Leonardo da Pisa, dit Fibonacci

Une mise en parallèle passionante entre mathématiques et plantes : la suite de Fibonacci, le nombre d'or et la beauté des spirales de la botanique... Intriguant !
Michel Waldschmidt, mathématicien, nous fait découvrir les propriétés surprenantes de nombres comme la suite de Fibonacci ou le nombre d'or que l'on rencontre souvent dans la nature... si l'on sait regarder !

1 En effeuillant la marguerite

Je t'aime
Un peu
Beaucoup
Passionnément
A la folie
Pas du tout

Vous est-il déjà arrivé de terminer avec "pas du tout"? C'est peu probable ! En effet ce qui intervient quand on effeuille une marguerite en récitant cette comptine est le reste de la division par 6 du nombre de pétales, et ce nombre n'est pas aléatoire. On trouve beaucoup plus de marguerites ayant un nombre de pétales égal à 34, 55 ou 89 que d'autres valeurs. Le reste de la division par 6 de ces nombres est 4, 1 et 5 respectivement, ce qui fait terminer par "passionnément" pour 34, "je t'aime" pour 55 et "à la folie" pour 89.

La science qui étudie la disposition des feuilles ou des fleurs est la phyllotaxie. Elle ne prétend pas donner une loi universelle, mais seulement souligner une fascinante prédominance des valeurs précédentes.

Les nombres que nous venons de citer interviennent également dans l'arrangement des écailles qui s'alignent le long des hélices formées par les pommes de pin ; on les retrouve en observant les choux Romanesco, les ananas, les pieds de céleri, les spirales formées par les épines des aubépines, les fleurs de tournesol ou de cactus, certains coquillages ou encore des fossiles comme les ammonites.

2 Généalogie

Combien avons-nous d'ancêtres? Chacun d'entre nous a un père et une mère, ce qui fait deux parents. Nous avons quatre grands-parents, huit arrière-grands-parents,... Le nombre d'ancêtres double à chaque fois qu'on monte d'une génération :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...

C'est une loi exponentielle. Ainsi n générations au-dessus de nous, il y a 2^n ancêtres. Est-ce une loi universelle ? Plus ou moins. Au bout d'un temps fini le nombre 2^n dépasse le nombre d'êtres humains ayant existé, donc les 2^n ancêtres en question ne sont pas tous distincts.
Si on compte environ 25 ans par génération, chacun devrait avoir environ 2^{80} ancêtres directs ayant vécu depuis 2 000 ans, ce qui fait plus de 10^{24} personnes (1 suivi de 24 zéros). Cela n'est possible que parce que beaucoup d'entre eux apparaissent plusieurs fois dans cet arbre généalogique.

De plus cette loi ne gouverne pas la généalogie de tous les êtres sexués. Par exemple chez les abeilles les oeufs fécondés donnent naissance à des femelles, alors que les oeufs non fécondés produisent des mâles. Par conséquent une abeille mâle a une mère mais pas de père, alors qu'une femelle a un père et une mère. Une femelle a donc deux parents, elle a ensuite trois grands-parents, à savoir deux femelles et un mâle; elle a aussi cinq arrière-grands-parents, trois femelles et deux mâles. Le nombre de femelles à une génération est égal à la population totale de la génération précédente (chaque abeille ayant une mère), tandis que le nombre de mâles est égal au nombre de femelles de la génération précédente, donc à la population totale deux générations avant.

En partant d'une abeille mâle et en remontant les générations, le nombre d'abeilles que l'on trouve est

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

chacun des termes (à partir du troisième) étant égal à la somme des deux précédents.

3 Fibonacci

La suite qui apparaît ainsi est la **suite de Fibonacci :**
$F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$,

$F_9=34$, $F_{10}=55$, $F_{11}=89$, $F_{12}=144$,...
$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geq 3)$.

C'est le nom sous lequel est connu **Leonardo Pisano (1170-1250), de la famille Bonacci de Pise**. Né en Italie, il fut éduqué en Afrique du Nord. Son père, Guilielmo, y était diplomate : il représentait les marchands de la

République de Pise qui commerçaient à Bougie. C'est là que Fibonacci a appris les mathématiques ; il a beaucoup voyagé avec son père, en Égypte, Syrie, Grèce, Sicile et en Provence. Ces voyages lui ont donné l'occasion de découvrir le système décimal indien ainsi que les symboles utilisés encore maintenant sous le nom de chiffres arabes, et c'est lui qui nous a transmis ces connaissances. Et après ces nombreux voyages, il revient à Pise vers 1200 et rédige ce qu'il a appris, en y incorporant les résultats originaux de ses propres recherches.

Un des problèmes étudiés dans son livre Liber Abaci (1202) donne lieu à ce qui est connu maintenant sous le nom de "suite de Fibonacci":

➔ Un homme place un couple de lapins dans un enclos. Combien de couples de lapins y aura-t-il au bout d'un an si chaque mois chaque couple donne naissance à un nouveau couple, qui se reproduit à partir du second mois ?

