première assertion. Si $i < n$, on a les identifications

$$\mathrm{Sk}^n \partial \Delta_{i+1} = \partial \Delta_{i+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sk}^n(\partial \Delta_{i+1} \times \Delta_1) = \partial \Delta_{i+1} \times \Delta_1 .$$

Comme l'adjonction entre Sk^n et Cosk^n respecte les points bases éventuels, on en déduit facilement la seconde et dernière assertion. \square

Dans la suite de cette section, on fixe un entier $n \geq -2$.

7.1.4. On note \mathcal{W}_n le plus petit localisateur fondamental tel que la catégorie $\Delta / \partial \Delta_{n+2}$ soit asphérique. Il résulte du corollaire 5.2.20 que \mathcal{W}_n est un localisateur fondamental propre (et donc en particulier accessible). On parlera de n -équivalences, de foncteurs n -asphériques, etc, au lieu de \mathcal{W}_n -équivalences, de foncteurs \mathcal{W}_n -asphérique, etc.

Vu que la catégorie des simplexes Δ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test, elle est aussi une \mathcal{W}_n -catégorie test. Le théorème 5.1.10 permet une description explicite des n -équivalences dans $\widehat{\Delta}$: il s'agit du plus petit Δ -localisateur test (i.e. en l'occurrence contenant les projections $\Delta_n \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_n$ pour $n \geq 0$) tel que l'inclusion $\partial \Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_{n+2}$ soit une équivalence faible (car Δ_{n+2} est Δ_1 -contractile). Si on note Δ_1 la donnée homotopique élémentaire sur Δ , définie par le segment Δ_1 , la classe des n -équivalences peut donc être caractérisée comme la classe des équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée associée à la donnée homotopique sur Δ

$$(\Delta_1, \{\partial \Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_{n+2}\}) .$$

On appellera n -extensions anodines les extensions anodines définies par cette donnée homotopique, et objets n -fibrants les objets fibrants au sens de cette structure. Un ensemble simplicial X est donc n -fibrant si et seulement si la flèche de X vers l'objet final de $\widehat{\Delta}$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux n -extensions anodines (voir la proposition 2.2.29).

LEMME 7.1.5. *La catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ est une catégorie squelettique régulière. En outre, pour $0 \leq m \leq n+1$, on a une identification canonique dans $\widehat{\Delta}$: $i_{n+1!} \partial \Delta_m \simeq \partial \Delta_m$. En particulier, le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les monomorphismes.*

DÉMONSTRATION. La structure de catégorie squelettique sur $\Delta_{\leq n+1}$ est induite de celle de Δ (6.1.31) de manière évidente. Si $0 \leq m \leq n+1$, $\Delta_{\leq n+1} / \Delta_m$ est une sous-catégorie pleine de Δ / Δ_m , et il résulte de la proposition 6.1.15 que $\mathrm{Sk}^{m-1} \Delta_{\leq n+1} / \Delta_m = \mathrm{Sk}^{m-1} \Delta / \Delta_m$, ce qui s'interprète par un isomorphisme canonique $i_{n+1!} \partial \Delta_m \simeq \partial \Delta_m$. Comme le foncteur i_{n+1}^* commute aux limites projectives et inductives finies, la pleine fidélité de $i_{n+1!}$ montre que la structure de sous-objet

homogène de $\partial \Delta_m$ dans $\widehat{\Delta}$ induit une structure analogue sur $\partial \Delta_m$ dans $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$. La dernière assertion est une conséquence de la proposition 6.1.28. \square

7.1.6. Pour chaque $m, 0 \leq m \leq n+1$, on a un foncteur évident de $\Delta_{\leq n+1}/\Delta_m$ vers Δ/Δ_m , et comme les foncteurs $i_{\Delta_{\leq n+1}}$ et i_{Δ} commutent aux petites limites inductives (A.1.15), cela définit un morphisme de foncteurs

$$i_{\Delta_{\leq n+1}} \longrightarrow i_{\Delta} i_{n+1!} .$$

LEMME 7.1.7. *Pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , le morphisme de foncteurs ci-dessus est une \mathcal{W} -équivalence. En particulier, un morphisme de préfaisceaux sur $\Delta_{\leq n+1}$ est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image par le foncteur $i_{n+1!}$ en est une dans $\widehat{\Delta}$.*

DÉMONSTRATION. Comme l'inclusion canonique de Δ dans $\mathcal{C}at$ est un \mathcal{W} -foncteur test, une flèche de $\mathcal{C}at$ est une \mathcal{W} -équivalence si et seulement si son image dans $\widehat{\Delta}$ par le foncteur nerf en est une. Il suffit donc de montrer que pour tout préfaisceau X sur $\Delta_{\leq n+1}$, le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$N i_{\Delta_{\leq n+1}} X \longrightarrow N i_{\Delta} i_{n+1!} X$$

est une \mathcal{W} -équivalence dans $\widehat{\Delta}$. Lorsque X est représentable, la source et le but sont contractiles, ce qui rend l'assertion triviale. Le cas général résulte donc du lemme 6.1.38 (lequel est applicable ici grâce au corollaire A.1.12). \square

LEMME 7.1.8. *Pour tout entier $m \geq n+2$, l'inclusion canonique*

$$\partial \Delta_m \longrightarrow \Delta_m$$

est une n -équivalence dans $\widehat{\Delta}$.

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur m . Lorsque $m = n+2$, l'assertion est vérifiée par définition des n -équivalences. Si $m > n+2$, on vérifie qu'on a un carré cocartésien de la forme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta_{m-1} & \longrightarrow & \Lambda_m^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{m-1} & \xrightarrow{\delta_m^m} & \partial \Delta_m \end{array} ,$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes. Les ensembles simpliciaux $\partial \Delta_{m-1}$, Δ_{m-1} et Λ_m^m étant n -sphériques, on en conclut qu'il en est de même de $\partial \Delta_m$. \square

PROPOSITION 7.1.9. *Pour tout entier $m \geq n+1$, le morphisme de foncteurs*

$$i_{m!} i_m^* \simeq \text{Sk}^m \longrightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$$

est une n -équivalence.

DÉMONSTRATION. Comme l'identité de $\widehat{\Delta}$ est la réunion des foncteurs Sk^m , et comme les n -équivalences sont stables par compositions dénombrables, il suffit

de montrer que pour $m \geq n + 1$, les inclusions $\mathrm{Sk}^m \longrightarrow \mathrm{Sk}^{m+1}$ sont des n -équivalences. Or en vertu du lemme 6.1.27, pour tout ensemble simplicial X , on a un carré cocartésien de la forme

$$\begin{array}{ccc} \amalg \partial \Delta_{m+1} & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^m X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg \Delta_{m+1} & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{m+1} X \end{array} \quad ,$$

et donc le lemme précédent implique l'assertion. \square

COROLLAIRE 7.1.10. *La catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ est une \mathcal{W}_n -catégorie test stricte, et le foncteur $i_{n+1} : \Delta_{\leq n+1} \longrightarrow \Delta$ est n -asphérique. En conséquence, le couple de foncteurs adjoints (i_{n+1}^*, i_{n+1*}) est une équivalence de Quillen de $\widehat{\Delta}$ vers $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ (pour les structures de catégories de modèles fermées associées aux n -équivalences). En outre, les foncteurs $i_{n+1!}$ et i_{n+1}^* respectent les n -équivalences et définissent une équivalence de Quillen de $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ vers $\widehat{\Delta}$.*

DÉMONSTRATION. Le préfaisceau $i_{n+1}^* \Delta_1$ est canoniquement muni d'une structure de segment séparant, et pour tout m , $0 \leq m \leq n + 1$, $\Delta_m \times i_{n+1}^* \Delta_1$ est n -asphérique dans $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$; en effet, on a un isomorphisme canonique dans $\widehat{\Delta}$,

$$i_{n+1!}(\Delta_m \times i_{n+1}^* \Delta_1) \simeq \mathrm{Sk}^{n+1}(\Delta_m \times \Delta_1) \ ,$$

et donc le lemme 7.1.7 et la proposition 7.1.9 permettent de conclure. Le lemme 1.1.27 implique que les n -équivalences de $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ contiennent les fibrations triviales, et ainsi forment un $\Delta_{\leq n+1}$ -localisateur. La catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ est donc bien une \mathcal{W}_n -catégorie test. Comme tout objet de $\Delta_{\leq n+1}$ est $i_{n+1}^* \Delta_1$ -contractile, elle est stricte (cf. 5.5.5).

Montrons que l'inclusion i_{n+1} est un foncteur n -asphérique. Soit Δ_m un objet de Δ . En vertu du lemme 7.1.7, on a une n -équivalence dans $\mathcal{C}at$:

$$\Delta_{\leq n+1} / \Delta_m = \Delta_{\leq n+1} / i_{n+1}^* \Delta_m \longrightarrow \Delta / i_{n+1!} i_{n+1}^* \Delta_m = \Delta / \mathrm{Sk}^{n+1} \Delta_m \ .$$

Or la proposition 7.1.9 implique que le but de celle-ci est n -asphérique, ce qui prouve l'assertion.

La première équivalence de Quillen résulte de la proposition 5.1.18. La seconde est justifiée par les lemmes 7.1.5 et 7.1.7. \square

REMARQUE 7.1.11. Il résulte aussitôt de ce corollaire que le couple de foncteurs (i_{n+1}^*, i_{n+1*}) est une adjonction de Quillen de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\Delta}$ correspondant aux ∞ -équivalences vers celle sur $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ correspondant aux n -équivalences. En outre, le foncteur dérivé à droite

$$\mathrm{R}i_{n+1*} : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_n} \widehat{\Delta_{\leq n+1}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta}$$

est pleinement fidèle : en effet, il suffit de vérifier que si X est un objet n -fibrant de $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ (i.e. fibrant au sens de \mathcal{W}_n), le morphisme $i_{n+1}^* i_{n+1*} X \longrightarrow X$ est une n -équivalence, et comme i_{n+1*} est pleinement fidèle, c'est un isomorphisme. Autrement dit, le foncteur

$$i_{n+1}^* : \mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{W}_n} \widehat{\Delta_{\leq n+1}}$$

fournit une description explicite de la localisation \mathbf{Hot}_n de \mathbf{Hot}_∞ par les n -équivalences.

