

## Fractions continues : introduction et applications

*Michel Waldschmidt*

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) France

<http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/>

## Résumé

L'algorithme d'**Euclide** pour calculer le pgcd (plus grand commun diviseur) de deux entiers positifs est un des plus anciens algorithmes mathématiques : il remonte à l'antiquité grecque. Un algorithme qui lui est étroitement associé est celui qui conduit au développement en fraction continue d'un nombre réel, c'est un procédé très efficace pour trouver les meilleures approximations rationnelles d'un nombre réel. Les fractions continues sont omniprésentes, elles permettent de façon générale de résoudre des problèmes concernant des mouvements faisant intervenir deux périodes différentes. C'est ainsi qu'elles apparaissent en théorie des nombres, en analyse complexe, dans la théorie des systèmes dynamiques, ainsi que dans des questions liées à la musique, aux calendriers, aux engrenages. . . Nous mentionnerons certaines de ces applications.

### Quel est le lien entre les questions suivantes ?

Comment établir un calendrier ?

Comment réaliser un planétarium ?

Comment inventer des gammes musicales ?

Comment trouver deux entiers  $x, y$  tels que

$$x^2 - 61y^2 = 1?$$

Comment prouver l'irrationalité de constantes de l'analyse ?

**Réponse :** les fractions continues.

### Combien y a-t-il de jours dans une année ?

Qu'est-ce qu'une année ? Année astronomique (Sidérale, tropicale, anomalistique. . .).

*Une année est le temps mis par la terre pour effectuer une révolution complète dans sa rotation autour du soleil. Pour un observateur sur la terre, cela correspond au temps nécessaire pour que le soleil complète un tour à travers le zodiaque le long de l'écliptique.*

Une année est environ 365,2422 jours.

Une première approximation est

$$365 + \frac{1}{4} = 365,25$$

qui correspondrait à avoir une année bissextile tous les 4 ans.

C'est un petit peu trop.

Une meilleure approximation est

$$365 + \frac{8}{33} = 365,2424\dots$$

## Le calendrier grégorien

Le calendrier grégorien est basé sur un cycle de 400 ans : il y a une année bissextile pour chaque année dont le millésime est un multiple de 4 mais pas de 100, sauf si c'est un multiple de 400.

Le nom fait référence au pape Grégoire XIII, qui a imposé ce calendrier en 1582.



## Le calendrier grégorien

En 400 années, dans le calendrier grégorien, on omet 3 années bissextiles, ce qui donne un nombre de jours égal à  $365 \cdot 400 + 100 - 3 = 146\,097$ .

Comme  $400 = 4(33 \cdot 3 + 1)$ , en 400 ans, le nombre de jours pour une année ayant  $365 + \frac{8}{33}$  jours est

$$\left(365 + \frac{8}{33}\right) \cdot 400 = 365 \cdot 400 + 3 \cdot 32 + \frac{32}{33} = 146\,096.9696\dots$$

## Une petite correction supplémentaire serait nécessaire

En 10 000 ans, le nombre de jours est en réalité

$$365,2422 \cdot 10\,000 = 3\,652\,422$$

alors que le nombre de jours du calendrier grégorien est

$$146\,097 \cdot 25 = 3\,652\,425.$$

Il conviendrait donc d'omettre trois années bissextiles tous les 10 000 ans.

## Approximations de 365,2422

On écrit

$$365,2422 = 365 + \frac{1}{4,1288\dots}$$

La première approximation est  $365 + \frac{1}{4}$ .

On écrit ensuite

$$4,1288\dots = 4 + \frac{1}{7,7628\dots}$$

La seconde approximation est

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29}$$

## Remplacement de 365,2422 par $365 + \frac{8}{33}$

On écrit ensuite

$$7,7628\dots = 7 + \frac{1}{1,3109\dots}$$

La troisième approximation est

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8}} = 365 + \frac{8}{33}$$

En écrivant  $1,3109\dots = 1 + \frac{1}{3,2162\dots}$ , on pourrait continuer et écrire

$$365,2422 = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3,2162}}}}$$

9 / 80

## Fractions continues : notation

On écrit

$$365,2422 = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

La troisième approximation est :

$$[365, 4, 7, 1] = [365, 4, 8] = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8}} = 365 + \frac{8}{33}$$

10 / 80

## Références sur les calendriers

Exercice ; Sur 4000 ans, il y a 6880 vendredis 13 contre 6840 jeudis 13 (ou 6850 lundis ou mardis 13).

Nombre de jours entre deux vendredis 13 : ils sont de 27, 90, 181, 244, 272, 335 ou 426 jours. Donc deux vendredis 13 peuvent être séparés par une durée supérieure à une année. Ce qui s'était produit du 13 août 1999 au 13 octobre 2000.

