Lundi 21 Juillet 2014

Université de Lomé, Togo.
http://www.univ-lome.tg/

La constante d'Euler est-elle un nombre rationnel, un nombre algébrique irrationnel ou bien un nombre transcendant ?

Michel Waldschmidt

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) France

http://www.math.jussieu.fr/~miw/

Résumé

Déterminer la nature arithmétique de constantes de l'analyse est le plus souvent un problème difficile, très fréquemment on ne connait pas la réponse - c'est le cas pour la constante d'Euler. Néanmoins, on connaît un certain nombre de propriétés de cette constante qui vaut approximativement

$$0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,1\ldots$$

Nous en décrirons quelques unes.

Référence

JEFFREY C. LAGARIAS
Euler's constant : Euler's work and modern developments
Bulletin Amer. Math. Soc. **50** (2013), No. 4, 527–628.

arXiv:1303.1856 [math.NT]
Bibliographie : 314 references.

Archives Euler et index Eneström

http://eulerarchive.maa.org/

Gustaf Eneström (1852–1923)
Die Schriften Euler's chronologisch nach den Jahren geordnet, in denen sie verfasst worden sind
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung, 1913.


Gustaf Eneström.
Efter fotografi.

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/index/enestrom.html

http://www.eulerarchive.org/

(Référence [86] du texte de Lagarias)

Les nombres harmoniques

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Suite :

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{6}, \quad \frac{25}{12}, \quad \frac{137}{60}, \quad \frac{49}{20}, \quad \frac{363}{140}, \quad \frac{761}{280}, \quad \frac{7129}{2520}, \ldots$$

Les nombres harmoniques

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Suite :

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{6}, \quad \frac{25}{12}, \quad \frac{137}{60}, \quad \frac{49}{20}, \quad \frac{363}{140}, \quad \frac{761}{280}, \quad \frac{7129}{2520}, \ldots$$

Les nombres harmoniques

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

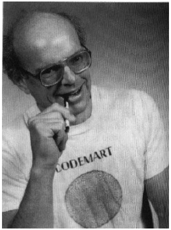
Suite :

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{6}, \quad \frac{25}{12}, \quad \frac{137}{60}, \quad \frac{49}{20}, \quad \frac{363}{140}, \quad \frac{761}{280}, \quad \frac{7129}{2520}, \ldots$$

The online encyclopaedia of integer sequences

https://oeis.org/

Neil J. A. Sloane



Numérateurs et dénominateurs

Numérateurs : https://oeis.org/A001008

$$1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993,$$

$$1171733, 1195757, 2436559, 42142223, 14274301, 275295799,$$

$$55835135, 18858053, 19093197, 444316699, 1347822955, \ldots$$

Dénominateurs : https://oeis.org/A002805

$$1, 2, 6, 12, 60, 20, 140, 280, 2520, 2520, 27720, 27720, 360360,$$

$$360360, 360360, 720720, 12252240, 4084080, 77597520,$$

$$15519504, 5173168, 5173168, 118982864, 356948592, \ldots$$

Euler (1731)

De progressionibus harmonicis observationes

Leonhard Euler (1707–1783)

La suite

$$H_n - \log n$$

a une limite $\gamma = 0,577\,21\underline{8}\ldots$ quand n tend vers l'infini.

De plus,

$$\gamma = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(m)}{m}.$$

La fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Euler : $s \in \mathbf{R}$.

Riemann : $s \in \mathbf{C}$.

Valeur de la constante d'Euler

The online encyclopaedia of integer sequences
https://oeis.org/A001620
Decimal expansion of Euler's constant
(or Euler–Mascheroni constant) gamma.

Yee (2010) computed $29\,844\,489\,545$ decimal digits of gamma.

$$\gamma = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,\ldots$$

Nicholas Mercator (1668)

Nicholas Mercator (1620–1687)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Gerardus Mercator (1512–1594)

Ne pas confondre Nicholas avec Gerardus, le Mercator de la projection :

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Mercator_Gerardus.html

Calcul de sa constante par Euler en 1731

Euler remplace x par $1/m$ avec $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ dans la formule de Mercator donnant $\log(1+x)$:

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}\right)^3 - \cdots$$

$$\log \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \cdots$$

$$\log \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \cdots$$

$$\log \frac{5}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \cdots$$

En ajoutant les n premiers termes de la suite de ces formules, Euler trouve

$$\log(n+1) = H_n - \frac{1}{2}H_{n,2} + \frac{1}{3}H_{n,3} - \cdots$$

Les nombres m–harmoniques d'Euler

On a donc

$$\log(n+1) = H_n - \frac{1}{2}H_{n,2} + \frac{1}{3}H_{n,3} - \cdots$$

avec

$$H_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}$$

pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

Ainsi, $H_{n,1} = H_n$ et, pour $m \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} H_{n,m} = \zeta(m).$$

Les nombres m–harmoniques d'Euler

On a donc

$$\log(n+1) = H_n - \frac{1}{2}H_{n,2} + \frac{1}{3}H_{n,3} - \cdots$$

avec

$$H_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}$$

pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$.

Ainsi, $H_{n,1} = H_n$ et, pour $m \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} H_{n,m} = \zeta(m).$$

La démonstration d'Euler (1731)

Dans la formule

$$H_n - \log(n+1) = \frac{1}{2}H_{n,2} - \frac{1}{3}H_{n,3} + \cdots ,$$

quand n tend vers l'infini,
le membre de droite tend vers

$$\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m \frac{\zeta(m)}{m}$$

qui est la somme d'une série alternée dont le terme général décroît. Le membre de gauche a donc une limite qui est γ.