COROLLAIRE 7.1.12. *Pour tout $m \geq n + 1$, la catégorie $\Delta_{\leq m}$ est une \mathcal{W}_n -catégorie test stricte, et l'inclusion $i_m : \Delta_{\leq m} \longrightarrow \Delta$ est un foncteur n -asphérique.*

DÉMONSTRATION. Le lemme 7.1.8 implique que pour $m \geq n + 1$, on a l'inclusion $\mathcal{W}_{m-1} \subset \mathcal{W}_n$, ce qui prouve l'assertion en vertu du corollaire précédent. \square

LEMME 7.1.13. *Un complexe de Kan X est n -fibrant si et seulement si l'unique flèche de X vers l'ensemble simplicial final vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions du type*

$$\partial \Delta_m \times \Delta_{n+2} \cup \Delta_m \times \partial \Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_{n+2}, \quad m \geq 0.$$

DÉMONSTRATION. En vertu de [26, lemme 4.2.4], si X vérifie cette propriété, alors pour tout monomorphisme $K \longrightarrow L$ dans $\widehat{\Delta}$, la flèche $X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à l'inclusion

$$K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial \Delta_{n+2} \longrightarrow L \times \Delta_{n+2}.$$

La construction de l'ensemble générateur des n -extensions anodines (voir le numéro 2.2.11) implique alors que $X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout élément d'icelui. Par conséquent, $X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à toute n -extension anodine, ce qui montre bien que X est n -fibrant (2.2.29). Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que les inclusions invoquées dans l'énoncé sont des n -équivalences. Or comme Δ est une catégorie test stricte, les n -équivalences sont stables par produits finis dans $\widehat{\Delta}$. Par conséquent, si $K \longrightarrow L$ est un monomorphisme, on a un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} K \times \partial \Delta_{n+2} & \longrightarrow & L \times \partial \Delta_{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \times \Delta_{n+2} & \longrightarrow & L \times \Delta_{n+2} \end{array},$$

dont toutes les flèches sont des monomorphismes, et dont les flèches verticales sont des n -équivalences. Les n -cofibrations triviales étant stables par images directes, on en déduit que le morphisme canonique de $L \times \partial \Delta_{n+2}$ vers $K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial \Delta_{n+2}$ est une n -équivalence, et donc le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \times \partial \Delta_{n+2} & \longrightarrow & K \times \Delta_{n+2} \cup L \times \partial \Delta_{n+2} \\ & \searrow & \swarrow \\ & L \times \Delta_{n+2} & \end{array}$$

permet de conclure. \square

LEMME 7.1.14. *Soient $m \geq -1$ un entier, et $j : K \longrightarrow L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux tels que le morphisme induit $i_m^* j : i_m^* K \longrightarrow i_m^* L$ soit un isomorphisme. Alors pour tout préfaisceau X sur $\Delta_{\leq n}$, l'unique flèche $i_{m*} X \longrightarrow *$ vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à j .*

DÉMONSTRATION. Vu que toute flèche vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à tout isomorphisme, cela résulte du fait que le foncteur i_{m*} est un adjoint à droite du foncteur i_m^* . \square

PROPOSITION 7.1.15. *Un préfaisceau sur $\Delta_{\leq n+1}$ est n -fibrant si et seulement si son image par le foncteur i_{n+1*} est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. Si X est un préfaisceau n -fibrant sur $\Delta_{\leq n+1}$, alors $i_{n+1*}X$ est n -fibrant dans $\widehat{\Delta}$ (7.1.10), et donc est un complexe de Kan. On remarque que pour $m \geq 0$, l'image de l'inclusion

$$\partial \Delta_m \times \Delta_{n+2} \cup \Delta_m \times \partial \Delta_{n+2} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_{n+2}$$

par le foncteur i_{n+1}^* est un isomorphisme : comme le foncteur i_{n+1}^* commute aux images directes, cela résulte du fait que c'est le cas pour les inclusions de la forme

$$\partial \Delta_{n+2} \times K \longrightarrow \Delta_{n+2} \times K \quad , \quad K \in \text{Ob } \widehat{\Delta} .$$

La réciproque résulte donc des lemmes 7.1.13 et 7.1.14. \square

COROLLAIRE 7.1.16. *Pour tout complexe de Kan X , $\text{Cosk}^{n+1} X$ est n -fibrant.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte des propositions 7.1.2 et 7.1.15. \square

COROLLAIRE 7.1.17. *On suppose ici que $n \geq 0$. Un morphisme d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ est une n -équivalence si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

1) *Le morphisme u induit une bijection*

$$\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) .$$

2) *Pour tout $x \in X_0$, et tout entier i , $1 \leq i \leq n$, u induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, u(x)) .$$

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer u par exemple par $\text{Ex}^\infty u$, on peut supposer que X et Y sont des complexes de Kan. Comme $\text{Cosk}^{n+1} u$ est un morphisme entre ensembles simpliciaux n -fibrants (7.1.16), c'est une n -équivalence si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie, ou encore, de manière équivalente (les objets n -fibrants de $\widehat{\Delta}$ étant en particulier des complexes de Kan), si et seulement si c'est une ∞ -équivalence. Le corollaire résulte donc de la proposition 7.1.3 et de la caractérisation analogue des ∞ -équivalences. \square

REMARQUE 7.1.18. On peut décrire les n -équivalences pour $n = -1$ ou $n = -2$: comme $\Delta_{\leq -1}$ est la catégorie vide, on vérifie facilement que le corollaire 7.1.10 implique l'égalité $\mathcal{W}_{-2} = \text{FICat}$; pour ce qui est des -1 -équivalences, la catégorie $\Delta_{\leq 0}$ étant la catégorie ponctuelle, $\widehat{\Delta}_{\leq 0}$ est la catégorie des ensembles. Or l'objet de Lawvere de $\mathcal{E}ns$ est l'ensemble à deux éléments, tout en étant dans ce cas asphérique. C'est alors un exercice facile de vérifier qu'un foncteur entre petites catégories, $A \longrightarrow B$, est une -1 -équivalence si et seulement si A et B sont non-vides, ou bien si B est vide. Autrement dit, on obtient de la sorte les deux localisateurs fondamentaux grossiers définis dans [36].

COROLLAIRE 7.1.19. *On a l'égalité $\mathcal{W}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{W}_n$.*

PROPOSITION 7.1.20. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *La catégorie $\Delta / \partial \Delta_{n+2}$ est \mathcal{W} -asphérique.*
- (b) *Toute n -équivalence est une \mathcal{W} -équivalence.*
- (c) *Le foncteur $i_{n+1} : \Delta_{\leq n+1} \longrightarrow \Delta$ est \mathcal{W} -asphérique.*
- (d) *La catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ est une \mathcal{W} -catégorie test stricte.*
- (d') *La catégorie $\Delta_{\leq n+1}$ est une \mathcal{W} -catégorie test.*

En particulier, \mathcal{W}_n est le plus petit localisateur fondamental modelable par $\Delta_{\leq n+1}$.

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre (a) et (b) est triviale. Le corollaire 7.1.10 montre que (b) implique (c), et que (b) implique (d). Le lemme 7.1.7 permet quant à lui de s'assurer que (c) implique (a). Comme l'implication (d) \Rightarrow (d') est triviale, il reste donc à montrer que (d') implique (a), ce qui revient encore à montrer la dernière assertion.

Soit \mathcal{W} le plus petit localisateur fondamental modelable par $\Delta_{\leq n+1}$. Le corollaire 7.1.10 implique que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_n$, et en vertu du théorème 5.1.10, \mathcal{W} est un localisateur fondamental accessible. Le couple $(i_{n+1!}, i_{n+1}^*)$ définit une équivalence de Quillen de $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$ vers $\widehat{\Delta}$ pour les \mathcal{W} -équivalences : les lemmes 7.1.5 et 7.1.7 montrent qu'ils définissent une adjonction de Quillen, que le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les \mathcal{W} -équivalences, et que le triangle suivant commute à isomorphisme de foncteurs près

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta_{\leq n+1}} & \xrightarrow{i_{n+1!} = L i_{n+1}^*} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{\Delta} \\
 \searrow i_{\Delta_{\leq n+1}} & & \swarrow i_{\Delta} \\
 & \text{Hot}_{\mathcal{W}} &
 \end{array}
 \quad ;$$

les deux foncteurs obliques étant des équivalences de catégories, il en est donc de même de l'horizontal. Soit X un préfaisceau n -asphérique sur $\Delta_{\leq n+1}$. On va montrer que X est \mathcal{W} -asphérique. Considérons $j : i_{n+1!} X \longrightarrow X'$ une \mathcal{W} -équivalence de but \mathcal{W} -fibrant dans $\widehat{\Delta}$. Le morphisme $i_{n+1}^* j$ est donc une \mathcal{W} -équivalence (c'est le morphisme d'adjonction de X vers $\text{R}i_{n+1}^* L i_{n+1!} X$). Or la flèche j est une n -équivalence et X' un complexe de Kan. Par conséquent, en vertu du corollaire 7.1.16, $\text{Cosk}^{n+1} X'$ est un ensemble simplicial n -fibrant, isomorphe dans $\mathcal{H}_{\mathcal{W}_n} \widehat{\Delta}$ à $i_{n+1!} X$. La forte saturation de \mathcal{W}_n implique donc que $\text{Cosk}^{n+1} X'$ est un objet injectif de $\widehat{\Delta}$. Comme le foncteur $i_{n+1!}$ respecte les monomorphismes, $i_{n+1}^* \text{Cosk}^{n+1} X'$ est un objet injectif (et par suite \mathcal{W} -asphérique) de $\widehat{\Delta_{\leq n+1}}$. Or on a un isomorphisme canonique de $i_{n+1}^* \text{Cosk}^{n+1} X'$ vers $i_{n+1}^* X'$, ce qui prouve bien que X est \mathcal{W} -asphérique. En particulier, $i_{n+1}^* \Delta_{n+2}$ est \mathcal{W} -asphérique, et le lemme 7.1.7 implique que

$$\text{Sk}^{n+1} \Delta_{n+2} = i_{n+1!} i_{n+1}^* \Delta_{n+2} = \partial \Delta_{n+2}$$

est \mathcal{W} -asphérique, ce qui achève la démonstration. \square

SCHOLIE 7.1.21. Soit $n \geq 0$. On appelle n -équivalence forte un morphisme d'ensemble simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ tel que :

1) le morphisme u induit une bijection

$$\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y) ;$$

2) pour tout $x \in X_0$, et tout entier i , $1 \leq i \leq n$, u induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Y, u(x)) ;$$

3) le morphisme

$$\pi_{n+1}(X, x) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, u(x))$$

est surjectif (ou de manière équivalente, les fibres homotopiques de u sont n -asphériques).

On vérifie que si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ sont deux morphismes d'ensembles simpliciaux, et si u et v (resp. vu et u) sont des n -équivalences fortes, alors il en est de même de vu (resp. de v). Cependant, il est faux en général que si vu et v sont des n -équivalences fortes, u en est une. La classe des n -équivalences est cependant la plus petite classe de flèches de $\widehat{\Delta}$ satisfaisant l'axiome du "deux sur trois" (L1) et contenant les n -équivalences fortes. En effet, si $u : X \longrightarrow Y$ est une n -équivalence, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} \text{Ex}^\infty X \\ u \downarrow & & \downarrow \text{Cosk}^{n+1} \text{Ex}^\infty u \\ Y & \longrightarrow & \text{Cosk}^{n+1} \text{Ex}^\infty Y \end{array} ,$$

dont les flèches horizontales sont des n -équivalences fortes (en vertu de la proposition 7.1.3). Or $\text{Cosk}^{n+1} \text{Ex}^\infty u$ est une n -équivalence entre objets n -fibrants, et par suite, est une ∞ -équivalence. Toute ∞ -équivalence étant une n -équivalence forte, cela prouve bien l'assertion.

LEMME 7.1.22. Soient $n \geq 0$ un entier, et S une famille de flèches de Cat dont tous les éléments soient des n -équivalences. Alors tous les éléments du localisateur fondamental engendré par S sont des n -équivalences.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une reformulation de la trivialité : si $S \subset \mathcal{W}_n$, alors $\mathcal{W}(S) \subset \mathcal{W}_n$. \square

2. Localisateurs fondamentaux triviaux

7.2.1. Dès que la notion de groupe d'homotopie intervient on est amené à supposer que le localisateur fondamental avec lequel on travaille est contenu dans celui des 0-équivalences. On dit qu'un localisateur fondamental est *trivial* s'il existe une \mathcal{W} -équivalence qui n'induit pas d'isomorphisme après application du foncteur π_0 (i.e. s'il n'est pas contenu dans \mathcal{W}_0). Un localisateur fondamental est *non trivial* s'il n'est pas trivial. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une telle hypothèse est anodine, i.e. de démontrer l'énoncé suivant.

PROPOSITION 7.2.2. Les seuls localisateurs fondamentaux triviaux sont \mathcal{W}_{-1} et $\mathcal{W}_{-2} = \text{FI} \text{Cat}$ (cf. 7.1.18).

