Problèmes diophantiens en dimension supérieure.

par Michel Waldschmidt.

1. Critères

La plupart des démonstrations d'irrationalité, de transcendance ou d'indépendance algébrique reposent sur des méthodes d'approximation diophantienne. Comme premier exemple, voici un critère d'irrationalité qui est utilisé, par exemple, pour démontrer le théorème d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$ (voir [1]).

Proposition 1. *Soient $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m$ des nombres réels. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) L'un au moins des nombres $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m$ est irrationnel, c'est-à-dire

$$\mathbb{Q}(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m)\neq\mathbb{Q}.$$

(ii) Pour tout $\epsilon>0$ il existe des entiers rationnels $p_1,\ldots,p_m,q$ dans $\mathbb{Z}$ avec $q>0$ tels que

$$0<\max_{1\le i\le m}\left|\vartheta_i-\frac{p_i}{q}\right|\le\frac{\epsilon}{q}.$$

(iii) Il existe une infinité de $m+1$-uplets $(p_1,\ldots,p_m,q)$ dans $\mathbb{Z}^{m+1}$ avec $q>0$ tels que

$$0<\max_{1\le i\le m}\left|\vartheta_i-\frac{p_i}{q}\right|\le q^{-1-(1/m)}.$$

(iv) Pour tout entier $Q>1$ il existe $(p_1,\ldots,p_m,q)$ dans $\mathbb{Z}^{m+1}$ avec $1\le q<Q^m$ tel que

$$0<\max_{1\le i\le m}\left|q\vartheta_i-p_i\right|\le\frac{1}{Q}.$$

Un raffinement quantitatif de ce critère conduit à des mesures d'irrationalité. Pour simplifier on se place dans le cas $m=1$.

Proposition 2. *Soient ϑ un nombre réel, k un entier positif, c_1, c_2, τ_1, τ_2 des nombres réels positifs. On pose*

$$\kappa=\frac{k(\tau_1+1)}{\tau_2}.$$

On suppose que pour tout nombre réel H suffisamment grand, il existe un polynôme $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\deg P\le k,\quad \mathrm{H}(P)\le H$$

et

$$c_1H^{-\tau_1}\le|P(\vartheta)|\le c_2H^{-\tau_2}.$$

Alors il existe $c_0>0$ tel que, pour tout $p/q\in\mathbb{Q}$ avec $q>0$, on ait

$$\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{c_0}{q^\kappa}.$$

Voici un schéma de démonstration de la proposition 2. On commence par déduire de la proposition 1 que ϑ est irrationnel. On choisit ensuite un entier positif q_0 suffisamment grand, puis un nombre réel c_0 suffisamment petit dans l'intervalle

$$0<c_0\le\min_{1\le q\le q_0}q^\kappa\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right|.$$

Supposons maintenant qu'il existe un nombre rationnel p/q tel que

$$\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right|<\frac{c_0}{q^\kappa}.$$

Comme on a choisi q_0 suffisamment grand, le nombre $H=(2c_2q^k)^{1/\tau_2}$ est suffisamment grand pour qu'il existe un polynôme P donné par l'hypothèse de la proposition 2. On vérifie alors

$$\bigl|P(\vartheta)-P(p/q)\bigr|\le c_3e^H\bigl|\vartheta-p/q\bigr|$$

avec $c_3>0$. Comme c_0 a été choisi suffisamment petit, $P(p/q)$ ne s'annule pas. La minoration à la Liouville $|P(p/q)|\ge 1/q^k$ permet de conclure. $\square$

Il y a plusieurs manières d'étendre la proposition 1 en un critère de transcendance. On peut remplacer $qX-p$ par un polynôme de degré quelconque, ou bien on peut remplacer p/q par un nombre algébrique. C'est la première solution la plus facile.