Hint : voir [Jean-Luc Nothias](#), *Les secrets mathématiques du vendredi 13*, Le Figaro, 12/05/2016.

[V. Frederick Rickey](#), *Mathematics of the Gregorian Calendar*, *The Mathematical Intelligencer* **7** n°1 (1985) 53–56.

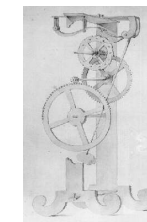
[Jacques Dutka](#), *On the Gregorian revision of the Julian Calendar*, *The Mathematical Intelligencer* **10** n°1 (1988) 56–64.

11 / 80

## Description et réalisation d'un planetarium

*Automati planetarii* de [Christiaan Huygens](#) (1629 –1695) astronome, physicien, probabiliste et horloger.

Huygens a trouvé comment construire des horloges plus précises que celles qui étaient connues à l'époque. Son invention de l'horloge pendulaire a été une percée majeure dans la recherche de processus permettant de connaître l'heure, il en a construit un prototype en 1656.



12 / 80

## La terre et Saturne

Le rapport des angles couverts par la terre et par Saturne est

$$\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858} = 29,425\,448, \dots$$



Ce n'est pas à l'échelle!

## Fraction continue de $77\,708\,431/2\,640\,858$

Le rapport des angles couverts par la terre et par Saturne est

$$\frac{77\,708\,431}{2\,640\,858} = 29,425\,448, \dots = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$$

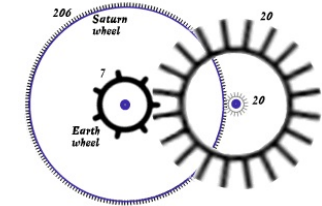
La fraction continue de ce quotient est

$$[29, 2, 2, 1, 5, 1, 4, \dots]$$

and

$$[29, 2, 2, 1] = 29 + \frac{3}{7} = \frac{206}{7}$$

$$\frac{206}{7} = 29,428\,5, \dots$$



## L'algorithme des fractions continues

Soit  $x \in \mathbf{R}$ . On effectue la division euclidienne de  $x$  par 1 :

$$x = [x] + \{x\} \quad \text{avec } [x] \in \mathbf{Z} \text{ et } 0 \leq \{x\} < 1.$$

Si  $x$  n'est pas un entier, alors  $\{x\} \neq 0$ . On pose dans ce cas

$$x_1 = \frac{1}{\{x\}}, \text{ de telle sorte que}$$

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} \quad \text{avec } [x] \in \mathbf{Z} \text{ et } x_1 > 1.$$

Si  $x_1$  n'est pas un entier, on pose  $x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$  :

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} \quad \text{avec } x_2 > 1.$$

## Développement en fraction continue

Posons  $a_0 = [x]$  et  $a_i = [x_i]$  pour  $i \geq 1$ .

Alors

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{\ddots}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

L'algorithme s'arrête après un nombre fini de pas si et seulement si  $x$  est rationnel.

On utilise la notation

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Remarque : si  $a_k \geq 2$ , alors

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k] = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k - 1, 1].$$

# Fractions continues et approximation rationnelle

Pour

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$$

les nombres rationnels de la suite

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

fournissent des approximations rationnelles de  $x$  qui sont les meilleures possibles quand on compare la qualité de l'approximation et la taille du dénominateur.

$a_0, a_1, a_2, \dots$  sont les *quotients partiels*,

$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$  sont les *réduites*.

# Lien avec l'algorithme d'Euclide

Si  $x$  est rationnel,  $x = \frac{p}{q}$ , ce processus n'est autre que l'algorithme de division euclidienne de  $p$  par  $q$  :

$$p = a_0q + r_0, \quad 0 \leq r_0 < q.$$

If  $r_0 \neq 0$ ,

$$x_1 = \frac{q}{r_0} > 1.$$

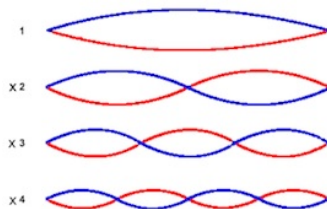


Euclide :  
(~ -306, ~ -283)

$$q = a_1r_0 + r_1, \quad x_2 = \frac{r_0}{r_1}.$$

# Harmoniques

Les harmoniques successives d'une note de fréquence  $n$  sont les vibrations de fréquences  $2n, 3n, 4n, 5n, \dots$



# Octaves

Les octaves successives d'une note de fréquence  $n$  sont les vibrations de fréquences  $2n, 4n, 8n, 16n, \dots$ . L'oreille reconnaît deux notes qui sont à l'octave l'une de l'autre.

