Appendice : Déformation d'un groupe algébrique

par

J. FRESNEL

Université de Bordeaux I
Talence, France

Soient un groupe R un sous-anneau de $\mathbf{C}$ de type fini sur $\mathbf{Z}$, $K = \mathrm{Fr}\,R$ le corps des fractions de R, G un groupe algébrique sur K qui est commutatif, ouvert d'un fermé de $\mathbf{P}_K^N$, $\varphi: R \to \mathbf{C}$ un homomorphisme et $\tilde{K} = \mathrm{Fr}(\varphi(R))$. On souhaite construire un groupe algébrique commutatif $\tilde{G}$ sur $\tilde{K}$, de même dimension que G, qui soit ouvert d'un fermé de $\mathbf{P}_{\tilde{K}}^N$ et qui possède les propriétés supplémentaires suivantes.

Il existe un sous-groupe H du groupe $G(K)$ (le groupe des points rationnels de G sur K) tel que tout point de H puisse s'écrire sous la forme $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ dans $\mathbf{P}_K^N(K)$ avec $u_i \in R$ et l'un des $\varphi(u_i)$ n'est pas nul; de plus $(\varphi(u_0), \ldots, \varphi(u_N)) \in \tilde{G}(\tilde{K}) \subset \mathbf{P}_{\tilde{K}}^N(\tilde{K})$ et l'application $(u_0, u_1, \ldots, u_N) \mapsto (\varphi(u_0), \ldots, \varphi(u_N))$ est un homomorphisme. On souhaite en plus que cette propriété soit valable pour une famille « suffisamment grosse » d'homomorphismes φ.

En fait ce problème n'est autre chose que la construction d'une famille de déformations du groupe G, indexée sur un ouvert Zariski dense de $\mathrm{Sp}\,R$; le groupe G étant indexé par le point générique de $\mathrm{Sp}\,R$. L'existence d'une famille de déformations, ou encore l'existence d'un schéma en groupes sur un ouvert dense de Zariski de $\mathrm{Sp}\,R$ dont la fibre générique est G est bien connue (EGA, Chapitre IV); il suffit donc d'utiliser ces résultats, de les interpréter et de les adapter au « problème de la transcendance ».

1. Définition de la déformation

(On peut consulter Hartshorne p. 89, EGA Chapitres I, 2.5 p. 103, 3.6 p. 117, 3.7.3 p. 119.) Soient $\varphi: \mathfrak{X} \to S$ un morphisme entre deux schémas, $s \in S$, $k(s) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{M}_s$ le corps résiduel de s et $\mathrm{Sp}\,k(s) \to S$ le morphisme canonique. La *fibre du morphisme* φ au point s est le schéma $\mathfrak{X}_s \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{X} \times_S \mathrm{Sp}\,k(s)$; c'est donc un schéma sur le corps $k(s)$. L'espace $\mathfrak{X}_s$ est canoniquement homéomorphe à $\varphi^{-1}(s)$, muni de la topologie induite par $\mathfrak{X}$.

Considérons le cas où $S = \mathrm{Sp}\,R$ avec R noethérien intègre. Soient $\eta \in S$ le point générique de S et X une variété algébrique sur $K = \mathrm{Fr}\,R = k(\eta)$. On appelle *famille de* *déformations* de X tout schéma $\varphi: \mathfrak{X} \to S$ tel que $\mathfrak{X}_\eta \simeq X$; les autres fibres $\mathfrak{X}_s$, $s \in S$ s'appellent les *déformations* de X.

2. Existence de la déformation

Ce qui suit n'est autre chose qu'un ensemble de résultats qui se trouvent dans EGA, Chapitre IV.