Il s'agit d'un modèle très simplifié de croissance d'une population. A la fin du premier mois notre couple de lapins est trop jeune pour procréer, c'est seulement un mois plus tard qu'il va donner naissance chaque mois à un nouveau couple. Appelons "jeune" un couple qui vient de naître, et "adulte" un couple qui a plus d'un mois. Le premier mois il y a donc un unique couple, qui est jeune. Le second mois il y a un unique couple, qui est adulte et prêt à procréer. Le troisième mois notre couple adulte est toujours là et il y a en plus un couple jeune. Le quatrième mois nous avons deux couples adultes et un jeune. Chaque mois pour savoir combien il y a de couples adultes on ajoute le nombre de couples adultes et de couples jeunes du mois précédent, et pour savoir combien il y a de couples jeunes on compte seulement combien il y avait de couples adultes le mois précédent.

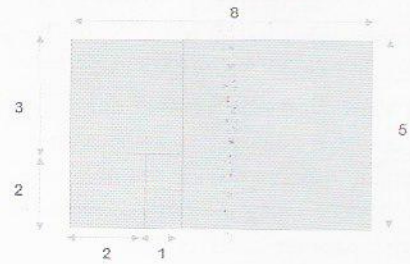
Le nombre de couples est donc donné par la suite de Fibonacci. Pour répondre à la question initiale, il ne reste plus qu'à calculer le 12-ème nombre de Fibonacci, $F_{12}=144$.

Ainsi il y aura 144 couples de lapins au bout d'un an.

Malgré les apparences ce modèle n'est pas si éloigné de certaines réalités. Le démographe Alfred Lotka a développé une théorie des populations stables au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle ; il remarque que si chaque couple engendre un nouveau couple les deux premiers mois seulement, alors le nombre de couples qui naît chaque mois suit encore la loi de Fibonacci. D'autre part dans les pays froids, chaque branche d'un bouleau arctique en crée une autre à partir de sa seconde année d'existence, comme dans le modèle de Fibonacci.

Voici une construction géométrique de la suite de Fibonacci : on met l'un au dessus de l'autre deux carrés de côté 1,

Construction géométrique de la suite de Fibonacci



ce qui fait un rectangle dont les côtés sont 1 et 2. On pose à côté de ce rectangle un carré de côté 2 , ce qui fait un rectangle dont les côtés sont 2 et 3 . On poursuit ainsi : chaque fois qu'on a un rectangle, on en construit un nouveau le complétant par un carré posé sur le grand côté. La suite des longueurs des côtés des carrés ainsi obtenus est la suite de Fibonacci.

4 Le nombre d'or

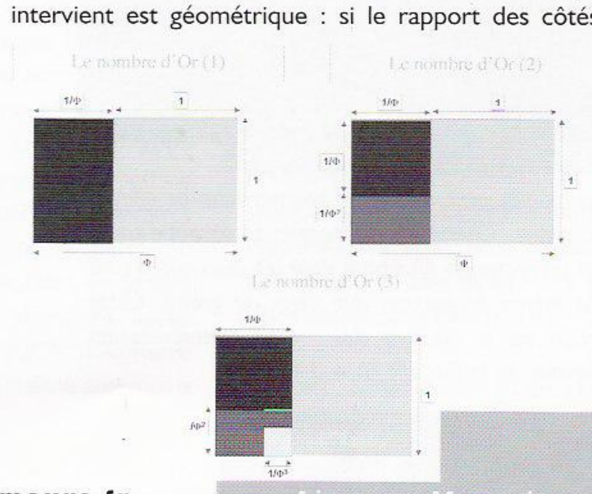
Les rectangles que l'on obtient par cette construction ont pour proportions la suite des quotients $u_n=F_n/F_{n-1}$ de deux nombres de Fibonacci successifs. Cette suite possède des propriétés remarquables. Elle vérifie $u_n=1+1/u_{n-1}$; sa limite est le nombre d'or Φ qui vérifie $\Phi^2=\Phi+1$:

$$\Phi= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887499...$$

Ainsi le taux de croissance mensuel ultime de la population des lapins de Fibonacci est 61,8 %.

Il est facile de calculer F_n grâce à Φ sans avoir besoin de calculer tous les nombres de Fibonacci précédents : en effet F_n est simplement l'entier le plus proche de $\Phi^n/\sqrt{5}$.
Par exemple le nombre de couples de lapins de Fibonacci au bout de 5 ans (60 mois) est l'entier le plus proche de $\Phi^{60}/\sqrt{5}$, qui est F_{60} = 1 548 008 755 920 .

