FONCTIONS AUXILIAIRES ET FONCTIONNELLES ANALYTIQUES (II)

Par

MICHEL WALDSCHMIDT

Résumé. Dans la première partie de cet article, nous avons construit des fonctions auxiliaires en une ou plusieurs variables. Ici nous proposons une construction "duale" qui produit des fonctionnelles auxiliaires.

Les fonctions auxiliaires sont des combinaisons des lignes (somme sur λ) d'une matrice

$$(D^t\varphi_\lambda(\zeta_\mu))_{(\lambda;(t,\mu))},$$

tandis que les fonctionnelles auxiliaires sont des combinaisons linéaires des colonnes (somme sur t et μ) de cette même matrice. La transformée de Fourier-Borel éclaire cette dualité. La relation

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t (z^s e^{xz})_{z=y} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s (z^t e^{yz})_{z=x}$$

joue un rôle central dans cette étude.

5. Introduction

Pour résoudre le septième problème de Hilbert, Gel'fond utilisait une fonction auxiliaire $\Phi_G(z) = P_G(e^z, e^{\beta z})$ dont il évaluait les dérivées aux points $h \log \alpha$. Si on écrit

$$P_G(X_1, X_2) = \sum_\lambda p_\lambda X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2},$$

on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t \Phi_G(h \log \alpha) = \sum_\lambda p_\lambda (\lambda_1 + \lambda_2\beta)^t \alpha^{\lambda_1 h} (\alpha^\beta)^{\lambda_2 h}.$$

Pour résoudre le même problème, Schneider utilisait une fonction $\Phi_S(z) = P_S(z, \alpha^z)$ qu'il évaluait aux points $\lambda_1 + \lambda_2\beta$; en écrivant

$$P_S(X, Y) = \sum_t \sum_h q_{th} X^t Y^h,$$

on a

$$\Phi_S(\lambda_1 + \lambda_2\beta) = \sum_t \sum_h q_{th} (\lambda_1 + \lambda_2\beta)^t \alpha^{\lambda_1 h} (\alpha^\beta)^{\lambda_2 h}.$$

Cette dualité entre les deux méthodes est une des sources du présent travail.

En tentant de généraliser aux groupes algébriques la conjecture de Leopoldt sur le rang p-adique du groupe des unités d'un corps de nombres, nous avons été amenés dans [W] à introduire une méthode différente, dont le premier pas est la construction d'une fonctionnelle auxiliaire. L'objet de cette deuxième partie est de poursuivre cette construction, de manière à pouvoir développer les méthodes de transcendance "duales" des méthodes classiques de Schneider, Gel'fond et Baker.

Ainsi les nombres $(d/dz)^t\Phi_G(h\log\alpha)$ de la méthode de Gel'fond sont les valeurs $\eta_G(z^t\alpha^{hz})$ de la fonctionnelle

$$\eta_G(F) = \sum_{\lambda} p_\lambda F(\lambda_1 + \lambda_2\beta),$$

tandis que, pour la méthode de Schneider, on a

$$\Phi_S(\lambda_1 + \lambda_2\beta) = \eta_S(e^{(\lambda_1+\lambda_2\beta)z})$$

avec

$$\eta_S(F) = \sum_t \sum_h q_{th}\left(\frac{d}{dz}\right)^t F(h\log\alpha).$$

Notons à ce propos que la fonction exponentielle vérifie, pour t est s entiers ≥ 0 et u, v nombres complexes:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^t (z^s e^{xz})_{z=y} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s (z^t e^{yz})_{z=x}. \tag{5.1}$$

Cette valeur commune n'est autre que

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^t\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^s (e^{(z_1+y)(z_2+x)})_{z_1=z_2=0}.$$

A cause des relations (5.1), la dualité que nous allons mettre en évidence donne des résultats très particuliers pour la fonction exponentielle (cf. §8). Mais ces relations révèlent un phénomène général: les rôles joués par les dérivées et les formes linéaires sont permutés quand on passe des fonctions auxiliaires aux fonctionnelles analytiques.

Dans la première partie de ce travail, nous avons construit une fonction auxiliaire générale qui est utile dans de nombreuses démonstrations de transcendance. En suivant exactement le même schéma de démonstration, nous produisons au §6 une fonctionnelle auxiliaire générale. Une explication de l'analogie entre les deux situations est donnée au §7: la transformation de Fourier–Borel associe à toute fonctionnelle linéaire bornée η une fonction entière de type exponentiel $\Phi_\eta(\zeta) = \eta(e^{\zeta z})$, et inversement, à toute fonction de type exponentiel $\Phi(\zeta) = \sum_\kappa a_\kappa \zeta^\kappa/\kappa!$ est associée la forme linéaire bornée η_Φ qui envoie $\sum_\kappa b_\kappa z^\kappa$ sur le nombre $\sum_\kappa a_\kappa b_\kappa$. Par exemple, en une variable, les relations (5.1) signifient que la fonction entière

$$\Phi(\zeta) = \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^s (\zeta^t e^{y\zeta})$$

est associée à la forme linéaire

$$\eta : F \mapsto \left(\frac{d}{dz}\right)^t (z^s F(z))_{z=y}.$$

Il est intéressant de noter que ces fonctionnelles analytiques, qui sont associées à des polynômes exponentiels, sont utiles dans l'étude des valeurs de l'exponentielle de groupes algébriques généraux, et pas seulement des groupes algébriques linéaires [W].

Récemment, Michel Laurent [L] a réussi à supprimer l'utilisation du principe des tiroirs dans certaines démonstrations classiques de transcendance. Son idée (qui apparaissait déjà dans des travaux de Cantor et Straus sur le problème de Lehmer) consiste à travailler directement sur des matrices de la forme

$$(D^\tau f_\lambda(\zeta))_{\lambda,(\tau,\zeta)},$$

où D^τ sont des dérivées, ζ des points, et f_λ des fonctions; ceci éclaire la dualité entre les fonctions auxiliaires, correspondant à des combinaisons de lignes:

$$z \mapsto \sum_\lambda p_\lambda f_\lambda(z)$$

et les fonctionnelles auxiliaires, combinaisons linéaires de colonnes:

$$F \mapsto \sum_\tau \sum_\zeta q_{\tau\zeta} D^\tau F(\zeta).$$

La construction de fonctions auxiliaires est la recherche de nombres p_λ (disons dans $\mathbf{Z}$, avec une borne pour les valeurs absolues), non tous nuls, tels que la fonction $\sum_\lambda p_\lambda f_\lambda$ soit "petite" (en module, sur un disque donné). La construction de fonctionnelles analytiques va être la recherche de $q_{\tau\zeta}$ tels que, pour toute fonction F, le nombre $|\sum_\tau \sum_\zeta q_{\tau\zeta} D^\tau F(\zeta)|$ soit "petit".

Les arguments que nous présentons ci-dessous doivent pouvoir être utilisés pour majorer les déterminants des matrices dans la nouvelle présentation des méthodes transcendantes de M. Laurent. Mais, actuellement, pour l'indépendance algébrique, on ne sait pas suivre le schéma de démonstration de [L], et on doit utiliser soit des fonctions auxiliaires, soit des fonctionnelles auxiliaires; dans le premier cas on conclut la démonstration par un lemme de zéros (cf. [P] par exemple), dans le second cas on fait appel à un lemme d'interpolation comme celui de [M].

Nous conservons dans cette deuxième partie les notations introduites au §1.

6. Fonctionnelles auxiliaires

Soient $R_1,\ldots,R_n$ des nombres réels positifs, et $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0,R)$ le polydisque $\{z \in \mathbf{C}^n;\ |z_i| \leq R_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ de $\mathbf{C}^n$. On désigne par $H_n(\mathfrak{D})$, ou simplement $H(\mathfrak{D})$, l'espace des fonctions analytiques sur $\mathfrak{D}$ (rappelons que ce sont les fonctions continues sur $\mathfrak{D}$ et analytiques à l'intérieur).

Quand $\eta : H(\mathfrak{D}) \to \mathbf{C}$ est une forme linéaire, on dit que η est *bornée* s'il existe $C > 0$ tel que $|\eta(F)| \leq C|F|_R$ pour toute $F \in H(\mathfrak{D})$. On note alors

$$|\eta|_R = \sup\{|\eta(F)|/|F|_R;\ F \in H(\mathfrak{D}),\ F \neq 0\}.$$

Par homogénéité, on a

$$|\eta|_R = \sup\{|\eta(F)|;\ F \in H(\mathfrak{D}),\ |F|_R = 1\}.$$

Nous utiliserons une version "duale" du lemme d'interpolation 2.2.

Lemme 6.1. *Soient $n, K_1,\ldots,K_n$ des entiers positifs, et $r_1,\ldots,r_n$, $R_1,\ldots,R_n$, C des nombres réels positifs, avec $R_i > r_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On pose $\mathcal{K} = \mathcal{K}(K_1,\ldots,K_n)$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0,R)$. Soit η une forme linéaire sur $H(\mathfrak{D})$ vérifiant*

$$|\eta(F)| \leq C|F|_r \qquad \textit{pour tout } F \in H(\mathfrak{D}).$$

Alors, pour toute $F = \sum_{\kappa\in\mathbf{N}^n} a_\kappa z^\kappa \in H(\mathfrak{D})$, on a

$$|\eta(F)| \leq C\big((1 + \sqrt{|\mathcal{K}|}\,)|F|_R \max_{1\leq j\leq n}\left\{\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j}\right\} + \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |a_\kappa\eta(z^\kappa)|.$$

Démonstration. Posons $P(z) = \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} a_\kappa z^\kappa$, et $G = F - P$. On a

$$|\eta(P)| \leq \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |a_\kappa\eta(z^\kappa)|$$

et

$$\eta(F) = \eta(G) + \eta(P).$$

Mais, par hypothèse,

$$|\eta(G)| \leq C|G|_r,$$

et le lemme de Schwarz (cf. lemme 2.2) donne:

$$|G|_r \leq |G|_R \max_{1\leq j\leq n}\left\{\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j}\right\}.$$

Il reste à majorer $|G|_R$. On a

$$|G|_R \leq |F|_R + |P|_R,$$

avec, grâce à (1.2),

$$|P|_R \leq \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} |a_\kappa| R^\kappa \leq \sqrt{|\mathcal{K}|}\, |F|_R,$$

d'où

$$|G|_R \leq \left(1 + \sqrt{|\mathcal{K}|}\,\right) |F|_R,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 6.1. ■

Ce lemme 6.1 est l'analogue pour $\vartheta = 1$ du lemme 2.2. L'énoncé correspondant à $\vartheta = 0$ est

$$|\eta(F)| \leq C|F|_R \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\frac{R_j}{r_j} \right)^{-K_j} \right\} + C \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa \in \mathcal{K}} |a_\kappa \eta(z^\kappa)|.$$

Voici maintenant la version 'duale" de la proposition 2.3.