THÉORÈME 1 (EGA, Chapitre IV). *Soient R un anneau noethérien intègre, $K = \mathrm{Fr}(R)$, $G \xrightarrow{\alpha} G_1 \xrightarrow{\beta} \mathbf{P}_K^N$ trois variétés algébriques réduites, $\mathbf{P}_K^N = \mathrm{Proj}\, K[X_0, \dots, X_N]$ est l'espace projectif de dimension N, α est une immersion ouverte dominante, β est une immersion fermée; en plus G est un groupe algébrique commutatif, connexe, régulier. Alors il existe $f \in R - \{0\}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ des schémas plats sur $S_f \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Sp}\, R[1/f]$, et des morphismes $a: \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$, $b: \mathfrak{G}_1 \to \mathbf{P}_{R[1/f]}^N = \mathrm{Proj}\, R[1/f]\,[X_0, \dots, X_N]$ avec les propriétés suivantes.*

(1) *$\mathfrak{G}$ est un schéma en groupes commutatifs, a est une immersion ouverte dominante, b est une immersion fermée; en particulier $\mathfrak{G}_s$ est un groupe algébrique commutatif sur $k(s)$ pour tout $s \in S_f$.*

(2) *Soit η le point générique de S_f, alors $\mathfrak{G}_\eta \simeq G$, $\mathfrak{G}_{1\eta} \simeq G_1$, $a_\eta = \alpha$, $b_\eta = \beta$.*

(3) *Pour tout $s \in S_f$, $a_s: \mathfrak{G}_s \to \mathfrak{G}_{1s}$ est une immersion ouverte dominante, $b_s: \mathfrak{G}_{1s} \to \mathbf{P}_{k(s)}^N$ est une immersion fermée.*

(4) *Pour tout $s \in S_f$, le groupe algébrique $\mathfrak{G}_s$ est géométriquement régulier.*

(5) *Pour tout $s \in S_s$, chaque composante connexe de $\mathfrak{G}_s$ a même dimension que $\mathfrak{G}_\eta \simeq G$.*

(6) *Le nombre géométrique de composantes connexes de $\mathfrak{G}_s$ est le nombre géométrique de composantes connexes de $\mathfrak{G}_\eta \simeq G$, pour tout $s \in S_f$.*

(7) *Si $\mathbf{P}_{R[1/f]}^N = \mathrm{Proj}\, R[1/f]\,[X_0, \dots, X_N]$, alors il existe i, $0 \leq i \leq N$, tel que $D_+(X_i) \cap \mathfrak{G}_s$ soit dense dans $\mathfrak{G}_s$ pour tout $s \in S_f$ ($\mathfrak{G}_s$ est identifie à $\varphi^{-1}(s) \subset \mathfrak{G}$ selon* **1**).

Démonstration. On feuillette EGA, Chapitre IV.

L'existence de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, a, b avec $\mathfrak{G}_\eta = G$, $\mathfrak{G}_{1\eta} = G_1$, $a_\eta = \alpha$, $b_\eta = \beta$ est le théorème 8.8.2, Chapitre IV, p. 28. La platitude de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ est le théorème 6.9.1, Chapitre IV, p. 153. Que $\mathfrak{G}$ soit un schéma en groupes commutatifs est le Scholie 8.8.3 p. 33–34. Le théorème 8.10.5, Chapitre IV, p. 37 montre que a est une immersion ouverte dominante et b une immersion fermée. Par le corollaire 9.9.5, Chapitre IV, p. 94 on a $\mathfrak{G}_s$

(géométriquement) régulier. Le corollaire 9.5.6, Chapitre IV p. 69 montre 5), et la proposition 9.7.8, Chapitre IV, p. 82 montre 6).

Comme $\mathfrak{G}_\eta \simeq G$ est connexe, on peut supposer (quitte à changer les indices) que $D_+(X_0)\cap\mathfrak{G}_\eta \neq \emptyset$, donc que $D_+(X_0)\cap\mathfrak{G}_\eta$ est dense dans $\mathfrak{G}_\eta$; il suit de la proposition 9.5.3, Chapitre IV, p. 67 que $D_+(X_0)\cap\mathfrak{G}_s$ est dense dans $\mathfrak{G}_s$.

Remarque. Si on change f en $f_1 = fh$, avec $h\in R-\{0\}$, les schémas $\mathfrak{G}\times_{S_f} S_{f_1}$, $\mathfrak{G}_1\times_{S_f} S_{f_1}$, et les morphismes qui s'en déduisent satisfont le théorème 1 (en remplaçant f par f_1). Le schéma $\mathfrak{G}$ est « unique »; i.e. si $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ conviennent, il existe S' ouvert non vide de $\mathrm{Sp}\,R$ avec $\mathfrak{G}\times S' \simeq \mathfrak{G}'\times S'$.