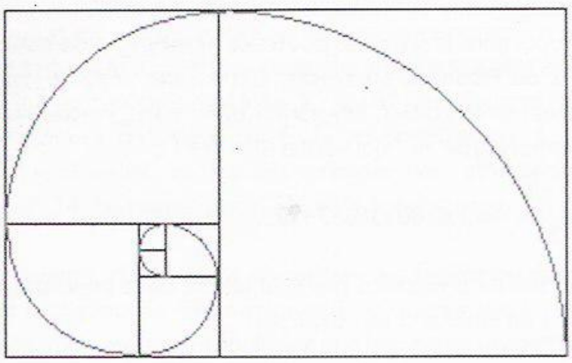
Le nombre d'or apparaît aussi dans la nature, quand on observe les spirales végétales. La raison pour laquelle il intervient est géométrique : si le rapport des côtés d'un

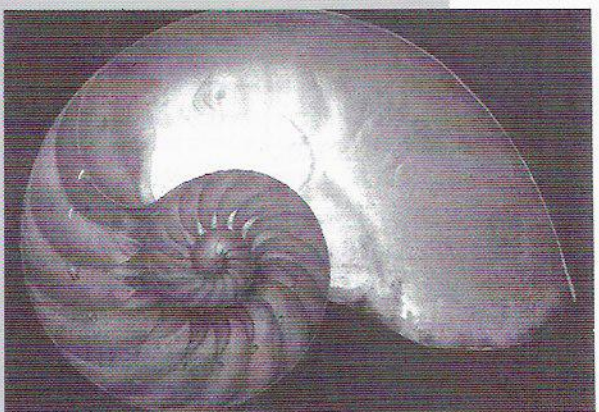


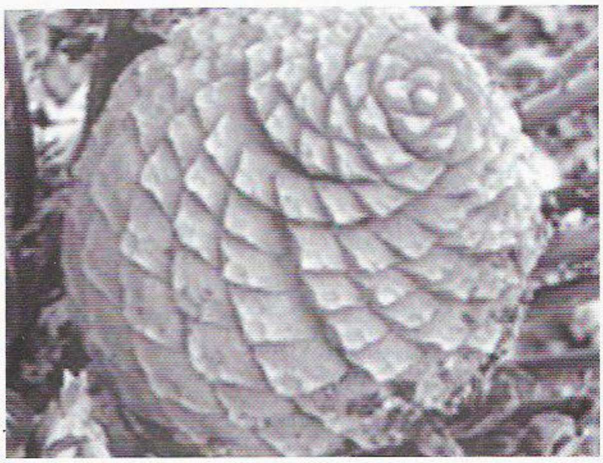
rectangle est égal au nombre d'or, ce rectangle se décompose en un carré et un rectangle plus petit ayant les mêmes proportions : le rapport des côtés est encore le nombre d'or. On peut donc répéter le processus, et si on trace dans chaque carré le quart d'un arc de cercle, on obtient une spirale logarithmique comme celle de l'enroulement régulier d'une ammonite.

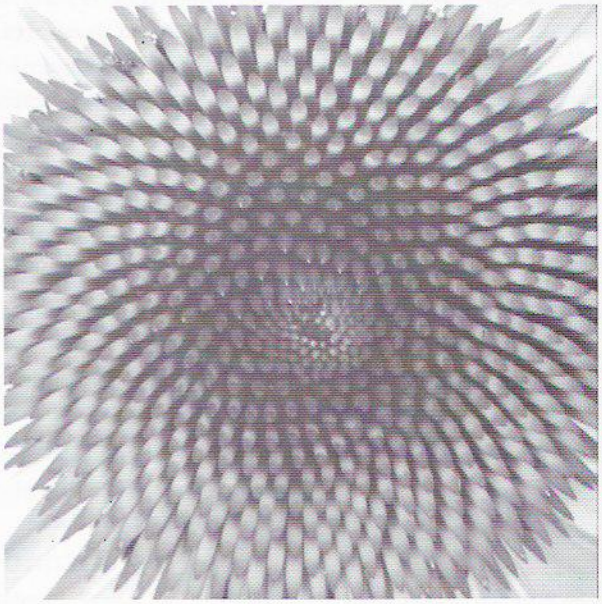
Léonard de Vinci avait déjà observé que la disposition des feuilles sur une tige permet une exposition maximale à la lumière. Cette question a été reprise notamment par Jakob Bernoulli au XVII^{eme} siècle. La phyllotaxie spirale est basée sur des régles géometriques simples qui découlent de la façon dont les cellules s'organisent à chaque division au niveau du méristème apical. Les arrangements spiralés de la marguerite ou du tournesol auraient pour effet d'optimiser l'attraction des abeilles qui transportent le pollen. La phyllotaxie renforce l'idée qu'une grande partie de la morphogenèse est basée sur des régles simples d'auto-organisation.

La suite de Fibonacci et le nombre d'or font l'objet de recherches actuelles dans plusieurs domaines des mathématiques : théorie des nombres, logique mathématique, théorie du langage et systèmes dynamiques. Leurs secrets ne sont pas prêts d'être tous percés.









Une ammonite avec un dessin géometrique de spirale logarithmique. Chacun des rectangles se découpe en un carré et un rectangle plus petit dont les deux côtés sont dans la même proportion que ceux du grand. Cette proportion est le nombre d'or : c'est l'interprétation géometrique de la formule $\Phi = 1 + 1/\Phi$.

Une fleur de marguerite ou de tournesol, une pomme de pin ou un ananas.
(On peut voir 34 spirales dans le sens des aiguilles d'une montre, 21 dans l'autre sens sur la photo du bas, 8 et 13 sur celle du haut. Le nombre de spirales que l'on peut observer dans l'organisation des graines sur une fleur de tournesol, par exemple, dépend de la position de l'observateur par rapport à la fleur).