Proposition 6.2. *Soient n, L, A, $K_1, \ldots, K_n$ des entiers positifs, U, V des nombres réels avec $U + V > 0$, et Δ, W, $r_1, \ldots, r_n$, $R_1, \ldots, R_n$ des nombres réels positifs, vérifiant*

$$R_j > r_j, \quad \Delta + U + V + \log\left(2\left(1 + \sqrt{|\mathcal{K}|}\,\right)\right) \leq K_j \log \frac{R_j}{r_j} \quad (1 \leq j \leq n),$$

et

$$1 + 4A|\mathcal{K}|^{3/2} e^{\Delta + U + V} \leq e^{L\Delta/2W}, \tag{6.3}$$

où $\mathcal{K} = \mathcal{K}(K_1, \ldots, K_n)$. Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0, R)$ le polydisque $|z_i| \leq R_i$ de $\mathbf{C}^n$. Soient $\eta_{\lambda\alpha}$ $(1 \leq \lambda \leq L,\ 1 \leq \alpha \leq A)$ des formes linéaires bornées sur $H(\mathfrak{D})$, vérifiant

$$\sum_{\lambda=1}^{L} |\eta_{\lambda\alpha}(F)| \leq e^U |F|_r \qquad \textit{pour tout } F \in H(\mathfrak{D}), \quad 1 \leq \alpha \leq A.$$

On suppose que le rang de la matrice

$$(\eta_{\lambda\alpha}(z^\kappa))_{\lambda; (\alpha, \kappa)}$$

(où λ est, disons, l'indice de ligne, $1 \leq \lambda \leq L$, et (α, κ) celui de colonne, $1 \leq \alpha \leq A$, $\kappa \in \mathcal{K}$) est inférieur ou égal à W. Alors il existe des entiers rationnels $q_1, \ldots, q_L$, non tous nuls, majorés par

$$\max_\lambda |q_\lambda| \leq e^\Delta,$$

tels que les formes linéaires

$$\eta_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{L} q_\lambda \eta_{\lambda\alpha}$$

vérifient

$$\max_{1 \leq \alpha \leq A} |\eta_\alpha|_R \leq e^{-V}.$$

Remarques. Par homogénéité il n'y aurait pas de restriction à supposer $U=0$. D'autre part on en déduit facilement la proposition 3.6 de [W]. On peut même y remplacer le terme $(\log(R/r))^n$ par un produit $\prod_{i=1}^{n}\log(R_i/r_i)$.

Démonstration. Posons, pour $1 \le \lambda \le L$, $1 \le \alpha \le A$, et $\kappa \in \mathcal{K}$,

$$u_{\lambda\alpha\kappa} = 2\sqrt{|\mathcal{K}|}\, r^{-\kappa}\eta_{\lambda\alpha}(z^\alpha).$$

On a grâce à l'hypothèse $\sum_\lambda |\eta_{\lambda\alpha}(F)| \le e^U|F|_r$,

$$\sum_\lambda |u_{\lambda\alpha\kappa}| \le 2\sqrt{|\mathcal{K}|}\, r^{-\kappa}\sum_\lambda |\eta_{\lambda\alpha}(z^\kappa)| \le 2\sqrt{|\mathcal{K}|}\, e^U.$$

Le lemme 2.1, avec $\nu = L$, $\rho = W$, $\mu = A|\mathcal{K}|$, et U remplacé par $U+\log\bigl(2\sqrt{|\mathcal{K}|}\,\bigr)$, permet de résoudre le système d'inéquations

$$\Bigl|\sum_\lambda q_\lambda u_{\lambda\alpha\kappa}\Bigr| \le e^{-V} \qquad (1 \le \alpha \le A,\ \kappa \in \mathcal{K})$$

avec des entiers rationnels $q_\lambda \in \mathbf{Z}$, non tous nuls, bornés par e^Δ.

Alors, pour $1 \le \alpha \le A$, la forme linéaire

$$\eta_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{L} q_\lambda \eta_{\lambda\alpha}$$

vérifie

$$|\eta_\alpha(z^\kappa)| \le \Bigl|\sum_{\lambda=1}^{L} q_\lambda\eta_{\lambda\alpha}(z^\kappa)\Bigr| \le \frac{r^\kappa}{2\sqrt{|\mathcal{K}|}}\, e^{-V} \qquad \text{pour tout } \kappa \in \mathcal{K}.$$

On a, pour tout $F \in H(\mathfrak{D})$, la majoration triviale

$$|\eta_\alpha(F)| \le \Bigl|\sum_{\lambda=1}^{L} q_\lambda\eta_{\lambda\alpha}(F)\Bigr| \le e^{\Delta+U}|F|_r,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 6.1 avec $C = e^{\Delta+U}$. Pour $F = \sum_\kappa a_\kappa z^\kappa \in H(\mathfrak{D})$ avec $|F|_R = 1$, on a

$$|\eta_\alpha(F)| \le \bigl(1+\sqrt{|\mathcal{K}|}\,\bigr)e^{\Delta+U}\max_{1\le j\le n}\left\{\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j}\right\} + \left(\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}|a_\kappa|r^\kappa\right)\frac{e^{-V}}{2\sqrt{|\mathcal{K}|}}.$$

Mais

$$\bigl(1+\sqrt{|\mathcal{K}|}\,\bigr)e^{\Delta+U}\max_{1\le j\le n}\left\{\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j}\right\} \le \frac{1}{2}\, e^{-V},$$

et, par (1.2),

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{K}|}}\sum_{\kappa\in\mathcal{K}}|a_\kappa|r^\kappa \le |F|_r \le |F|_R \le 1,$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 6.2. ∎

Remarque 6.4. Supposons $R_j \geq er_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Soit K_0 un entier ≥ 8 vérifiant

$$K_0 \geq \Delta + U + V + 1 + \log\binom{K_0 + n - 1}{n}.$$

Choisissons pour K_j le plus petit entier $\geq (K_0 - 1)/\log(R_j/r_j)$. Ainsi $K_j - 1 \leq (K_0 - 1)/\log(R_j/r_j) \leq K_0 - 1$, donc $K_j \leq K_0$ $(1 \leq j \leq n)$, et $|\mathcal{K}| \leq \binom{K_0+n-1}{n}$. D'autre part $K_j \log(R_j/r_j) \geq K_0 - 1 \geq \Delta + U + V + \log|\mathcal{K}|$. L'hypothèse $K_0 \geq 8$ permet de majorer $2 + 2\sqrt{|\mathcal{K}|}$ par $\binom{K_0+n-1}{n}$; d'autre part $1 + 4A|\mathcal{K}|^{3/2}e^{\Delta+U+V}$ est inférieur à $5A\binom{K_0+n-1}{n}^{3/2} e^{\Delta+U+V}$. Soit maintenant $\rho > 0$ tel que

$$5A\binom{K_0 + n - 1}{n}^{3/2} e^{\Delta} \leq e^{\rho(U+V)};$$

l'hypothèse principale (6.3) de la proposition 6.2 est vérifiée dès que

$$2(1 + \rho)(U + V)W \leq L\Delta.$$

Dans [W], on majorait brutalement W par $A|\mathcal{K}|$. Alors, dans la situation de la remarque 6.4 ci-dessus, en choisissant un nombre $\rho' > 0$ tel que

$$K_0 - 1 + \log \frac{R_j}{r_j} \leq (1 + \rho')(U + V),$$

et en majorant $|\mathcal{K}|$ par $K_1 \cdots K_n$, la condition principale est vérifiée dès que

$$2(1 + \rho)(1 + \rho')^n A(U + V)^{n+1} \leq L\Delta \prod_{i=1}^{n} \log \frac{R_i}{r_i}.$$

Nous poursuivons le développement de cette étude en parallèle avec le §2. On se restreint au cas $K_1 = \cdots = K_n = K$. Voici deux exemples dans lesquels on sait majorer W non trivialement, c'est-à-dire mieux que par $A\binom{K+n-1}{n}$.