Remarque. Si G est une variété abélienne (resp. affine), on peut choisir $\mathfrak{G}$ abélien (resp. affine) et les $\mathfrak{G}_s$ seront abéliens (resp. affines).

Si $G_1\to G_2\to G_3$ est une suite exacte de groupes algébriques alors il existe une suite exacte de schémas en groupes $\mathfrak{G}_1\to\mathfrak{G}_2\to\mathfrak{G}_3$ et l'on a aussi les suites exactes $\mathfrak{G}_{1s}\to\mathfrak{G}_{2s}\to\mathfrak{G}_{3s}$.

3. Le groupe des « points rationnels »

3.1. *Le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique*. Soient G un groupe algébrique sur un corps L, $G(L)$ le sous-ensemble des points de G rationnels sur L; comme les points de $G\times G$ rationnels sur L s'identifient canoniquement à $G(L)\times G(L)$, il suit que la structure de groupe algébrique G induit sur l'ensemble $G(L)$ une structure de groupe (au sens ordinaire).

On peut interpréter un point rationnel comme la donnée d'un morphisme $\varrho\colon \mathrm{Sp}\,L=\{\xi\}\to G$ par $\varrho\to\varrho(\xi)\in G(L)$. Soient ϱ_1, ϱ_2 deux tels morphismes, p_1, p_2 les projections canoniques de $G\times G$ sur G, θ l'unique morphisme tel que $p_i\circ\theta=\varrho_i$, et m la multiplication :

$$\begin{tikzcd}
& G & \\
\mathrm{Sp}\,L \arrow[ur, "\varrho_1"] \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varrho_2"'] & G\times G \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[r, "m"] & G \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Alors on vérifie immédiatement que $m\circ\theta(\xi)=m(\varrho_1(\xi),\ \varrho_2(\xi))$. Ainsi donc le groupe $G(L)$ est aussi l'ensemble des morphismes $\varrho\colon\mathrm{Sp}\,L\to G$ muni de l'opération $\varrho_1 * \varrho_2 =$

$m\circ\theta$. C'est cette interprétation qui permet de définir les « points rationnels » d'un schéma en groupes.

3.2. *Le groupe des « points rationnels » d'un schéma en groupes.* Soient R un anneau noethérien intègre, $\varphi\colon \mathfrak{G}\to S=\mathrm{Sp}\,R$ un schéma en groupes de type fini sur S. Soit $\mathfrak{G}(R)$ l'ensemble des morphismes $\varrho\colon \mathrm{Sp}\,R\to\mathfrak{G}$; en particulier le morphisme « élément neutre » $e\colon \mathrm{Sp}\,R\to\mathfrak{G}$ est élément de $\mathfrak{G}(R)$. Montrons que la structure de schéma en groupes induit sur $\mathfrak{G}(R)$ une structure de groupe (au sens ordinaire). Si θ est l'unique morphisme de $\mathrm{Sp}\,L$ dans $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ tel que $p_i\circ\theta=\varrho_i$, on définit $\varrho_1*\varrho_2\overset{\text{déf}}{=}\mu\circ\theta$ où μ est le morphisme multiplication :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{G} & \\
\mathrm{Sp}\,L \arrow[ur, "\varrho_1"] \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varrho_2"'] & \mathfrak{G}\times\mathfrak{G} \arrow[u, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{G} \\
 & \mathfrak{G} &
\end{tikzcd}$$

Il est facile de vérifier que $(\mathfrak{G}(R), *)$ est un groupe (au sens ordinaire), e est l'élément neutre, et $i\circ\varrho$ est l'inverse de ϱ si $i\colon\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$ est le morphisme « inversion ».

