Université de Nouakchott (Mauritanie) 16 avril 2014
Faculté des Sciences et Techniques, Département de Maths et Informatique (DMI)
Master de Mathématiques, spécialité Algèbre, théorie des nombres et Applications
Cours de Théorie Analytique des Nombres par *Michel Waldschmidt* 6 –16 avril 2014

Deuxième devoir: 16 avril 2014 10h-12h

Aucun document autorisé

$\boxed{\mathbf{1}}$

Énoncer:

(a) L'hypothèse de Riemann
(b) La conjecture de Goldbach
(c) La conjecture des nombres premiers jumeaux

$\boxed{\mathbf{2}}$

(a) Quels sont les entiers positifs ≤ 12 qui sont
- premiers
- sommes de deux nombres premiers ?
- sommes de deux nombres premiers impairs ?
- sommes de trois nombres premiers ?
- sommes de trois nombres premiers impairs ?

Quel est le plus petit entier ≥ 2 qui n'est ni premier, ni somme de deux nombres premiers?

(b) On considère les énoncés suivants:

(E) Tout entier pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers.
(G1) Tout entier ≥ 6 est somme de trois nombres premiers.
(G2) Tout entier impair ≥ 9 est somme de trois nombres premiers impairs.

Vérifier

$$(\mathrm{E}) \iff (\mathrm{G1}) \implies (\mathrm{G2}).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

Montrer qu'il existe une infinité de premiers congrus à -1 modulo 6.

$\boxed{\mathbf{4}}$

On rappelle les définitions des fonctions arithmétiques π, θ et ψ:

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\le x} 1,\\ \theta(x) &= \sum_{p\le x} \log p,\\ \psi(x) &= \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{p^a\le x} \log p.\end{aligned}$$

Montrer que $\psi(x) = \log U(x)$ où $U(x)$ est le ppcm des entiers $\le x$.
Vérifier

$$\theta(x) \le \pi(x)\log x \le x \log x$$

et

$$\psi(x) = \sum_{a=1}^{m} \theta(x^{1/a}) \qquad \text{avec} \qquad m = 1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor .$$

En déduire

$$0 \le \psi(x) - \theta(x) \le \frac{1}{2\log 2}\sqrt{x}(\log x)^2.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$

Montrer que la fonction arithmétique

$$f = 2^\omega \star 1$$

vérifie $f(n) = \tau(n^2)$ pour tout $n \ge 1$.

En utilisant

$$D(2^\omega, s) = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \quad \text{et} \quad D(1,s) = \zeta(s),$$

exprimer la série de Dirichlet $D(f,s)$ en termes de la fonction zêta de Riemann.

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html

Université de Nouakchott (Mauritanie) 16 avril 2014
Faculté des Sciences et Techniques, Département de Maths et Informatique (DMI)
Master de Mathématiques, spécialité Algèbre, théorie des nombres et Applications
Cours de Théorie Analytique des Nombres par *Michel Waldschmidt* 6 –16 avril 2014

Corrigé du deuxième devoir - 16 avril 2014

$\boxed{\mathbf{1}}$

On note $\zeta(s)$ la fonction qui est analytique dans $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ et qui coincide avec la valeur de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ pour $\Re(s) > 1$. L'hypothèse de Riemann est que les $s\in\mathbf{C}$ dans la bande $0 < \Re s < 1$ tels que $\zeta(s) = 0$ ont une partie réelle $1/2$.

La conjecture de Goldbach est l'objet de l'exercice $\boxed{\mathbf{2}}$.

La conjecture des nombres premiers jumeaux est qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ soit aussi premier.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(a) Les entiers ≤ 12 qui sont
- premiers sont 2, 3, 5, 7, 11.
- sommes de deux nombres premiers sont 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 12:

$$4 = 2{+}2,\quad 5 = 2{+}3,\quad 6 = 3{+}3,\quad 7 = 2{+}5,\quad 8 = 3{+}5,\quad 9 = 2{+}7,\quad 10 = 5{+}5,\quad 12 = 5{+}7.$$

- sommes de deux nombres premiers impairs sont 6, 8, 10 et 12 (ils doivent être pairs):

$$6 = 3+3,\quad 8 = 3+5,\quad 10 = 5+5,\quad 12 = 5+7.$$

- sommes de trois nombres premiers sont 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12:

$$6 = 2{+}2{+}2,\quad 7 = 2{+}2{+}3,\quad 8 = 2{+}3{+}3,\quad 9 = 3{+}3{+}3,\quad 10 = 2{+}3{+}5,\quad 11 = 3{+}3{+}5,\quad 12 = 2{+}5{+}5.$$

- sommes de trois nombres premiers impairs sont 9, 11 (ils doivent être impairs):

$$9 = 3+3+3,\quad 11 = 3+3+5.$$

D'après la conjecture de Goldbach, un entier pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers. Pour trouver le plus petit entier ≥ 2 qui n'est ni premier, ni somme de deux nombres premiers, on va chercher un entier impair. Quand un entier impair m est somme de deux nombres premiers, l'un des deux nombres premiers vaut 2. Il s'agit donc de trouver le plus petit entier impair m non premier tel que $m-2$ ne soit pas premier. On trouve ainsi que le plus petit entier ≥ 2 qui n'est ni premier, ni somme de deux nombres premiers est 27.