7.2.3. On fixe à présent un localisateur fondamental trivial \mathcal{W} , différent de \mathbf{FICat} et tel que \mathcal{W}_{-1} ne soit pas contenu dans \mathcal{W} , puis on se place dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

LEMME 7.2.4. *Il existe une \mathcal{W} -équivalence d'ensembles simpliciaux $u : X \longrightarrow Y$ telle que X et Y soient non-vides, Y soit 0-asphérique, et X ne soit pas 0-asphérique.*

DÉMONSTRATION. Comme \mathcal{W} n'est pas contenu dans \mathcal{W}_0 , il existe un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ qui n'est pas une 0-équivalence. Cela implique en particulier que Y n'est pas vide. On peut écrire $Y = \coprod_{i \in I} Y_i$, où chaque Y_i est un ensemble simplicial 0-connexe. On obtient donc des morphismes

$$u_i : X_i = u^{-1}Y_i \longrightarrow Y_i \quad , \quad i \in I .$$

Si X est vide, alors le choix d'un point de Y fait de l'inclusion de l'ensemble simplicial vide dans l'ensemble simplicial final un rétracte de u , et donc cela implique que $\emptyset = \partial \Delta_0$ est \mathcal{W} -asphérique, ce qui est contradictoire (sinon on aurait l'égalité $\mathcal{W} = \mathbf{FICat}$). On peut donc supposer que $X \neq \emptyset$ et que Y n'est pas 0-connexe (sinon il n'y a plus rien à montrer). Il existe donc un élément i de I tel que X_i soit non vide, et on vérifie aussitôt que le morphisme u_i est alors un rétracte de u , ce qui en fait une \mathcal{W} -équivalence. Montrons qu'il existe un i tel que X_i ne soit pas 0-connexe tout en étant non vide. Si ce n'est pas le cas, alors l'application $\pi_0(u) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est injective et est un rétracte de u . Comme $\pi_0(u)$ n'est pas une bijection, en choisissant une composante connexe de X , on exhibe une inclusion de la forme $\Delta_0 \longrightarrow \partial \Delta_1$ qui est un rétracte de $\pi_0(u)$. Mais cela implique que $\mathcal{W}_{-1} \subset \mathcal{W}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. \square

LEMME 7.2.5. *Il existe un petit ensemble non-vide E , un complexe de Kan 0-asphérique K , et une \mathcal{W} -équivalence de la forme*

$$j : E = \coprod_E \Delta_0 \longrightarrow K .$$

DÉMONSTRATION. Soit $u : X \longrightarrow Y$ une \mathcal{W} -équivalence vérifiant les conditions énoncées dans le lemme 7.2.4. Quitte à la factoriser en une cofibration suivie d'une fibration triviale, on peut supposer que u est un monomorphisme. On pose $E = \pi_0(X)$, et pour chaque $e \in E$, on note X_e la composante connexe de X correspondante. On forme alors le carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

Comme u est une cofibration, et $X \longrightarrow E$ une 0-équivalence, la flèche $Y \longrightarrow Z$ est encore une 0-équivalence. Pour conclure, on choisit une ∞ -équivalence de but un complexe de Kan $f : Z \longrightarrow K$, et on pose $j = fv$. \square

LEMME 7.2.6. *Toute -1 -équivalence est une \mathcal{W} -équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit $j : E \longrightarrow K$ une \mathcal{W} -équivalence vérifiant les conditions du lemme 7.2.5. On a les bijections suivantes.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \hat{\Delta}}(E, K) \simeq \prod_E \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{\mathcal{W}_\infty} \hat{\Delta}}(\Delta_0, K) \simeq \prod_E \pi_0(K) \simeq *$$

Par conséquent pour tout choix d'un 0-simplexe k de K , j est homotope au morphisme constant induit par k ,

$$j_k : E \longrightarrow \Delta_0 \longrightarrow K .$$

On en déduit que j_k est une \mathcal{W} -équivalence. Or le morphisme $E \longrightarrow \Delta_0$ est un rétracte de j_k , et par suite, E est \mathcal{W} -asphérique. Comme $\partial \Delta_1 = \Delta_0 \amalg \Delta_0$ est un rétracte de E , on en déduit aussitôt l'assertion. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.2.2. Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental trivial, différent de \mathbf{FCat} . Le lemme 7.2.6 implique qu'il contient \mathcal{W}_{-1} . La localisation $\mathcal{W}^{-1}\mathbf{Cat}$ est donc une localisation de $\mathcal{W}_{-1}^{-1}\mathbf{Cat}$. Or cette dernière catégorie est équivalente à l'ensemble ordonné Δ_1 (cela résulte de la description donnée en 7.1.18). La seule localisation non triviale de Δ_1 consiste à inverser toutes les flèches (*i.e.* la seule flèche non inversible). Comme $\mathcal{W} \neq \mathbf{FCat}$, la forte saturation de \mathcal{W}_{-1} impose ainsi que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{-1}$. \square

3. Homologies, torsions et impropretés

7.3.1. Si E est un spectre, on note E_* la théorie homologique correspondante, définie sur $\hat{\Delta}$, et \mathcal{W}_E la classe des E -équivalences, *i.e.* des morphismes d'ensembles simpliciaux $X \longrightarrow Y$ induisant un isomorphisme de groupes

$$E_n X \xrightarrow{\sim} E_n Y$$

pour tout entier n .

THÉORÈME 7.3.2 (Bousfield). *Pour tout spectre E , les E -équivalences forment un Δ -localisateur accessible.*

DÉMONSTRATION. En vertu de [4, théorème 10.2], la catégorie des ensembles simpliciaux admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les équivalences faibles sont les E -équivalences. Il s'agit donc d'une simple traduction *via* le théorème 2.3.4. \square

COROLLAIRE 7.3.3. *Tout spectre définit canoniquement un localisateur fondamental accessible.*

DÉMONSTRATION. Si E est un spectre, les E -équivalences forment un Δ -localisateur accessible contenant \mathcal{W}_∞ . L'assertion résulte donc du théorème 5.1.10, puisque Δ est une \mathcal{W}_∞ -catégorie test. \square

7.3.4. Le corollaire ci-dessus permet de construire des variantes de localisateurs fondamentaux. On peut par exemple considérer le spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{Q}$ correspondant à l'homologie singulière rationnelle, ce qui définit en vertu du corollaire ci-dessus un localisateur fondamental accessible $\mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$. Si $n \geq 0$, le localisateur fondamental \mathcal{W}_n des n -équivalences permet de définir le

localisateur fondamental $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n} = \mathcal{W}_n \cap \mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$. Celui-ci est accessible en vertu du théorème 5.1.10 et du corollaire 2.3.13. On appellera (\mathbb{Q},n) -équivalences les éléments de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$. On a bien sûr l'égalité $\mathcal{W}_{\mathbb{Q},0} = \mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$.

LEMME 7.3.5. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental accessible. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$, tel que toute \mathcal{W} -équivalence soit une n -équivalence. Si \mathcal{W} est propre, alors toute \mathcal{W} -équivalence de but \mathcal{W} -fibrant est une n -équivalence forte.*

DÉMONSTRATION. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un tel morphisme. On choisit un 0-simplexe y de Y , puis on le factorise en $y = pi$,

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{y} & Y \\ & \searrow i & \swarrow p \\ & & E \end{array} ,$$

où i est une \mathcal{W} -cofibration triviale, et p une fibration au sens de \mathcal{W} . Alors E est à la fois \mathcal{W} -fibrant et \mathcal{W} -asphérique. Il est donc injectif, et par suite, contractile. En particulier, tous les groupes d'homotopie de E sont triviaux. On forme ensuite le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y E & \xrightarrow{v} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Si \mathcal{W} est propre, comme p est une fibration au sens de \mathcal{W} , ce carré est homotopiquement cartésien au sens de \mathcal{W} , et comme u est par hypothèse une \mathcal{W} -équivalence, v en est une aussi. En particulier, v est une n -équivalence, et donc $X \times_Y E$ est n -asphérique. Or p est aussi une fibration de Kan, et E est contractile, ce qui implique que $X \times_Y E$ a le type d'homotopie de la fibre homotopique de u au sens de \mathcal{W}_∞ , et prouve le lemme. \square

PROPOSITION 7.3.6. *Le localisateur fondamental des $H\mathbb{Q}$ -équivalences (resp. des (\mathbb{Q},n) -équivalences, $n \geq 1$) n'est pas propre.*

DÉMONSTRATION. Soit $n \geq 0$. On considère un ensemble simplicial S^{n+1} ayant le type d'homotopie de la $n + 1$ -ème sphère. On choisit une résolution (\mathbb{Q},n) -fibrante $j : S^{n+1} \longrightarrow S_{\mathbb{Q}}^{n+1}$. On peut montrer que le morphisme induit par j sur les groupes d'homotopie est en l'occurrence le morphisme canonique ($i \geq 1$) :

$$\pi_i(S^{n+1}) \longrightarrow \pi_i(S_{\mathbb{Q}}^{n+1}) \otimes \mathbb{Q} = \pi_i(S_{\mathbb{Q}}^{n+1}) .$$

Lorsque $n = 0$, il s'agit d'un corollaire du théorème de Hurewicz, et pour $n \geq 1$, cela résulte de la nilpotence de la sphère S^{n+1} et de [4, proposition 4.3 (i)]. Si F désigne une fibre homotopique de j au sens de \mathcal{W}_∞ , la longue suite exacte de Serre montre que $\pi_n(F)$ est le groupe quotient \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Autrement dit, le morphisme j n'est pas une n -équivalence forte. Le lemme ci-dessus implique donc l'assertion. \square

ANNEXE A

Florilège catégorique

1. Préfaisceaux réalisés en catégories

A.1.1. Si C est une petite catégorie, on note \widehat{C} la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur C , *i.e.* des foncteurs de C° vers la catégorie $\mathcal{E}ns$ des petits ensembles. Si X est un préfaisceau sur C , on note C/X la catégorie des objets représentables au dessus de X , *i.e.* dont les objets sont les flèches $u : c \rightarrow X$ de \widehat{C} , où c est un objet de C , vu comme un préfaisceau par le plongement de Yoneda, et dont les flèches $(c, u) \rightarrow (d, v)$ sont les triangles commutatifs dans \widehat{C} , du type :

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\quad} & d \\ & \searrow u & \swarrow v \\ & & X \end{array} .$$

Cette catégorie C/X a la propriété suivante : on définit un foncteur

$$\phi_X : C/X \rightarrow \widehat{C}$$

par $(c, u) \mapsto c$, et on obtient une flèche canonique

$$\varinjlim \phi_X \rightarrow X$$

dans \widehat{C} , laquelle se révèle être un isomorphisme. Un autre intérêt de cette construction, est qu'elle permet de définir un foncteur

$$i_C : \widehat{C} \rightarrow \mathcal{C}at$$

qui associe à chaque préfaisceau X la catégorie C/X .

D'autre part, vu que $i_C(*) = C$ (où $*$ désigne l'objet final de \widehat{C}), le foncteur i_C se factorise de manière unique par la catégorie des petites catégories au-dessus de C :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & \xrightarrow{i_C} & \mathcal{C}at \\ & \searrow j_C & \swarrow u_C \\ & & \mathcal{C}at/C \end{array} .$$

PROPOSITION A.1.2. *Pour toute petite catégorie C , le foncteur*

$$j_C : \widehat{C} \rightarrow \mathcal{C}at/C$$

est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION. Soient X et Y deux préfaisceaux sur C , et soit

$$\begin{array}{ccc} C/X & \xrightarrow{f} & C/Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & C & \end{array} ,$$

un morphisme de $\mathcal{C}at/C$. Si $u : c \rightarrow X$ est un objet de C/X , alors $f(c, u)$ est un objet de la forme $(c, f(u))$, *i.e.* une flèche $f(u) : c \rightarrow Y$, car le triangle ci-dessus est commutatif. Or par le lemme de Yoneda, on a pour tout objet c de C une identification canonique

$$X(c) \simeq \mathbf{Hom}_{\widehat{C}}(c, X) .$$

Par suite, on peut définir une application $g : X(c) \rightarrow Y(c)$, par $u \mapsto f(u)$. On vérifie immédiatement que cela définit un morphisme de préfaisceaux $g : X \rightarrow Y$, que $i_C g = f$, et qu'un tel g est unique. \square

COROLLAIRE A.1.3. *Pour toute petite catégorie C , le foncteur*

$$i_C : \widehat{C} \rightarrow \mathcal{C}at$$

est fidèle.