En utilisant les octaves, on remplace chaque note par une note à l'octave ayant une fréquence dans un intervalle donné, disons  $[n, 2n)$ . Le choix classique en Hertz est  $[264, 528)$ . Par un changement d'unité, on se ramène à l'intervalle  $[1, 2)$ .

Ainsi, une note de fréquence  $f$  est remplacée par une note de fréquence  $r$  avec  $1 \leq r < 2$ , où

$$f = 2^a r, \quad a = \lfloor \log_2 f \rfloor \in \mathbf{Z}, \quad r = 2^{\{\log_2 f\}} \in [1, 2).$$

C'est une version multiplicative de l'algorithme d'Euclide.

## Les quartes et les quintes

Une note de fréquence 3 (harmonique d'une note de fréquence 1) est à l'octave d'une note de fréquence  $\frac{3}{2}$ .

L'intervalle musical  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$  est appelé *quinte*, le quotient des extrémités de l'intervalle est  $\frac{3}{2}$ .

L'intervalle musical  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$  est appelé *quarte*, le quotient est  $\frac{4}{3}$ .

## Les quintes successives

Les quintes successives sont les notes de l'intervalle  $[1, 2]$ , qui sont à l'octave des notes de fréquences

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

à savoir

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \dots$$

On ne retombera jamais sur la valeur initiale 1, puisque l'équation diophantienne  $3^a = 2^b$  n'a pas de solution en entiers positifs  $a, b$ .

## Équations diophantiennes exponentielles

Il n'y a pas de solution exacte à l'équation  $2^a = 3^b$  en entiers positifs  $a$  et  $b$ , mais on peut chercher des puissances de 2 qui soient proches de puissances de 3.

Il n'y a que trois solutions  $(m, n)$  à l'équation  $3^m - 2^n = \pm 1$  en entiers positifs  $m$  et  $n$ , à savoir

$$(1, 1), (1, 2), (2, 3)$$

avec

$$3 - 2 = 1, \quad 4 - 3 = 1 \quad \text{et} \quad 9 - 8 = 1.$$

## Équations diophantiennes exponentielles

Levi ben Gershon (1288–1344), philosophe et astronome juif du moyen-âge, répondant à une question du compositeur français Philippe de Vitry, a démontré que  $3^m - 2^n \neq 1$  quand  $m \geq 3$ .



Levi ben Gershon



Philippe de Vitry



$3^m - 2^n \neq 1$  pour  $m \geq 3$ .

Supposons  $3^m - 2^n = 1$  avec  $m \geq 3$ . Alors  $n \geq 2$ , ce qui implique que  $3^m \equiv 1 \pmod{4}$ , donc que  $m$  est pair.

Écrivons  $m = 2k$ . On obtient

$$(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^n,$$

donc chacun des deux nombres  $3^k - 1$  et  $3^k + 1$  est une puissance de 2.

Mais le seul exemple de deux puissances de 3 dont la différence est 2 est (1,3).

Par conséquent  $k = 1$ , contredisant l'hypothèse  $m \geq 3$ .

## Équations diophantiennes exponentielles

Cette question conduit à l'étude des *équations diophantiennes exponentielles*, dont un exemple emblématique est l'équation de Catalan  $x^p - y^q = 1$  où les inconnues  $x, y, p$  et  $q$  sont dans  $\mathbb{Z}$  et toutes  $\geq 2$ . Ce problème a été résolu récemment, la seule solution est  $3^2 - 2^3 = 1$ , comme l'a suggéré E. Catalan en 1844, l'année même où Liouville donnait les premiers exemples de nombres transcendants.



Eugène Charles Catalan  
(1814 – 1894)

## Approcher $3^a$ par $2^b$

Au lieu d'étudier des équations diophantiennes, on peut plutôt considérer la question de l'approximation de  $3^a$  par  $2^b$  sous un autre angle. Le fait que l'équation  $3^a = 2^b$  n'a pas de solution en entiers rationnels positifs  $a, b$  signifie que le logarithme en base 2 de 3 :

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58496250072 \dots,$$

qui est la solution réelle  $x$  de l'équation  $2^x = 3$ , est un nombre irrationnel.

Les puissances de 2 qui sont proches de puissances de 3 correspondent aux approximations rationnelles  $\frac{a}{b}$  de  $\log_2 3$  :

$$\log_2 3 \simeq \frac{a}{b}, \quad 2^a \simeq 3^b.$$

## Approximer $\log_2 3$ par des nombres rationnels

Il est donc naturel de considérer le développement en fraction continue du nombre

$$\log_2 3 = 1,58496250072 \dots = [1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$$

et de tronquer ce développement :

$$[1] = 1, [1, 1] = 2, [1, 1, 1] = \frac{3}{2}, [1, 1, 1, 2] = \frac{8}{5} = 1,6.$$

L'approximation de  $\log_2 3 = 1,58 \dots$  par  $\frac{8}{5} = 1,6$  correspond au fait que

$$2^8 = 256 \quad \text{est proche de} \quad 3^5 = 243.$$

Le nombre  $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7,593 \dots$  est proche de  $2^3$ ; cela signifie que 5 quintes produisent approximativement 3 octaves.

