C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada - Vol. 1 (1979) No. 2 

# NOMBRES TRANSCENDANTS ET FONCTIONS SIGMA DE WEIERSTRASS

Note de Michel WALDSCHMIDT.

*Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.*

INTRODUCTION. Les théorèmes de Schneider [S] (chap. II, § 4) sur les fonctions $\wp$ et $\sigma$ de Weierstrass peuvent être interprétés en termes de points algébriques sur une courbe elliptique ou sur l'extension d'une courbe elliptique par le groupe additif (ces groupes algébriques correspondent aux intégrales elliptiques de première ou deuxième espèce). On peut alors les déduire d'un théorème de Lang [L] (chap. III, § 4, th. 4). Si on applique ce même théorème de Lang à l'extension d'une courbe elliptique par le groupe multiplicatif (correspondant à certaines intégrales elliptiques de troisième espèce), dont la description a été donnée par Serre (cf. [A]), on obtient un énoncé de transcendance sur les valeurs de fonctions sigma [A] (chap. III).

Nous démontrons ici cet énoncé directement à partir du critère de transcendance de Schneider Lang, sans faire intervenir de groupe algébrique.

## § 1. FONCTIONS SIGMA DE WEIERSTRASS.

Soit $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$. Le produit canonique de Weierstrass associé à L est la fonction entière

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right).$$

Avec les notations habituelles, elle vérifie

$$\sigma(z + \omega_i) = -\sigma(z) \exp\left\{\eta_i\left(z + \frac{\omega_i}{2}\right)\right\}, \quad (i = 1,2)$$

et

$$\sigma(mz) = (-1)^{m-1} \sigma(z)^{m^2} \psi_m(\wp(z), \wp'(z)), \quad (m \in \mathbb{Z},\ m > 0),$$

où $\psi_m(X,Y)$ est une fonction rationnelle de X,Y à coefficients dans $\mathbb{Q}(g_2,g_3)$. (voir par exemple [F] , p. 205). On en déduit que, pour p et q entiers positifs, $\omega \in L$ et $\eta = \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$, le nombre

$$\sigma\left(\frac{p}{q}\omega\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2q^2}\eta\omega\right)$$

est algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(g_2,g_3)$. Par exemple

$$\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^8 = -e^{\eta_1\omega_1}/\psi_3\left(\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right).$$

Dans le cas particulier $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, on vérifie que

$$\sigma(\tfrac{1}{2}) = 2^{5/4} \cdot \pi^{1/2} \cdot e^{\pi/8} \cdot \Gamma(1/4)^{-2}.$$

Enfin, pour $u \in \mathbb{C}$, $u \notin L$, le nombre

$$\frac{\sigma(u + (\omega/2))}{\sigma(u)} \cdot \exp\left\{-\eta\left(\frac{u}{2} + \frac{\omega}{8}\right)\right\}$$

est algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \wp(u))$.

§ 2. UNE FONCTION MULTIPLICATIVEMENT PSEUDO-PÉRIODIQUE.

Soit $u_o \in \mathbb{C}$, $u_o \notin L$. La fonction méromorphe

$$F(z) = \frac{\sigma(z + u_o)}{\sigma(z)\sigma(u_o)} e^{-\zeta(u_o)z},$$

vérifie pour $\omega \in L$

$$F(z + \omega) = F(z) \exp\{\eta u_o - \omega\zeta(u_o)\}.$$

Sa dérivée logarithmique est

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(u_o)}{\wp(z) - \wp(u_o)}.$$

La fonction des trois variables $u_o$, $u_1$, $u_2$

$$\frac{F(u_1 + u_2)}{F(u_1).F(u_2)} = \frac{\sigma(u_o+u_1+u_2)\sigma(u_o)\sigma(u_1)\sigma(u_2)}{\sigma(u_o+u_1)\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_2+u_o)}$$

est une fonction rationnelle de $\wp(u_o)$, $\wp(u_1)$, $\wp(u_2)$, $\wp'(u_o)$, $\wp'(u_1)$, $\wp'(u_2)$, à coefficients dans $\mathbb{Q}(g_2, g_3)$.

Soit $B_m(X) \in \mathbb{Q}(g_2, g_3)[X]$ le polynôme défini, pour m entier positif, par

$$B_m(\wp(z)) = \left[\psi_m(\wp(z), \wp'(z))\right]^2.$$

De la relation

$$\zeta(mz) = m\zeta(z) + \wp'(z) \frac{B'_m(\wp(z))}{2m\, B_m(\wp(z))},$$

on déduit que, si $u_o$ est un point de torsion, il existe un nombre $\beta_o$, algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \wp(u_o))$, tel que la fonction

$$F(z)e^{\beta_o z}$$

soit algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \wp(u_o), \wp(z))$.