Lorenzo Mascheroni (1792)

Donne 32 décimales

$$\gamma = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,6\underline{1}8\,112\,090\,082\,39$$

Les 19 premières décimales sont correctes ; les 15 premières décimales avaient déjà été données par Euler en 1755 puis en 1765.

Von Soldner (1809) : 22 décimales

$$\gamma = 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,5$$

C.F. Gauss, F.G.B. Nicolai : 40 décimales

Calculs de décimales de la constante d'Euler

1872 :	J.W.L. Glaisher	100 décimales
1878 :	J.C. Adams	263 décimales
1952 :	J.W. Wrench Jr	328 décimales
1962 :	D. Knuth	1272 décimales
1963 :	D.W. Sweeney	3566 décimales
1964 :	W.A. Beyer et M.S. Waterman	7114 décimales (4879 correctes)
1977 :	R.P. Brent	$20\,700$ décimales
1980 :	R.P. Brent et E.M. McMillan	$30\,000$ décimales

Fonction Gamma d'Euler (1765)

De curva hypergeometrica hac aequationes expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$.

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t} \\ &= e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}. \end{aligned}$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx.$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

Fonction Gamma d'Euler (1765)

De curva hypergeometrica hac aequationes expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t} \\
&= e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.
\end{aligned}$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx.$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

Fonction Gamma d'Euler (1765)

De curva hypergeometrica hac aequationes expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$.

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z \cdot \frac{dt}{t} \\ &= e^{-\gamma z} \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}. \end{aligned}$$

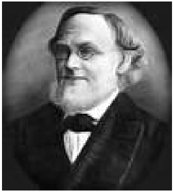
$$\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx.$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

Lettre de Daniel Bernoulli à Christian Goldbach
6 octobre 1729

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_gamma

Daniel Bernoulli
(1700 - 1782)



Christian Goldbach
(1690 - 1764)

Formules d'Euler (1768)

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt.$$

$$\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{\log z} \right) dz.$$

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} \left(\zeta(n) - 1 \right).$$

$$\gamma = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) \left(\zeta(2k+1) - 1 \right).$$

Citations d'Euler (1768)

"$\mathcal{O} = 0,5772156649015325$ qui numerus eo maiori attentione dignus videtur, quod eum, cum olim in hac investigatione multum studii consumsissem, nullo modo ad cognitum quantitatum genus reducere valui."

> *Ce nombre semble d'autant plus remarquable que j'ai dépensé pas mal d'efforts pour l'étudier sans parvenir à ramener sa valeur à celle d'une quantité connue.*

"Manet ergo quaestio magni momenti, cujusdam indolis sit numerus iste $\mathcal{O}$ et ad quodnam genus quantitatum sit referendus."

> *Donc la grande question est de déterminer la nature arithmétique de ce nombre $\mathcal{O}$ $(= \gamma)$ et de savoir dans quelle classe il doit être rangé.*

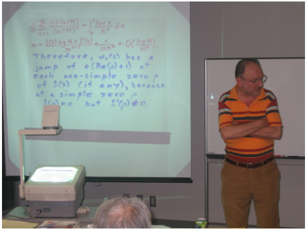
Jonathan Sondow http://home.earthlink.net/~sondow/

$$\gamma = \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2 \binom{t+k}{k}} dt$$

$$\gamma = \lim_{s \to 1+} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{s^n} \right)$$

$$\gamma = \int_1^\infty \frac{1}{2t(t+1)} \, {}_2F_3 \left(\left. \begin{matrix} 1, & 2, & 2 \\ 3, & t+2 & \end{matrix} \right| 1 \right) dt.$$

Jonathan Sondow et Wadim Zudilin



JONATHAN SONDOW & WADIM ZUDILIN, *Euler's constant, q-logarithms, and formulas of Ramanujan and Gosper*, Ramanujan J. **12** (2006), 225–244.

Irrationalité de la constante d'Euler

Conjecture. *La constante d'Euler est irrationnelle.*

Si $\gamma = p/q$, alors $q > 10^{15\,000}$.
Développement en fraction continue : $30\,000$ premiers termes calculés.
http://oeis.org/A002852

$$\gamma = [0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 40, 1, 11, 3, \ldots]$$

Irrationalité de la constante d'Euler

Conjecture. *La constante d'Euler est irrationnelle.*

Si $\gamma = p/q$, alors $q > 10^{15\,000}$.
Développement en fraction continue : $30\,000$ premiers termes calculés.
http://oeis.org/A002852

$\gamma = [0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 40, 1, 11, 3, \ldots]$

http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html

The famous English mathematician G.H. Hardy is alleged to have offered to give up his Savilian Chair at Oxford to anyone who proved gamma to be irrational, although no written reference for this quote seems to be known. Hilbert mentioned the irrationality of gamma as an unsolved problem that seems "unapproachable" and in front of which mathematicians stand helpless. Conway and Guy (1996) are "prepared to bet that it is transcendental," although they do not expect a proof to be achieved within their lifetimes.

Hendrik W. Lenstra (1977)

Un au moins des deux nombres γ, e^γ est transcendant.

Euclidische getallenlichamen
Ph.D. thesis,
Mathematisch Centrum,
Universiteit van Amsterdam,
1977.

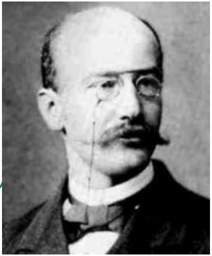
http://www.math.leidenuniv.nl/~hwl/PUBLICATIONS/1977c/art.pdf

Stellingen. Behorende bij het proefschrift van H.W. Lenstra Jr.

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Charles Hermite (1873) :
transcendance de e.

Ferdinand Lindemann (1882)
transcendance de π.