1. Soient $\pi : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ et $p : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^t$ deux applications linéaires surjectives. Notons $n + t - f$ le rang de l'application linéaire $(\pi, p) : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^{n+t}$, et remplaçons l'indice α par un multiindice $\tau \in \mathbf{N}^t$, $\|\tau\| < T$. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_L$ des formes linéaires sur un espace de fonctions analytiques dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^d$. Prenons, pour F analytique dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$,

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \eta_\lambda(p^\tau \cdot (F \circ \pi)).$$

Alors la matrice

$$(\eta_{\lambda\tau}(z^\kappa))_{\lambda;(\kappa,\tau)}$$

a un rang majoré par

$$W \leq \binom{K + T + f - 2}{f}\binom{K + n - f - 1}{n - f}\binom{T + t - f + 1}{t - f}.$$

En particulier on a

$$W \leq (K+T-1)^n T^{t-f}.$$

2. Prenons $A = 1$, et remplaçons l'indice λ par (σ, j), avec $\sigma \in \mathbf{N}^n$, $\|\sigma\| < S$, et $1 \leq j \leq J$. Ainsi $L = J\binom{S+n-1}{n}$. Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_J$ des formes linéaires sur un espace de fonctions analytiques dans un voisinage de 0 dans $\mathcal{E}$. Prenons, pour F fonction analytique de n variables,

$$\eta_{\sigma j}(F) = \eta_j((D^\sigma F)|_{\mathcal{E}}),$$

où $|_{\mathcal{E}}$ désigne la restriction à $\mathcal{E}$. Alors

$$W \leq \binom{K+m-1}{m}\binom{S+n-m-1}{n-m}.$$

Lemme 6.5. *Soient t un entier ≥ 0, d, n, m, K, T, L, S, J des entiers positifs, $p: \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^t$ et $\pi: \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ deux applications linéaires surjectives, telles que $n+t-f$ soit le rang des $n+t$ formes linéaires (π, p), et $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m. Soient $R_1, \ldots, R_n$ des nombres réels positifs; on note $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0, R)$ le polydisque de rayon $R = (R_1, \ldots, R_n)$ de $\mathbf{C}^n$. Pour $\sigma \in \mathbf{N}^n$, notons D^σ la dérivation par rapport aux variables de $\mathbf{C}^n$. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_L$ des formes linéaires sur l'espace $H_d(\pi^{-1}(\mathfrak{D}))$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{N}$ et tout $\tau \in \mathbf{N}^t$ vérifiant $1 \leq \lambda \leq L$ et $\|\tau\| < T$, on définit une forme linéaire $\eta_{\lambda\tau}$ sur $H_n(\mathfrak{D})$ par*

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \eta_\lambda(p^\tau \cdot (F \circ \pi)) \qquad \textit{pour } F \in H_n(\mathfrak{D}),$$

et on suppose qu'il existe des éléments $\sigma_{\lambda\tau j}$ de $\mathbf{N}^n$ $(1 \leq j \leq J$, $\|\sigma_{\lambda\tau}\| < S)$, et des formes linéaires $\mu_{\lambda\tau j}$ sur $H_m(D \cap \mathcal{E})$, tels que

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \sum_{j=1}^{J} \mu_{\lambda\tau j}((D^{\sigma_{\lambda\tau j}} F)|_{\mathcal{E}}) \qquad \textit{pour } F \in H_n(\mathfrak{D}).$$

Alors la matrice

$$(\eta_{\lambda\tau}(z^\kappa))_{\lambda;(\tau,\kappa)}$$

où λ est l'indice de ligne, $1 \leq \lambda \leq L$, et (τ, κ) celui de colonne, $\tau \in \mathbf{N}^t$, $\|\tau\| < T$, $\kappa \in \mathbf{N}^n$, $\|\kappa\| < K$, a un rang inférieur ou égal à

$$\binom{K+T+m-2}{m}\binom{T+t-f-1}{t-f}\binom{S+n-m-1}{n-m}.$$

En particulier

$$W \leq (K+T-1)^m T^{t-f} S^{n-m}.$$

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer que les applications $(\pi_1, \ldots, \pi_n, p_1, \ldots, p_{t-f})$ sont linéairement indépendantes. L'espace vectoriel engendré par les monomes $p^\tau\pi^\kappa$, $\|\tau\| < T$, $\|\kappa\| < K$, est contenu dans l'espace vectoriel engendré par les monomes $p^\tau\pi^\kappa$, $\|\tau\| < T$, $\|\kappa\| < K + T - 1$, $\tau_{t-f+1} = \cdots = \tau_t = 0$. On peut donc prendre maintenant τ dans $\mathbf{N}^{t-f}$, $\|\tau\| < T$, mais on fait varier $\kappa \in \mathbf{N}^n$ dans le domaine $\|\kappa\| < K + T - 1$.

Pour majorer le rang de la matrice, $(\eta_{\lambda\tau}(z^\kappa))$, on cherche à savoir s'il existe des nombres complexes c_λ non tous nuls tels que

$$\sum_{\lambda=t}^{L}\sum_{j=1}^{J} c_\lambda \mu_{\lambda\tau j}((D^{\sigma_{\lambda\tau j}}z^\kappa)|_{\mathcal{E}}) = 0$$

pour tout (τ,κ). En posant

$$\mu_\tau(F) = \sum_{\lambda=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} c_\lambda \mu_{\lambda\tau j}((D^{\sigma_{\lambda\tau j}}F)|_{\mathcal{E}}),$$

il s'agit de résoudre les équations $\mu_\tau(z^\kappa) = 0$ pour tout (τ,κ). Choisissons une base $(e_1,\ldots,e_m)$ de $\mathcal{E}$, que l'on complète en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbf{C}^n$. Soit $(e_1',\ldots,e_n')$ la base duale pour le produit scalaire standard de $\mathbf{C}^n$; on a $ze_i' = 0$ pour $z \in \mathcal{E}$ et $m < i \leq n$. Le système d'équations précédent est équivalent à $\mu_\tau(F_\kappa) = 0$ pour tout (τ,κ), où on a posé

$$F_\kappa(z) = (ze_1')^{\kappa_1}\cdots(ze_n')^{\kappa_n} \qquad (\kappa \in \mathbf{N}^n).$$

Mais la restriction à $\mathcal{E}$ de $D^{\sigma_{\lambda\tau j}}F_\kappa$ est nulle quand $\kappa_{m+1} + \cdots + \kappa_n \geq S$, donc il suffit de prendre $\kappa_1 + \cdots + \kappa_m < K + T - 1$ et $\kappa_{m+1} + \cdots + \kappa_n < S$, ce qui donne l'énoncé prévu. ■

Nous combinons maintenant la proposition 6.2 avec le lemme 6.5.

Corollaire 6.6. *Soient t, f des entiers ≥ 0, d, n, m, T, L, S, D, J des entiers positifs, U, V, Δ, ρ, ρ', $r_1,\ldots,r_n$, $R_1,\ldots,R_n$, E des nombres réels positifs, $p:\mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^t$ et $\pi:\mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ deux applications linéaires surjectives, telles que $n + t - f$ soit le rang des $n + t$ formes linéaires (π,p) et $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m. Soit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0,R)$ le polydisque $|z_i| \leq R_i$ de $\mathbf{C}^n$. On suppose*

$$U + V \geq 5, \quad E \geq e, \quad R_i \geq Er_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$\Delta + 2 + (T + m - 1)\log E + n\log((1+\rho')(U+V)) \leq \rho'(U+V),$$

$$\Delta + \log 5 + \frac{3}{2}n\log((1+\rho')(U+V)) + t\log T \leq \rho(U+V),$$

et

$$2(1+\rho)(1+\rho')^m(U+V)^{m+1}\binom{T+t-f-1}{t-f}\binom{S+n-m-1}{n-m} \leq m!L\Delta(\log E)^m. \tag{6.7}$$

Soient $\eta_{\lambda\tau}$ $(1 \le \lambda \le L,\ \tau \in \mathbf{N}^t,\ \|\tau\| < T)$, *des formes linéaires bornées sur* $H(\mathfrak{D})$, *vérifiant*

$$\sum_{\lambda=1}^{L} |\eta_{\lambda\tau}(F)| \le e^U |F|_r \qquad \textit{pour tout } F \in H(\mathfrak{D}), \quad \textit{et tout } \|\tau\| < T.$$

Pour $\sigma \in \mathbf{N}^t$, *notons* D^σ *la dérivation associée à la base canonique de* $\mathbf{C}^t$. *Pour tout* $\lambda \in \mathbf{N}$, *tout* $j \in \mathbf{N}$ *et tout* $\tau \in \mathbf{N}^n$ *vérifiant* $1 \le \lambda \le L$, $1 \le j \le J$, *et* $\|\tau\| < T$, *on suppose qu'il existe un élément* $\sigma_{\lambda\tau j}$ *de* $\mathbf{N}^n$, $\|\sigma_{\lambda\tau j}\| < S$, *une forme linéaire* $\mu_{\lambda\tau j}$ *sur* $H_m(\mathfrak{D} \cap \mathcal{E})$, *et une forme linéaire* η_λ *sur* $H_d(\pi^{-1}(\mathfrak{D}))$, *tels que*

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \eta_\lambda(p^\tau \cdot (F \circ \pi)) = \sum_{j=1}^{J} \mu_{\lambda\tau j}((D^{\sigma_{\lambda\tau j}} F)|_{\mathcal{E}}).$$

Alors il existe des entiers rationnels $q_1, \ldots, q_L$, *non tous nuls, majorés par*

$$\max_\lambda |q_\lambda| \le e^\Delta,$$

tels que les formes linéaires

$$\eta_\tau = \sum_{\lambda=1}^{L} q_\lambda \eta_{\lambda\tau}$$

vérifient

$$\max_{\|\tau\| < T} |\eta_\tau|_R \le e^{-V}.$$

Démonstration. On utilise la proposition 6.2 avec $A = \binom{T+t-1}{t} \le T^t$. Soit K_0 le plus petit entier $\ge \Delta + U + V + 1 + n\log((1+\rho')(U+V))$, et soit K le plus petit entier $\ge (K_0 - 1)/\log E$. On a

$$\begin{aligned} K_0 + (T + m - 1)\log E &\le \Delta + U + V + 2 + (T + m - 1)\log E \\ &\qquad + n\log((1+\rho')(U+V)) \\ &\le (1+\rho')(U+V), \end{aligned}$$

et

$$\binom{K_0 + n - 1}{n} \le K_0^n \le (1+\rho')^n (U+V)^n,$$

donc on peut appliquer la remarque (6.4). On utilise maintenant le lemme 6.5, en majorant $K + T + m - 2$ par $(1+\rho')(U+V)/\log E$. On trouve

$$W \le (1+\rho')^m \frac{(U+V)^m}{m!} \binom{T+t-f-1}{t-f} \binom{S+n-m-1}{n-m} (\log E)^{-m},$$

ce qui donne $2(1+\rho)(U+V)W \le L\Delta$, et permet de vérifier l'hypothèse (6.3). ∎