PROPOSITION 2. *Soient R un anneau noethérien intègre, $\mathfrak{G}$ un schéma en groupes plat, de type fini sur $S=\mathrm{Sp}\,R$. Soient $s\in S$, $\varrho\in\mathfrak{G}(R)$, i.e. $\varrho\colon\mathrm{Sp}\,R\to\mathfrak{G}$ un morphisme, $\varrho_s\colon \mathrm{Sp}\,k(s)\to\mathfrak{G}_s$ le morphisme induit, alors $\theta_s\colon\mathfrak{G}(R)\to\mathfrak{G}_s(k(s))$ défini par $\theta_s(\varrho)=\varrho_s$ est un homomorphisme. Soit η le point générique de S, alors $\theta_\eta\colon\mathfrak{G}(R)\to\mathfrak{G}_\eta(k(\eta))$ est injectif. Ainsi il existe un homomorphisme $\delta_s\colon\theta_\eta(\mathfrak{G}(R))\to\mathfrak{G}_s(k(s))$ tel que $\delta_s(\varrho_\eta)=\varrho_s$ pour tout $\varrho\in\mathfrak{G}(R)$.*

3.3. *Les « points rationnels » de $\mathbf{P}_R^N$.* Soient $\varrho\colon\mathrm{Sp}\,R\to\mathbf{P}_R^N=\mathrm{Proj}\,R[X_0,\dots,X_N]$ un morphisme, $K=\mathrm{Fr}(R)$, $\varrho_\eta\colon\mathrm{Sp}\,K\to\mathbf{P}_K^N$, on a $\varrho_\eta(\xi)\in\mathbf{P}_K^N(K)$. La proposition qui suit montre à quelle condition un point de $\mathbf{P}_K^N(K)$ définit un morphisme $\varrho\colon\mathrm{Sp}\,R\to\mathbf{P}_R^N$.

PROPOSITION 3. *Soient R un anneau noethérien intègre, $K=\mathrm{Fr}(R)$, $\mathbf{P}_R^N=\mathrm{Proj}\,R[X_0,\dots,X_N]$, $x=(x_0,\dots,x_N)\in\mathbf{P}_K^N(K)$, η le point générique de $S=\mathrm{Sp}\,R$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe un morphisme $\varrho\colon\mathrm{Sp}\,R\to\mathbf{P}_R^N$ tel que $\varrho_\eta(\xi)=(x_0,\dots,x_N)$, où $\{\xi\}=\mathrm{Sp}\,K$.*

(ii) *Pour tout $\mathfrak{p}\in\mathrm{Sp}R$ il existe $u_0(\mathfrak{p}),\dots,u_N(\mathfrak{p})$ dans R avec $x=(u_0(\mathfrak{p}),\dots,u_N(\mathfrak{p}))$, et l'un des $u_i(\mathfrak{p})$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}$.*

(iii) *Pour $0\leq i\leq N$, soit $\mathfrak{A}_i=\{d\in R\mid dx_j\in x_iR,\ 0\leq j\leq N\}$. Alors $\sum_{i=0}^N\mathfrak{A}_i=R$.*

Si ces conditions sont réalisées, le morphisme ϱ est unique. Si $s \in \operatorname{Sp} R$, on a $x=(v_0(\mathfrak{p}_s), \ldots, v_N(\mathfrak{p}_s))$, $v_i(\mathfrak{p}_s) \in R$, et $v_{i_0}(\mathfrak{p}_s) \notin \mathfrak{p}_s$, et alors $\varrho_s(\xi')=(\overline{v_0(\mathfrak{p}_s)}, \ldots, \overline{v_N(\mathfrak{p}_s)})$, où $\{\xi'\}=\operatorname{Sp} k(s)$, et $\overline{v_i(\mathfrak{p}_s)}$ est l'image de $v_i(\mathfrak{p}_s)$ dans $k(s)$.

PROPOSITION 4. *Soient R un anneau noethérien intègre, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}_1$ des schémas plats de type fini sur $S=\operatorname{Sp} R$, $\alpha\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_1$ une immersion ouverte, $\beta\colon \mathfrak{G}_1 \to \mathbf{P}_R^N$ une immersion fermée, $\gamma=\beta \circ \alpha$, $\mathfrak{G}(R)$ (resp. $\mathbf{P}_R^N(R)$) l'ensemble des « points rationnels » de $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathbf{P}_R^N$). Soit $\varrho \in \mathbf{P}_R^N(R)$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $\varrho_2 \in \mathfrak{G}(R)$ tel que $\varrho_\eta=\gamma_\eta \circ \varrho_{2\eta}$ où η est le point générique de S, ϱ_η (resp. γ_η, $\varrho_{2\eta}$) est le morphisme induit par ϱ (resp. γ, ϱ_2).*