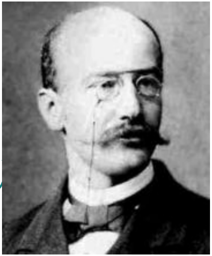
Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log\alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log\alpha \neq 0$.

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Charles Hermite (1873) :
transcendance de e.

Ferdinand Lindemann (1882) :
transcendance de π.



Théorème de Hermite–Lindemann

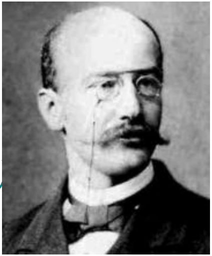
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log \alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log \alpha \neq 0$.

Théorèmes de Hermite et Lindemann

Charles Hermite (1873) :
transcendance de e.

Ferdinand Lindemann (1882)
transcendance de π.



Théorème de Hermite–Lindemann
Pour tout nombre complexe non nul z, un au moins des deux nombres z, e^z est transcendant.

Corollaires : transcendance de $\log\alpha$ et de e^β pour α and β nombres algébriques non nuls avec $\log\alpha \neq 0$.

e^γ

http://oeis.org/A073004

$e^\gamma = 1,781\,072\,417\,990\,197\,985\,236\,504\,103\,107\,179\,549\,169\ \ldots$

Conjecture. *Le nombre e^γ est irrationnel.*

Si $e^\gamma = p/q$, alors $q > 10^{15\,000}$.
Développement en fraction continue de e^γ : $30\,000$ premiers termes calculés.
http://oeis.org/A094644

$e^\gamma = [1, 1, 3, 1, 1, 3, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 7, 9, 1, 16, 1, 1, 1, 2, 6, 1, \ldots]$

e^γ

http://oeis.org/A073004

$e^\gamma = 1,781\,072\,417\,990\,197\,985\,236\,504\,103\,107\,179\,549\,169\ \ldots$

Conjecture. *Le nombre e^γ est irrationnel.*

Si $e^\gamma = p/q$, alors $q > 10^{15\,000}$.
Développement en fraction continue de e^γ : $30\,000$ premiers termes calculés.
http://oeis.org/A094644

$e^\gamma = [1, 1, 3, 1, 1, 3, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 7, 9, 1, 16, 1, 1, 1, 2, 6, 1, \ldots]$

e^γ

http://oeis.org/A073004

$e^\gamma = 1,781\,072\,417\,990\,197\,985\,236\,504\,103\,107\,179\,549\,169\,\ldots$

Conjecture. *Le nombre e^γ est irrationnel.*

Si $e^\gamma = p/q$, alors $q > 10^{15\,000}$.
Développement en fraction continue de e^γ : $30\,000$ premiers termes calculés.
http://oeis.org/A094644

$e^\gamma = [1, 1, 3, 1, 1, 3, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 7, 9, 1, 16, 1, 1, 1, 2, 6, 1, \ldots]$

Conjectures sur la nature arithmétique de γ

Conjecture 1. *La constante d'Euler est irrationnelle.*

Conjecture 2. *La constante d'Euler est transcendante.*

Conjecture 3. *La constante d'Euler n'est pas une période au sens de Kontsevich et Zagier.*

Conjectures sur la nature arithmétique de γ

Conjecture 1. *La constante d'Euler est irrationnelle.*

Conjecture 2. *La constante d'Euler est transcendante.*

Conjecture 3. *La constante d'Euler n'est pas une période au sens de Kontsevich et Zagier.*

Conjectures sur la nature arithmétique de γ

Conjecture 1. *La constante d'Euler est irrationnelle.*

Conjecture 2. *La constante d'Euler est transcendante.*

Conjecture 3. *La constante d'Euler n'est pas une période au sens de Kontsevich et Zagier.*

Périodes : Maxime Kontsevich et Don Zagier

Periods,
Mathematics unlimited—2001 and beyond,
Springer 2001,
771–808.

Une *période* est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Périodes

Benjamin Friedrich
Periods and Algebraic de Rham Cohomology
Diplomarbeit im Studiengang Diplom-Mathematik
Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
http://arxiv.org/abs/math/0506113

Joseph Ayoub
Periods and the Conjectures of Grothendieck and Kontsevich–Zagier
European Mathematical Society, Newsletter N°91, March 2014, 12–18.
http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=news

Périodes

Benjamin Friedrich
Periods and Algebraic de Rham Cohomology
Diplomarbeit im Studiengang Diplom-Mathematik
Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
http://arxiv.org/abs/math/0506113

Joseph Ayoub
Periods and the Conjectures of Grothendieck and Kontsevich–Zagier
European Mathematical Society, Newsletter N°91, March 2014, 12–18.
http://www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=news

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Exemples de périodes

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

et tous les nombres algébriques,

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x}$$

et tous les logarithmes de nombres algébriques,

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdot \frac{dt_2}{1-t_2}.$$

Fonctions Gamma et Beta d'Euler

Pour $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)^{q}$$

est une période.

Pour a et b rationnels (avec $\Gamma(a+b) \neq 0$),

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \end{aligned}$$

est une période.

Fonctions Gamma et Beta d'Euler

Pour $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)^q$$

est une période.

Pour a et b rationnels (avec $\Gamma(a+b) \neq 0$),

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \\ &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx. \end{aligned}$$

est une période.

$\zeta(s)$ est une période

Pour s entier ≥ 2,

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}}\cdot\frac{dt_s}{1-t_s}.$$

est une période.

Démonstration: par récurrence,

$$\int_{t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}}\cdot\frac{dt_s}{1-t_s} = \sum_{n\geq 1}\frac{t_1^{n-1}}{n^{s-1}}.$$

$\zeta(s)$ est une période

Pour s entier ≥ 2,

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}.$$

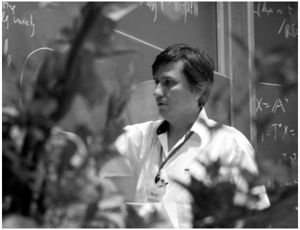
est une période.