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la proposition précédente, et du fait que le foncteur d'oubli $\mathcal{C}at/C \rightarrow \mathcal{C}at$ est lui-même fidèle. \square

A.1.4. On considère à présent une petite catégorie A , et un foncteur

$$i : A \rightarrow \mathcal{C}at .$$

On obtient alors un foncteur $i^* : \mathcal{C}at \rightarrow \widehat{A}$, défini pour chaque petite catégorie C , et chaque objet a de A , par $i^*(C)(a) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}at}(ia, C)$. Cela détermine ainsi un foncteur $i_A i^* : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at$. Si C est une petite catégorie, on notera par abus A/C la catégorie $i_A i^*(C)$.

On suppose à présent qu'en outre, pour tout objet a de A , la catégorie ia admet un objet final e_a , et on définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha : i_A i^* \rightarrow 1_{\mathcal{C}at}$$

comme suit : si C est une petite catégorie, le foncteur

$$\alpha_C : A/C \rightarrow C$$

est déterminé sur les objets par la formule $\alpha_C(a, u) = u(e_a)$ (en remarquant que par définition du préfaisceau i^*C , un objet de A/C est un couple (a, u) , où a est un objet de A , et u un foncteur $ia \rightarrow C$), et si $f : (a, u) \rightarrow (b, v)$ est une flèche de A/C , *i.e.* une flèche $f : a \rightarrow b$ telle que $v \circ i(f) = u$, $\alpha_C(f) = v(i(f)(e_a)) \rightarrow e_b$.

PROPOSITION A.1.5. *Soient C une petite catégorie, et $p : F \rightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux sur C . Le carré suivant est cartésien dans $\mathcal{C}at$:*

$$\begin{array}{ccc} A/(C/F) & \xrightarrow{\alpha_{C/F}} & C/F \\ A/i_C(p) \downarrow & & \downarrow i_C(p) \\ A/(C/G) & \xrightarrow{\alpha_{C/G}} & C/G \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer la catégorie C par la catégorie C/G , on peut supposer que G est l'objet final de la catégorie des préfaisceaux sur C , et donc qu'on a $C/G = C$, la flèche p étant l'unique flèche de F vers l'objet final de \widehat{C} . On notera $D = A/C \times_C C/F$.

Un objet de $A/(C/F)$ est un couple

$$(a, u : ia \longrightarrow C/F) \quad ,$$

où a est un objet de A , et u un foncteur. Le foncteur u induit par composition avec le foncteur d'oubli de C/F vers C un foncteur $v : ia \longrightarrow C$, et l'image par u de l'objet e_a de la catégorie ia est un morphisme $w : c \longrightarrow F$, où $c = v(e_a)$. Comme e_a est un objet final de ia , la donnée d'un tel objet équivaut à celle du triplet

$$(a, v : ia \longrightarrow C, w : c \longrightarrow F)$$

vérifiant la condition $c = v(e_a)$. Or c'est la description même des objets de la catégorie $A/C \times_C C/F$. La correspondance au niveau des flèches se vérifie de manière analogue et est laissée au lecteur. \square

A.1.6. Soient A une petite catégorie, et \mathcal{C} une catégorie. Si $i : A \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, on note

$$i^* : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{A}$$

le foncteur défini par la formule

$$(i^*X)_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i(a), X) \quad , \quad X \in \text{Ob } \mathcal{C} \quad , \quad a \in \text{Ob } A \quad .$$

Lorsque la catégorie \mathcal{C} admet des petites limites inductives, Ce foncteur admet un adjoint à gauche, noté

$$i_! : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C} .$$

On rappelle que si $u : C \longrightarrow D$ est un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur *image inverse* par u

$$u^* : \widehat{D} \longrightarrow \widehat{C} ,$$

défini par $(u^*X)_c = X(u(c))$ pour tout objet c de C , et tout préfaisceau X sur D . Le foncteur u^* admet un adjoint à gauche, noté $u_!$, et un adjoint à droite, noté u_* .

REMARQUE A.1.7. Le foncteur i^* défini ci-dessus est en un certain sens de même nature que le foncteur u^* . En effet, si on considère la catégorie \mathcal{C} comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{C} par le plongement de Yoneda, le foncteur i^* est la restriction du foncteur image inverse par i , $i^* : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{A}$.

A.1.8. Dans la situation du paragraphe A.1.4, pour toute petite catégorie C , on obtient un foncteur

$$\alpha_C^* : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{A}/C ,$$

où \widehat{A}/C est la catégorie \widehat{A}/i^*C , canoniquement équivalente à la catégorie \widehat{A}/C . On note encore $\mathcal{U}_C : \widehat{A}/C \longrightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'oubli. Le foncteur i^* induit un

unique foncteur $i^*/C : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \widehat{A}/C$, tel que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}at/C & \xrightarrow{i^*/C} & \widehat{A}/C \\ u_C \downarrow & & \downarrow u_C \\ \mathcal{C}at & \xrightarrow{i^*} & \widehat{A} \end{array} .$$

LEMME A.1.9. Soient $u : C' \longrightarrow C$ un foncteur entre petites catégories, et F un préfaisceau sur C . Alors le carré commutatif induit par u

$$\begin{array}{ccc} C'/u^*F & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ C' & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

est cartésien.

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire immédiat du lemme de Yoneda. \square

PROPOSITION A.1.10. Pour toute petite catégorie C , on a un isomorphisme canonique de foncteurs dans \widehat{A}/i^*C (voir A.1.8) :

$$\alpha_C^* \simeq (i^*/C)j_C .$$

DÉMONSTRATION. La pleine fidélité du foncteur j_A (proposition A.1.2) implique qu'il suffit de montrer que les foncteurs $j_{A/C}\alpha_C^*$ et $j_{A/C}(i^*/C)j_C$ sont isomorphes, ou encore que pour tout préfaisceau F sur C , les catégories

$$(A/C)/\alpha_C^*F \quad \text{et} \quad (A/C)(i^*/C)j_C F \simeq A/i^*(C/F) = A/(C/F)$$

sont isomorphes au-dessus de A/C , et ce fonctoriellement en F . Or en vertu de la proposition A.1.5 et du lemme A.1.9, on a les deux carrés cartésiens suivants.

$$\begin{array}{ccc} A/C/F & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/C & \xrightarrow{\alpha_C} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (A/C)\alpha_C^*F & \longrightarrow & C/F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/C & \xrightarrow{\alpha_C} & C \end{array}$$

Cela montre que ces deux catégories vérifient la même propriété universelle, et donc qu'elles sont canoniquement isomorphes. \square

A.1.11. On a donc le diagramme commutatif suivant (à isomorphisme près) :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \widehat{C} & \xrightarrow{i_C} & & & \\ & \searrow j_C & \mathcal{C}at/C & \xrightarrow{u_C} & \mathcal{C}at \\ & & \downarrow i^*/C & & \downarrow i^* \\ & & \widehat{A}/C & \xrightarrow{u_C} & \widehat{A} \\ & \swarrow \alpha_C^* & & & \end{array} .$$

COROLLAIRE A.1.12. *Pour toute petite catégorie C , le foncteur $i^*i_C : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{A}$ commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés. En particulier, il respecte les monomorphismes.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur α_C^* commute aux petites limites inductives et projectives, et le foncteur d'oubli \mathcal{U}_C commute aux petites limites inductives, ainsi qu'aux produits fibrés. Le corollaire résulte donc trivialement de la proposition ci-dessus, et du fait que $i^*i_C = \mathcal{U}_C(i^*/C)j_C$. \square

A.1.13. Soit Δ la catégorie des simplexes, *i.e.* la catégorie dont les objets sont les ensembles bien ordonnés $\Delta_n = \{0, \dots, n\}$, pour tout $n \geq 0$, et dont les flèches sont les applications croissantes. On définit un foncteur $i : \Delta \longrightarrow \mathcal{Cat}$ en associant à chaque objet Δ_n la catégorie associée à sa structure d'ensemble ordonné. Le foncteur i est une inclusion pleine, et on notera par abus $i\Delta_n = \Delta_n$. On note $N : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf défini par $N = i^*$, et c sont adjoint à gauche. Le foncteur nerf est pleinement fidèle, et on a donc un isomorphisme de foncteurs canonique $cN \simeq 1_{\mathcal{Cat}}$ (voir [17, corollaire II.4.3]).

PROPOSITION A.1.14. *Pour toute petite catégorie C , le foncteur*

$$j_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{Cat}/C$$

commute aux petites limites inductives et projectives.

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition A.1.10, on a un isomorphisme de foncteurs $\alpha_C^* \simeq (N/C)j_C$, ce qui montre que le foncteur $(N/C)j_C$ commute aux petites limites inductives et projectives, puisque c'est le cas de α_C^* . En outre, comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, il en est de même du foncteur $N/C : \mathcal{Cat}/C \longrightarrow \widehat{\Delta}/C$, ce qui implique que le foncteur j_C commute aux petites limites inductives et projectives. \square

COROLLAIRE A.1.15. *Pour toute petite catégorie C , le foncteur*

$$i_C : \widehat{C} \longrightarrow \mathcal{Cat}$$

commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés. En particulier, il respecte les monomorphismes. En outre, il admet pour adjoint à droite le foncteur $i_C^ : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{C}$, $D \longmapsto (c \longmapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{Cat}}(C/c, D))$.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur i_C est le composé du foncteur j_C et du foncteur d'oubli $\mathcal{U}_C : \mathcal{Cat}/C \longrightarrow \mathcal{Cat}$, et donc la proposition ci-dessus montre qu'il commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés, puisque le foncteur d'oubli \mathcal{U}_C vérifie la même propriété. On en déduit que le foncteur i_C admet un adjoint à droite, et on vérifie facilement que ce dernier ne peut qu'être le foncteur i_C^* . \square

PROPOSITION A.1.16. *Soit C une petite catégorie.*

- (a) *Le morphisme d'adjonction $\eta : 1_{\widehat{C}} \longrightarrow i_C^*i_C$ est un monomorphisme.*
- (b) *Le foncteur $i_C^*i_C : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{C}$ commute aux petites limites inductives et aux produits fibrés.*

(c) Pour tout morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ dans \widehat{C} , le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_C^* i_C X \\ \phi \downarrow & & \downarrow i_C^* i_C \phi \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & i_C^* i_C Y \end{array} .$$

DÉMONSTRATION. L'assertion (a) résulte formellement du fait que le foncteur i_C est fidèle (corollaire A.1.3).

L'assertion (b) est une conséquence du corollaire A.1.12 appliqué au foncteur $C \longrightarrow \mathcal{C}at$, $c \longmapsto C/c$, une fois remarqué que pour tout objet c de C , la catégorie C/c admet un objet final (à savoir $(c, 1_c)$).