7. Transformation de Fourier-Borel

(a) *Introduction*

Soit η une forme linéaire continue sur un espace de fonctions analytiques de n variables. Une telle forme linéaire est déterminée par ses "moments", c'est-à-dire par ses valeurs sur les monomes z^κ, $\kappa \in \mathbf{N}^n$. Notons-les $a_\kappa(\eta) = \eta(z^\kappa)$. La fonction de n variables

$$\mathfrak{F}_\eta(\zeta) = \sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} \frac{a_\kappa(\eta)}{\kappa!} \zeta^\kappa$$

est entière, de type exponentiel (cf. [LG]). C'est la *transformée de Fourier-Borel* de η:

$$\mathfrak{F}_\eta(\zeta) = \eta(e^{z\zeta}).$$

Par exemple, en une variable, la transformée de Fourier-Borel de $\eta : F \mapsto \int_0^1 F(z)\,dz$ est $\mathfrak{F}_\eta(\zeta) = (e^\zeta - 1)/\zeta$, et la transformée de Fourier d'une fonction φ:

$$\zeta \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) e^{iz\zeta}\,dz$$

est la transformée de Fourier-Borel de la fonctionnelle analytique

$$F \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) F(iz)\,dz.$$

La connaissance de $\mathfrak{F}_\eta$ détermine entièrement η: si $\Phi(z) = \sum_\kappa a_\kappa z^\kappa/\kappa!$, alors $\Phi = \mathfrak{F}_\eta$ où η envoie $F(z) = \sum_\kappa b_\kappa z^\kappa$ sur $\eta(F) = \sum_\kappa a_\kappa b_\kappa$. Cette correspondance entre les fonctionnelles analytiques bornées et les fonctions entières de type exponentiel montre que les résultats du §6 sont étroitement liés au cas particulier du §2 où on se restreint aux fonctions entières de type exponentiel. Nous précisons tout cela dans cette section.

(b) *La transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique*

Dans toute cette section on fixe un polydisque $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0, R)$ de $\mathbf{C}^n$, avec $R = (R_1, \ldots, R_n)$, et $R_i > 0$ pour $1 \le i \le n$. On désigne comme précédemment par $H(\mathfrak{D})$ l'espace des fonctions continues sur ce polydisque et analytiques à l'intérieur; on munit $H(\mathfrak{D})$ de la norme $|F|_R$, et on note $H'(\mathfrak{D})$ l'espace vectoriel des formes linéaires $\eta : H(\mathfrak{D}) \to \mathbf{C}$ pour lesquelles il existe des nombres réels positifs $C, r_1, \ldots, r_n$, avec $0 < r_i < R_i$ $(1 \le i \le n)$, tels que $|\eta(F)| \le C|F|_r$ pour toute $F \in H(\mathfrak{D})$. Une telle forme linéaire est donc bornée, et par conséquent elle est continue.

Soit $\eta \in H(\mathfrak{D})$ vérifiant $|\eta(F)| \le C|F|_r$ pour toute $F \in H(\mathfrak{D})$. On définit, pour $\zeta \in \mathbf{C}^n$, $\mathfrak{F}_\eta(\zeta) = \eta(e^{z\zeta})$, où, comme d'habitude, $z\zeta$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbf{C}^n$. On a donc

$$|\mathfrak{F}_\eta(\zeta)| \leq Ce^{r|\zeta|},$$

où on note $r|\zeta|$ pour $r_1|\zeta_1| + \cdots + r_n|\zeta_n|$. Ainsi la fonction $\mathfrak{F}_\eta$ est entière dans $\mathbf{C}^n$, de croissance au plus exponentielle, avec un "type" majoré par r (cf. [LG]).

(c) *Fonctionnelle analytique associée à une fonction de type exponentiel*

Soit $\Phi(\zeta)$ une fonction entière dans $\mathbf{C}^n$. On dit que Φ est *de type exponentiel* $< R$ s'il existe $C > 0$ et $r = (r_1, \ldots, r_n)$, avec $0 < r_i < R_i$ $(1 \leq i \leq n)$, tels que

$$|\Phi(\zeta)| \leq Ce^{r|\zeta|} \qquad \text{pour tout } \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

Ecrivons le développement de Taylor à l'origine d'une telle fonction sous la forme

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} \frac{a_\kappa}{\kappa!} \zeta^\kappa.$$

Soit $F(z) = \sum_\kappa b_\kappa z^\kappa$ un élément de $H(\mathfrak{D})$. Montrons que la série

$$\sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} a_\kappa b_\kappa$$

converge absolument. En effet, soient $r_1', \ldots, r_n'$ des nombres réels, avec $r_i < r_i' < R_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Les inégalités de Cauchy donnent

$$|b_\kappa| r'^\kappa \leq |F|_{r'},$$

et, en notant $|\zeta|^\kappa$ pour $|\zeta_1|^{\kappa_1} \cdots |\zeta_n|^{\kappa_n}$,

$$|a_\kappa| \frac{|\zeta|^\kappa}{\kappa!} \leq Ce^{r|\zeta|} \text{ pour tout } \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

On prend $\zeta = (\kappa_1/r_1, \ldots, \kappa_n/r_n)$, ce qui donne

$$|a_\kappa| \leq C\kappa! e^{\|\kappa\|} \frac{r^\kappa}{\kappa^\kappa}$$

et la formule de Stirling montre que la série

$$\sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} \kappa! e^{\|\kappa\|} \frac{r^\kappa}{\kappa^\kappa r'^\kappa}$$

converge. Notons c (qui dépend de n, r, et r') sa somme. On a

$$\sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} |a_\kappa b_\kappa| \leq cC|F|_{r'},$$

donc l'application

$$F \mapsto \sum_{\kappa} a_\kappa b_\kappa$$

définit un élément de $H'(\mathfrak{D})$ que nous noterons $\mathcal{K}_\Phi$.

Désignons par

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{\kappa \in \mathbf{N}^n} a_\kappa z^{-\kappa-1}$$

la *transformée de Laplace* de Φ, avec $z^{-\kappa-1} = z_1^{-\kappa_1-1} \dots z_n^{-\kappa_n-1}$. Cette fonction $\tilde{\Phi}$ est analytique sur le domaine $\{z \in \mathbf{C}^n;\ |z_j| > r_j,\ 1 \le j \le n\}$, et la formule intégrale de Cauchy donne:

$$\mathcal{K}_\Phi(F) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial\mathfrak{D}} F(z)\tilde{\Phi}(z)\, dz,$$

où l'intégrale porte sur le bord distingué $\partial\mathfrak{D}$ du polydisque $\mathfrak{D}$ (produit des cercles $|z_j| = r_j$, $1 \le j \le n$). Pour $F(z) = \exp(\zeta z)$, cette dernière égalité n'est autre que la formule d'inversion de la transformation de Laplace.

Enfin les applications $\eta \mapsto \mathfrak{F}_\eta$ et $\Phi \mapsto \mathcal{K}_\Phi$ définissent des bijections réciproques de $H'(\mathfrak{D})$ sur l'espace des fonctions entières de type exponentiel $< R$.

(d) *Propriétés de la transformation de Fourier-Borel*

Comme $(\partial/\partial z_1)e^{\zeta z} = \zeta_1 e^{\zeta z}$, la transformée de Fourier-Borel de la fonctionnelle $F \mapsto \eta((\partial/\partial z_1)F)$ est $\zeta_1\mathfrak{F}_\eta$, ce qui peut s'écrire

$$\mathcal{K}_{\zeta_1\Phi}(F) = \mathcal{K}_\Phi\left(\frac{\partial}{\partial z_1} F\right). \tag{7.1}$$

D'autre part $\mathcal{K}_\Phi$ est caractérisée par $\mathcal{K}_\Phi(z^\kappa) = D^\kappa\Phi(0)$, donc

$$\mathcal{K}_{\partial\Phi/\partial\zeta_1}(F) = \mathcal{K}_\Phi(z_1 f), \tag{7.2}$$

ce qui veut dire que la transformée de Fourier-Borel de la fonctionnelle $F \mapsto \eta(z_1 F)$ est $(\partial/\partial\zeta_1)\mathfrak{F}_\eta$.

De plus, si $\pi : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ est une application linéaire, et ${}^t\pi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^d$ sa transposée, à toute fonctionnelle analytique η définie sur un espace de fonctions de d variables, on associe une fonctionnelle η^π en n variables par

$$\eta^\pi(F) = \eta(F \circ \pi)$$

(F fonction de n variables). Nous allons vérifier

$$\mathfrak{F}_{\eta^\pi} = \mathfrak{F}_\eta \circ {}^t\pi. \tag{7.3}$$

Il s'agit de voir que, si Φ est entière de type exponentiel $< R$ dans $\mathbf{C}^d$, et $\mathcal{L} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^d$ une application linéaire, on a

$$\mathcal{H}_{\Phi\circ\mathcal{L}}(F) = \mathcal{H}_{\Phi}(F \circ {}^t\mathcal{L}).$$

Il suffit de vérifier cette égalité pour $F(z) = e^{\zeta z}$, et en effet, en notant ξ les d variables de $\mathbf{C}^d$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\Phi\circ\mathcal{L}}(e^{\zeta z}) &= \Phi \circ \mathcal{L}(\zeta)\\ &= \mathcal{H}_{\Phi}(e^{\mathcal{L}(\zeta)\xi})\\ &= \mathcal{H}_{\Phi}(e^{\zeta\,{}^t\mathcal{L}(\xi)}).\end{aligned}$$

Nous combinons ces trois remarques dans les deux lemmes suivants.