(ii) *Pour tout $s \in S$ il existe $\psi \in \mathfrak{G}_s(k(s))$ tel que $\gamma_s \circ \psi=\varrho_s$.*

Démonstration. (i) *implique* (ii) est immédiat, il suffit de prendre $\psi=\varrho_{2s}$. (ii) *implique* (i). On considère le diagramme commutatif, où u, v, w sont les projections canoniques :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Sp} R \arrow[rr, "\varrho"] & & \mathbf{P}_R^N \\
& G \arrow[ur, "\gamma"] & \\
\{\xi\} = \operatorname{Sp} k(s) \arrow[uu, "u"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathbf{P}_{k(s)}^N \arrow[uu, "w"'] \\
& G_s \arrow[uu, "v"] \arrow[ur, "\gamma_s"'] &
\end{tikzcd}$$

On a $u(\xi)=s$, ainsi $\varrho \circ u(\xi)=\gamma \circ v \circ \psi(\xi)$, ce qui veut dire que $\varrho(s) \in \gamma(\mathfrak{G})$; ainsi $\varrho(\operatorname{Sp} R) \subset \gamma(\mathfrak{G})$. En particulier $\varrho(\operatorname{Sp} R) \subset \beta(\mathfrak{G}_1)$. Comme R est intègre il existe $\varrho_1\colon \operatorname{Sp} R \to \mathfrak{G}_1$ tel que $\beta \circ \varrho_1=\varrho$. Comme $\mathfrak{G}$ est ouvert dans $\mathfrak{G}_1$ et que $\varrho_1(\operatorname{Sp} R) \subset \mathfrak{G}$, il existe un morphisme $\varrho_2\colon \operatorname{Sp} R \to \mathfrak{G}$ tel que $\alpha \circ \varrho_2=\varrho_1$, ce qui montre $\gamma \circ \varrho_2=\varrho$.

Remarque. Conservons les hypothèses de la proposition 4 en identifiant $\mathfrak{G}_s$ à une partie de $\mathbf{P}_{k(s)}^N$ pour $s \in S$ (et donc $\mathfrak{G}_s(k(s))$ à une partie de $\mathbf{P}_{k(s)}^N(k(s))$), on peut traduire la proposition 4 en termes plus concrets.

Soit $x=(x_0, \ldots, x_N) \in \mathbf{P}_{k(\eta)}^N(k(\eta))=\mathbf{P}_K^N(K)$ qui provient d'un élément de $\mathbf{P}_R^N(R)$ (proposition 3). Alors on a équivalence entre (i) et (ii) :

(i) le point x provient d'un élément de $\mathfrak{G}(R)$,

(ii) pour tout premier $\mathfrak{p}$ (correspondant à $s \in S$) on a

$$(\overline{u_0(\mathfrak{p})}, \ldots, \overline{u_N(\mathfrak{p})}) \in \mathfrak{G}_s(k(s)) \subset \mathbf{P}_{k(s)}^N(k(s))$$

où $x=(u_0(\mathfrak{p}), \ldots, u_N(\mathfrak{p}))$ est une écriture de x satisfaisant (ii) de la proposition 3.

4. Application à « la transcendance »

PROPOSITION 5. *Soient R un sous-anneau de $\mathbf{C}$ de type fini sur $\mathbf{Z}$, $K=\mathrm{Fr}\,R\subset\mathbf{C}$, G un groupe algébrique commutatif connexe sur K de dimension d qui est ouvert dense d'un fermé G_1 de $\mathbf{P}_K^N=\mathrm{Proj}\,K[X_0,\dots,X_N]$. On peut supposer que $D_+(X_0)\cap G$ est dense dans G et que $(X_1/X_0)|_{G\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{G\cap D_+(X_0)}$ sont algébriquement indépendantes sur K. Enfin soient $G(K)$ le groupe des points de G rationnels sur K, et $x_1,\dots,x_\ell\in G(K)$.*

Alors il existe $a\in R-\{0\}$ avec les propriétés suivantes.