## Approcher $\log_2 3$ par des nombres rationnels

L'approximation suivante est

$$[1, 1, 1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{12} = 1,5833\dots$$

Le nombre  $2^{19}$  est proche de  $3^{12}$  :

$$2^{19} = 524\,288 \simeq 3^{12} = 531\,441,$$

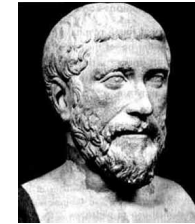
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,74\dots \text{ est proche de } 2^7 = 128.$$

En termes musicaux, cela correspond au fait que *douze quintes est à peine plus que sept octaves*.



## Pythagore

Pythagore de Samos  
(vers 569 BC - vers 475 BC)



Le *comma de Pythagore* est

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,01364$$

L'erreur produite est d'environ **1,36%**, la plupart des oreilles humaines ne peuvent pas faire la différence.



## Autres approximations remarquables

$$5^3 = 125 \simeq 2^7 = 128 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1,953\dots \simeq 2$$

Trois tierces (quotient  $5/4$ ) produisent presque une octave.

$$2^{10} = 1024 \simeq 10^3$$

- Ordinateurs (kilo octets)
- Acoustique : quand on multiplie l'intensité d'un son par 10 on ajoute 10 décibels (échelle logarithmique). Multiplier l'intensité par  $k$ , c'est ajouter  $d$  décibels avec  $10^d = k^{10}$ . Comme  $2^{10} \simeq 10^3$ , doubler l'intensité revient à ajouter 3 décibels.



## Leonard de Pise (Fibonacci)

La suite de Fibonacci ( $F_n$ ) $_{n \geq 0}$

Leonard de Pise (Fibonacci)  
(1170–1250)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

34, 55, 89, 144, 233, ...

est définie par

$$F_0 = 0, F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

<http://oeis.org/A000045>





# La suite de Fibonacci et le Nombre d'Or

Les nombres dont les fractions continues sont

[1], [1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1], ...

sont les quotients

$$\begin{array}{cccccc} \frac{F_2}{F_1} & \frac{F_3}{F_2} & \frac{F_4}{F_3} & \frac{F_5}{F_4} & \frac{F_6}{F_5} & \frac{F_7}{F_6} & \dots \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \end{array}$$

de nombres de Fibonacci consécutifs.

La fraction continue [1, 1, 1, 1, 1, ...] a pour valeur le *Nombre d'Or*

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180339887499\dots$$

qui vérifie

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

# Fraction continue de $\sqrt{2}$

Le nombre

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\dots$$

vérifie

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Donc

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

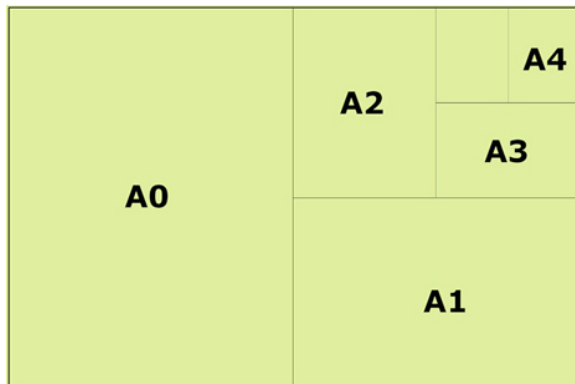
On écrit le *développement en fraction continue de  $\sqrt{2}$*  sous la forme abrégée

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots] = [1, \bar{2}].$$

# Format A4

Le nombre  $\sqrt{2}$  est le double de son inverse :  $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$ .

Si on plie en deux une feuille de papier dont les côtés ont des longueurs en proportion  $\sqrt{2}$ , on obtient une nouvelle feuille rectangulaire plus petite dont les longueurs des côtés sont encore en proportion  $\sqrt{2}$ .



# Irrationalité de $\sqrt{2}$ : démonstration géométrique

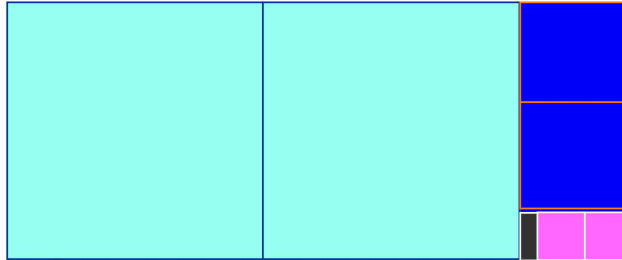
- On commence avec un rectangle de côtés 1 et  $1 + \sqrt{2}$ .
- On le décompose en deux carrés de côtés 1, plus un petit rectangle donc les côtés ont pour longueur  $1 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - 1$  et 1.
- Les longueurs des côtés de ce petit rectangle sont donc en proportion

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2},$$

c'est-à-dire la même proportion que pour le grand rectangle.