Pour montrer (c), on commence par considérer le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{C}at$ (où $\varepsilon : i_C i_C^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$ est le morphisme d'adjonction) :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_{i_C X} & & \\ & \searrow & \text{---} & \swarrow & \\ i_C X & \xrightarrow{i_C \eta_X} & i_C i_C^* i_C X & \xrightarrow{\varepsilon_{i_C X}} & i_C X \\ i_C \phi \downarrow & (1) & \downarrow i_C i_C^* i_C \phi & (2) & \downarrow i_C \phi \\ i_C Y & \xrightarrow{i_C \eta_Y} & i_C i_C^* i_C Y & \xrightarrow{\varepsilon_{i_C Y}} & i_C Y \\ & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\ & & 1_{i_C Y} & & \end{array} .$$

Ensuite, on vérifie que pour toute petite catégorie D , le foncteur ε_D est exactement le foncteur défini par la formule $\varepsilon_D(c, u) = u(c, 1_c)$ (où c est un objet de C , et $u : C/c \longrightarrow D$ un foncteur), et donc en vertu de la proposition A.1.5, le carré (2) est cartésien. Grâce à la formule $\varepsilon_{i_C} i_C \eta = 1_{i_C}$, on constate trivialement que le carré (1)+(2) est aussi cartésien. Par conséquent, le carré (1) ne peut qu'être cartésien. Or on peut voir (1) comme un carré cartésien de $\mathcal{C}at/C$ grâce au foncteur canonique de $i_C i_C^* i_C Y$ vers C . La pleine fidélité de j_C (proposition A.1.2) achève donc la démonstration. \square

2. Images directes de cribles

PROPOSITION A.2.1. (i) Si dans un carré cocartésien de $\mathcal{C}at$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array} ,$$

le foncteur i est un crible, alors il en est de même de i' , et le carré est cartésien. En outre, dans ce cas, le cocrible complémentaire $B \setminus A$ de A dans B est canoniquement isomorphe au cocrible complémentaire $B' \setminus A'$ de A' dans B' .

(ii) Les cribles sont stables par compositions transfinies.

(iii) *Les cribles sont stables par rétractes.*

DÉMONSTRATION. (i) On rappelle que le foncteur

$$\mathcal{C}at^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

qui associe à chaque petite catégorie C l'ensemble $\mathcal{C}r(C)$ de ses cribles est représentable par la catégorie Δ_1 . Plus précisément, la bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}at}(C, \Delta_1) \longrightarrow \mathcal{C}r(C)$$

est définie par $u \longmapsto u^{-1}(0)$ (cette application est bien définie puisque l'inclusion $\{0\} \longrightarrow \Delta_1$ est un crible). Si i est un crible, on a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{0\} \\ i \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\chi} & \Delta_1 \end{array} .$$

Le carré considéré étant supposé cocartésien, le foncteur $A' \longrightarrow \{0\}$ induit un unique foncteur $\chi' : B' \longrightarrow \Delta_1$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' & \longrightarrow & \{0\} \\ i \downarrow & & \downarrow i' & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' & \xrightarrow{\chi'} & \Delta_1 \\ & \searrow \beta & \nearrow \chi' & & \\ & & \chi & & \end{array}$$

On remarque en outre que $A' = \chi'^{-1}(0)$. En effet, Comme les limites inductives sont universelles dans $\mathcal{C}at$, on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi^{-1}(0) & \longrightarrow & \chi'^{-1}(0) \end{array} ,$$

dont la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. On a ainsi prouvé que i' est un crible. La vérification du fait que le carré est cartésien est immédiate. Pour vérifier la seconde assertion, on procède de la même manière : le cocrible complémentaire $B \setminus A$ de A dans B s'identifie à l'image réciproque $\chi^{-1}(1)$, et on a un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi^{-1}(1) & \longrightarrow & \chi'^{-1}(1) \end{array} ,$$

ce qui montre que le foncteur β induit un isomorphisme de $B \setminus A$ sur $B' \setminus A'$.

Les assertions (ii) et (iii) se montrent de la même manière (*i.e.* en utilisant la caractérisation des cribles en termes de foncteurs à valeurs dans Δ_1). □

DÉFINITION A.2.2. Une flèche $i : A \rightarrow B$ de \mathcal{Cat} est une *immersion* si c'est un crible, et s'il existe un cocrible W de B contenant A , tel que l'inclusion encore notée par abus $i : A \rightarrow W$ admette une rétraction $r : W \rightarrow A$, et s'il existe un morphisme de foncteurs $\varepsilon : ir \rightarrow 1_{A_B}$ vérifiant l'équation $\varepsilon i = 1_i$.

REMARQUE A.2.3. Si $i : A \rightarrow B$ est une immersion, alors W est nécessairement le cocrible de B engendré par A , noté A_B . En effet, on a une inclusion évidente $A_B \subset W$, et pour tout objet w de W , on a un morphisme $irw \rightarrow w$, avec $irw \in \mathbf{Ob} A$, ce qui implique que $w \in \mathbf{Ob} A_B$.

Une condition suffisante pour qu'un crible $i : A \rightarrow B$ soit une immersion est que i soit un *morphisme de Dwyer* au sens de [47, définition 4.1], *i.e.* que l'inclusion (pleine) $i : A \rightarrow A_B$ admette un adjoint à droite.

PROPOSITION A.2.4. *Les immersions sont stables par images directes, par compositions transfinies et par rétractes.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de vérifications purement soritales. Nous allons seulement montrer la stabilité par images directes, laissant les autres cas au lecteur. Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array}$$

un carré cocartésien de \mathcal{Cat} , i étant une immersion. Si $W = A_B$, il résulte de A.2.1 (i) et de l'énoncé dual que i' est un crible et que $W' = W \amalg_A A'$ est un cocrible de B' qui contient A' . On a d'autre part le carré cocartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ W & \xrightarrow{\omega} & W' \end{array}$$

Comme $ri = 1_A$, on a les relations $\alpha ri = \alpha$, ce qui définit un unique morphisme $r' : W' \rightarrow A'$ tel que $r'i' = 1_{A'}$ et $r'\omega = \alpha r$. D'autre part, la donnée de $\varepsilon : ir \rightarrow 1_W$ équivaut à celle d'un foncteur encore noté par abus $\varepsilon : \Delta_1 \times W \rightarrow W$. La limite inductive du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 \times W & \xleftarrow{1_{\Delta_1} \times i} & \Delta_1 \times A & \xrightarrow{1_{\Delta_1} \times \alpha} & \Delta_1 \times A' \\ \varepsilon \downarrow & & pr_2 \downarrow & & \downarrow pr_2 \\ B & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{\alpha} & A' \end{array}$$

est un foncteur $\varepsilon' : \Delta_1 \times W' \rightarrow W'$, tel que $\varepsilon'|_{\{0\} \times A'} = i'r'$, $\varepsilon'|_{\{1\} \times A'} = 1_{W'}$, et $\varepsilon'(1_{\Delta_1} \times i) = ipr_2$ (cela résulte des propriétés analogues pour ε). On a ainsi prouvé que i' est une immersion. \square

REMARQUE A.2.5. Il est possible (par les mêmes arguments que ci-dessus) de montrer que les morphismes de Dwyer sont stables par images directes et

par compositions transfinies, mais contrairement à ce qui est affirmé dans [47], ceux-ci ne sont pas stables par rétractes (cf. [11]).

LEMME A.2.6. *Soient B une petite catégorie, V et W deux cocribles de B tels que $\text{Ob } V \cup \text{Ob } W = \text{Ob } B$. Alors le carré cartésien suivant est aussi cocartésien dans $\hat{\Delta}$.*

$$\begin{array}{ccc} \text{N } V \cap \text{N } W & \longrightarrow & \text{N } W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{N } V & \longrightarrow & \text{N } B \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Comme tous les morphismes considérés sont des inclusions, pour voir que ce carré est cocartésien, il suffit de vérifier que la flèche $\text{N } V \amalg \text{N } W \longrightarrow \text{N } B$ est un épimorphisme. Il est immédiat que l'évaluation de celle-ci en 0 est une surjection, ce qui implique que ses évaluations en chaque $n \geq 0$ le sont aussi, car vu que W (resp. V) est un cocrible de B , toute chaîne de flèches commençant par un objet de W (resp. de V) est une chaîne de flèches de W (resp. V). \square

3. Accessibilité des petites catégories

PROPOSITION A.3.1. *Soit α un cardinal. Toute petite catégorie dont le nerf est un ensemble simplicial α -accessible est α -accessible dans Cat .*

DÉMONSTRATION. On vérifie immédiatement que les ensembles ordonnés Δ_n , $n \geq 0$, sont des objets de présentations finie (i.e. 0-accessibles) dans Cat . Cela implique en particulier que le foncteur nerf N commute aux petites limites inductives filtrantes (i.e. qu'il est 0-accessible). Soit C une petite catégorie telle que $\text{N } C$ soit α -accessible. On considère un ensemble ordonné α -filtrant I , et un foncteur F de I dans Cat . Comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, on obtient les bijections canoniques suivantes

$$\begin{aligned} \varinjlim_I \text{Hom}_{\text{Cat}}(C, F) &= \varinjlim_I \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\text{N } C, \text{N } F) \\ &= \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\text{N } C, \varinjlim_I \text{N } F) \\ &= \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\text{N } C, \text{N } \varinjlim_I F) \\ &= \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(C, \varinjlim_I F), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. \square

COROLLAIRE A.3.2. *Toute catégorie finie est de présentation finie dans Cat .*

COROLLAIRE A.3.3. *Toute petite catégorie est accessible. En particulier, tout petit ensemble de flèches de Cat permet l'argument du petit objet.*

ANNEXE B

Structures de Thomason

1. Carrés homotopiquement cocartésiens de catégories

On fixe dans un premier temps un localisateur fondamental \mathcal{W} .

B.1.1. On appelle \mathcal{W} -immersion, ou encore *immersion triviale*, toute immersion (A.2.2) qui est dans \mathcal{W} .

PROPOSITION B.1.2 (Thomason [47]). *Pour tout carré cocartésien de Cat de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array} \quad ,$$

si i est une immersion, alors le morphisme canonique d'ensemble simpliciaux

$$\mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} A} \mathbb{N} A' \rightarrow \mathbb{N} B'$$

est une \mathcal{W} -équivalence.

DÉMONSTRATION. On sait que i' est encore une immersion (A.2.4). Les cribles $A \rightarrow A_B = W$ et $A' \rightarrow A'_{B'} = W'$ étant des équivalences d'homotopie, ce sont en particulier des \mathcal{W} -équivalences. On obtient le diagramme commutatif d'ensembles simpliciaux suivants, dont toutes les flèches obliques sont des \mathcal{W} -équivalences (cf. 2.3.7).