`Démonstration:` par récurrence,

$$\int_{t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s} = \sum_{n\geq 1} \frac{t_1^{n-1}}{n^{s-1}}.$$

Maxime Kontsevich et Francis Brown

Nombres multizêta



Nombres qui ne sont pas des périodes ?

Problème (Kontsevich – Zagier) : *Donner un exemple explicite d'un nombre qui n'est pas une période.*

Plusieurs niveaux :

- *analogue de Cantor* : l'ensemble des périodes est dénombrable.
- *analogue de Liouville* : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.
- *analogue de Hermite* : démontrer que des nombres donnés ne sont pas des périodes.
  Candidats : $1/\pi,\ e,\ \gamma,\ e^\gamma,\ \Gamma(p/q),\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \dots$

Nombres qui ne sont pas des périodes ?

Problème (Kontsevich – Zagier) : *Donner un exemple explicite d'un nombre qui n'est pas une période.*

Plusieurs niveaux :

- *analogue de Cantor* : l'ensemble des périodes est dénombrable.
- *analogue de Liouville* : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.
- *analogue de Hermite* : démontrer que des nombres donnés ne sont pas des périodes.

  Candidats : $1/\pi, \; e, \; \gamma, \; e^{\gamma}, \; \Gamma(p/q), \; \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \; \ldots$

Nombres qui ne sont pas des périodes ?

Problème (Kontsevich – Zagier) : *Donner un exemple explicite d'un nombre qui n'est pas une période.*

Plusieurs niveaux :

- *analogue de Cantor* : l'ensemble des périodes est dénombrable.
- *analogue de Liouville* : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.
- *analogue de Hermite* : démontrer que des nombres donnés ne sont pas des périodes.

  Candidats : $1/\pi,\ e,\ \gamma,\ e^\gamma,\ \Gamma(p/q),\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \ldots$

Nombres qui ne sont pas des périodes ?

Problème (Kontsevich – Zagier) : *Donner un exemple explicite d'un nombre qui n'est pas une période.*

Plusieurs niveaux :

- *analogue de Cantor* : l'ensemble des périodes est dénombrable.
- *analogue de Liouville* : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.
- *analogue de Hermite* : démontrer que des nombres donnés ne sont pas des périodes.
  Candidats : $1/\pi,\ e,\ \gamma,\ e^\gamma,\ \Gamma(p/q),\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \dots$

Nombres élémentaires de Masahiko Yoshinaga

Analogue de Liouville : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.

Masahiko Yoshinaga (2008)

- définit la classe des fonctions élémentaires et la classe des nombres élémentaires.
- démontre qu'une période réelle est un nombre élémentaire.
- Donne un exemple de nombre réel qui n'est pas un nombre élémentaire (donc qui n'est pas une période).

http://arxiv.org/abs/0805.0349v1

Nombres élémentaires de Masahiko Yoshinaga

Analogue de Liouville : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.

Masahiko Yoshinaga (2008)

- définit la classe des fonctions élémentaires et la classe des nombres élémentaires.
- démontre qu'une période réelle est un nombre élémentaire.
- Donne un exemple de nombre réel qui n'est pas un nombre élémentaire (donc qui n'est pas une période).

http://arxiv.org/abs/0805.0349v1

Nombres élémentaires de Masahiko Yoshinaga

Analogue de Liouville : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.

Masahiko Yoshinaga (2008)

- définit la classe des fonctions élémentaires et la classe des nombres élémentaires.
- démontre qu'une période réelle est un nombre élémentaire.
- Donne un exemple de nombre réel qui n'est pas un nombre élémentaire (donc qui n'est pas une période).

http://arxiv.org/abs/0805.0349v1

Nombres élémentaires de Masahiko Yoshinaga

Analogue de Liouville : trouver une propriété qui soit satisfaite par toutes les périodes et construire un nombre qui ne la satisfait pas.

Masahiko Yoshinaga (2008)

- définit la classe des fonctions élémentaires et la classe des nombres élémentaires.
- démontre qu'une période réelle est un nombre élémentaire.
- Donne un exemple de nombre réel qui n'est pas un nombre élémentaire (donc qui n'est pas une période).

`http://arxiv.org/abs/0805.0349v1`

Masahiko Yoshinaga

L'ensemble des fonctions élémentaires est dénombrable, la construction d'un nombre qui n'est pas une période repose sur une énumération *explicite* de cet ensemble.

La constante d'Euler et les fonctions arithmétiques

La fonction somme des diviseurs

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

T.H. Grönwall
(1877- 1932)

T.H. Grönwall (1913)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^{\gamma}.$$

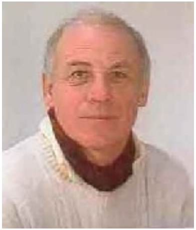
Guy Robin

Critère de Guy Robin (1984) : *L'hypothèse de Riemann est équivalente à*

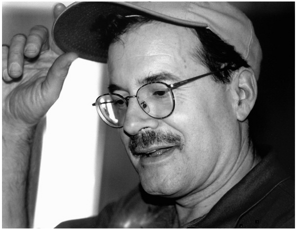
$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n$$

pour tout $n \geq 5\,041$.

Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 187–213.