(1) *Pour tout homomorphisme $\varphi: R\to\mathbf{C}$ tel que $\varphi(a)\neq 0$, il existe un groupe algébrique G_φ sur $k(\varphi)\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Fr}\,(\varphi(R))$ de dimension d. C'est un ouvert dense d'un fermé de $\mathbf{P}^N_{k(\varphi)}$, $D_+(X_0)\cap G_\varphi$ est dense dans G_φ et les fonctions $X_1/X_0,\dots,X_d/X_0$ restreintes à $G_\varphi\cap D_+(X_0)$ sont algébriquement indépendantes sur $k(\varphi)$. Si* $\ker\varphi=0$ (i.e. $k(\varphi)\simeq K$), *on a $G_\varphi\simeq G$.*

(2) *Soit H le sous-ensemble des points x de $G(K)\subset\mathbf{P}_K^N(K)$ possédant la propriété suivante : pour tout homomorphisme $\varphi: R\to\mathbf{C}$ avec $\varphi(a)\neq 0$, il existe $u_0(\varphi),\dots,u_N(\varphi)\in R$, $i_0=i_0(\varphi)$ avec $\varphi(u_{i_0}(\varphi))\neq 0$,*

$$x=(u_0(\varphi),\dots,u_N(\varphi))\quad (\textit{dans } \mathbf{P}_K^N(K)),\tag{*}$$

enfin l'élément $(\varphi(u_0(\varphi)),\dots,\varphi(u_N(\varphi))$ ne dépend pas de la représentation (*), on le note $\varepsilon_\varphi(x)$. Alors H est un sous-groupe de $G(K)$ qui contient $x_1,\dots,x_\ell$ et pour tout $\varphi: R\to\mathbf{C}$ avec $\varphi(a)\neq 0$ l'application $\varepsilon_\varphi: H\to G_\varphi(k(\varphi))$ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Comme K est de caractéristique nulle, le groupe algébrique G est régulier (Mumford, p. 101), ainsi on est dans les conditions d'application du théorème 1. Il existe $f\in R-\{0\}$, $\mathfrak{G}$ un schéma en groupes plat sur $S_f=\mathrm{Sp}\,R[1/f]$ avec toutes les propriétés du théorème.

Le point $x_i\in G(K)$ définit un morphisme $\alpha_i:\mathrm{Sp}\,K=\{\xi\}\to G$ par $\alpha_i(\xi)=x_i\in G(K)\subset\mathbf{P}_K^N(K)$ (voir §3.1). Il existe $f_i\in R-\{0\}$ et un morphisme $\varrho_i:\mathrm{Sp}\,R[1/ff_i]\to\mathfrak{G}\times_{S_f}S_{ff_i}$ tel que $\varrho_{i\eta}=\alpha_i$, où $S_{ff_i}=\mathrm{Sp}\,R[1/ff_i]$ et η est le point générique de $S=\mathrm{Sp}\,R$ (EGA, Chapitre IV, Théorème 8.8.2, p. 28).

On sait que $D_+(X_0)\cap G_1$ est un ouvert affine et que la K-algèbre $\mathcal{O}_{G_1}(G_1\cap D_+(X_0))$ est engendrée par

$$(X_1/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_N/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}.$$

On a $d=\dim G=\dim G_1$ et $D_+(X_0)\cap G_1$ dense dans G_1, donc $d=\dim D_+(X_0)\cap G_1$. Ainsi on peut supposer que

$$(X_1/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}$$

sont algébriquement libres sur K, et que $(X_i/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}$ est algébriquement lié à

$$(X_1/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}.$$

Ainsi il existe $f_0\in R-\{0\}$ tel que $(X_i/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}$ soit entier sur le sous-anneau de $\mathcal{O}_{G_1}(G_1\cap D_+(X_0))$ engendré par

$$(X_1/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{G_1\cap D_+(X_0)}$$

sur $R[1/ff_0]$. Il suit de la platitude de $\mathfrak{G}_1$ sur $S_f=\operatorname{Sp}R[1/f]$ que $(X_i/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)}$ est entier sur le sous-anneau de

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_1}(\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0))\otimes_{R[1/f]}R[1/ff_0]$$

engendré par

$$(X_1/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)}\quad\text{et}\quad R[1/f]\otimes R[1/ff_0].$$