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{N} W & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N} W' \\ & \nearrow & \downarrow & \alpha & \nearrow \\ \mathbb{N} A & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N} A' & & \mathbb{N} W' \\ \downarrow \text{Ni} & & \downarrow \text{Ni} & & \downarrow \\ & & \mathbb{N} B & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} W} \mathbb{N} W' \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} B & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} A} \mathbb{N} A' & & \mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} W} \mathbb{N} W' \end{array}$$

Si V (resp. V') désigne le cocrible complémentaire de A (resp. A') dans B (resp. B'), il résulte du lemme A.2.6 qu'on a les carrés cocartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} V \cap \mathbb{N} W & \longrightarrow & \mathbb{N} W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} V & \longrightarrow & \mathbb{N} B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} V' \cap \mathbb{N} W' & \longrightarrow & \mathbb{N} W' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} V' & \longrightarrow & \mathbb{N} B' \end{array}$$

D'autre part, en vertu de la dernière assertion de A.2.1 (i), on a des isomorphismes canoniques

$$V \simeq V' \quad \text{et} \quad V \cap W \simeq V' \cap W' .$$

On en déduit grâce au lemme A.2.6 les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} W} \mathbb{N} W' &= \mathbb{N} V \amalg_{\mathbb{N} V \cap \mathbb{N} W} \mathbb{N} W \amalg_{\mathbb{N} W} \mathbb{N} W' \\ &= \mathbb{N} V \amalg_{\mathbb{N} V \cap \mathbb{N} W} \mathbb{N} W' \\ &= \mathbb{N} V' \amalg_{\mathbb{N} V' \cap \mathbb{N} W'} \mathbb{N} W' \\ &= \mathbb{N} B' \quad . \end{aligned}$$

La flèche canonique

$$\mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} A} \mathbb{N} A' \longrightarrow \mathbb{N} B \amalg_{\mathbb{N} W} \mathbb{N} W' \simeq \mathbb{N} B'$$

est donc une \mathcal{W} -équivalence, ce qu'il fallait démontrer. \square

COROLLAIRE B.1.3. *Les immersions triviales sont stables par images directes, compositions transfinies et rétractes.*

DÉMONSTRATION. On sait que les immersions sont stables par les opérations sus citées (A.2.4). La stabilité par images directes résulte donc aussitôt de la proposition ci-dessus. La stabilité par compositions transfinies et par rétractes est conséquence de la stabilité de tout localisateur fondamental par petites limites inductives filtrantes et par rétractes (5.1.16 et 5.1.2). \square

COROLLAIRE B.1.4. *Pour tout carré cocartésien de $\mathcal{C}at$ de la forme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array} ,$$

i étant une immersion, et α une équivalence faible, β est une équivalence faible.

2. Structures de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$

B.2.1. Si $c : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur nerf, et $\text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur de subdivision barycentrique itéré (3.1.12), on obtient un foncteur

$$c \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at ,$$

lequel admet un adjoint à droite, le foncteur

$$\text{Ex}^2 \mathbb{N} : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta} ,$$

Ex^2 désignant le foncteur Ex (adjoint à droite de Sd), itéré deux fois.

LEMME B.2.2. *Pour tout complexe simplicial combinatoire (E, Φ) (3.1.18), on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathbb{N} c \text{Sd}^2 \kappa^*(E, \Phi) \simeq \mathbb{N} \xi \Phi \simeq \text{Sd} \mathbb{N} \Phi \simeq \text{Sd}^2 \kappa^*(E, \Phi)$$

(où Φ est muni de la structure d'ensemble ordonné induite par l'inclusion).

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du lemme 3.1.20. \square

LEMME B.2.3. *Soit $E \longrightarrow F$ une inclusion d'ensembles ordonnés. Alors l'image de celle-ci par le foncteur ξ (cf. 3.1.12), $\xi E \longrightarrow \xi F$, est un morphisme de Dwyer (A.2.3).*

DÉMONSTRATION. L'inclusion d'ensembles ordonnés $\xi E \longrightarrow \xi F$ est trivialement un crible. D'autre part, le cocrible W engendré par ξE dans ξF est formé des $\sigma \subset F$ tels que $\sigma \cap E$ soit non vide. On définit un foncteur $r : W \longrightarrow \xi E$ par $\sigma \longmapsto \sigma \cap E$. Une vérification immédiate montre que celui-ci est un adjoint à droite de l'inclusion de ξE dans W . \square

PROPOSITION B.2.4. *Pour tout $n \geq 0$, le foncteur $cSd^2 \partial \Delta_n \longrightarrow cSd^2 \Delta_n$ est une immersion.*

DÉMONSTRATION. On rappelle que l'inclusion canonique $i_n : \partial \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$ est induite par l'inclusion de complexes simpliciaux combinatoires $(\Delta_n, \partial \Phi_n) \longrightarrow (\Delta_n \longrightarrow \xi \Delta_n)$, où $\partial \Phi_n$ est l'ensemble des sous-ensembles non vides de Δ_n , différents de Δ_n (3.1.19). Comme le foncteur nerf est pleinement fidèle, la formule du lemme B.2.2 montre que l'image de i_n par cSd^2 est l'image par ξ de l'inclusion d'ensembles ordonnés $\partial \Phi_n \longrightarrow \xi \Delta_n$. Le lemme B.2.3 implique donc l'assertion. \square

COROLLAIRE B.2.5. *Le foncteur cSd^2 envoie les monomorphismes de $\widehat{\Delta}$ sur des immersions.*

DÉMONSTRATION. Comme les inclusions de bord forment un modèle cellulaire de $\widehat{\Delta}$, cela résulte aussitôt du fait que cSd^2 commute aux petites limites inductives et de la proposition A.2.4. \square

LEMME B.2.6. *Pour tous $n, k, n \geq 1, 0 \leq k \leq n$, le foncteur $cSd^2 \Lambda_n^k \longrightarrow cSd^2 \Delta_n$ est une \mathcal{W}_∞ -immersion.*

DÉMONSTRATION. En vertu du corollaire ci-dessus, du lemme B.2.2, et en reprenant les notations de 3.1.19, il s'agit de montrer que $\xi \Phi_n^k \longrightarrow \xi^2 \Delta_n$ est une ∞ -équivalence, ou encore, de manière équivalente, que le morphisme d'ensemble simpliciaux $Sd^2 \Lambda_n^k \longrightarrow Sd^2 \Delta_n$ est une extension anodine. Or cela résulte immédiatement du corollaire 3.1.16. \square

THÉORÈME B.2.7 (Thomason [47]). *La catégorie Cat des petite catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant propre, dont les équivalences faibles sont les ∞ -équivalences. Les cofibrations sont engendrées par l'ensemble I , formé des immersions*

$$cSd^2 \partial \Delta_n \longrightarrow cSd^2 \Delta_n \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

et les cofibrations triviales par l'ensemble J , formé des flèches

$$cSd^2 \Lambda_n^k \longrightarrow cSd^2 \Delta_n \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Le couple de foncteurs adjoints $(cSd^2, Ex^2 N)$ définit une équivalence de Quillen de la catégorie des ensembles simpliciaux vers celle des petites catégories, et en outre, les morphisme d'adjonction

$$cSd^2 Ex^2 N \longrightarrow 1_{Cat} \quad \text{et} \quad 1_{\widehat{\Delta}} \longrightarrow Ex^2 N cSd^2$$

sont des ∞ -équivalences naturelles.

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 3.3.14, on a une ∞ -équivalence naturelle $N \rightarrow \text{Ex}^2 N$. Par conséquent, $(\text{Ex}^2 N)^{-1} i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}_{\infty} = \mathcal{W}_{\infty}$. Il résulte d'autre part des corollaires B.1.3 et B.2.5, ainsi que du lemme B.2.6, que $l(r(J)) \subset \mathcal{W}_{\infty}$. Comme en vertu du corollaire A.3.3, tout petit ensemble de flèches de $\mathcal{C}at$ permet l'argument du petit objet, la proposition 2.3.14 implique donc qu'on a bien défini ainsi une structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathcal{C}at$. La propriété à gauche de cette structure est assurée par le corollaire B.1.4. La propriété à droite résulte de la propriété de $i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}_{\infty}$, et du fait que $\text{Ex}^2 N$ respecte les fibrations (par définition d'icelles) et commute aux produits fibrés. Il est par ailleurs immédiat que le couple $(\text{cSd}^2, \text{Ex}^2 N)$ est une adjonction de Quillen. Comme tous les ensembles simpliciaux sont cofibrants, le lemme de Ken Brown [26, lemme 1.1.12] implique que le foncteur cSd^2 respecte les équivalences faibles. Pour conclure, il suffit donc de montrer que le foncteur $\text{Ex}^2 N$ induit une équivalence de catégories après localisation, ce qui résulte aussitôt de la propriété analogue pour le foncteur nerf. \square

B.2.8. On appellera *cofibrations de Thomason* les cofibrations pour la structure de catégorie de modèles fermée ci-dessus.

COROLLAIRE B.2.9. *Pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , on a l'égalité*

$$(\text{cSd}^2)^{-1} \mathcal{W} = i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W} .$$

THÉORÈME B.2.10. *Pour tout localisateur fondamental accessible \mathcal{W} , la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée propre à gauche à engendrement cofibrant, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason, et dont les équivalences faibles sont les \mathcal{W} -équivalences. En outre, pour que cette structure soit propre (à droite), il faut et il suffit que \mathcal{W} soit propre.*

DÉMONSTRATION. L'existence de cette structure, ainsi que la propriété à gauche s'établit de la même manière que celle du théorème B.2.7. Si \mathcal{W} est propre, alors $i_{\Delta}^{-1} \mathcal{W}$ est propre (5.2.18), et on peut conclure par exemple comme ci-dessus en utilisant le foncteur $\text{Ex}^2 N$, car dans cette situation, il est encore vérifié par construction qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est une fibration (resp. une équivalence faible) si et seulement si son image par $\text{Ex}^2 N$ en est une dans $\widehat{\Delta}$. Réciproquement, si cette structure de catégorie de modèles fermée est propre, alors \mathcal{W} est propre. Considérons une \mathcal{W} -catégorie test A , et $u : X \rightarrow Y$ un morphisme de préfaisceaux sur A . On obtient un carré commutatif de catégories (les flèches horizontales sont induites par les foncteurs d'oubli évidents)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}/X & \xrightarrow{u} & \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}/Y \\ j_{A/X} \downarrow & & \downarrow j_{A/Y} \\ \text{Hot}_{\mathcal{W}} // A/X & \xrightarrow{(i_A u)_!} & \text{Hot}_{\mathcal{W}} // A/Y \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences de catégories (5.3.19). Si u est une \mathcal{W} -équivalence, alors en vertu de la proposition 2.4.21, le foncteur $(i_A u)_!$ est une équivalence de catégories, ce qui implique qu'il en est de même du foncteur

u_1 . Une nouvelle application de la proposition 2.4.21 montre donc que u est une équivalence faible propre à droite, ce qui achève la démonstration. \square

3. Calcul de fractions

B.3.1. On appelle *catégorie d'objets cofibrants* une catégorie \mathcal{C} telle que \mathcal{C}° soit une catégorie d'objets fibrants au sens de K. S. Brown [7, § I.1].

PROPOSITION B.3.2. *Pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , la catégorie $\mathcal{C}at$ des petite catégories admet une structure de catégorie d'objets cofibrants, dont les cofibrations sont les immersions, et les équivalences faibles, les \mathcal{W} -équivalences.*

DÉMONSTRATION. Toute flèche de $\mathcal{C}at$ se factorise en une immersion suivie d'une \mathcal{W} -équivalence. En effet, si f est une flèche de $\mathcal{C}at$, elle admet une factorisation de la forme $f = pi$, où i est une cofibration, et où p est une fibration triviale au sens de la structure de catégorie de modèles fermée de Thomason (B.2.7). Le morphisme p est donc en particulier une ∞ -équivalence, et donc une \mathcal{W} -équivalence. Pour toute petite catégorie A , l'inclusion canonique $\emptyset \rightarrow A$ est une immersion. Les axiomes de localisateur fondamental, la proposition A.2.4 et le corollaire B.1.3 assurent trivialement les autres axiomes de catégorie d'objets cofibrants. \square

B.3.3. On note $\pi\mathcal{C}at$ la catégorie $\mathcal{C}at$, quotientée par la relation de Δ_1 -homotopie. Plus précisément, les objets de $\pi\mathcal{C}at$ sont les petites catégories, et les morphismes de A vers B dans $\pi\mathcal{C}at$ sont les éléments de l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}at}(A, B) = \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) .$$

Il est immédiat que pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , le foncteur de localisation de $\mathcal{C}at$ vers $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ se factorise de manière unique par $\pi\mathcal{C}at$.