- Il s'ensuit que le petit rectangle peut être décomposé en deux carrés et un troisième rectangle ayant la même proportion que les deux premiers.
- Ce processus ne s'arrête donc jamais.

## Rectangles de proportion $1 + \sqrt{2}$



## Irrationalité de $\sqrt{2}$ : démonstration géométrique

Partons maintenant d'un rectangle dont les longueurs sont des nombres entiers. Les longueurs des côtés des rectangles successifs sont des entiers positifs, formant deux suites décroissantes, donc le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Il en est de même plus généralement pour un rectangle dont le quotient des longueurs des côtés est un nombre rationnel : il suffit de réduire au même dénominateur et de changer d'unité pour déduire de ce qui précède que le procédé de décomposition en un nombre entier de carrés plus un petit rectangle s'arrêtera au bout d'un nombre fini d'étapes.

Il en résulte que  $1 + \sqrt{2}$  est un nombre irrationnel, et par conséquent  $\sqrt{2}$  aussi.

## Démonstration géométrique d'irrationalité

Posons  $t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56 \dots$ . Le développement en fraction continue de  $t$  est

$$[2, 2, \dots] = [2].$$

En effet, de

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1},$$

on déduit

$$t = 2 + \frac{1}{t}.$$

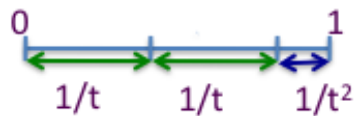
On décompose un intervalle de longueur  $t$  en trois intervalles, deux de longueur 1 et un de longueur  $1/t$ .

$$t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56 \dots = 2 + 1/t$$



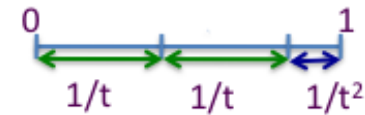
## Décomposition de l'intervalle de longueur 1

$$2 + \frac{1}{t} = t, \quad \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

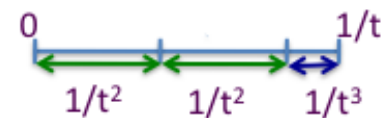


On passe du premier dessin au second par une homothétie de rapport  $1/t$ , puisque  $t = 2 + 1/t$ .

## Nouvelle homothétie de rapport $1/t$



Intervalle  $(0, 1/t)$  agrandi :  $\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t}$  :



## Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur  $t = \sqrt{2} + 1$  a été décomposé en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur  $1/t$ .

Après une homothétie de rapport  $1/t$ , l'intervalle de longueur 1 est décomposé en deux intervalles de longueur  $1/t$  et un de longueur  $1/t^2$ .

L'étape suivante décompose l'intervalle de longueur  $1/t$  en deux intervalles de longueur  $1/t^2$  et un de longueur  $1/t^3$ .

Ensuite, un intervalle de longueur  $1/t^2$  produit deux intervalles de longueur  $1/t^3$  et un de longueur  $1/t^4$ .

À chaque étape, on obtient deux grands intervalles et un plus petit. Le processus ne s'arrête jamais.

## Décomposition d'un intervalle de longueur rationnelle

Partons d'un nombre rationnel  $u = a/b$ , avec disons  $a > b > 0$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers.

On décompose un intervalle de longueur  $u$  en un nombre entiers d'intervalles de longueur 1, plus un intervalle de longueur inférieure à 1.

Il est commode de faire un changement d'unités : il revient au même de décomposer un intervalle de longueur  $a$  en un nombre entiers d'intervalles de longueur  $b$ , plus un intervalle de longueur inférieure à  $b$ , disons  $c$ , qui est un entier  $\geq 0$ . C'est la division euclidienne, une fois de plus.

Le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes.

## Le Nombre d'Or

Le Nombre d'Or

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887499 \dots$$

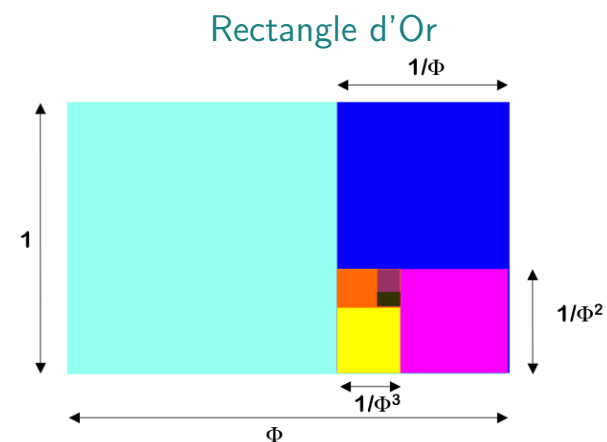
vérifie

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Si on part d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont comme rapport le Nombre d'Or, à chaque étape on trouve un carré plus un petit rectangle ayant les mêmes proportions que le premier.