Jeffrey C. Lagarias (2001)



L'hypothèse de Riemann est équivalente à

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\log(H_n)$$

pour tout $n > 1$.

http://arxiv.org/pdf/math/0008177v2.pdf

La fonction nombre de diviseurs

La fonction *nombre de diviseurs* $d(n)$ est définie pour n entier positif par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = \mathrm{Card}\{d \mid d|n,\ 1 \leq d \leq n\}.$$

https://oeis.org/A000005

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 3,\ 4,\ 2,\ 6,\ 2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 2,\ 6,\ 2,\ 6,\ 4,\ 4,$$

$$2,\ 8,\ 3,\ 4,\ 4,\ 6,\ 2,\ 8,\ 2,\ 6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 9,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 2,\ 8,\ldots$$

La fonction nombre de diviseurs

La fonction *nombre de diviseurs* $d(n)$ est définie pour n entier positif par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 = \mathrm{Card}\{d \mid d|n,\, 1 \leq d \leq n\}.$$

https://oeis.org/A000005

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 3,\ 4,\ 2,\ 6,\ 2,\ 4,\ 4,\ 5,\ 2,\ 6,\ 2,\ 6,\ 4,\ 4,$$

$$2,\ 8,\ 3,\ 4,\ 4,\ 6,\ 2,\ 8,\ 2,\ 6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 9,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 2,\ 8,\ \dots$$

Valeur moyenne de la fonction nombre de diviseurs

En 1849, Dirichlet a estimé la valeur moyenne de cette fonction.

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n \log n + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

J.P.G. Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

Suite $\sum_{k=1}^{n} d(k)$, $n \geq 0$: http://oeis.org/A006218

$0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 20,\ 23,\ 27,\ 29,\ 35,\ 37,\ 41,\ 45,\ 50,\ \ldots$

La démonstration de Dirichlet (1849)

Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x :

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} 1 = \sum_{\substack{1 \leq j, d \leq n \\ jd \leq n}} 1 = \sum_{j=1}^{n} \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

Le membre de droite est approximativement

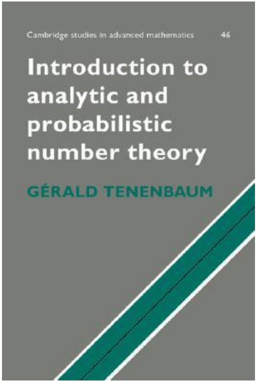
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j} = nH_n = n \log n + \gamma n + \mathcal{O}(1).$$

La méthode de l'hyperbole de Dirichlet

La différence entre la somme des parties entières et la somme harmonique est la somme des parties fractionnaires

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{n}{j} \right\} = (1-\gamma)n + \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

que Dirichlet estime par sa *méthode de l'hyperbole*.



Le problème des diviseurs de Dirichlet

Soit θ la borne inférieure des exposants β pour lesquels

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n \log n + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(n^{\beta}).$$

Le théorème de Dirichlet donne $\theta \leq \dfrac{1}{2}$.

Cette borne a été améliorée par Voronoi en 1903 : $\theta \leq \dfrac{1}{3}$,

puis van der Corput en 1922 : $\theta \leq \dfrac{33}{100}$.

En 1915, Hardy et Landau on prouvé $\theta \geq \dfrac{1}{4}$.

La valeur exacte de θ n'est pas connue.

$$0,25 \leq \theta \leq 0,33$$

Georgy Voronoy
(1868 - 1908)

Johannes van der Corput
(1890 - 1975)

Edmund Landau
(1877 - 1938)

Godfrey Harold Hardy
(1877 - 1947)

$0,25 \leq \theta \leq 0,3149$

θ est la borne inférieure des of β pour lesquels

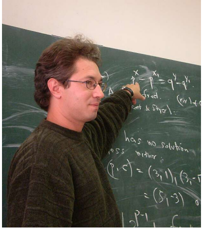
$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n \log n + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(n^{\beta}).$$

La meilleure borne supérieure connue est due à Martin Huxley en 2003 :

$$\theta \leq \frac{131}{416} \sim 0,314\,903\,8\ldots$$

On conjecture $\theta = \dfrac{1}{4}$.

Florian Luca et Jorge Jimenez Urroz (2012)



F. LUCA, J.J. URROZ & M. WALDSCHMIDT
Gaps in binary expansions of some arithmetic functions, and the irrationality of the Euler constant,
Journal of Prime Research in Mathematics, GCU, Lahore, Pakistan, Vol. **8** (2012), 28–35.

La suite T_k

Pour $k \geq 0$, posons

$$T_k = \sum_{n \leq 2^k} d(n)$$

et considérons le développement binaire

$$T_k = \sum_{i=0}^{v_k} a_i 2^i.$$

Si $a_{\ell+i} = 0$ pour $0 \leq i \leq L-1$, nous dirons que *le développement binaire de T_k a un trou de longueur au moins L commençant à ℓ.*

Lien avec l'irrationalité de la constante d'Euler

Proposition. *On suppose que pour une infinité d'entiers k positifs, il existe ℓ et L vérifiant*

$$2 + \frac{3 \log k}{\log 2} \leq k - \ell \leq L$$

et que le développement binaire de T_k a un trou de longueur au moins L commençant à ℓ. Alors la constante d'Euler est irrationnelle.

On peut interpréter cet énoncé en disant que l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :
(i) le développement binaire de T_k n'a pas de trou très long ;
(ii) la constante d'Euler est irrationnelle.
On conjecture que les deux assertions sont vraies !

Lien avec l'irrationalité de la constante d'Euler

Proposition. *On suppose que pour une infinité d'entiers* k *positifs, il existe* ℓ *et* L *vérifiant*

$$2 + \frac{3 \log k}{\log 2} \leq k - \ell \leq L$$

et que le développement binaire de T_k *a un trou de longueur au moins* L *commençant à* ℓ*. Alors la constante d'Euler est irrationnelle.*

On peut interpréter cet énoncé en disant que l'une au moins des deux assertions suivantes est vraie :
(i) le développement binaire de T_k n'a pas de trou très long ;
(ii) la constante d'Euler est irrationnelle.
On conjecture que les deux assertions sont vraies !

