Géométrie paramétrique des nombres sur les corps de fonctions

Michel Waldschmidt

Professeur Émérite, Sorbonne Université,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Résumé

La principale source de la théorie des nombres transcendants est l'article de Hermite en 1873 dans lequel non seulement il démontre la transcendance du nombre e, mais aussi il initie l'étude de l'approximation de fonctions par des fractions rationnelles.

Nous introduirons la théorie de l'approximation diophantienne des séries formelles avant de présenter un travail en commun avec D. Roy, dans lequel nous étudions un analogue pour les séries formelles de la *géométrie paramétrique des nombres*, proposée par W.M. Schmidt en 1982 et développée en 2009 et 2013 par W.M. Schmidt et L. Summerer puis en 2015 par D. Roy.

Référence : http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Damien Roy et MW,
Parametric geometry of numbers in function fields.
Mathematika, **63** 3 (2017) 1114–1135. arXiv: 1704.00291 [math.NT].

Introduction

L'introduction de l'article fondateur de Ch. Hermite en 1873, dans lequel il prouve la transcendance du nombre e, commence par un rappel de la théorie de l'approximation diophantienne simultanée de plusieurs nombres réels par des nombres rationnels. Il remarque que le cas de l'approximation d'un seul nombre est résolu par la théorie des fractions continues, puis rappelle ce qui est connu pour l'approximation de plusieurs nombres. Il continue en disant qu'il va étudier une situation similaire pour les fonctions. C'est la naissance de ce qui deviendra la théorie des approximants de Padé. Hermite poursuit en donnant une solution explicite à ce qui est appelé maintenant approximants de Padé de type II pour la fonction exponentielle.

Charles Hermite et Ferdinand Lindemann

Charles Hermite

(1822 – 1901)

Ferdinand Lindemann

(1852 – 1939)

Hermite (1873) :
Transcendance de e
$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,4\ldots$

Lindemann (1882) :
Transcendance de π
$\pi = 3.141\,592\,653\,5\ldots$

Charles Hermite 1873

ANALYSE. — *Sur la fonction exponentielle*; par M. **Hermite.**

« I. Étant donné un nombre quelconque de quantités numériques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on sait qu'on peut en approcher simultanément par des fractions de même dénominateur, de telle sorte qu'on ait

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A} + \frac{\delta_1}{A\sqrt[n]{A}},$$

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A} + \frac{\delta_2}{A\sqrt[n]{A}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\alpha_n = \frac{A_n}{A} + \frac{\delta_n}{A\sqrt[n]{A}},$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ne pouvant dépasser une limite qui dépend seulement de n. C'est, comme on voit, une extension du mode d'approximation résultant de la théorie des fractions continues, qui correspondrait au cas le plus simple de $n = 1$. Or on peut se proposer une généralisation semblable de la théorie des fractions continues algébriques, en cherchant les expressions approchées de n fonctions, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de manière que les développements en série suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée x^M. Voici d'abord à cet égard un premier résultat qui s'offre immédiatement. Supposons que les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ soient toutes développables en séries de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ et faisons

Felix Müller Jahrbuch der Mathematik

Hermite, Ch.

On the exponential function. (Sur la fonction exponentielle.) (French) JFM 05.0248.01

C. R. LXXVII, 18-24 (1873); C. R. LXXVII, 74-79, 226-233, 285-293 (1873).

Eine Aufgabe, welche als eine Verallgemeinerung des Problems der Annäherung durch algebraische Kettenbrüche angesehen werden kann, ist folgende: „Die n rationalen Brüche

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \cdots \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

als Näherungswerthe der n Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots \varphi_n(x)$ so zu bestimmen, dass die Reihenentwickelungen nach steigenden Potenzen von x bis zur Potenz x^M übereinstimmen". Es werde vorausgesetzt, dass sich die Functionen $\varphi(x)$ in Reihen von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ entwickeln lassen, und man mache

$$\Phi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Kx + L.$$

Dann kann man im Allgemeinen über die Coefficienten $A, B, \cdots L$ so verfügen, dass in den Producten $\varphi_i(x)\Phi(x)$ die Glieder mit

$$x^M, x^{M-1}, \cdots x^{M-\mu_i+1},$$

wo μ_i irgend eine ganze Zahl ist, verschwinden. So bildet man μ_i homogene Gleichungen ersten Grades und hat

$$\varphi_i(x)\Phi(x) = \Phi_i(x) + \varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \cdots,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ Constanten, $\Phi_i(x)$ ein ganzes Polynom vom Grade $M - \mu_i$. Da aber hieraus folgt, dass

$$\varphi_i(x) = \frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)} + \frac{\varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \cdots}{\Phi(x)},$$

so sieht man, dass die Reihenentwickelungen des rationalen Bruches und der Function in der That dieselben sein werden bis zu x^M, und da die Gesammtzahl der gemachten Bedingungen gleich $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ ist, so genügt es, die einzige Bedingung