COROLLAIRE B.3.4. *Pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , la catégorie $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ s'obtient canoniquement comme une localisation de la catégorie $\pi\mathcal{C}at$ par un calcul de fractions à gauche.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de l'énoncé dual de [7, § I.2, proposition 2]. \square

COROLLAIRE B.3.5. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On considère deux petites catégories A et B dont les images dans $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}$ sont isomorphes. Alors il existe une petite catégorie C , et deux \mathcal{W} -équivalences*

$$A \xrightarrow{\sim} C \xleftarrow{\sim} B .$$

Bibliographie

- [1] D. W. Anderson. Fibrations and geometric realizations. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 84(5) :765–788, 1978.
- [2] M. Artin, B. Mazur. *Étale Homotopy*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 100. Springer-Verlag, 1969.
- [3] C. Berger. A cellular nerve for higher categories. Prépublication.
- [4] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14 :133–150, 1975.
- [5] A. K. Bousfield, D. M. Kan. *Homotopy limits, completions, and localization*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, 1972.
- [6] A. K. Bousfield, E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ -spaces, spectra, and bisimplicial sets, in *Geometric Applications of Homotopy Theory II* (Proc. Conf. Evanston, Ill., 1977, M. G. Barrat and M. E. Mahowald eds.), pages 80–130. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 658. Springer-Verlag, 1978.
- [7] K. S. Brown. Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 186 :419–458, 1973.
- [8] W. Chachólski, J. Scherer. Homotopy theory of diagrams. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 155(736), 2002.
- [9] D.-C. Cisinski. Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles. Prépublication. <http://www.math.jussieu.fr/~cisinski/>.
- [10] D.-C. Cisinski. Théories homotopiques dans les topos. À paraître dans *J. Pure Appl. Algebra*.
- [11] D.-C. Cisinski. Les morphismes de Dwyer ne sont pas stables par rétractes. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XL-3 :227–231, 1999.
- [12] S. E. Crans. Quillen closed model structures for sheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 101 :35–57, 1995.
- [13] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan. *Model categories and more abstract homotopy theory : a work in what we like to think of as progress*. En préparation.
- [14] E. Dror Farjoun. *Cellular spaces, nullspaces and homotopy localization*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, 1995.
- [15] E. Dror Farjoun, J. H. Smith. Homotopy localization nearly preserves fibrations. *Topology*, 34 :359–375, 1995.
- [16] R. Fritsch, D. Latch. Homotopy inverses for nerve. *Math. Z.*, 177 :147–179, 1981.
- [17] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik, Band 35. Springer-Verlag, 1967.
- [18] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlegen der mathematischen Wissenschaften, Band 179. Springer-Verlag, 1971.
- [19] P. F. Goerss, J. F. Jardine. Localization theories for simplicial presheaves. *Can. J. Math.*, 50(5) :1048–1089, 1998.
- [20] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, 1971.

- [21] A. Grothendieck. *Pursuing stacks*. Manuscrit, 1983.
- [22] A. Grothendieck, M. Artin, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, 1972-1973.
- [23] A. Heller. Homotopy theories. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 71(383), 1988.
- [24] P. S. Hirschhorn. *Localization of model categories*. En préparation.
- [25] M. Hovey. Model category structures on chain complexes of sheaves. Prépublication.
- [26] M. Hovey. *Model Categories*. Math. surveys and monographs, Vol. 63. Amer. Math. Soc., 1999.
- [27] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformation I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, 1971.
- [28] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformation II*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283. Springer-Verlag, 1972.
- [29] J. F. Jardine. Simplicial objects in a Grothendieck topos. *Contemporary Math.*, 55(1) :193–239, 1986.
- [30] J. F. Jardine. Simplicial presheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 47 :35–87, 1987.
- [31] J. F. Jardine. Universal Hasse-Witt classes. *Contemporary Math.*, 83 :83–100, 1989.
- [32] J. F. Jardine. Boolean localization in practice. *Doc. Math.*, 1(13) :245–275, 1996.
- [33] J. F. Jardine. Motivic symmetric spectra. *Doc. Math.*, 5 :445–552, 2000.
- [34] D. M. Kan. On c.s.s. complexes. *Amer. J. Math.*, 179 :449–476, 1959.
- [35] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998. Second edition.
- [36] G. Maltsiniotis. *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*. Prépublication. <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/>.
- [37] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. D. Van Nostrand, 1967.
- [38] I. Moerdijk. *Classifying spaces and classifying topoi*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1616. Springer-Verlag, 1995.
- [39] F. Morel. *Théorie homotopique des schémas*. Astérisque 256. S.M.F., 1999.
- [40] F. Morel, V. Voevodsky. A^1 -homotopy theory of schemes. *Publ. math. de l'I.H.E.S.*, 90 :45–143, 1999.
- [41] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43. Springer-Verlag, 1967.
- [42] D. Quillen. Rationnal homotopy theory. *Annals of Math.*, 90 :205–295, 1969.
- [43] D. Quillen. Higher algebraic K-theory, *Higher K-theories I*, pages 85–147. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, 1973.
- [44] C. Rezk. Fibrations and homotopy colimits of simplicial sheaves. Prépublication.
- [45] G. Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 34 :105–112, 1968.
- [46] R. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85 :91–109, 1979.
- [47] R. Thomason. *Cat* as a closed model category. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXI-3 :305–324, 1980.

Index des notations

$\text{Ob } C$	1.1.2
$\text{FI } C$	1.1.2
Cat	1.1.2
$\mathcal{E}ns$	1.1.2
\widehat{C}	1.1.2
C°	1.1.2
$A/b, f/b$	1.1.3
$\mathcal{W}^{-1}\mathcal{M}, \gamma$	1.1.4
$\mathcal{W}(S) (S \subset \text{FI } \text{Cat})$	1.1.7
$b \setminus A, b \setminus f$	1.1.11
A/F	1.1.12
i_A	1.1.12
i_A^*	1.1.12
$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$	1.1.12
i^*	1.1.17
$B \setminus A$	1.1.21
Δ	1.1.29
Δ_n	1.1.29
Ord	1.1.29
\mathbb{N}	1.1.29
$y : * \longrightarrow X, X_y$	1.2.1
$\int F, \int_A F, \theta_F, K(F)$	1.2.9
$\underline{\text{Hom}}(A, \text{Cat})$	1.2.9
$\nabla F, \nabla_A F, \zeta_F$	1.2.11
π_F, ϖ_F	1.2.13
$\text{Hot}_{\mathcal{W}}, \text{Hot}_{\mathcal{W}}(B)$	1.2.14
$\text{Hot}_{A, \mathcal{W}}, \text{Hot}_{A, \mathcal{W}}(B), u^*$	1.2.14
$\text{Lu}_!$	1.2.15
$\Theta_C, \underline{u}_!$	1.2.16
$p_B : B \longrightarrow *$	1.2.17
$\text{L} \lim_{\longrightarrow}, \text{L} \lim_{\longrightarrow B}$	1.2.17
$\text{dis } h_A$	1.2.18
$\text{dis } Y$	1.3.3
ρ_X	1.3.2
$ E $	2.1.1
$\text{Acc}_\alpha(A)$	2.1.15
$T_\alpha(A)$	2.1.15

$l(F)$	2.1.20
$r(F)$	2.1.20
$\text{Cell}(F)$	2.1.21
$(IX, \partial_X^0, \partial_X^1, \sigma_X)$	2.2.1
$\text{Cyl}(A)$	2.2.1
$(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$	2.2.1
$X \otimes I, X \otimes \partial I$	2.2.2
$1_X \otimes \partial^e, 1_X \otimes \sigma$	2.2.2
\mathcal{I}	2.2.3
(\mathcal{I}, S)	2.2.3
$K \otimes I \cup L \otimes \{e\}$	2.2.4
$K \otimes I \cup L \otimes \partial I$	2.2.4
$(I, \partial^0, \partial^1)$	2.2.5
L, λ^0, λ^1	2.2.6
$h_{\mathcal{I}}(A), Q$	2.2.8
$\text{Fib}, \text{Cof}, \mathcal{W}$	2.2.10
$\Lambda^0, \Lambda(T)$	2.2.11
$\Lambda_{\mathcal{I}}(S, \mathcal{M})$	2.2.11
$\Lambda'_I(\mathcal{M})$	2.2.21
I/X	2.2.39
(\mathcal{I}_X, S_X)	2.2.41
An, An_X	2.2.43
$\text{FibN}, \text{FibN}_X$	2.2.43
$\text{Fib}_X, \text{Cof}_X, \mathcal{W}_X$	2.2.43
$\mathcal{W}(S) (S \subset \text{FI } \hat{A})$	2.3.1
$\text{cart}(S)$	2.3.9
$\underline{\text{Hom}}(I, \hat{A})$	2.3.12
\mathcal{W}^I	2.3.12
$C(p), C(\mathcal{F})$	2.4.8
$u_! : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}/Y$	2.4.20
$u^* : \mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/X$	2.4.20
δ_n^i, σ_n^i	3.1.1
$\partial \Delta_n$	3.1.1
$\mathcal{W}_\infty \subset \text{FI } \hat{\Delta}$	3.1.3
\mathcal{W}_∞/X	3.1.3
Λ_n^k	3.1.3
$\xi E, \xi f, \sigma$	3.1.12
Sd, α	3.1.12
Ex, β	3.1.12
$\text{Ex}^\infty, \beta^\infty$	3.1.17
\mathcal{CS}, κ^*	3.1.18
$\Phi_n^k, \partial \Phi_n$	3.1.19
Sd^Y, α^Y	3.1.25
$\text{Sd}^{Y,n}, \alpha^{Y,n}$	3.1.27
Ex^Y, β^Y	3.1.27
$\text{Ex}^{Y,n}, \beta^{Y,n}$	3.1.27

$\text{Ex}^{Y,\infty}, \beta^{Y,\infty}$	3.1.27
$\pi_0 : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{E}ns$	3.2.5
$p_{\Delta}^* : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}, p_A^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{A \times \Delta}$	3.3.1
$D, \text{Real}_D, \text{Sing}_D$	3.3.3
$\underline{\text{Hom}}(X, Y)$	3.3.3
$u^* \Delta$	3.3.8
$i_A^* \Delta$	3.3.8
\mathcal{W}_{Δ}	3.3.16
$\widetilde{D}, \widetilde{D}_!$	3.3.19
$\xi(u, j), \zeta(u, j)$	4.1.1
\mathcal{C}^I	4.1.2
$u_!, u^*, u_*$	4.1.2
$\mathcal{W}^I, \text{Ho}_{\mathcal{W}} \mathcal{C}^I, \text{Ho} \mathcal{C}^I$	4.1.7
$u^* : \text{Ho} \mathcal{C}^J \longrightarrow \text{Ho} \mathcal{C}^I$	4.1.7
$\text{L}u_! : \text{Ho} \mathcal{C}^I \longrightarrow \text{Ho} \mathcal{C}^J$	4.1.10
$\text{R}u_* : \text{Ho} \mathcal{C}^I \longrightarrow \text{Ho} \mathcal{C}^J$	4.1.11
$\text{L} \varinjlim, \text{R} \varprojlim$	4.1.11
$\text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}, \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$	4.1.23
$u^* : \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J) \longrightarrow \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$	4.1.23
$\text{L}u_! : \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I) \longrightarrow \text{Ho}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(J)$	4.1.26
$\text{Sim} C, \tau_C$	4.2.1
$\underline{p}_I!, \underline{\text{holim}}_I, \underline{\text{holim}}$	4.2.2
$\underline{u}_!$	4.2.2
$F _X$	4.3.1
\mathcal{W}_{cat}	4.3.2
$\underline{\Phi}_!$	4.3.6
$\text{L}\Phi_!$	4.3.7
ϕ_X	4.4.1
$\overline{\mathcal{W}}$	4.4.4
$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}, \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \widehat{A}(I)$	5.1.1
$\mathcal{W}_{\infty} \subset \text{FI} \text{Cat}$	5.1.14
Hot_{∞}	5.1.14
(B, I)	5.2.2
$\text{Hot}_{\mathcal{W}} // A$	5.3.14
$\pi_0 : \text{Cat} \longrightarrow \mathcal{E}ns$	5.4.6
$\mathbb{A}, \text{Rep}(\mathbb{A})$	5.5.8
BM	5.5.9
$q^*, s_!, s^*$	5.5.13
\mathcal{W}_{s^*}	5.5.16
$s^* - \text{Ho} \text{Rep}(\mathbb{M})$	5.5.19
A, A_+, A_-, λ_A	6.1.1
$\Delta_+, \Delta_-, \lambda_{\Delta}$	6.1.4
$(A/X)_+, (A/X)_-, \lambda_{A/X}$	6.1.5
(π, b)	6.1.12
(π, v)	6.1.13