Démonstration

La relation

$$\sum_{j=1}^{n} d(j) = n \log n + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(n^{\theta})$$

pour $n = 2^k$ et $\theta = 1/2$ s'écrit

$$T_k = 2^k k \log 2 + 2^k (2\gamma - 1) + \mathcal{O}(2^{k/2}).$$

Dire que le développement binaire de T_k a un trou de longueur au moins L commençant à ℓ signifie

$$T_k = \sum_{i=\ell+L}^{v_k} a_i 2^i + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i 2^i.$$

Démonstration

La relation

$$\sum_{j=1}^{n} d(j) = n \log n + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(n^{\theta})$$

pour $n = 2^k$ et $\theta = 1/2$ s'écrit

$$T_k = 2^k k \log 2 + 2^k(2\gamma - 1) + \mathcal{O}(2^{k/2}).$$

Dire que le développement binaire de T_k a un trou de longueur au moins L commençant à ℓ signifie

$$T_k = \sum_{i=\ell+L}^{v_k} a_i 2^i + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i 2^i.$$

Démonstration (suite)

En posant

$$b = 1 + \sum_{i=\ell+L}^{v_k} a_i 2^{i-k},$$

et en divisant par 2^k on trouve

$$|k \log 2 + 2\gamma + b| < 2^{\ell-k} + c2^{-k/2}$$

avec une constante $c > 0$.
De la mesure d'irrationalité de $\log 2$:

$$\left|\log 2 - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{3,58}}$$

pour q suffisamment grand, on déduit que, sous les hypothèses de la proposition, γ est un nombre irrationnel.

Mesure d'irrationalité de $\log 2$

$$\left|\log 2 - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^\kappa} \quad \text{pour} \quad q \geq q_0.$$

D. Mordukhai-Boltovskoi (1923), K. Mahler (1932),
N.I. Fel'dman (1949 – 1966)
A. Baker (1964) : $\kappa = 12,5$
E.A. Rukhadze (1987) : $\kappa = 3,891\,399\,78\ldots$
R. Marcovecchio (2009) : $\kappa = 3,574\,553\,91\ldots$

Méthode de Rhin–Viola (1996)

F. Luca, J.J. Urroz, M. Waldschmidt (2012)

Plus généralement, supposons qu'il existe $\kappa > 0$ et $B_0 > 0$ tels que, si b_0, b_1, b_2 sont des entiers rationnels avec $b_1 \neq 0$, on ait

$$|b_0 + b_1 \log 2 + b_2 \gamma| \geq B^{-\kappa}$$

avec

$$B = \max\{|b_0|, |b_1|, |b_2|, B_0\}.$$

Alors pour k suffisamment grand, si ℓ et L satisfont

$$2 + \frac{\kappa \log k}{\log 2} \leq k - \ell \leq L,$$

le développement binaire de T_k n'a pas de trou de longueur au moins L commençant à ℓ.

Vincel Hoang Ngoc Minh (2013)

http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00423455

On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators.
Acta Math. Vietnam (2013) **38** :339–398.

...we give a complete description of the kernel of polyzêta and draw some consequences about a structure of the algebra of convergent polyzêtas and about the arithmetical nature of the Euler constant.

Irrationalité

Lemme. *Soit γ un nombre réel. On suppose que pour tout sous-corps K de $\mathbf{R}$, le nombre γ soit est dans K, soit est transcendant sur K. Alors γ est un nombre rationnel.*

Démonstration. Si le nombre γ est irrationnel, alors par hypothèse il est transcendant sur $\mathbf{Q}$. Mais alors γ est algébrique sur le corps $K = \mathbf{Q}(\gamma^2)$ sans appartenir à K.

Séries divergentes

Euler (1760) : *On divergent series*. Quatre méthodes pour donner une valeur à

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \cdots$$

$$=$$

$$0! - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \ldots$$

Série hypergéométrique de Wallis

John Wallis (1616 - 1703)

Série hypergéométrique de Wallis

La série entière divergente

$$0! - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + 4!x^4 - 5!x^5 + \ldots$$

satisfait une équation différentielle linéaire

$$y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x},$$

qui possède une solution convergente au point $x = 1$, donnée par une intégrale

$$e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$$

qui se développe en fraction continue

$$[1, x, x, 2x, 2x, 3x, 3x, \ldots]$$

dont Euler donne la valeur en $x = 1$

$$0,596\,347\,362\,\underline{1}23\,7\ldots$$

Benjamin Gompertz (1779–1865)

BENJAMIN GOMPERTZ

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt$$

$$\delta = \int_0^\infty e^{-t} \log(t+1) \, dt$$

(A.I. Aptekarev)

La constante d'Euler–Gompertz

$$0! - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots$$

$$\delta = \int_0^1 \frac{dt}{1 - \log t} = \int_0^\infty e^{-t} \log(t+1)\, dt =$$

$$0{,}596\,347\,362\,323\,194\,074\,341\,078\,499\,369\,279\,376\,074\,177\ \ldots$$

https://oeis.org/A073003

Lettre de Ramanujan à Hardy (16 janvier 1913)

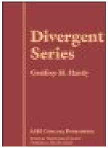
Srinivasa Ramanujan
(1887 – 1920)

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$1 - 1! + 2! - 3! + \cdots = 0,596\ldots$$

Godfrey Harold Hardy
(1877 – 1947)

G.H. Hardy : Divergent Series (1949)

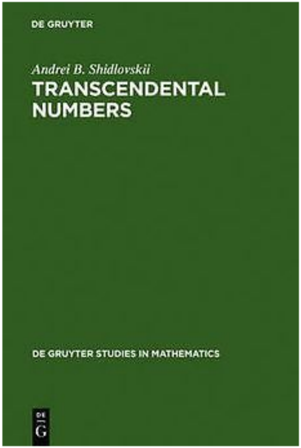


Niels Henrik Abel
(1802 – 1829)

Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.