## Le nombre d'or

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180339887499 \dots$$



## Leonard Euler (1707 – 1783)

Leonhard Euler

*De fractionibus continuis dissertatio*,  
 Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae,  
**9** (1737), 1744, p. 98–137 ;  
 Opera Omnia Ser. I vol. **14**,  
 Commentationes Analyticae, p. 187–215.



$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

$$= 2,718281828459045235360287471352 \dots$$

## Fraction continue de e

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

$$= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$$

$$= [2, \overline{1, 2m, 1}]_{m \geq 1}$$

e n'est ni rationnel (J-H. Lambert, 1766) ni quadratique irrationnel (J-L. Lagrange, 1770).

## Lagrange (1736 – 1813)

Joseph-Louis Lagrange était un mathématicien français né italien qui a fait progresser de nombreux pans des mathématiques, de l'analyse à la théorie des nombres en passant par la mécanique analytique et céleste.



## Irrationalité de $\pi$

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)  
*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*,  
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;  
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.



Quand  $v \neq 0$ , l'un au moins des deux nombres  $v$ ,  $\tan(v)$  est irrationnel.

Comme  $\tan(\pi/4) = 1$ , il en résulte que  $\pi$  est irrationnel.

## Lambert et le Roi Frédéric II de Prusse



— Que savez vous, Lambert ?  
— Tout, Sire.  
— Et de qui le tenez-vous ?  
— De moi-même !



## Fraction continue de $\pi$

Le développement en fraction continue de  $\pi = 3,1415926535898\dots$  commence par

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \dots]$$

Problème ouvert : la suite  $(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots)$  des quotients partiels est-elle bornée ?

## Fraction continue de $e^{1/a}$

*Point de départ* :  $y = \tanh(x/a)$  satisfait l'équation différentielle  $ay' + y^2 = 1$ .  
C'est ce qui a permis à Euler d'obtenir

$$e^{1/a} = [1, a-1, 1, 1, 3a-1, 1, 1, 5a-1, \dots] \\ = [1, (2m+1)a-1, 1]_{m \geq 0}.$$

## Développement en fraction continue de $\tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{1}{i} \tanh(ix), \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\tan(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \ddots}}}}}$$

## Approximants de Padé

Henri Eugène Padé,  
1863 – 1953



Claude Brezinski  
*History of Continued Fractions and Padé Approximants*.  
Springer-Verlag, Berlin, 1991,  
551 pages.



## Approximation diophantienne dans la vie courante

Calendriers, années bissextiles.

Engrenages

Petits diviseurs et systèmes dynamiques (H. Poincaré)

Périodes des orbites de Saturne (divisions de Cassini)

Systèmes chaotiques.

Stabilité du système solaire. Expansion de l'univers.

Théorie générale de la relativité. Cosmologie. Trous noirs.

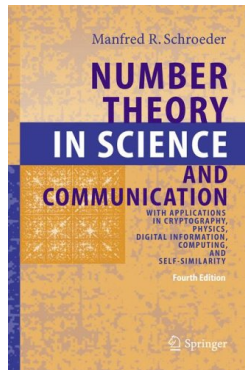
Résonance en astronomie.

Quasi-cristaux.

Acoustique des halls de concert.

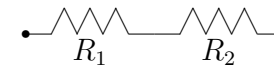
# Théorie des nombres dans les sciences et dans les communications

**M.R. Schroeder.**  
**Number theory in science and communication :**  
*with applications in cryptography, physics, digital information, computing and self similarity*  
 Springer series in information sciences **7** 1986.  
 4th ed. (2006) 367 p.



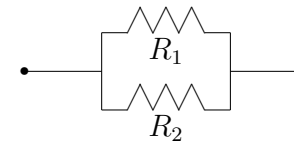
# Réseaux électriques

- La résistance d'un réseau en série



est la somme  $R_1 + R_2$ .