§ 3. LE THÉORÈME DE TRANSCENDANCE.

On suppose $g_2, g_3, \wp(u_o)$ algébriques. On se propose d'appliquer le critère de Schneider Lang [L](chap. III, § 1, th. 1) aux fonctions

$$\wp(z),\ F(z)e^{\beta z},\ \wp'(z),\ 1/(\wp(z) - \wp(u_o)),$$

avec $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si la fonction $F(z)e^{\beta z}$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(\wp(z))$, on déduit de la pseudo-périodicité de F et de la relation de Legendre que $u_o$ est un point de torsion. Comme le théorème de transcendance correspondant à $\wp(z)$, $e^z$, $\wp'(z)$ est connu [S] (chap. II, th. 18), on supposera que $u_o$ n'est pas de torsion.

Soit $u \in \mathbb{C}$, avec $u \notin L$, $u + u_o \notin L$. Supposons pour commencer $u - u_o \notin L$. Comme il y a une infinité de $m \in \mathbb{Z}$ tels que $m u \notin L$, $mu - u_o \notin L$, $mu + u_o \notin L$, on obtient la transcendance de l'un au moins des 2 nombres

$$\wp(u)\quad ,\quad F(u)e^{\beta u}.$$

Choisissons u tel que $2u - u_o \in L$ (donc $u \notin L$ , $u \pm u_o \notin L$) et $\wp(u) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Après un calcul facile on en déduit la transcendance du nombre

$$\sigma(u_o)^2 \exp\{\eta u_o + (u_o + \omega)\ (\beta - \zeta(u_o))\}\ ,$$

ce qui montre que la restriction $u - u_o \notin L$ était superflue. On a ainsi démontré le résultat suivant

THÉORÈME. - Soient $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants $g_2, g_3$ algébriques, $u, u_o$ deux points algébriques de $\wp$, et $\beta$ un nombre algébrique. On suppose que $u_o$ n'est pas un point de torsion, et que u et $u + u_o$ ne sont pas pôles de $\wp$. Alors le nombre

$$\frac{\sigma(u + u_o)}{\sigma(u)\sigma(u_o)}\, e^{(\beta - \zeta(u_o))u}$$

est transcendant.

§ 4. COROLLAIRES

Le premier corollaire montre que la dérivée de F prend des valeurs transcendantes aux points où F s'annule.

COROLLAIRE 1. - Soient $\omega \in L$, $\eta = \zeta(z + \omega) - \zeta(z)$. Alors le nombre

$$\sigma(u_o)^2 \exp\{\eta u_o + (u_o + \omega)(\beta - \zeta(u_o))\}$$

est transcendant.

Ainsi, $u_o$ étant toujours un point algébrique de $\mathcal{G}$ qui n'est pas de torsion, le nombre

$$\sigma(u_o)e^{-\frac{1}{2}u_o\zeta(u_o)}$$

est transcendant.

Enfin, en choisissant pour u dans le théorème un quotient de $\omega$ par une puissance de 2, on obtient la transcendance des pseudo périodes de $F(z)e^{\beta z}$.

COROLLAIRE 2. - Avec les notations du corollaire 1, pour $\omega \neq 0$ le nombre

$$\exp\{\omega\zeta(u_o) - \eta u_o + \beta\omega\}$$

est transcendant.


Références.

[A] Nombres transcendants et groupes algébriques. Astérisque (Société Mathématique de France), à paraître en 1979.

[F] Fricke, B. - Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, vol. II, Teubner, (Leipzig-Berlin), 1922.

[L] Lang, S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, (Reading, Mass.), 1966.

[S] Schneider, Th. - Introduction aux nombres transcendants. Springer, (Berlin), 1957, et Gauthier-Villars (Paris), 1959.



Michel WALDSCHMIDT
"Analyse Complexe et Géométrie"
(Lab.Associé C.N.R.S., n° 213)
Université P.et M.Curie (Paris VI)
Mathématiques , Tour 45-46
4, Place Jussieu
75230 - PARIS CEDEX 05 FRANCE



Received November 9, 1978

AMS (MOS) Subject Classification (1970) : 10 F 35, 33 A 25