Université de Nouakchott (Mauritanie) 12 avril 2014
Faculté des Sciences et Techniques, Département de Maths et Informatique (DMI)
Master de Mathématiques, spécialité Algèbre, théorie des nombres et Applications
Cours de Théorie Analytique des Nombres par *Michel Waldschmidt* 6 –16 avril 2014

Rappels pour le devoir du 13 avril

Seul ce document sera autorisé

La fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de $\{1, 2, \dots\}$ est la fonction arithmétique qui prend la valeur 1 aux éléments de E et la valeur 0 ailleurs.

On écrit la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 1$ sous la forme

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}$$

où le produit est étendu à l'ensemble des nombres premiers p et où les $v_p(n)$ sont des entiers ≥ 0. Pour chaque $n \geq 2$, l'ensemble $\bigl\{p \mid v_p(n) \neq 0\bigr\}$ est fini.

Une fonction multiplicative est déterminée par ses valeurs $f(p^a)$ avec p premier et $a \geq 1$, par la formule

$$f(n) = \prod_p f(p^{v_p(n)}).$$

Une fonction complètement multiplicative est déterminée par ses valeurs $f(p)$ avec p premier, par la formule

$$f(n) = \prod_p f(p)^{v_p(n)}.$$

Une fonction fortement multiplicative est déterminée par ses valeurs $f(p)$ avec p premier, par la formule

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p).$$

Une fonction arithmétique est multiplicative si et seulement si sa série de Dirichlet

$$D(f, s) = \sum_{n \geq 1} f(n) n^{-s}$$

s'écrit sous forme de produit eulérien

$$D(f, s) = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu) p^{-\nu s} \right).$$

Exemples

$$D(\delta,s)=1$$

$$D(1,s)=\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$D(j^k,s)=\zeta(s-k)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s+k}},\quad j(n)=n \text{ fonction identité, } k\in\mathbf{C}$$

$$D(\kappa,s)=\zeta(2s)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-2s}},\quad \kappa \text{ fonction caractéristique des carrés}$$

$$D(\mu,s)=\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_p(1-p^{-s}),\quad \mu \text{ fonction de Möbius, } \mu\star 1=\delta$$

$$D(\varphi,s)=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{-s+1}},\quad \varphi \text{ indicatrice d'Euler, } \varphi=j\star\mu$$

$$D(|\mu|,s)=D(\mu^2,s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}=\prod_p(1+p^{-s}),\qquad |\mu|\star\kappa=1$$

$$D(\sigma_k,s)=\zeta(s-k)\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-s+k})},\qquad \sigma_k=j^k\star 1,\quad \sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k$$

$$D(\tau,s)=\zeta(s)^2=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s})^2},\qquad \tau=1\star 1,\quad \tau(n)=\sum_{d|n}1=\sigma_0(n)$$

$$D(2^\omega,s)=\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}=\prod_p\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}},\qquad \tau=2^\omega\star\kappa,\quad 2^\omega\star|\mu|=\delta$$

$$D(\lambda,s)=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\prod_p\frac{1}{1+p^{-s}},\qquad \lambda\star|\mu|=\delta,\quad \lambda=(-1)^\Omega \text{ fonction de Liouville}$$

$$D(\log,s)=-\zeta'(s)$$

$$D(\Lambda,s)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},\quad \Lambda \text{ fonction de Von Mangoldt}$$

Université de Nouakchott (Mauritanie) 13 avril 2014
Faculté des Sciences et Techniques, Département de Maths et Informatique (DMI)
Master de Mathématiques, spécialité Algèbre, théorie des nombres et Applications
Cours de Théorie Analytique des Nombres par *Michel Waldschmidt* 6 –16 avril 2014

Devoir en temps limité: 13 avril 2014 10h-12h

Seul document autorisé : le rappel du cours (12 avril 2014)

1

Existe-t-il une fonction multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Existe-t-il une fonction complètement multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Existe-t-il une fonction fortement multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Dans chacun des trois cas, si la réponse est oui, donner un exemple, si la réponse est non, dire pourquoi.

2

Montrer qu'une fonction arithmétique f qui possède deux des trois propriétés suivantes possède aussi la troisième.
(a) f est complètement multiplicative.
(b) f est fortement multiplicative.
(c) f ne prend que les valeurs 0 ou 1, ce qui signifie que f est une fonction caractéristique, à savoir la fonction caractéristique de $\{n \geq 1 \mid f(n) = 1\}$.