Andrei Borisovich Shidlovskii (1959)

Un au moins des deux nombres γ, δ est irrationnel.



K. Mahler (1968)

Le nombre

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{Y_0(2)}{J_0(2)} - \gamma$$

est transcendant.

Fonctions de Bessel de première et deuxième espèce

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right) J_0(z) + \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{(n!)^2}\left(\frac{z^2}{4}\right)^n\right).$$

Alexander Ivanovich Aptekarev (2007)

A.I. Aptekarev

Version quantitative de l'énoncé d'irrationalité dû à A.B. Shidlovskii d'un au moins des deux nombres γ, δ.

Construction de suites (récurrentes linéaires) $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ d'entiers rationnels avec des majorations de

$$\max\{|u_n|, |v_n|, |w_n|\}$$

et de

$$\max\{|w_n + u_n(e\gamma + \delta)| \;,\; |v_n + eu_n|\}.$$

Tanguy Rivoal (2009)

Approximation de la fonction $\gamma + \log x$.
Conséquence : approximations rationnelles de γ et $\zeta(2) - \gamma^2$.

T. Rivoal, Kh. Pilehrood, T. Pilehrood (2012)

Un au moins des deux nombres γ, δ est transcendant.

Tanguy
Rivoal

Khodabakhsh
Hessami Pilehrood

Tatiana
Hessami Pilehrood

Tanguy Rivoal (2012)

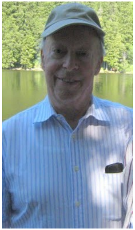
Approximations rationnelles simultanées de la constante d'Euler et de la constante d'Euler–Gompertz.

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| + \left|\delta - \frac{r}{q}\right| > \frac{C(\epsilon)}{q^{3+\epsilon}}.$$

Méthode de Mahler :
Deux des nombres e, γ, δ sont algébriquement indépendants.

Peter Bundschuh (1979)

.



Pour $p/q \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, le nombre

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{p}{q}\right) + \gamma$$

est transcendant.

La série harmonique

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\,, \qquad \int_0^1 x^j dx = \frac{1}{j+1},$$

donc

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

L. Euler (1729) : pour $z \geq 0$,

$$H_z = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx.$$

$$H_{\frac{1}{2}} = 2 - 2\log 2 = 0{,}613\,705\,638\,880\ldots$$

La série harmonique

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \qquad \int_0^1 x^j dx = \frac{1}{j+1},$$

donc

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

L. Euler (1729) : pour $z \geq 0$,

$$H_z = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx.$$

$$H_{\frac{1}{2}} = 2 - 2\log 2 = 0,613\,705\,638\,880\ldots$$

La série harmonique

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \qquad \int_0^1 x^j dx = \frac{1}{j+1},$$

donc

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

L. Euler (1729) : pour $z \geq 0$,

$$H_z = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx.$$

$$H_{\frac{1}{2}} = 2 - 2\log 2 = 0,613\,705\,638\,880\ldots$$

La série harmonique et la fonction digamma

La fonction

$$H_z = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx$$

définie pour $z \geq 0$ et qui vérifie

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \qquad \text{pour } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0$$

est reliée à la fonction digamma

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$$

par

$$\psi(z+1) = -\gamma + H_z.$$

La série harmonique et la fonction digamma

La fonction

$$H_z = \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x} dx$$

définie pour $z \geq 0$ et qui vérifie

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \qquad \text{pour } n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0$$

est reliée à la fonction digamma

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$$

par

$$\psi(z+1) = -\gamma + H_z.$$

La fonction digamma

Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$,

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1}.$$

La fonction digamma

Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$,

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1}.$$

La fonction digamma

Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$,

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1}.$$

Valeurs spéciales de la fonction digamma

$$\psi(1) = -\gamma = -0,577\,215\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log(2) - \gamma = -1,963\,510\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -4,227\,453\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -1,085\,860\ldots.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(1/4) - 3\psi(1/2) + \psi(3/4) = 0.$$

Valeurs spéciales de la fonction digamma

$$\psi(1) = -\gamma = -0,577\,215\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log(2) - \gamma = -1,963\,510\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -4,227\,453\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -1,085\,860\ldots.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(1/4) - 3\psi(1/2) + \psi(3/4) = 0.$$

Valeurs spéciales de la fonction digamma

$$\psi(1) = -\gamma = -0,577\,215\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log(2) - \gamma = -1,963\,510\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -4,227\,453\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -1,085\,860\ldots.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(1/4) - 3\psi(1/2) + \psi(3/4) = 0.$$

Valeurs spéciales de la fonction digamma

$$\psi(1) = -\gamma = -0,577\,215\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log(2) - \gamma = -1,963\,510\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -4,227\,453\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 3\log(2) - \gamma = -1,085\,860\ldots.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(1/4) - 3\psi(1/2) + \psi(3/4) = 0.$$

Ram Murty et N. Saradha (2007)

Conjecture (2007) : Soit K un corps de nombres sur lequel le q-ème polynôme cyclotomique est irréductible. Alors les $\varphi(q)$ nombres $\psi(a/q)$ avec $1 \leq a \leq q$ et $(a,q) = 1$ sont linéairement indépendants sur K.