$A_n, i_n, \text{Sk}^n A$	6.1.14
$\text{Sk}^n X, (\text{Sk}^n X)_a$	6.1.16
$\partial a, \ell_a$	6.1.26
$\square_n, \delta_n^{i,\varepsilon}, \sigma_n^i$	6.2.1
\square	6.2.1
$\square_m \otimes \square_n$	6.2.5
$\square_{\leq 1}$	6.2.5
$i : \square \longrightarrow \text{Cat}$	6.2.7
$(I _{A/a}, \partial^0 _{A/a}, \partial^1 _{A/a})$	6.2.10
$\square_+, \square_-, \lambda_{\square}$	6.2.15
$i_n : \partial \square_n \longrightarrow \square_n$	6.2.19
$X \otimes Y$	6.2.21
$i_{\dagger} : \widehat{\square} \longrightarrow \widehat{\Delta}$	6.2.23
$i^* : \widehat{\Delta} \longrightarrow \widehat{\square}$	6.2.23
$\square_n^{i,\varepsilon}$	6.2.33
\mathbb{O}	6.3.1
$\mathbb{O}_n, d^0, d^1, s, d^{e,n-m}, s^{n-m}$	6.3.1
$\partial \mathbb{O}_n$	6.3.4
$\Delta_{\leq n}$	7.1.1
$\text{Cosk}^n X$	7.1.1
\mathcal{W}_n	7.1.4
E	7.3.1
$H\mathbb{Q}$	7.3.4
$\mathcal{W}_{H\mathbb{Q}}$	7.3.4
$\mathcal{W}_{\mathbb{Q},n}$	7.3.4
j_A	A.1.1
i_{\dagger}, i^*	A.1.6
i^*/C	A.1.8
N, c	A.1.13
A_B	A.2.3

Index terminologique

α -accessible (foncteur)	2.1.5
α -accessible (objet)	2.1.5
α -filtrant	2.1.2
accessible (A -localisateur)	2.3.1
accessible (localisateur fondamental)	1.1.7
accessible (foncteur)	2.1.5
accessible (modeleur élémentaire)	5.1.5
accessible (objet)	2.1.5
A -localisateur	1.3.9
A -localisateur engendré par S	2.3.1
A -localisateur minimal	2.3.1
A -localisateur propre	2.4.3
A -localisateur régulier	4.4.4
A -localisateur test	5.1.5
A -prélocalisateur	6.1.34
argument du petit objet	2.1.24
asphérique (catégorie)	1.1.5
asphérique (foncteur)	1.1.5
asphérique au-dessus de C	1.1.5
A -types d'homotopie	5.3.14
augmentation d'un précyindre	6.2.9
bord d'un préfaisceau représentable	6.1.26
carré homotopiquement cartésien	2.4.17
catégorie classifiante associée à un préfaisceau en monoïdes	5.5.9
catégorie de modèles fermée	2.2.10
catégorie de modèles fermée exponentielle	4.1.3
catégorie de modèles fermée exponentielle à droite	4.1.3
catégorie de modèles fermée exponentielle à gauche	4.1.3
catégorie de modèles fermée propre	2.4.1
catégorie de modèles fermée propre à droite	2.4.1
catégorie de modèles fermée propre à gauche	2.4.1
catégorie des cubes	6.2.1
catégorie des globes	6.3.1
catégorie des simplexes	1.1.29
catégorie des simplexes de C	4.2.1
catégorie squelettique	6.1.1
catégorie squelettique régulière	6.1.30
catégorie test	1.1.14

catégorie test faible	1.1.14
catégorie test locale	1.1.14
cocrible	1.1.21
cofibration (au sens catégorique)	1.2.1
cofibration de Thomason	B.2.8
colimite homotopique	4.2.2
crible	1.1.21
coasphérique	1.1.11
coasphérique au-dessus de C	1.1.11
complétion régulière	4.4.4
complétion simpliciale	3.3.16
complexe de Kan	3.1.3
complexe simplicial combinatoire	3.1.18
cylindre	2.2.1
cylindre de Lawvere	2.2.6
cylindre fonctoriel	2.2.1, 6.2.9
décomposition d'Eilenberg-Zilber d'un objet	6.1.12
décomposition d'Eilenberg-Zilber d'une section	6.1.13
donnée homotopique	2.2.3
donnée homotopique canonique sur \square	6.2.25
donnée homotopique élémentaire	2.2.3
donnée homotopique induite	2.2.41
dual d'un rétracte par déformation fort	2.2.15
E -équivalence (pour un spectre E)	7.3.1
engendrement cofibrant	2.2.10
ensemble cubique	6.2.14
ensemble globulaire	6.3.1
ensemble simplicial	3.1.1
équivalence faible	1.1.5
équivalence faible (définie par une donnée homotopique)	2.2.12
équivalence faible locale	1.1.12
équivalence faible propre à droite	2.4.1
extension anodine	2.2.12
faiblement saturé(e)	1.1.4
fibrant (au sens d'une donnée homotopique)	2.2.12
fibration (au sens catégorique)	1.2.1
fibration de Kan	3.1.3
fibration naïve	2.2.12
fibration triviale (dans une catégorie de préfaisceaux)	1.1.23
foncteur de cointégration	1.2.11
foncteur de subdivision barycentrique	3.1.12
foncteur d'extension	3.1.12
foncteur d'intégration	1.2.9
foncteur I -contractile	5.2.2
foncteur lisse	1.2.2
foncteur nerf	1.1.29

foncteur propre	1.2.2
foncteur test	1.1.18
foncteur test faible	1.1.18
foncteur test local	1.1.18
foncteur \mathcal{W} -lisse	1.2.2
foncteur \mathcal{W} -parfait	4.4.6
foncteur \mathcal{W} -propre	1.2.2
foncteur \mathcal{W} -régulier	4.4.1
fortement saturé(e)	1.1.4
homotope	2.2.7
\mathcal{I} -contractile	2.2.8
\mathcal{I} -équivalence d'homotopie	2.2.8
\mathcal{I} -homotope	2.2.7
immersion	A.2.2
immersion fermée	1.1.21
immersion ouverte	1.1.21
immersion triviale	B.1.1
limite inductive α -filtrante	2.3.16
localement asphérique	1.1.12
localisateur fondamental	1.1.6
localisateur fondamental engendré par S	1.1.7
localisateur fondamental minimal	1.1.7
localisateur fondamental modelable par A	5.1.5
localisateur fondamental non trivial	7.2.1
localisateur fondamental propre	5.2.16
localisateur fondamental trivial	7.2.1
longueur $\leq m$	6.1.29
modèle cellulaire	2.1.27
modeleur élémentaire	5.1.5
monomorphisme strict	6.1.29
morphisme de cylindre	2.2.1
morphisme de Dwyer	A.2.3
n -ème foncteur cosquelette	7.1.1
n -ème foncteur squelette	7.1.1
n -ème squelette d'un préfaisceau	6.1.16
n -équivalence	7.1.4
n -équivalence forte	7.1.21
n -extension anodine	7.1.4
n -fibrant	7.1.4
objet dégénéré	6.1.7
objet non dégénéré	6.1.7
plongement canonique de \blacksquare dans Cat	6.2.7
précylindre fonctoriel	6.2.9
précylindre fonctoriel augmenté	6.2.9
préfaisceau de taille $\leq \alpha$	2.1.13
préfaisceau \mathcal{W} -régulier	4.4.1

propriété de relèvement à droite	1.1.23
propriété de relèvement à gauche	1.1.23
relations cocubiques	(6.2.3.1)
représentation d'une catégorie fibrée	5.5.8
résolution cosimpliciale de Lawvere	3.3.8
rétracte	2.1.19
rétracte par déformation fort	2.2.15
section dégénérée	6.1.7
section non dégénéré	6.1.7
segment	2.2.5
segment de Lawvere	2.2.6
segment séparant	2.2.5
sous-objet homogène	6.1.29
s^* -équivalences	5.5.16
s^* -fibrations	5.5.16
s^* -structure (catégorie de modèles fermée)	5.5.19
stable par compositions transfinies	1.3.6
stable par images directes	1.3.6
stable par rétractes	2.1.19
stricte (\mathcal{W} -catégorie test locale)	5.5.3
structure de catégorie de modèles minimale	2.3.4
\mathcal{W} -asphérique (catégorie)	1.1.5
\mathcal{W} -asphérique (foncteur)	1.1.5
\mathcal{W} -asphérique au-dessus de C	1.1.5
\mathcal{W} -catégorie test	1.1.14
\mathcal{W} -catégorie test faible	1.1.14
\mathcal{W} -catégorie test locale	1.1.14
\mathcal{W} -coasphérique	1.1.11
\mathcal{W} -coasphérique au-dessus de C	1.1.11
\mathcal{W} -contracteur	5.2.2
\mathcal{W} -cylindre	1.1.26
\mathcal{W} -équivalence	1.1.5
\mathcal{W} -équivalence (dans \widehat{Cat} , pour un A -localisateur \mathcal{W})	4.3.2
\mathcal{W} -équivalence (dans \widehat{A} , pour un localisateur fondamental \mathcal{W})	1.1.12
\mathcal{W} -équivalence (de foncteurs à valeurs dans \widehat{A})	4.1.23
\mathcal{W} -équivalence étagée (de foncteurs à valeurs dans \widehat{Cat})	1.2.9
\mathcal{W} -équivalence étagée (de foncteurs à valeurs dans \widehat{A})	4.1.23
\mathcal{W} -équivalence locale	1.1.12
\mathcal{W} -équivalence universelle	3.2.1
\mathcal{W} -fibration faible	3.2.1
\mathcal{W} -foncteur test	1.1.18
\mathcal{W} -foncteur test faible	1.1.18
\mathcal{W} -foncteur test local	1.1.18
\mathcal{W} -immersion	B.1.1
\mathcal{W} -localement asphérique	1.1.12

\mathcal{W} -localement constant (morphisme de préfaisceaux)	3.2.1
\mathcal{W} -localement constant (morphisme de $\mathcal{C}at$)	5.4.1
\mathcal{W} -résolution cosimpliciale	3.3.7
\mathcal{W} -résolution cosimpliciale contractile	3.3.7
\mathcal{W} -structure (catégorie de modèles fermée)	5.5.19
X -équivalence faible	2.2.43
X -extension anodine (d'ensembles simpliciaux)	3.1.3
(\mathbb{Q}, n) -équivalence	7.3.4
∞ -asphérique	5.1.14
∞ -coasphérique	5.1.14
∞ -équivalence (de catégories)	5.1.14
∞ -équivalence (d'ensembles simpliciaux)	3.1.3