3

Soient a et b deux entiers ≥ 2. On désigne par d le pgcd (plus grand commun diviseur) de a et b et par m le ppcm (plus petit commun multiple) de a et b.
(a) Quel est le pgcd de d et m?
(b) Écrire la décomposition en facteurs premiers de d et de m.
(c) Montrer que si f est une fonction multiplicative, on a

$$f(a)f(b) = f(m)f(d).$$

4

Soit p_0 un nombre premier. On considère la fonction complètement multiplicative f_{p_0} définie par

$$f_{p_0}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq p_0, \\ 0 & \text{si } p > p_0. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble dont f_{p_0} est la fonction caractéristique? Quel est le produit eulérien de f_{p_0}?

$\boxed{\mathbf{5}}$

On définit une fonction arithmétique ℓ par la condition

$$\ell(n) = \begin{cases} \mu(d) & \text{si } n = d^2 \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \end{cases}$$

Quel est l'ensemble dont ℓ^2 est la fonction caractéristique?
Montrer que ℓ est une fonction multiplicative.
Quelle est la fonction $\ell \star \mu$?
Quelle est la série de Dirichlet $D(\ell, s)$? Quel est son produit eulérien?
Quel est l'inverse de ℓ pour la convolution dans l'anneau des fonctions arithmétiques?

Université de Nouakchott (Mauritanie) 13 avril 2014
Faculté des Sciences et Techniques, Département de Maths et Informatique (DMI)
Master de Mathématiques, spécialité Algèbre, théorie des nombres et Applications
Cours de Théorie Analytique des Nombres par *Michel Waldschmidt* 6 –16 avril 2014

Corrigé du devoir en temps limité: 13 avril 2014

$\boxed{\textbf{1}}$

Existe-t-il une fonction multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Oui, il y en a beaucoup. Un exemple est 3^Ω. Un autre est

$$f_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 3 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Un autre est

$$f_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 3 & \text{si } n \text{ est une puissance de 2} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Quand on se donne, pour chaque couple p, a avec p premier et $a \geq 1$, un nombre $b_{p,a}$, ici avec la condition $b_{2,1} = b_{2,2} = 3$, il existe une et une seule fonction f multiplicative satisfaisant $f(p^a) = b_{p,a}$: elle est définie par

$$f(n) = \prod_p p^{b_{p,a}}.$$

Existe-t-il une fonction complètement multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Non, une fonction complètement multiplicative satisfait $f(4) = f(2)^2$.
Existe-t-il une fonction fortement multiplicative f telle que $f(2) = f(4) = 3$?
Oui: par exemple 3^Ω. Quand on se donne, pour chaque nombre premier p, un nombre b_p, ici avec la seule condition $b_2 = 3$, il existe une et une seule fonction f multiplicative satisfaisant $f(p) = b_p$: elle est définie par

$$f(n) = \prod_{p|n} p^{b_p}.$$

Pour $b_p = 3$ pour tout p on trouve 3^Ω. Si on prend

$$b_p = \begin{cases} 3 & \text{si } p = 2, \\ 0 & \text{si } p \text{ est un nombre premier impair,} \end{cases}$$

on trouve la fonction f_2 ci–dessus.

$\boxed{2}$

La condition $f(p)^a = f(p)$ pour tout $a \geq 1$ équivaut à $f(p)$ égal à 0 ou 1. Une fonction multiplicative dont les valeurs aux entiers de la forme p^a sont 0 ou 1 ne prend comme valeurs que 0 et 1. Par conséquent:
• Si f est complètement et fortement multiplicative, alors $f(p^a) = f(p)^a$ et $f(p^a) = f(p)$, donc $f(p)^a = f(p)$ pour tout $a \geq 1$; il en résulte que pour tout n, $f(n)$ vaut 0 ou 1, donc que f est une fonction caractéristique.
• Si f est complètement multiplicative et est une fonction caractéristique, alors $f(p)$ vaut 0 ou 1, donc $f(p)^a = f(p)$ pour tout $a \geq 1$. Comme $f(p^a) = f(p)^a$, on en déduit $f(p^a) = f(p)$ pour tout $a \geq 1$, par conséquent f est fortement multiplicative.
• Si f est fortement multiplicative et est une fonction caractéristique, alors $f(p)$ vaut 0 ou 1, donc $f(p)^a = f(p)$ pour tout $a \geq 1$. Il résulte alors de $f(p^a) = f(p)$ que $f(p^a) = f(p)^a$ pour tout $a \geq 1$, par conséquent f est complètement multiplicative.