Proposition 3. *Soit $\underline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ un m-tuplet de nombres complexes. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) Un au moins des nombres $\theta_1,\ldots,\theta_m$ est transcendant, ce qui s'écrit

$$\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\underline{\theta})\ge 1.$$

(ii) Pour tout $\kappa>0$ il existe un entier positif T et un polynôme $f\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m]$ tel que $\deg f\le T$, $\mathrm{H}(f)\le e^T$ et

$$0<|f(\underline{\theta})|\le e^{-\kappa T}.$$

(iii) Pour tout κ dans l'intervalle $0<\kappa<1/2$ il existe un entier positif T_0 tel que, pour tout $T\ge T_0$, il existe un polynôme $f\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m]$ vérifiant $\deg f\le T$, $\mathrm{H}(f)\le e^T$ et

$$0<|f(\underline{\theta})|\le e^{-\kappa T^2}.$$

(iv) Pour tout $H \geq 1$ et $D \geq 1$ il existe un polynôme $f \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$ de degré total $\leq D$ et de hauteur $\mathrm{H}(f) \leq H$, tel que

$$0 < |f(\underline{\theta})| \leq \sqrt{2}(1 + |\underline{\theta}|)^D H^{-(D-1)/2},$$

avec $|\underline{\theta}| = \max_{1 \leq i \leq m} |\theta_i|$.

Ces trois énoncés en suggèrent bien d'autres: comme il a été dit plus haut, on peut considérer l'approximation algébrique plutôt que l'approximation polynomiale. On peut aussi chercher des critères donnant des mesures de transcendance, ou plus généralement d'approximation diophantienne simultanée. Une étape suivante concerne les critères d'indépendance algébrique, puis les mesures d'indépendance algébrique. Nous avons effectué le premier pas avec les trois énoncés précédents, mais il ne faut pas cacher que la théorie est très loin d'être élaborée de manière satisfaisante.

Il est intéressant de noter que les travaux récents mettent en valeur l'intérêt de considérer des approximations simultanées de nombres complexes par des nombres algébriques de grand degré. Dans la théorie classique de l'approximation diophantienne, quand on approxime simultanément des nombres réels $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ par des nombres rationnels, le caractère *simultané* de l'approximation est reflété par l'introduction d'un dénominateur commun des approximants: on estime

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left| \vartheta_i - \frac{p_i}{q} \right| \quad \text{en fonction de } q.$$

Pour étendre cette étude en <u>dimension supérieure</u>, on étudie l'approximation nombres complexes $\theta_1, \ldots, \theta_m$ par des nombres algébriques $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Il serait naturel alors de faire intervenir la hauteur logarithmique absolue

$$\mathrm{h}(1 : \gamma_1 : \cdots : \gamma_m)$$

du point projectif correspondant dans $\mathbb{P}_m(\overline{\mathbb{Q}})$: dans le cas $(1 : \gamma_1 : \cdots : \gamma_m) \in \mathbb{P}_m(\mathbb{Q})$, cela redonnerait bien la situation précédente concernant l'approximation rationnelle. Mais, dans le cas général, cela n'apporterait de différence significative avec, par exemple,

$$\max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{h}(\gamma_i)$$

que si l'on arrivait à obtenir des énoncer fins, ce qui est loin d'être le cas dans l'état actuel de la théorie. Aussi le caractère simultané de l'approximation algébrique est-il mesuré différemment: c'est le paramètre

$$D = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : \mathbb{Q}]$$

qui contrôle la situation. Naguère, la hauteur était considérée comme le principal paramètre, et la dépendance en le degré était un peu négligée. Les études récentes montrent que le degré D peut jouer un rôle très important, notamment en liaison avec des questions d'indépendance algébrique.

Une présentation générale du cadre dans lequel se situe cette problématique est [3](voir notamment le Chap.2, §1.5), qui est aussi une source de références. Des résultats plus récents se trouvent dans les travaux de Philippon [6] et Roy [7]. Il est prévu que le chapitre 17 de [10] soit consacré à ce sujet et contienne entre autres la démonstration des énoncés ci-dessus.