Lemme 7.4. *Soient $v_1, \dots, v_n$, (resp. $w_1, \dots, w_t$) des éléments de $\mathbf{C}^d$, engendrant un espace vectoriel $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$). Soit $\tau \in \mathbf{N}^t$. Soit η une forme linéaire sur un espace de fonctions de d variables $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$. On définit, pour F fonction analytique de n variables,*

$$\mu(F) = \eta((\xi w_1)^{\tau_1} \cdots (\xi w_t)^{\tau_t}(F \circ \pi)),$$

où $\pi : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ est l'application linéaire de matrice la transposée de $(v_1, \dots, v_n)$. Alors

$$\mathcal{F}_\mu(\zeta) = (D_w^\tau \mathcal{F}_\eta)(v_1\zeta_1 + \cdots + v_n\zeta_n) \qquad \textit{pour tout } \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

Démonstration. Définissons χ, fonctionnelle analytique en d variables, par

$$\chi(G) = \eta((\xi w_1)^{\tau_1} \cdots (\xi w_t)^{\tau_t} G),$$

de sorte que

$$\mu(F) = \chi(F \circ \pi) = \chi^\pi(F).$$

De (7.3) on déduit $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_\chi \circ {}^t\pi$, tandis que (7.2) et (1.1) donnent, par linéarité et récurrence, $\mathcal{F}_\chi = D_{w_1}^{\tau_1} \cdots D_{w_t}^{\tau_t} \mathcal{F}_\eta$. Enfin ${}^t\pi(\zeta) = \zeta_1 v_1 + \cdots + \zeta_n v_n$. ■

Lemme 7.5. *Soient $e_1, \dots, e_m$ des éléments de $\mathbf{C}^n$, engendrant un espace vectoriel $\mathcal{E}$. Soient $u_1, \dots, u_s$ des éléments de $\mathbf{C}^n$, soit $\sigma \in \mathbf{N}^s$, et soit η une forme linéaire sur un espace de fonctions définies au voisinage de 0 dans $\mathcal{E}$. Pour F fonction analytique de n variables, on pose*

$$\mu(F) = \eta((D_u^\sigma F)|_{\mathcal{E}}).$$

Alors

$$\mathcal{F}_\mu(\zeta) = (\zeta \cdot u)^\sigma \cdot ((\mathcal{F}_\eta \circ \mathcal{L})(\zeta)),$$

où $\mathcal{L} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ est l'application linéaire de matrice la transposée de $(e_1, \dots, e_m)$.

Démonstration. Posons $\pi = {}^t\mathcal{L}$, et $\chi = \eta^\pi$, de sorte que $\mu(F) = \chi(D^\sigma F)$. De (7.1) on déduit $\mathfrak{F}_\mu = \zeta^\sigma \cdot \mathfrak{F}_\chi$, et (7.3) donne $\mathfrak{F}_\chi = \mathfrak{F}_\eta \circ \mathcal{L}$. ∎

(e) *Polynômes exponentiels*

Voici une généralisation de (5.1) en plusieurs variables (cf. lemme 3.1).

Lemme 7.6. *Soient n, s, t des entiers positifs, $\tau \in \mathbf{N}^t$, $\sigma \in \mathbf{N}^s$, et $w_1, \ldots, w_t$, $u_1, \ldots, u_s$, x, y des éléments de $\mathbf{C}^n$. Alors on a*

$$D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xz})_{z=y} = D_u^\sigma((w\cdot z)^\tau e^{yz})_{z=x}.$$

Démonstration. Définissons un élément $\eta \in H'(\mathbf{C}^n)$ par

$$\eta(F) = D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma F(z))_{z=y}.$$

Il s'agit de vérifier que sa transformée de Fourier-Borel est

$$\zeta \mapsto D_u^\sigma((w\cdot z)^\tau e^{yz})_{z=\zeta}.$$

On définit des fonctionnelles analytiques λ et μ par

$$\lambda(F) = F(y) \quad \text{et} \quad \mu(F) = \lambda(D_w^\tau F),$$

de sorte que

$$\eta(F) = \mu((u\cdot z)^\sigma F).$$

On a d'abord $\mathfrak{F}_\lambda(\zeta) = e^{y\zeta}$, ensuite, par le lemme 7.5, $\mathfrak{F}_\mu(\zeta) = (w\cdot\zeta)^\tau \mathfrak{F}_\lambda(\zeta)$, et enfin, par le lemme 7.4, $\mathfrak{F}_\eta = D_u^\sigma \mathfrak{F}_\mu$, ce qui donne le résultat annoncé. ∎

Ce lemme 7.6 signifie que les polynômes exponentiels

$$\sum_m \sum_\tau q_{m\tau}(w\cdot z)^\tau e^{y_m z}$$

sont transformés de Fourier-Borel des fonctionnelles analytiques

$$F \mapsto \sum_m \sum_\tau q_{m\tau} D_w^\tau F(y_m). \tag{7.7}$$

(f) *Liens entre les résultats du §6 et ceux du §2*

Démontrons d'abord le cas $\vartheta = 1$ du lemme 2.2. en utilisant le lemme 6.1. Soit $z_0 \in \mathbf{C}^n$ avec $|z_0| = r$ et $|F(z_0)| = |F|_r$. On définit une fonctionnelle analytique η par $\eta(G) = G(z_0)$. Ainsi

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |a_\kappa \eta(z^\kappa)| = \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} |a_\kappa| r^\kappa,$$

et l'estimation voulue en résulte. ∎

Notons à ce propos qu'il existe des variantes bien connues du lemme d'interpolation 2.2. En particulier, en une variable, on peut prendre un ensemble quelconque fini de points, éventuellement avec des multiplicités; pour avoir un lemme d'interpolation, on est amené à faire intervenir les distances mutuelles entre ces points, mais c'est inutile pour le lemme de Schwarz. L'énoncé dual est une généralisation du lemme 6.1 dans lequel les fonctions z^κ sont remplacées par des fonctions linéairement indépendantes. Voici un exemple concernant des polynômes exponentiels.

Lemme 7.8. *Soient n, s, H, S des entiers positifs, $u_1, \ldots, u_s$, $x_1, \ldots, x_H$, des éléments de $\mathbf{C}^n$, et R, r deux nombres réels positifs avec $r \geq |x| + s|u|$. Considérons un polynôme exponentiel*

$$\varphi(z) = \sum_{h=1}^{H} \sum_{\|\sigma\|<S} c_{h\sigma}(u\cdot z)^\sigma e^{x_h z},$$

où les $c_{h\sigma}$ ($1 \leq h \leq H$, $\sigma \in \mathbf{N}^n$, $\|\sigma\| < S$) sont des nombres complexes. Enfin soit η une fonctionnelle bornée sur l'espace des fonctions analytiques dans le polydisque $|z| \leq R$ de $\mathbf{C}^n$, et soit F une fonction analytique dans ce polydisque. On pose $\theta = F - \varphi$. Alors

$$|\eta(F)| \leq |\eta|_R |\theta|_R + \sum_{h=1}^{H} \sum_{\|\sigma\|<S} |c_{h\sigma}| |D_u^\sigma \mathfrak{F}_\eta(x_h)|.$$

Démonstration. On a

$$\eta(F) = \eta(\theta) + \sum_{h=1}^{H} \sum_{\|\sigma\|<S} c_{h\sigma}\eta((u\cdot z)^\sigma e^{x_h z});$$

mais le lemme 7.4 permet d'écrire

$$\eta((u\cdot z)^\sigma e^{x_h z}) = D_u^\sigma \mathfrak{F}_\eta(x_h),$$

d'où le résultat. ∎

On retrouve le lemme 6.1 en prenant pour $(u_1, \ldots, u_s)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$ (avec $s = n$), et $H = 1$, $x_1 = 0$; on choisit enfin pour φ le développement de Taylor de F à l'origine, tronqué à l'ordre S.

Pour appliquer le lemme 7.8, il faut encore savoir approcher une fonction analytique F par un polynôme exponentiel φ, et cela peut être fait en utilisant un lemme d'interpolation [M] (par dualité, c'est-à-dire en appliquant le lemme 7.6, dans le cas des polynômes exponentiels, le lemme de zéros de [P] donne directement un lemme d'interpolation au sens de [M]).

Montrons ensuite que le lemme 6.5 est une conséquence du lemme 2.6. Notons φ_λ la transformée de Fourier–Borel de η_λ, $\varphi_{\lambda\tau}$ celle de $\eta_{\lambda\tau}$, et $f_{\lambda\tau}$ celle de $\mu_{\lambda\tau}$. Désignons par $v_1, \ldots, v_n$ (resp. $w_1, \ldots, w_t$) les vecteurs lignes de la matrice représentant π (resp. p) dans les bases canoniques, et par $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) le sous-espace de $\mathbf{C}^d$ qu'ils engendrent. Enfin soit $\mathcal{L}$ l'application transposée de l'injection de $\mathcal{E}$ dans $\mathbf{C}^n$.