- La resistance  $R$  d'un réseau en parallèle

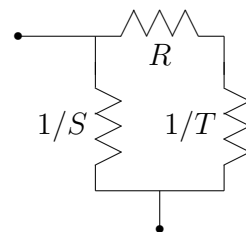


vérifie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

# Réseaux électriques et fractions continues

La resistance  $U$  du circuit

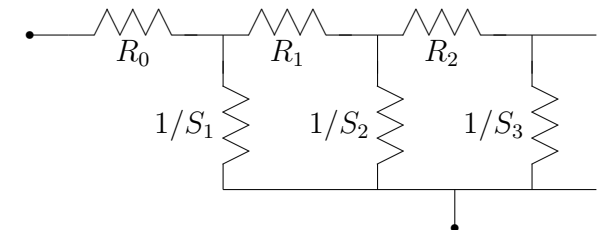


est donnée par

$$U = \frac{1}{S + \frac{1}{R + \frac{1}{T}}}$$

# Décomposition d'un carré en carré

- Pour le réseau

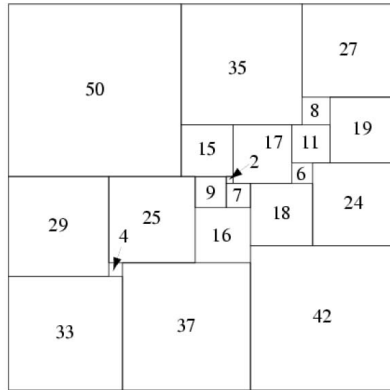


la résistance est donnée par la fraction continue

$$[R_0, S_1, R_1, S_2, R_2, \dots]$$

- Les réseaux électriques et les fractions continues ont été utilisés pour trouver la première solution au problème de décomposition d'un carré entier en réunion disjointe de carrés entiers, tous distincts.

# Quadrature du carré



21-square perfect square

There is a unique simple perfect square of order 21 (the lowest possible order), discovered in 1978 by A. J. W. Duijvestijn (Bouwkamp and Duijvestijn 1992). It is composed of 21 squares with total side length 112, and is illustrated above.

# Nombres quadratiques

La fraction continue d'un nombre réel est ultimement périodique si et seulement si le nombre est quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré 2.

Quand  $d$  est un entier  $\geq 2$  qui n'est pas un carré, la fraction continue du nombre  $\sqrt{d}$  est

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots],$$

ce que l'on écrit pour simplifier

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}].$$

Ainsi  $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$  et  $\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$ .

# Lien avec l'équation $x^2 - dy^2 = \pm 1$

Soit  $d$  un entier  $\geq 2$  sans facteurs carrés. Considérons l'équation diophantienne

$$(1) \quad x^2 - dy^2 = \pm 1$$

où les inconnues  $x, y$  prennent leurs valeurs dans  $\mathbf{Z}$ .

Si  $(x, y)$  est une solution avec  $y \geq 1$ , on a

$$(x - \sqrt{d}y)(x + \sqrt{d}y) = 1, \text{ donc } \frac{x}{y} \text{ est une approximation}$$

rationnelle de  $\sqrt{d}$ , d'autant meilleure que  $x$  et  $y$  sont grands.

Ceci explique que la stratégie pour résoudre l'équation de Pell

(1) repose sur le développement en fraction continue de  $\sqrt{d}$ .

# Problème de Brahmagupta (628)

Brahmasphutasiddhanta :

Résoudre en nombres entiers

l'équation

$$x^2 - 92y^2 = 1$$



Brahmagupta

Si  $(x, y)$  est une solution,  $(x - \sqrt{92}y)(x + \sqrt{92}y) = 1$ , donc  $\frac{x}{y}$  est une bonne approximation de  $\sqrt{92} = 9,591663046625\dots$



## Problème de Brahmagupta (628)

La fraction continue de  $\sqrt{92}$  est

$$\sqrt{92} = [9, \overline{1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18}].$$

La plus petite solution de

$$x^2 - 92y^2 = 1$$

est obtenue à partir de

$$[9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1] = \frac{1151}{120}.$$

En effet,  $1151^2 - 92 \cdot 120^2 = 1\,324\,801 - 1\,324\,800 = 1$ .

## Bhaskara II (12ème siècle)

*Lilavati*

(*Bijaganita*, 1150)

$x^2 - 61y^2 = 1$  Solution :

$$x = 1\,766\,319\,049,$$

$$y = 226\,153\,980.$$



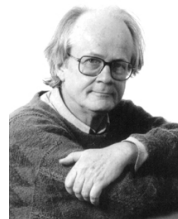
Méthode cyclique (Chakravala) de Brahmagupta.

$$\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}].$$

$$[7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 5] = \frac{1\,766\,319\,049}{226\,153\,980}$$

## Narayana (14ème siècle)

Les vaches de Narayana  
(Tom Johnson)



$x^2 - 103y^2 = 1$ . Solution :

$$x = 227\,528, y = 22\,419.$$

$$227\,528^2 - 103 \cdot 22\,419^2 = 51\,768\,990\,784 - 51\,768\,990\,783 = 1.$$

$$\sqrt{103} = [10, \overline{6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20}].$$

$$[10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6] = \frac{227\,528}{22\,419}$$