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m$$

hinzuzufügen, wo die ganzzahligen μ_i bis dahin ganz willkürlich geblieben sind. Diese Betrachtung ist der Ausgangspunkt, den der Herr Verfasser für die in seiner Arbeit entwickelte Theorie der Exponentialfunction genommen hat, indem er nämlich das Obige anwendet auf die Grössen

$$\varphi_1(x) = e^{ax}, \varphi_2(x) = e^{bx}, \cdots \varphi_n(x) = e^{hx}.$$

Reviewer: Müller, Felix, Dr. (Berlin)

MSC:

Felix Müller Jahrbuch der Mathematik

Lindemann, F.

On the number π. (Ueber die Zahl π.) (German) JFM 14.0369.04

Klein Ann. XX, 213-225 (1882).

In seiner Abhandlung: Sur la fonction exponentielle (C. R. Bd. LXXVII., s. F. d. M. V. (1873.) p.248, JFM 05.0248.01) hat Herr Hermite die Unmöglichkeit einer Relation von der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

bewiesen, wo sowohl die z als die N als ganz vorausgesetzt werden. Herr Lindemann (siehe auch JFM 14.0369.02, JFM 14.0369.03) erweitert die hier gemachten Schlüsse und gelangt zu folgendem Satze: ,,Sind

$$f_1(z) = 0,\ f_2(z) = 0, \ldots, f_s(z) = 0$$

s algebraische Gleichungen, von denen jede irreductibel und von der Form

$$z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0$$

ist, wo unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen zu verstehen sind, werden ferner mit $z_i, z_i', z_i'', \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f_i(z) = 0$ bezeichnet, wird kurz

$$\Sigma e^{z_i} = e^{z_i} + e^{z_i'} + e^{z_i''} + \ldots$$

gesetzt, bedeuten endlich $N_0, N_1, \ldots, N_s$ beliebige ganze Zahlen, welche nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{z_1} + N_2 \Sigma e^{z_2} + \cdots + N_s \Sigma e^{z_s}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass eine der Grössen z gleich Null ist.“

Ersetzt man die Gleichungen $f_i(z) = 0$ durch diejenigen irreduciblen Gleichungen, welche bez. von den Zahlen

$$Z_1 = z_1, Z_2 = z_1 + z_2, Z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots, Z_n = z_1 + z_2 \cdots + z_n$$

befriedigt werden, so führt dieser besondere Fall zu dem Satze: ,,Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebraisch irrationale Zahl, so ist e^z immer transcendent.“ Damit ist bewiesen, dass die Ludolph'sche Zahl π eine transcendente Zahl ist. Die angeführten Sätze bleiben bestehen, wenn man unter den N_i nicht ganze oder rationale, sondern beliebige algebraisch-irrationale Zahlen versteht. Analog folgt aus dem obigen Satze der folgende: ,,Versteht man unter $N_0, N_1, \ldots, N_n$ beliebige, und unter $z_0, z_1, \ldots, z_n$ beliebige, von einander verschiedene (reelle oder complexe) algebraische Zahlen, so kann eine Relation von der Form

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass die N_i sämmtlich gleich Null werden.“

Reviewer: Müller, F.; Dr. (Berlin)

Hermite p.77

» Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q)$, ..., fonctions entières semblables des racines $p, q, \ldots$, de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver *que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

Hermite p.77

» Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q), \ldots,$ fonctions entières semblables des racines $p, q, \ldots,$ de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver *que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

» Mais une autre voie conduira à une seconde démonstration plus rigoureuse ; on peut en effet, comme on va le voir, étendre aux fractions ration-

Hermite p.77 – 78

» Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q), \ldots$, fonctions entières semblables des racines $p, q, \ldots$, de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver *que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

» Mais une autre voie conduira à une seconde démonstration plus rigoureuse; on peut en effet, comme on va le voir, étendre aux fractions rationnelles

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

le mode de formation des réduites donné par la théorie des fractions continues, et par là mettre plus complétement en évidence le caractère arithmétique d'une irrationnelle non algébrique. Dans cet ordre d'idées, M. Liouville a déjà obtenu un théorème remarquable qui est l'objet de son travail intitulé : *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques* (*), et je rappellerai aussi que l'illustre géomètre a démontré le premier la proposition qui est le sujet de ces recherches pour les cas de l'équation du second degré et de

l'équation bicarrée [*Journal de Mathématiques* (*Note sur l'irrationnalité du nombre e*, t. V, p. 192)]. Sous le point de vue auquel je me suis placé, voici la première proposition à établir.