(b) Supposons (E):

(E) Tout entier pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers.

Montrons (G1):

(G1) Tout entier ≥ 6 est somme de trois nombres premiers.

Pour un entier pair $2n$ avec $n \geq 4$, on écrit que $2n-2$ est somme de deux nombres premiers, $2n-2 = p_1 + p_2$, donc $2n = p_1 + p_2 + 2$. Pour un entier impair $2n+1$ avec $n \geq 3$, on écrit que $2n-2$ est somme de deux nombres premiers, $2n-2 = p_1 + p_2$, donc $2n+1 = p_1 + p_2 + 3$. Cela démontre (G1).

Supposons (G1). Montrons (E). On considère un entier pair $2n \geq 4$. Alors $2n+2 \geq 6$ est somme de trois nombres premiers, l'un au moins vaut 2, donc $2n+2 = p_1 + p_2 + 2$ et $2n = p_1 + p_2$.

Montrons enfin (G1) $\implies$ (G2)

(G2) Tout entier impair ≥ 9 est somme de trois nombres premiers impairs.

Comme $9 = 3+3+3$ est somme de trois nombres premiers impairs, on considère un nombre impair $m \geq 11$. Si m est somme de trois nombres premiers qui ne sont pas tous les trois impairs, alors deux de ces nombres premiers sont égaux à 2, et $m = p+4$ avec p premier. D'après (E), $p-1$ qui est pair et ≥ 6 est somme de deux nombres premiers impairs $p-1 = p_1 + p_2$. Alors $m = p_1 + p_2 + 5$ est somme de trois nombres premiers impairs.

Finalement on obtient

$$\text{(E)} \iff \text{(G1)} \implies \text{(G2)}.$$

Rappelons que (E) et (G1) sont deux formulations équivalentes de la conjecture de Goldbach, tandis que (G2) est maintenant un théorème de Harald Helfgott (2013).

$\boxed{\mathbf{3}}$

Un nombre premier ≥ 5 est congru à 1 ou -1 modulo 6. Le produit d'entiers congrus à 1 modulo 6 est congru à 1 modulo 6. On désigne par p_n le n-ième nombre premier. Pour $n \geq 2$, le nombre $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_n - 1$ est congru à -1 modulo 6 et n'admet pas de facteur premier $\leq p_n$. L'un au moins de ses facteurs premiers est donc congru à -1 modulo 6 et il est supérieur à p_n.

$\boxed{\mathbf{4}}$

Soient x un nombre réel positif, p un nombre premier, A_p le plus grand des entiers A tels que $p^A \leq x$. Comme $p^{A_p} \leq x$, le ppcm $U(x)$ de tous les entiers $\leq x$ est divisible par p^{A_p} pour tout p premier, donc il est divisible par leur produit. Inversement, pour $1 \leq n \leq x$ et p premier, on a $v_p(n) \leq A_p$, donc le nombre

$$\prod_p p^{A_p}$$

est multiple de n. Il en résulte que ce nombre est $U(x)$. Comme la définition de A_p s'écrit encore

$$A_p = \sum_{\substack{a \geq 1 \\ p^a \leq x}} 1,$$

on peut encore écrire

$$U(x) = \prod_{p^a \leq x} p.$$

Donc $\psi(x) = \log U(x)$.
Des définitions on déduit

$$\theta(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \pi(x) \leq x.$$

On a

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x \leq x \log x.$$

Des définitions on déduit

$$\psi(x) = \sum_{a \geq 1} \sum_{p^a \leq x} \log p = \sum_{a \geq 1} \theta(x^{1/a}).$$

La somme s'arrête à $a = m$ dès que $2^m > x$, d'où

$$\psi(x) = \sum_{a=1}^{m} \theta(x^{1/a}) \quad \text{avec} \quad m = 1 + \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor.$$

Pour $a \geq 2$ on majore $x^{1/a} \log(x^{1/a})$ par $\frac{1}{2}\sqrt{x} \log x$. On en déduit

$$\sum_{a=2}^{m} \theta(x^{1/a}) \leq \frac{1}{2}(m-1)\sqrt{x} \log x.$$

D'où finalement

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq \frac{1}{2 \log 2} \sqrt{x} (\log x)^2.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$

La fonction arithmétique

$$f = 2^{\omega} \star 1$$

est multiplicative comme produit de convolution de deux fonctions multiplicatives. Pour vérifier $f(n) = \tau(n^2)$ il suffit de le vérifier quand $n = p^a$ avec p premier et $a \geq 1$. On a en effet, par définition, $f(n) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$ pour $n \geq 1$. Donc, pour p premier et $a \geq 0$,

$$f(p^a) = \sum_{d|p^a} 2^{\omega(d)} = \sum_{b=0}^{a} 2^{\omega(p^b)} = 1 + 2a$$

car $\omega(p^b) = \omega(1) = 0$ pour $b = 0$ et $\omega(p^b) = 1$ pour $b \geq 1$. D'un autre côté

$$\tau(p^{2a}) = 2a + 1.$$

D'où $f(n) = \tau(n^2)$ pour $n \geq 1$.

Comme

$$D(2^\omega, s) = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \quad \text{et} \quad D(1, s) = \zeta(s),$$

on trouve

$$D(f, s) = D(2^\omega, s) D(1, s) = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)} \cdot$$