## Correspondance entre Fermat et Brouncker

“pour ne vous donner pas trop de peine” ( Fermat)

$$X^2 - DY^2 = 1, \text{ avec } D = 61 \text{ et } D = 109.$$

Solutions :

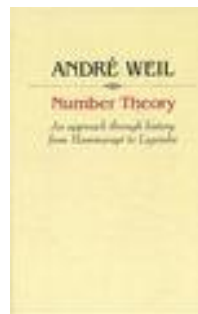
$$(1\,766\,319\,049, 226\,153\,980) \\ (158\,070\,671\,986\,249, 15\,140\,424\,455\,100)$$

$$158\,070\,671\,986\,249 + 15\,140\,424\,455\,100\sqrt{109} = \left( \frac{261 + 25\sqrt{109}}{2} \right)^6.$$

## Une référence sur l'histoire de la théorie des nombres

André Weil

*Number theory. :  
An approach through history.  
From Hammurapi to  
Legendre.*  
Birkhäuser Boston, Inc.,  
Boston, Mass., (1984) 375 pp.  
MR 85c:01004



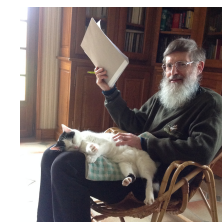
## Dissection de Farey

John Farey  
(1766 –1826) géologue



<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Farey.html>

Patrice Philippon.  
*A Farey Tail.*  
Notices of the AMS Volume  
**59**, (6), 2012, 746 – 757.



## Variétés Riemanniennes de courbure négative

Les résultats sur l'équation dite de Pell-Fermat sont utiles pour construire des variétés Riemanniennes de courbure négative : *variétés arithmétiques*.

Nicolas Bergeron (Paris VI) :  
"Sur la topologie de certains espaces provenant de constructions arithmétiques"



## Théorie ergodique

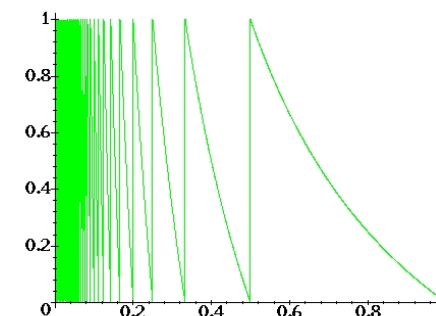
Tore de dimension 1 :

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq S^1$$

Application de Gauss

$$T : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Système dynamique chaotique déterministe.



La transformation de Gauss est ergodique : un sous-ensemble  $E$  de  $[0, 1)$  vérifiant  $T^{-1}(E) \subset E$  a pour mesure 0 ou 1.

## Théorème ergodique de Birkhoff

Soit  $T$  un endomorphisme ergodique d'un espace probabiliste  $X$  et soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction réelle mesurable. Alors pour presque tout  $x$  dans  $X$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f \circ T^j(x) \longrightarrow \int f dm$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

George David Birkhoff  
(1884–1944)



## Lien avec la fonction zeta de Riemann

Pour  $s$  de partie réelle  $> 1$ ,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

On a aussi

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - s \int_0^1 T(x) x^{s-1} dx$$

avec

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

## Généralisation du développement en fraction continue en dimension supérieure

L'approximation simultanée de nombres réels est beaucoup plus difficile que l'approximation d'un seul nombre.

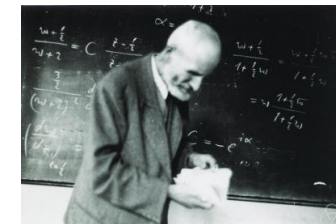
Le développement en fraction continue a de multiples caractéristiques, on ne dispose pas de généralisation en dimension supérieure qui étende toutes ces propriétés.

## Jacobi – Perron

On connaît des réponses partielles, comme l'algorithme de Jacobi – Perron.



Carl Gustav Jacob Jacobi  
(1804 – 1851)



Oskar Perron (1880 – 1975)  
*Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 1913.

## Géométrie des nombres

La géométrie des nombres étudie les corps convexes et les points entiers dans des espaces de dimension quelconque. Cette théorie a été introduite par **Hermann Minkowski** (1864 – 1909).



## L'algorithme LLL

Étant donnée une base de  $\mathbf{R}^n$ , l'algorithme LLL fournit une base du réseau engendré, souvent avec des vecteurs de normes plus petites que les vecteurs initiaux.



Arjen Lenstra



Hendrik Lenstra



Laszlo Lovasz

## Géométrie paramétrique des nombres

Update : 2016

Travaux récents de

Wolfgang M. Schmidt et Leo Summerer, Damien Roy



## Fractions continues : introduction et applications

*Michel Waldschmidt*

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) France

<http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/>