Approximation rationnelle d'un nombre réel

Si x est un nombre rationnel, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ vérifiant $p/q \neq x$, on ait $|x - p/q| \geq c/q$.

Démonstration : écrire $x = a/b$; le résultat est vrai avec $c = 1/b$.

Si x est un nombre réel irrationnel, il y a une infinité de $p/q \in \mathbb{Q}$ tels que $|x - p/q| < 1/q^2$.

Les *meilleures* approximations p/q sont données par l'algorithme des fractions continues.

Quand x est un nombre réel, il revient au même d'étudier $|x - \frac{p}{q}|$ ou $|qx - p|$ pour p, q dans $\mathbb{Z}$, $q > 0$.

Approximation rationnelle d'un nombre réel

Fractions continues (Leonhard Euler, Brahmagupta,...)

Dissection de Farey (Sir John Farey)

Principe des tiroirs de Dirichlet (Gustav Lejeune – Dirichlet)

Géométrie des nombres (Hermann Minkowski)

Euler

(1707 – 1783)

Farey

(1766 – 1826)

Dirichlet

(1805 – 1859)

Minkowski

(1864–1909)

L'algorithme des fractions continues

Soit $x \in \mathbb{R}$. La division euclidienne de x par 1 s'écrit :

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \quad \text{avec } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq \{x\} < 1.$$

Si x n'est pas un entier, alors $\{x\} \neq 0$. On pose alors $x_1 = \dfrac{1}{\{x\}}$, de sorte que

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x_1} \quad \text{avec } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ et } x_1 > 1.$$

Si x_1 n'est pas un entier on pose $x_2 = \dfrac{1}{\{x_1\}}$:

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_1 \rfloor + \cfrac{1}{x_2}} \quad \text{avec } x_2 > 1$$

Développement en fraction continue régulière

On écrit $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $a_i = \lfloor x_i \rfloor$ pour $i \geq 1$.
Alors

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_1 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_2 \rfloor + \cfrac{1}{\ddots}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

L'algorithme s'arrête après un nombre fini de pas si et seulement si x est rationnel.
On utilise la notation

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots]$$

Remarque : si $a_k \geq 2$, alors
$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_k] = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_k - 1, 1]$.

Fractions continues : les convergents

Étant donnés des entier rationnels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a_i \geq 1$ pour $i \geq 1$, la fraction continue finie

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n]$$

peut être écrite

$$\frac{P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients entiers que nous allons écrire explicitement.

Fractions continues : les convergents

Soient $\mathbb{F}$ un corps, $Z_0, Z_1, \ldots$ des variables. Nous allons définir par récurrence des polynômes P_n et Q_n de l'anneau $\mathbb{F}[Z_0, \ldots, Z_n]$ et $\mathbb{F}[Z_1, \ldots, Z_n]$ respectivement tels que

$$[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n] = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Voici les premières valeurs

$$P_0 = Z_0, \quad Q_0 = 1, \quad \frac{P_0}{Q_0} = Z_0;$$

$$P_1 = Z_0 Z_1 + 1, \quad Q_1 = Z_1, \quad \frac{P_1}{Q_1} = Z_0 + \frac{1}{Z_1};$$

$$P_2 = Z_0 Z_1 Z_2 + Z_2 + Z_0, \quad Q_2 = Z_1 Z_2 + 1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = Z_0 + \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{Z_2}}.$$

Fractions continues : quotients partiels

$$P_3 = Z_0Z_1Z_2Z_3 + Z_2Z_3 + Z_0Z_3 + Z_0Z_1 + 1,$$

$$Q_3 = Z_1Z_2Z_3 + Z_3 + Z_1,$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = Z_0 + \cfrac{1}{Z_1 + \cfrac{1}{Z_2 + \cfrac{1}{Z_3}}}.$$

$$P_2 = Z_2P_1 + P_0, \quad Q_2 = Z_2Q_1 + Q_0.$$

$$P_3 = Z_3P_2 + P_1, \quad Q_3 = Z_3Q_2 + Q_1.$$

Fractions continues : quotients partiels

On observe que pour $n = 2$ et $n = 3$, on a

$$P_n = Z_n P_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = Z_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Cette remarque nous sert de définition pour P_n et Q_n.