Soit $a=ff_0f_1\dots f_\ell$; quitte à changer $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{G}\times_{S_f}S_a$ avec $S_a=\operatorname{Sp}R[1/a]$, on peut supposer que $\mathfrak{G}$ est un schéma en groupes plat sur S_a qui satisfait les propriétés du théorème 1. En plus il existe $\varrho_i\colon S_a\to\mathfrak{G}$ tel que $\varrho_{i\eta}(\xi)=x_i$ où $\{\xi\}=\operatorname{Sp}K$, η est le point générique de S_a. Ensuite $(X_i/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)}$ est entier sur le sous-anneau de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_1}(\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0))$ engendré par

$$(X_1/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{\mathfrak{G}_1\cap D_+(X_0)}$$

et $R[1/a]$. Il suit facilement de cela que

$$(X_1/X_0)|_{\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0)}$$

sont algébriquement indépendants sur $k(s)$ et que $(X_i/X_0)|_{\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0)}$ est entier sur la sous-$k(s)$-algèbre de $\mathcal{O}_{\mathfrak{G}_s}(\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0))$ engendrée par

$$(X_1/X_0)|_{\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0)},\dots,(X_d/X_0)|_{\mathfrak{G}_s\cap D_+(X_0)},$$

pour tout $s \in S_a$; il suffit d'utiliser le fait que $D_+(X_0) \cap \mathfrak{G}_s$ est dense dans $\mathfrak{G}_s$, que $\mathfrak{G}_s$ est dense dans $\mathfrak{G}_{1s}$ et que $d = \dim \mathfrak{G}_s = \dim \mathfrak{G}_{1s}$ (théorème 1).

Tout homomorphisme $\varphi: R \to \mathbf{C}$ définit l'idéal premier $\mathfrak{p} = \ker \varphi$ de R; comme le degré de transcendance de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{Q}$ est infini, tout idéal premier de R est le noyau d'un homomorphisme $\varphi: R \to \mathbf{C}$. Deux homomorphismes ϱ_1 et ϱ_2 peuvent avoir même noyau, mais dans ce cas $k(\varrho_1) \simeq k(\varrho_2)$. Enfin si $s = \ker \varphi$ on a $k(s) = k(\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi(R))$.

On pose alors $G_\varphi \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{G}_s$, en particulier $G_\varphi = \mathfrak{G}_\eta = G$ si $\ker \varphi = \{0\}$.

Ensuite la proposition 4 et la remarque qui la suit montrent que H n'est autre chose que l'image du groupe $\mathfrak{G}(R[1/a])$ dans $\mathfrak{G}_\eta(k(\eta)) = G(K)$ et que $\varepsilon_\varphi = \delta_s$ si $s = \ker \varphi$ (proposition 2). Par ce qui précède on a $\varrho_1, \ldots, \varrho_\ell \in \mathfrak{G}(R[1/a])$, donc $x_1, \ldots, x_\ell \in H$.

Remarque. Si on le souhaite on peut décrire les homomorphismes $\varphi: R \to \mathbf{C}$ tels que $\varphi(a) \neq 0$. Supposons $R = \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t][\theta_{t+1}]$ avec $\theta_1, \ldots, \theta_t$ algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$, et θ_{t+1} algébrique sur $\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_t)$; alors θ_{t+1} satisfait une relation de la forme $u_0 + u_1 \theta_{t+1} + \ldots + u_m \theta_{t+1}^m = 0$ avec $u_i \in \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$ et $u_0 u_m \neq 0$. De même a satisfait une relation $v_0 + v_1 a + \ldots + v_{m'} a^{m'} = 0$ avec $v_i \in \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_t]$ et $v_0 v_{m'} \neq 0$. Soient $\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t \in \mathbf{C}$ tels que $u_0 u_m v_0 v_{m'}(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_t) \neq 0$, alors il existe un homomorphisme $\varphi: R \to \mathbf{C}$ tel que $\varphi(\theta_i) = \tilde{\theta}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$ et $\varphi(a) \neq 0$ (en général cet homomorphisme n'est pas unique).

Références

GROTHENDIECK, A. & DIEUDONNÉ, J., Eléments de Géométrie Algébrique, Chapitres I et IV. Publ. Math. IHES, 4 (1960); 24 (1965); 28 (1966).

HARTSHORNE, R., *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Math. 52. Springer Verlag, 1977.

MUMFORD, D., *Abelian varieties*. Oxford Univ. Press, 1970.

Received February 16, 1984
Received in revised form March 18, 1985