2. Constructions de suites approximantes

Toute la partie arithmétique des démonstrations de transcendance est le plus souvent contenue dans les critères tels que ceux que nous venons de présenter. Pour les utiliser, il faut construire des suites d'approximation. Il s'agit là bien sûr de la partie essentielle de la démonstration d'irrationalité, de transcendance, d'indépendance algébrique, ou d'une version quantitative d'un tel énoncé. Plus précisément, étant donné un m-uplet de nombres réels ou complexes $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, on cherche à construire une suite de polynômes $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$ de degré (total, disons) et de hauteur contrôlés (en fonction de N), telle que chacun des nombres $P_N(\underline{\theta})$ soit non nul et ait une petite valeur absolue.

Un des points clefs est $P_N(\underline{\theta}) \neq 0$. Souvent, c'est la partie la plus délicate, qui nécessite un lemme de zéros. C'est là qu'intervient le lemme de Roth, ou le lemme du produit de Faltings par exemple (voir [6]).

La majoration de $|P_N(\underline{\theta})|$ se fait le plus souvent par des moyens analytiques. Le lemme de Schwarz est alors très utile, mais en <u>dimension supérieure</u> (si les fonctions analytiques concernées dépendent de plusieurs variables) nos connaissances sont encore trop fragmentaires.

Dans les cas les plus favorables, on sait établir l'existence d'une telle suite $(P_N)_{N \geq N_0}$ avec des encadrements

$$\epsilon_N \leq |P_N(\underline{\theta})| \leq \epsilon'_N,$$

pour des suites réelles $(\epsilon_N)_{N \geq N_0}$ et $(\epsilon'_N)_{N \geq N_0}$ convenables; alors non seulement on obtient l'irrationalité ou la transcendance de l'un des nombres θ_i, ou même une minoration du degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\underline{\theta})$, mais on trouve en même temps un raffinement quantitatif de cet assertion, c'est-à-dire une mesure (d'irrationalité, de transcendance ou d'indépendance algébrique). Un exemple récent de telle situation est la démonstration, par Nesterenko [5], de l'indépendance algébrique de π, e^π et $\Gamma(1/4)$.

Au lieu de construire une suite de polynômes, on peut aussi chercher à construire une suite $(\underline{\gamma}_N)_{N \geq N_0}$ de m-uplets de nombres algébriques $\underline{\gamma}_N \in \overline{\mathbb{Q}}^m$ telle que chacun des nombres

$$|\underline{\theta} - \underline{\gamma}_N| = \max_{1 \leq i \leq m} |\theta_i - \gamma_{Ni}|$$

soit petit et non nul. Noter que dans le cas de l'approximation rationnelle d'un nombre réel, les deux points de vue sont équivalents, mais il n'en va pas du tout de même dans le cas général.

Ces deux points de vue ne sont que deux extrêmes d'une situation beaucoup plus générale: Philippon étudie l'approximation de $\underline{\theta} \in \mathbb{C}^m$ par des cycles; l'approximation polynomiale correspond à un cycle de codimension 1, tandis que l'approximation algébrique est associée à un cycle de dimension 0.

La construction de suites $(P_N)_{N\geq N_0}$ ou $(\gamma_N)_{N\geq N_0}$ peut se faire de plusieurs manières différentes. Les travaux de Hermite, Padé, Thue, Siegel, Apéry, Beukers… reposent sur des énoncés d'approximation de fonctions analytiques (notamment des approximants de Padé). De nombreux travaux récents ont été consacrés à cette approche (nous renvoyons à [3], Chap.2).

Le principe des tiroirs, introduit dans ce contexte par Thue et Siegel, permet de construire des fonctions auxiliaires qui ont été longtemps un des piliers de la théorie. Ces fonctions auxiliaires ont été supplantées par les déterminants d'interpolation de Laurent (voir par exemple [8] et [10]), puis plus récemment par des inégalités de pentes en théorie d'Arakelov, grâce aux travaux de Bost [2].

3. Applications

On ne s'étonnera pas si les applications des méthodes que nous venons de décrire briévement concernent au premier chef des problèmes d'irrationalité, de transcendance ou d'indépendance algébrique, ainsi que des énoncés d'approximation diophantienne fournissant des raffinements quantitatifs.

Pour terminer citons un autre genre d'application concernant la densité des points rationnels sur une variété abélienne [9], et donnant une version quantitative d'un énoncé suggéré par une question de Mazur [4].