Périodes de Baker (Ram Murty et N. Saradha)

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

Une période de Baker est un élément du $\overline{\mathbf{Q}}$–espace vectoriel engendré par les logarithmes de nombres algébriques.

Une période de Baker est une période au sens de Kontsevich et Zagier.
Le théorème de Baker affirme qu'un tel nombre est nul ou transcendant.

Ram Murty et N. Saradha (2007)

Murty et Saradha : une au moins des deux assertions suivantes est vraie

• La constante d'Euler γ n'est pas une période de Baker.

• Les $\varphi(q)$ nombres $\psi(a/q)$ avec $1 \leq a \leq q$ et $(a, q) = 1$ sont linéairement indépendants sur tout corps de nombres sur lequel le q-ème polynôme cyclotomique est irréductible.

Ram Murty,

An introduction to transcendental numbers,

to appear

Soit $q > 1$. Pour tout entier a vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, q) = 1$, le nombre

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{a}{q}\right) + \gamma$$

est un nombre transcendant (c'est une période de Baker > 0) et au plus un des $\varphi(q)$ nombres

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{a}{q}\right)$$

($1 \le a \le q$ vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, q) = 1$) est algébrique.

Ram Murty,

An introduction to transcendental numbers,

to appear

Soit $q > 1$. Pour tout entier a vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, q) = 1$, le nombre

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{a}{q}\right) + \gamma$$

est un nombre transcendant (c'est une période de Baker > 0) et au plus un des $\varphi(q)$ nombres

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{a}{q}\right)$$

($1 \leq a \leq q$ vérifiant $\mathrm{pgcd}(a, q) = 1$) est algébrique.

Euler–Lehmer constants

$$\gamma(h,k) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\substack{1\le n\le x\\ n\equiv h \mod k}} \frac{1}{n} - \frac{\log x}{k}\right)$$

$$\gamma(2,4) = \frac{1}{4}\gamma$$

Derrick Henry Lehmer
(1905 - 1991)

Au plus un des nombres

$$\gamma(h,k), \quad 1 \le h < k, \quad k \ge 2$$

est algébrique (Ram Murty et N. Saradha, 2010).

Euler et la fonction digamma (1765)

$\psi(n) = -\gamma + H_{n-1}$
pour $n \geq 1$, avec
$H_0 = H_{-1} = 0$.
Pour $n \geq 0$,

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2H_{2n-1} - H_{n-1}.$$

Pour $|z| < 1$,

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) z^k.$$

Euler et la fonction digamma (1765)

$\psi(n) = -\gamma + H_{n-1}$
pour $n \geq 1$, avec
$H_0 = H_{-1} = 0$.
Pour $n \geq 0$,

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2 + 2H_{2n-1} - H_{n-1}.$$

Pour $|z| < 1$,

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) z^k.$$

$\zeta(1) = \gamma$?

On a

$$\Gamma(1+t) = \exp\left(-\gamma t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} t^n\right).$$

On peut écrire

$$\Gamma(1+t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} t^n\right).$$

à condition de poser $\zeta(1) = \gamma$.
Cette normalisation est parfois utilisée dans l'étude des *nombres multizêtas*, mais on peut aussi remplacer $\zeta(1)$ par une indéterminée dans les formules faisant intervenir $\zeta(n)$.

$\zeta(1) = \gamma$?

On a

$$\Gamma(1+t) = \exp\left(-\gamma t + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} t^n\right).$$

On peut écrire

$$\Gamma(1+t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} t^n\right).$$

à condition de poser $\zeta(1) = \gamma$.
Cette normalisation est parfois utilisée dans l'étude des *nombres multizêtas*, mais on peut aussi remplacer $\zeta(1)$ par une indéterminée dans les formules faisant intervenir $\zeta(n)$.

Thomas Johannes Stieltjes (1885)

Le développement de Laurent de la fonction zêta de Riemann au pôle $s = 1$ s'écrit

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

avec $\gamma_0 = \gamma$ et, pour $n \geq 1$,

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log m)^{n+1}}{n+1} \right)$$

T. Stieltjes
(1856- 1894)

Périodes exponentielles

Article de Kontsevich et Zagier :

The last chapter, which is at a more advanced level and also more speculative than the rest of the text, is by the first author only.

> *There have been some recent indications that one can extend the exponential motivic Galois group still further, adding as a new the Euler constant γ, which is, incidentally, the constant term of $\zeta(s)$ at $s = 1$. Then all classical constants are periods in an appropriate sense.*

Périodes exponentielles

Lagarias cite Kontsevich : La constante d'Euler est une période exponentielle

$$\gamma = \int_0^1 \int_x^1 \frac{e^{-x}}{y} dydx - \int_1^\infty \int_1^x \frac{e^{-x}}{y} dydx.$$

Utilise

$$-\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \log x dx.$$

La constante d'Euler–Gompertz est une période exponentielle,

$$\delta = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt,$$

on conjecture aussi que ce n'est pas une période.

Périodes exponentielles

Lagarias cite Kontsevich : La constante d'Euler est une période exponentielle

$$\gamma = \int_0^1 \int_x^1 \frac{e^{-x}}{y} dydx - \int_1^\infty \int_1^x \frac{e^{-x}}{y} dydx.$$

Utilise

$$-\gamma = \int_0^\infty e^{-x} \log x dx.$$

La constante d'Euler–Gompertz est une période exponentielle,

$$\delta = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt,$$

on conjecture aussi que ce n'est pas une période.

Lundi 21 Juillet 2014

Université de Lomé, Togo.
http://www.univ-lome.tg/

La constante d'Euler est-elle un nombre rationnel, un nombre algébrique irrationnel ou bien un nombre transcendant ?

Michel Waldschmidt

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) France

http://www.math.jussieu.fr/~miw/