Grâce au lemme 7.4, on voit que l'hypothèse

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \eta_\lambda(p^\tau \cdot (F \circ \pi))$$

du lemme 6.5 se traduit par

$$\varphi_{\lambda\tau}(z) = D_{\mathcal{W}}^\tau \varphi_\lambda(v_1 z_1 + \cdots + v_n z_n),$$

tandis que l'hypothèse

$$\eta_{\lambda\tau}(F) = \sum_{j=1}^{J} \mu_{\lambda\tau j}((D^{\sigma_{\lambda\tau j}}F)|_{\mathcal{E}})$$

s'écrit, en utilisant le lemme 7.5,

$$D_{\mathcal{W}}^\tau \varphi_\lambda(z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n) = \sum_{j=1}^{J} z^{\sigma_{\lambda\tau j}} \cdot (f_{\lambda\tau j} \circ \mathcal{L}(z)).$$

Enfin la matrice $(\eta_{\lambda\tau}(z^\kappa))$ n'est autre que $(D^\kappa \varphi_{\lambda\tau}(0))$. On peut donc utiliser le lemme 2.6 pour obtenir la conclusion souhaitée. ■

Voyons maintenant comment démontrer l'essentiel de la proposition 6.2 (resp. du corollaire 6.6), à l'aide de la proposition 2.3 (resp. du corollaire 2.7). Supposons les hypothèses de la proposition 6.2 satisfaites (avec $|\mathcal{K}|^{3/2}$ remplacé par $|\mathcal{K}|^2$ dans (6.3), ce qui n'a pas grande importance). Nous allons utiliser la proposition 2.3 avec $\vartheta = 1$, $r_j' = 1/R_j$, $R_j' = 1/r_j$ $(1 \le j \le n)$, $V' = V - n$, et $U' = U + n$, de sorte que $R_j'/r_j' = R_j/r_j$ et $U' + V' = U + V$. A chaque fonctionnelle analytique $\eta_{\lambda\alpha}$ nous associons sa transformée de Fourier–Borel $\varphi_{\lambda\alpha}$ définie par

$$\varphi_{\lambda\alpha}(\zeta) = \eta_{\lambda\alpha}(e^{\zeta z}).$$

Ainsi

$$\eta_{\lambda\alpha}(z^\kappa) = D^\kappa \varphi_{\lambda\alpha}(0).$$

L'hypothèse

$$\sum_{\lambda=1}^{L} |\eta_{\lambda\alpha}(F)| \le e^U |F|_r$$

implique

$$\sum_{\lambda=1}^{L} |\varphi_{\lambda\alpha}(\zeta)| \le e^U e^{r_1|\zeta_1| + \cdots + r_n|\zeta_n|}$$

pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$, et en particulier pour $|\zeta| \le R'$. Comme $R_1' r_1 + \cdots + R_n' r_n = n$, on a

$$\sum_{\lambda=1}^{L} |\varphi_{\lambda\alpha}|_{R'} \leq e^{U'}.$$

Soient alors p_λ les entiers fournis par la proposition 2.3, et soit $\eta_\alpha = \sum_\lambda p_\lambda \eta_{\lambda\alpha}$. Pour $|\zeta| = r'$ on a

$$|\Phi_\alpha(\zeta)| = |\mathfrak{F}_{\eta_\alpha}(\zeta)| = |\eta_\alpha(e^{\zeta z})| \leq e^{-V'} = e^{-V} \sup_{|z|=R} |e^{\zeta z}|,$$

c'est-à-dire que la relation

$$|\eta_\alpha(F)| \leq e^{-V}|F|_R$$

est bien satisfaite pour toutes les fonctions F de la forme $F(z) = e^{\zeta z}$ avec $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$, $|\zeta_j| = 1/R_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

Utilisons maintenant le lemme 6.1, en majorant $|\eta(z^\kappa)| = |D^\kappa \mathfrak{F}_\eta(0)|$ par $R^\kappa \kappa!\, |\mathfrak{F}_\eta|_{r'}$, et $\sum_\kappa |a_\kappa| \kappa!/r'^\kappa$ par $(\sum_\kappa \kappa!^2)^{1/2}|F|_R$:

$$|\eta_\alpha(F)| \leq \left\{ |\eta_\alpha|_r (1 + \sqrt{|\mathcal{K}|}) \max_{1\leq j\leq n} \left\{ \left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j} \right\} + \left(\sum_{\kappa\in\mathcal{K}} \kappa!^2 \right)^{1/2} e^{V'} \right\} |F|_R.$$

Mais

$$|\eta_\alpha|_r \leq \sum_{\lambda=1}^{L} |\eta_{\lambda\alpha}|_r e^{\Delta} \leq e^{U+V},$$

donc

$$|\eta_\alpha|_r (1 + \sqrt{|\mathcal{K}|}) \left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j} \leq \frac{1}{2} e^{-V}.$$

Ainsi on trouve

$$|\eta_\alpha(F)| \leq \left(\frac{1}{2} + e^n \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{K}} \kappa!^2 \right)^{1/2} \right) e^{-V}|F|_R,$$

pour toute $F \in H(\mathfrak{D})$. On peut raffiner cette majoration en appliquant le lemme 7.8 plutôt que 6.1, mais en tout cas la proposition 6.2 nous donne le résultat plus précis

$$|\eta_\alpha(F)| \leq e^{-V}|F|_R.$$

Cette discussion montre que les démonstrations dans [W] de résultats de transcendance concernant des groupes algébriques non supposés linéaires font intervenir des polynômes exponentiels! D'autre part cette dualité a déjà été utile pour la mise au point des énoncés de chacune des deux parties de ce texte.

8. Exemples

Le résultat principal est le théorème 8.3, qui donne l'existence d'une fonctionnelle analytique, combinaison linéaire de dérivées en des points de $\mathbf{C}^n$ (cf. (7.7)).

On l'obtient en considérant le cas particulier du corollaire 6.6 dans lequel les fonctionnelles analytiques $\eta_{\lambda\tau}$ sont de la forme $F \mapsto D^\sigma F(x)$ (pour certaines dérivées D^σ et certains points $x \in \mathbf{C}^n$ dépendant de λ et τ). On construit ainsi une fonctionnelle auxiliaire, et sa transformée de Fourier–Borel est, essentiellement, la fonction auxiliaire du théorème 3.4.

(a) *Un calcul préliminaire*

Commençons par majorer $|(d/dz)^\sigma(z^\tau G(z))_{z=x}|$ pour σ et τ entiers positifs, $x \in \mathbf{C}$, et G fonction analytique dans un disque $|z| \le r$ du plan complexe, avec $r > |x|$. On a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^\sigma (z^\tau G(z))_{z=x} = \sum_{\mu=0}^{\min\{\sigma,\tau\}} \frac{\sigma!\,\tau!}{\mu!\,(\sigma-\mu)!\,(\tau-\mu)!}\, x^{\tau-\mu}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\sigma-\mu} G(x).$$

On majore, grâce aux inégalités de Cauchy, $|(d/dz)^{\sigma-\mu}G(x)|$ par $(\sigma-\mu)!\,r_1^{-\sigma+\mu}|G|_r$, pour $0 < r_1 \le r - |x|$. Si on majore la somme sur μ en prenant $0 \le \mu \le \tau$, on trouve la borne supérieure

$$\frac{\sigma!}{r_1^\sigma}\sum_{\mu=0}^{\tau}\frac{\tau!}{\mu!\,(\tau-\mu)!}\,|x|^{\tau-\mu}r_1^\mu|G|_r = \frac{\sigma!}{r_1^\sigma}\,(|x| + r_1)^\tau|G|_r.$$

Si on majore en prenant $0 \le \mu \le \sigma$, en utilisant l'inégalité $\tau!\,(\sigma-\mu)!/(\tau-\mu)! \le \sigma!\,\tau^\mu$, on trouve la borne

$$\frac{\sigma!}{r_1^\sigma}\sum_{\mu=0}^{\sigma}\frac{\sigma!}{\mu!\,(\sigma-\mu)!}\,|x|^{\tau-\mu}(\tau r_1)^\mu|G|_r = \frac{\sigma!}{r_1^\sigma}\,|x|^{\tau-\sigma}(|x| + \tau r_1)^\sigma|G|_r.$$

Donc, pour $r \ge |x| + r_1$, on a

$$(8.1)\qquad \left|\left(\frac{d}{dz}\right)^\sigma (z^\tau G(z))_{z=x}\right| \le \frac{\sigma!}{r_1^\sigma}\,|x|^\tau \min\left\{\left(1+\frac{r_1}{|x|}\right)^\tau, \left(1+\frac{\tau r_1}{|x|}\right)^\sigma\right\}|G|_r.$$

Nous utiliserons cette majoration au paragraphe 9. En voici une extension en plusieurs variables.

Lemme 8.2. *Soient G une fonction analytique dans un polydisque $\{|z_i| \le r;\ 1 \le i \le d\}$ de $\mathbf{C}^d$, et $x, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t$ des éléments de $\mathbf{C}^d$. Soient $\sigma \in \mathbf{N}^s$ et $\tau \in \mathbf{N}^t$, soient X, r_1 deux nombres positifs avec $X \ge |x|$, $r \ge |x| + r_1$, et soient U, W deux nombres ≥ 0 vérifiant $U \ge |u|$ et $W \ge |w|$. Alors*

$$|D_u^\sigma((w\cdot\zeta)^\tau G(\zeta))_{\zeta=x}| \le \sigma!\,(dXW)^{\|\tau\|}\left(\frac{sU}{r_1}\right)^{\|\sigma\|}\min\left\{\left(1+\frac{\|\tau\|r_1}{sX}\right)^{\|\sigma\|}, \left(1+\frac{\|\sigma\|r_1}{sX}\right)^{\|\tau\|}\right\}|G|_r.$$

Démonstration. Pour $\sigma = 0$ la majoration est banale (et on peut prendre $r = |x|$). Supposons donc $\|\sigma\| > 0$.