$\boxed{3}$

(a) Le pgcd de d et m est d puisque d divise m.
(b) On a

$$d = \prod_p p^{\min\{v_p(a), v_p(b)\}}, \quad m = \prod_p p^{\max\{v_p(a), v_p(b)\}}.$$

(c) Posons $x_p = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ et $y_p = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$. On a

$$f(d) = \prod_p f(p^{x_p}), \quad f(m) = \prod_p f(p^{y_p}).$$

Comme

$$\{x_p, y_p\} = \{v_p(a), v_p(b)\}$$

on en déduit

$$f(p^{x_p})f(p^{y_p}) = f(p^{v_p(a)})f(p^{v_p(b)})$$

et par conséquent $f(a)f(b) = f(d)f(m)$.

$\boxed{4}$

C'est un résultat du cours. L'ensemble dont f_{p_0} est la fonction caractéristique est l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers sont $\leq p_0$, ce que l'on note $P(n) \leq p_0$, et

$$D(f_{p_0}, s) = \prod_{p \leq p_0} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

$\boxed{5}$

Les entiers $d \geq 1$ tels que $\mu(d)$ soit non nul sont les nombres sans facteur carré, c'est-à-dire les produits de nombres premiers distincts $p_1 \cdots p_r$ (avec $r \geq 0$). Les entiers $n \geq 1$ tels que $\ell(n)$ soit non nul sont les carrés des nombres sans facteurs carrés, c'est-à-dire les nombres n de la forme $n = p_1^2 \cdots p_r^2$ avec $p_1, \dots, p_r$ premiers deux-à-deux distincts (et $r \geq 0$). Ce sont aussi les n tels que $v_p(n)$ vaut 0 ou 2 pour tout p. La fonction $\ell^2 = |\ell|$ est la fonction caractéristique de cet ensemble:

$$E = \{p_1^2 \cdots p_r^2 \ \mid \ p_1, \dots, p_r \text{ premiers deux-à-deux distincts et } r \geq 0\}.$$

On inclut $r = 0$ parce que $1 \in E$.

Si p est un nombre premier et b un entier ≥ 0, on a

$$\ell(p^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0, \\ -1 & \text{si } b = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ avec $a_i \geq 1$ et p_i premiers deux-à-deux distincts, on a

$$\ell(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } a_1 = \cdots = a_r = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent $\ell(n) = \ell(p_1^{a_1}) \cdots \ell(p_r^{a_r})$, ce qui signifie que ℓ est une fonction multiplicative.

La fonction $\ell \star \mu$ est la fonction multiplicative définie par les conditions, pour p premier et $a \geq 1$

$$(\ell \star \mu)(p^a) = \sum_{b=0}^{a} \ell(p^b)\mu(p^{b-a}) = \begin{cases} -1 & \text{si } a = 1, \\ 1 & \text{si } a = 2, \\ 0 & \text{si } a \geq 3. \end{cases}$$

On peut noter que $|\ell \star \mu|$ est la fonction caractéristique des entiers n tels que $v_p(n) \leq 2$ pour tout n (entiers sans facteurs cubiques). Pour $n = p_1 \cdots p_r p_{r+1}^2 \cdots p_{r+s}^2$, on a $(\ell \star \mu)(n) = (-1)^r$.

Le produit eulérien de ℓ est

$$D(\ell, s) = \prod_p \sum_{a \geq 0} \ell(p^a) p^{-as} = \prod_p (1 - p^{-2s}).$$

Ceci montre que $D(\ell, s) D(\kappa, s) = 1$, par conséquent l'inverse de ℓ pour la convolution dans l'anneau des fonctions arithmétiques est κ.

On le vérifie aussi en calculant par exemple $\ell \star 1$. Pour p premier et $a \geq 1$, on a

$$(\ell \star 1)(p^a) = \sum_{b=0}^{a} \ell(p^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{si } a \geq 2, \end{cases}$$

donc $(\ell \star 1)(p^a) = |\mu|(p^a)$, et par conséquent $\ell \star 1 = |\mu|$. On en déduit d'une part

$$D(\ell, s) = \frac{D(|\mu|, s)}{D(1, s)} = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

et d'autre part

$$\ell \star \kappa \star 1 = |\mu| \star \kappa = 1, \quad \text{donc} \quad \ell \star \kappa = \delta.$$

On peut encore écrire

$$\ell = \mu \star |\mu|$$

et

$$\ell \star \mu = \mu \star \mu \star |\mu|.$$