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne simple de dimension g sur un corps de nombres $K\subset\mathbb{R}$, dont le groupe de Mordell-Weil $\mathcal{A}(K)$ a pour rang ℓ. Quand $\ell\geq g^2-g+1$, la clôture topologique de $\mathcal{A}(K)$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle contient la composante neutre $\mathcal{A}(\mathbb{R})^0$ de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. De plus, si $\ell\geq g^2$, alors il existe $\gamma\in\mathcal{A}(K)\cap\mathcal{A}(\mathbb{R})^0$ tel que $\mathbb{Z}\gamma$ soit dense dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})^0$. Voici un raffinement quantitatif de ces énoncés de densité.

On désigne par $\hat{\mathrm{h}}$ la hauteur canonique de Néron-Tate sur $\mathcal{A}(K)$. On suppose $\mathcal{A}$ plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}_N$ sur K. On choisit une métrique sur l'espace projectif de façon à définir une distance sur $\mathcal{A}(\mathbb{R})$. On définit enfin, pour $h>0$,

$$\hat{\eta}_{\mathcal{A}}(h)=\inf\bigl\{\epsilon>0\ ;\ \text{pour tout } \zeta\in\mathcal{A}(\mathbb{R})^0,\text{ il existe }\gamma\in\mathcal{A}(K)\text{ tel que }\hat{\mathrm{h}}(\gamma)\leq h\text{ et }\mathrm{dist}(\zeta,\gamma)\leq\epsilon\bigr\}.$$

Théorème. – *Supposons $\ell\geq 2g^2$. Il existe deux constantes positives C_1 et C_2, qui dépendent de $\mathcal{A}$ et K, ainsi que du plongement de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{P}_N$, telles que, pour tout $h\geq e$,*

$$\hat{\eta}_{\mathcal{A}}(h)\leq C_1\exp\{-C_2(\log h)^\theta\}\qquad \text{où}\qquad \theta=1-\frac{2g^2}{\ell+1}.$$

References

[1] Apéry, Roger.— Irrationalité de $\zeta 2$ et $\zeta 3$. Journées Arithmétiques de Luminy 1978, Soc. Math. France, Astérisque, **61** (1979), 11–13.

[2] Bost, Jean-Benoit.— Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres. *Séminaire Bourbaki*, 47è année, 1994-95, N° 795 ; Soc. Math. France, Astérisque, **237** (1996).

[3] Fel'dman, Naum I.; Nesterenko, Yuri V..— *Number theory. IV. Transcendental Numbers.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **44**. Springer-Verlag, Berlin, 1998. iii+345 pp.

[4] Mazur, Barry.— The topology of rational points. Experiment. Math. **1** (1992), no. 1, 35–45.
Questions of decidability and undecidability in number theory. J. Symbolic Logic **59** (1994), no. 2, 353–371.
Speculations about the topology of rational points: an up-date. *Columbia University Number Theory Seminar (New-York 1992),* Astérisque **128** (1995), 4, 165–181.

[5] Nesterenko, Yuri V..— Modular functions and transcendence questions. Mat. Sb. **187** N° 9 (1996), 65–96. Engl. Transl., Sbornik Math., **187** N° 9-10 (1996), 1319–1348.

[6] Philippon, Patrice.— Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne. Bull. Austral. Math. Soc., à paraître.

[7] Roy, Damien.— Approximation algébrique simultanée de nombres de Liouville. En préparation.

[8] Waldschmidt, Michel.— Approximation diophantienne dans les groupes algébriques commutatifs — (I) : Une version effective du théorème du sous-groupe algébrique. J. reine angew. Math., **493** (1997), 61–113.

[9] Waldschmidt, Michel.— Density measure of rational points on abelian varieties; Nagoya Math. J., to appear.

[10] Waldschmidt, Michel.— *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups. Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables.*
Livre en préparation. `http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/dalag_S.ps`

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Institut Mathématique de Jussieu
Problèmes Diophantiens, Case 247
4, Place Jussieu
F – 75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE
e-mail: miw@math.jussieu.fr
URL: http://www.math.jussieu.fr/~miw