En développant en série de Taylor à l'origine la fonction $(fg)(\zeta u + y)$ comme dans la démonstration du lemme 3.1, on trouve la formule de Leibniz

$$D_u^\sigma(fg) = \sum_{\sigma'+\sigma''=\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma'!\sigma''!} (D_u^{\sigma'}f)(D_u^{\sigma''}g),$$

où σ' et σ'' décrivent $\mathbf{N}^s$. Utilisant le lemme 3.1 (et adoptant les mêmes abus de notations que dans sa démonstration), on obtient

$$D_u^\sigma((w\cdot\zeta)^\tau G(\zeta))_{\zeta=x}$$
$$= \sum_{\sigma'+\sigma''=\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma'!\sigma''!} \sum_\kappa \sum_\rho \frac{|\rho|!}{(|\rho|-|\kappa|)!} \frac{\sigma'!}{\kappa!} \frac{\tau!}{\rho!} u^\kappa w^\rho x^{|\rho|-|\kappa|} D_u^{\sigma''}G(x).$$

Comme dans la démonstration du lemme 3.3, le seul but de ce calcul explicite est de constater que le nombre considéré est une combinaison linéaire, à coefficients ≥ 0, des quantités

$$u^\kappa w^\rho x^{\rho_1+\cdots+\rho_t-\kappa_1-\cdots-\kappa_s} D_u^{\sigma''}G(x).$$

On majore $|D_u^{\sigma''}G(x)|$ en utilisant (1.3):

$$|D_u^{\sigma''}G(x)| \leq \sigma''! R^{-\|\sigma''\|} \sup\{|G(\zeta)|; |\zeta| \leq |x| + sRU\}.$$

On prend $R = r_1/sU$, de telle sorte que $|x| + sRU \leq r$, et on majore $\sigma''!$ par $\sigma!$. On obtient ainsi la borne

$$\sum_{\sigma'+\sigma''=\sigma} \sum_\kappa \sum_\rho \frac{|\rho|!}{(|\rho|-|\kappa|)!} \frac{\sigma!^2}{\kappa!\sigma''!} \frac{\tau!}{\rho!} U^{\|\sigma'\|} W^{\|\tau\|} X^{\|\tau\|-\|\sigma'\|} (sU/r_1)^{\|\sigma''\|} |G|_r.$$

On refait exactement le même calcul, en prenant $G^\circ(\zeta) = e^{y^\circ\zeta}$, avec

$$u_1^\circ = \cdots = u_s^\circ = (U,\ldots,U), \qquad w_1^\circ = \cdots = w_t^\circ = (W,\ldots,W),$$

et

$$x^\circ = (X,\ldots,X), \quad y^\circ = (Y,\ldots,Y), \quad Y = s/dr_1.$$

Comme $|D_{u^\circ}^{\sigma''}G^\circ(x^\circ)|$ est alors égal à

$$(u^\circ\cdot y^\circ)^{\sigma''} G^\circ(x^\circ) = (dUY)^{\|\sigma''\|} e^{dXY} = (sU/r_1)^{\|\sigma''\|} e^{sX/r_1},$$

il en résulte que la borne trouvée ci-dessus pour $D_u^\sigma((w\cdot\zeta)^\tau G(\zeta))_{\zeta=x}$ est égale à

$$\sigma! e^{-sX/r_1} D_{u^\circ}^\sigma((w^\circ\cdot\zeta)^\tau e^{y^\circ\zeta})_{\zeta=x^\circ} |G|_r.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 3.3. ∎

(b) *Un exemple de fonctionnelle auxiliaire*

Théorème 8.3. *Soient s, f, t des nombres entiers ≥ 0, d, n, m, D, T, S, H des nombres entiers positifs, Δ, U, V, r, r_1, R, ρ des nombres réels positifs, $\xi_{\delta\sigma h}$*

$(0 \le \delta \le D$, $\sigma \in \mathbf{N}^s$, $\|\sigma\| < S$, $1 \le h \le H)$ des nombres complexes, et $u_1, \ldots, u_s$ des éléments de $\mathbf{C}^d$. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = f$, *et $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension m. On choisit une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{V}$ et une base $(w_1, \ldots, w_t)$ de $\mathcal{W}$, et on désigne par $\pi : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^n$ l'application linéaire $\zeta \to (v_1\zeta, \ldots, v_n\zeta)$. Enfin soient $x_1, \ldots, x_H$ des éléments de $\mathbf{C}^d$ dont les images par π appartiennent à $\mathcal{E}$. On suppose*

$$U + V \ge 5, \quad R \ge er, \quad r \ge d|v|(|x| + r_1),$$

$$(1 + \rho)^n (U + V)^n \left(\frac{R}{r}\right)^{T+m-1} e^{\Delta+2} \le e^{\rho(U+V)},$$

$$5(1 + \rho)^{3n/2}(U + V)^{3n/2} T^t e^{\Delta} \le e^{\rho(U+V)},$$

$$\min\left\{\left(1 + \frac{(T-1)r_1}{s|x|}\right)^{S-1}, \left(1 + \frac{(S-1)r_1}{s|x|}\right)^{T-1}\right\} \max\{1, d|w||x|\}^{T-1}.$$

$$\left(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=1}^{H} |\xi_{\delta\sigma h}| \sigma! \, (s|u|/r_1)^{\|\sigma\|}\right) \le e^U,$$

et

$$2(1 + \rho)^{m+1} s! \, (U + V)^{m+1} (T + t - f - 1)^{t-f}$$
$$\le m! \, (n - m)! \, (t - f)! D\Delta H (S + n - m)^{s-n+m} \left(\log \frac{R}{r}\right)^m.$$

Alors il existe des entiers rationnels $q_{\delta\sigma h}$ $(1 \le \delta \le D$, $\sigma \in \mathbf{N}^s$, $\|\sigma\| < S$, et $1 \le h \le H)$, non tous nuls, de valeurs absolues majorées par e^{Δ}, tels que, pour toute fonction F analytique dans le disque $|z| \le R$ de $\mathbf{C}^n$, et pour tout $\tau \in \mathbf{N}^t$ avec $\|\tau\| < T$, on ait

$$\left|\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=1}^{H} q_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} D_u^{\sigma}((w\cdot\zeta)^{\tau} \cdot (F \circ \pi(\zeta)))_{\zeta=x_h}\right| \le e^{-V}|F|_R.$$

Démonstration. On utilise le corollaire 6.6, en remplaçant l'indice λ par (δ, σ, h), pour les fonctionnelles

$$\eta_{\delta\sigma h\tau}(F) = \xi_{\delta\sigma h} D_u^{\sigma}((w\cdot\zeta)^{\tau} \cdot (F \circ \pi(\zeta)))_{\zeta=x_h}.$$

Le lemme 8.2 permet de vérifier

$$\max_{\|\tau\|<T} \left|\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=1}^{H} \eta_{\delta\sigma h\tau}(F)\right| \le e^U |F|_r. \qquad \blacksquare$$

(c) *Une fonction auxiliaire pour les groupes linéaires*

Corollaire 8.4. *Soient s, f, t des nombres entiers ≥ 0, d, n, m, D, T, S, H des nombres entiers positifs, Δ, r, R, V des nombres réels positifs, $\xi_{\delta\sigma h}$ $(0 \le \delta \le$*

D, $\sigma \in \mathbf{N}^s$, $\|\sigma\| < S$, $1 \le h \le H$) des nombres complexes, et $u_1, \ldots, u_s$ des éléments de $\mathbf{C}^d$. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = f$, et soit $\mathcal{X}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^d$ avec $\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{X}^{\perp}) = m$. On choisit une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{V}$ et une base $(w_1, \ldots, w_t)$ de $\mathcal{W}$. Enfin soient $x_1, \ldots, x_H$ des éléments de $\mathcal{X}$. On suppose

$$U + V \ge 13n^2, \quad R \ge er, \quad r \ge d|v\|x| + d/nR,$$

$$e^{\Delta} \max\left\{ \left(\frac{R}{r}\right)^{T+m-1}, T^t \right\} \le e^{(U+V)/2},$$

$$\left(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=1}^{H} |\xi_{\delta\sigma h}|\sigma! \right) \min\left\{ \left(1 + \frac{T-1}{ns|v||x|R}\right)^{S-1}, \left(1 + \frac{S-1}{ns|v||x|R}\right)^{T-1} \right\}.$$

$$\max\{1, ns|v||u|R\}^{S-1} \max\{1, d|w||x|\}^{T-1} e^{nd|v||x|R+d} \le e^U,$$

et

$$2^{m+2}s!\,(U+V)^{m+1}(T+t-f-1)^{t-f}$$

$$\le m!\,(n-m)!\,(t-f)!\,D\Delta H(S+n-m)^{s-n+m}\left(\log \frac{R}{r}\right)^m.$$

Alors il existe des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($1 \le \delta \le D$, $\sigma \in \mathbf{N}^s$, $\|\sigma\| < S$, et $1 \le h \le H$), non tous nuls, de valeurs absolues majorées par e^{Δ}, tels que la fonction Φ de d variables définie par

$$\Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} (u \cdot \zeta)^{\sigma} e^{x_h \zeta}$$

vérifie

$$|D_w^{\tau} \Phi(z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n)| \le e^{-V}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^n$ et tout $\tau \in \mathbf{N}^t$ avec $|z| \le r$, $\|\tau\| < T$.

Démonstration. On applique le théorème 8.3, avec $r_1 = 1/n|v|R$, et r, R, U, V remplacés respectivement par

$$\tilde{r} = d(|v||x| + 1/nR), \quad \tilde{R} = \frac{\tilde{r}}{r} R, \quad \tilde{U} = U - n\tilde{r}R, \quad \tilde{V} = V + nr\tilde{R}.$$

Ainsi on a $\tilde{R}/\tilde{r} = R/r$ et $\tilde{U} + \tilde{V} = U + V$. Pour $n \ge 1$ on a $7n^2 > (3\log 26 - 6)n + 2\log 5$ et $\log n \le n - 1$, donc $13n^2 > 6n\log n + 3n\log 26 + 2\log 5$. Ainsi, pour $x \ge 13n^2$, on a $x > 3n\log x + 3n\log 2 + 2\log 5$. A plus forte raison on a aussi $x > 2n\log x + 2n\log 2 + 4$. Cela permet de majorer $5 \cdot 2^{3n/2}(U+V)^{3n/2}$ ainsi que $e^2 2^n (U+V)^n$ par $e^{(U+V)/2}$, et par conséquent de prendre $\rho = 1$. Les hypothèses du théorème 8.3 étant vérifiées, prenons la transformée de Fourier–Borel de la fonctionnelle analytique η ainsi construite; avec les notations du corollaire 8.4, fixons $z \in \mathbf{C}^n$ avec $|z| \leq r$, et on considérons la fonction $F_z(Z) = e^{zZ}$, $Z \in \mathbf{C}^n$; on a

$$|\mathfrak{F}_\eta(z)| = |\eta(F_z)| \leq e^{-\tilde{V}}|F_z|_{\tilde{R}} \leq e^{-V}.$$

Mais les lemmes 7.4 et 7.5 permettent d'écrire

$$\mathfrak{F}_\eta(z) = D_w^\tau \Phi(z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n). \qquad \blacksquare$$

A quelques détails près, on retrouve donc le théorème 3.4.

9. Fonctionnelles en une variable

Nous écrivons (corollaire 9.1) ce que donne le théorème 8.3 quand on s'y restreint à des fonctionnelles analytiques en une variable de la forme $F \mapsto D^t F(y)$. Nous comparons ensuite avec ce que l'on déduit du paragraphe 4 dans ce cas particulier.

Voici donc une conséquence de la proposition 6.2 dans le cas $n = 1$.

Corollaire 9.1. *Soient T et S deux entiers positifs, Δ, X, U, V, r_0, r_1, et R_0 des nombres réels positifs, $\mathcal{A}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{C}$, et, pour chaque $a \in \mathcal{A}$, soit $\mathcal{S}_a$ un sous-ensemble de $\{0,1,\ldots S-1\}$ ayant $s(a)$ éléments. On pose $N = \sum_{a\in\mathcal{A}} s(a)$. Enfin soient $\xi_{\delta\sigma a}$ $(1 \leq \delta \leq D,\ a \in \mathcal{A},\ \sigma \in \mathcal{S}_a)$ des nombres complexes. On suppose*

$$X \geq \max_{a\in\mathcal{A}} |a|, \quad X \geq 1, \quad U + V \geq 60,$$

$$r_0 \geq r_1 + \max_{a\in\mathcal{A}} |a|, \quad e \leq (R_0/r_0)^T \leq e^{(U+V)/2}, \quad \Delta \leq \frac{1}{3}(U+V),$$

$$X^{T-1}\min\left\{\left(1+\frac{r_1}{X}\right)^{T-1}, \left(1+\frac{(T-1)r_1}{X}\right)^{S-1}\right\}\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_a}|\xi_{\delta\sigma a}|\sigma!\, r_1^{-\sigma} \leq e^U,$$

et

$$8(U+V)^2 \leq ND\Delta\log(R_0/r_0).$$

Alors il existe des entiers rationnels $q_{\delta\sigma a}$ $(\sigma \in \mathcal{S}_a,\ a \in \mathcal{A},\ 1 \leq \delta \leq D)$, vérifiant

$$0 < \max_{\delta,\sigma a} |q_{\delta\sigma a}| \leq e^\Delta$$

et

$$\max_{0\leq\tau<T}\left|\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_a} q_{\delta\sigma a}\xi_{\delta\sigma a}\left(\frac{d}{dz}\right)^\sigma (z^\tau F(z))_{z=a}\right| \leq e^{-V}|F|_{R_0}$$

pour toute fonction F analytique dans $|z| \leq R_0$.

Démonstration. On va utiliser la proposition 6.2 et la remarque 6.4 avec $n = 1$. On remplace l'indice λ par (δ, σ, a) avec $a \in \mathcal{A}$, $\sigma \in \mathcal{S}_a$, et $1 \le \delta \le D$, et on remplace α par τ, $0 \le \tau < T$. Donc $L = DN$ et $A = T$. Posons

$$\eta_{\delta\sigma a\tau}(F) = \xi_{\delta\sigma a}(d/dz)^{\sigma}(z^{\tau}F(z))_{z=a}.$$

En appliquant (8.1), on obtient

$$\max_{0 \le \tau < T} \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_a} |\eta_{\delta\sigma a\tau}(F)| \le e^{U}|F|_{r_0}.$$

On définit K_0 comme le plus petit entier positif vérifiant

$$K_0 \ge \Delta + U + V + 1 + \log K_0;$$

ainsi $K_0 - 1 \le \Delta + U + V + 1 + \log(K_0 - 1)$, et, comme $x \ge 10 \log x$ pour $x \ge 36$, on a, grâce aux hypothèses $U + V \ge 60$ et $\Delta \le (U + V)/3$,

$$K_0 - 1 \le \frac{10}{9}(\Delta + U + V + 1) \le \frac{3}{2}(U + V).$$

De plus, comme $K_0 - 1 + T\log(R_0/r_0) \le 2(U + V)$, on peut prendre $\rho' = 1$. Enfin, pour $x \ge 11$, on a $\log 5 + (3/2)\log x < 4(x + 1)/9$, donc $5K_0^{3/2} < e^{2(U+V)/3}$, et on peut prendre $\rho = 1$. ∎

Remarque. Dans les conditions du corollaire 9.1, on a aussi, pour pour tout $z_0 \in \mathbf{C}$ et toute fonction F analytique dans $|z| \le R_0 + |z_0|$ (resp. dans $|z| \le R_0|z_0|$),

$$\left| \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{a \in A} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_a} q_{\delta\sigma a}\xi_{\delta\sigma a}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\sigma}(z^{\tau}F(z + z_0))_{z=a} \right| \le e^{-V}|F|_{R_0+|z_0|},$$

(resp.

$$\left| \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{a \in A} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_a} q_{\delta\sigma a}\xi_{\delta\sigma a}\left(\frac{d}{dz}\right)^{\sigma}(z^{\tau}F(zz_0))_{z=a} \right| \le e^{-V}|F|_{R_0|z_0|});$$

il suffit pour le voir d'appliquer le corollaire 9.1 à la fonction $F(z + z_0)$ (resp. $F(zz_0)$).

La démonstration du corollaire 9.1 présente une différence essentielle avec celle du corollaire 4.2: dans la première partie (construction de fonctions auxiliaires), on applique le principle des tiroirs (lemme de Thue–Siegel 2.1) à un système d'inégalités dépendant des coefficients de Taylor de F à l'origine, tandis que les $q_{\delta\sigma a}$ du corollaire 9.1 ne dépendent évidemment pas de F. Cela explique aussi que les résultats ne soient comparables que dans le cas particulier $T = 1$ (on ne perdrait d'ailleurs pas trop à se limiter à ce cas particulier).

Une aute différence entre le corollaire 9.1 et le corollaire 4.2 vient de la contribution du terme $\log(R_0/r_0)$ (resp. $\log(R/r)$) dans l'hypothèse principale. En posant $R_0 = R + r_0 - r$, on voit que, pour l'essentiel, l'estimation du corollaire 4.2 est plus fine que celle du corollaire 9.1 suivant que r est inférieur ou non à r_0.

Quand on écrit la transformée de Fourier–Borel de la fonctionnelle construite dans le corollaire 9.1, on trouve la variante suivante du corollaire 4.3.

Corollaire 9.2. *Soient S, H, T, D des entiers positifs, Δ, r, r_1, R, U, V, X des nombres réels positifs, et $x_1, \ldots, x_H$, $\xi_{\delta\sigma h}$ $(1 \le \delta \le D, 0 \le \sigma < S, 1 \le h \le H)$ des nombres complexes. On suppose*

$$X \ge \max_{1 \le h \le H} |x_h|, \quad X \ge 1, \quad R \ge er,$$

$$U + V \ge 60, \quad 2T\log(R/r) \le U + V, \quad 3\Delta \le U + V,$$

$$\left(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\sigma=0}^{S-1} \sum_{h=1}^{H} |\xi_{\delta\sigma h}| \sigma! r_1^{-\sigma}\right) \min\left\{\left(1 + \frac{r_1}{X}\right)^{T-1}, \left(1 + \frac{(T-1)r_1}{X}\right)^{S-1}\right\} \tag{9.3}$$

$$X^{T-1} e^{R(X+r_1)} \le e^U,$$

et

$$8(U+V)^2 \le D\Delta SH \log(R/r).$$

Alors il existe des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ $(1 \le \delta \le D, 0 \le \sigma < S, 1 \le h \le H)$, non tous nuls, de valeurs absolues majorées par e^{Δ}, tels que, pour tout $y \in \mathbf{C}$ vérifiant $|y| \le r$ et pour tout $\tau = 0, \ldots, T-1$, on ait

$$\left| \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\sigma=0}^{S-1} \sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} \sum_{\mu=0}^{\min\{\tau,\sigma\}} \frac{\tau!}{\mu!(\tau-\mu)!} \frac{\sigma!}{(\sigma-\mu)!} y^{\sigma-\mu} x_h^{\tau-\mu} e^{x_h y} \right| \le e^{-V}.$$

Démonstration. On utilise le corollaire 9.1 pour les fonctions $F(z) = e^{yz}$, avec $r_0 = X + r_1$, $R_0 = Rr_0/r$, et U, V remplacés respectivemet par $U - Rr_0$ et $V + Rr_0$, ce qui ne change par $U + V$. ∎

Des conséquences arithmétiques de ces constructions seront développées ailleurs.

References

[L] M. Laurent, *Déterminant d'interpolation et théorème de Gel'fond–Schneider*, manuscript.

[LG] P. Lelong and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grundlehr. Math. Wiss, **282**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[M] D. W. Masser, *Interpolation on group varieties*, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Luminy 1982, Birkhäuser Verlag, P.M. **31** (1983), 151–171.

[P] P. Philippon, *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355–383, et **115** (1987), 397–398.

[W] M. Waldschmidt, *Dépendance de logarithmes dans les groupes algébriques*, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Luminy 1982, Birkhäuser Verlag, P.M. **31** (1983), 289–328.

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Problèmes Diophantiens, C.N.R.S., U.R.A. 763
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie
F-75231 PARIS Cedex 05, France

(Reçu le 24 Avril 1990)