Sous forme matricielle, on pose, pour $n \geq 2$,

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition de P_n et Q_n

On considère les matrices 2×2, pour $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} Z_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition de P_n et Q_n pour $n \geq -2$

$$\begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} Z_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n \geq -1.$$

En posant

$$\begin{pmatrix} P_{-1} & P_{-2} \\ Q_{-1} & Q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

on vérifie $[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n] = P_n/Q_n$ pour tout $n \geq 0$.

Fraction continue régulière d'un nombre rationnel

Pour

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n]$$

on a

$$x = \frac{p_n}{q_n}$$

avec

$$p_n = P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad \text{et} \quad q_n = Q_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Fraction continue régulière d'un nombre réel

Pour

$$x = [a_0,\ a_1,\ a_2, \dots, a_n, \dots]$$

les nombres rationnels de la suite

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0,\ a_1,\ a_2, \dots, a_n] \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

fournissent des approximations rationnelles de x qui sont *les meilleures* quand on compare la qualité de l'approximation et la taille du dénominateur.

$a_0, a_1, a_2, \dots$ sont les *quotients partiels*,

p_n/q_n $(n \geq 0)$ sont les *réduites* de la fraction continue (en anglais *convergents*).

$x_n = [a_n, a_{n+1}, \dots]$ $(n \geq 0)$ sont les *quotients complets*.

On a

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Lien avec l'algorithme d'Euclide

Si x est un nombre rationnel, $x = \frac{p}{q}$, ce processus n'est autre que l'algorithme d'Euclide pour diviser p par q et pour calculer le pgcd :

Euclide

(∼ -306, ∼ -283)

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad p = qa_0 + r_0, \quad 0 \le r_0 < q, \quad x_1 = \frac{q}{r_0} > 1$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad q = r_0 a_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < r_0, \quad x_2 = \frac{r_0}{r_1} > 1$$

$$q > r_0 > r_1 > \cdots \ge 1.$$

Fractions continues et approximation rationnelle

De

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

on déduit les inégalités

$$a_n q_{n-1} \leq q_n \leq (a_n + 1) q_{n-1}$$

et

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2) q_n} < \frac{1}{q_{n+1} + q_n} < |q_n x - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1} q_n}.$$

Les réduites sont les meilleures approximations

Soit p_n/q_n la n–ième réduite du développement en fraction continue régulière d'un nombre irrationnel x.

Théorème. Pour tout nombre rationnel a/b vérifiant $1 \leq b \leq q_n$, on a

$$|q_n x - p_n| \leq |bx - a|$$

avec égalité si et seulement si $(a, b) = (p_n, q_n)$.

Corollaire. Pour $1 \leq b \leq q_n$, on a

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| x - \frac{a}{b} \right|$$

avec égalité si (mais pas seulement si) $(a, b) = (p_n, q_n)$.

Séries formelles

Soit $\mathbb{F}$ un corps. On définit une valeur absolue sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}(T)$ en posant, pour $P/Q \in \mathbb{F}(T)$,

$$\left|\frac{P}{Q}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{deg\,P - deg\,Q}}$$

avec $|0| = 0$. Le complété de $\mathbb{F}(T)$ pour cette valeur absolue est $\mathbb{F}((1/T))$; pour $x \in \mathbb{F}((1/T))$ avec $x \neq 0$ on écrit

$$x = a_{k_0}T^{k_0} + a_{k_0-1}T^{k_0-1} + \cdots = \sum_{k \leq k_0} a_k T^k$$

avec $k_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{F}$ pour tout $k \leq k_0$ et $a_{k_0} \neq 0$. Alors $|x| = \mathrm{e}^{k_0}$.

Analogie : nombres – séries

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\mathbb{F}[T] & \subset & \mathbb{F}(T) & \subset & \mathbb{F}((1/T))
\end{array}$$

$$\mathrm{h}\left(\frac{a}{b}\right) = \max\{|a|, |b|\}, \qquad \sum_{n \geq -k} a_n g^{-n},$$

$$\left|\frac{P}{Q}\right| = \mathrm{e}^{\deg P - \deg Q} \qquad \sum_{n \geq -k} a_n T^{-n}.$$

Analogie : nombres – fonctions

Rolf Nevanlinna

(1895 – 1980)

Paul Vojta

Wolfgang M. Schmidt

Il y a une analogie formelle entre la théorie de Nevanlinna et l'approximation diophantienne. Par le dictionnaire de Vojta, le deuxième théorème fondamental de la théorie de Nevanlinna correspond au théorème du sous–espace de Schmidt en l'approximation diophantienne.

Will Sawin — Hadamard lectures 2023

Will Sawin

(Columbia University in New York)

The winner of the SASTRA Ramanujan 2021 prize whose research interests include applications of étale cohomology to analytic number theory.

WEBSITE →

May 15th at Institut de Mathématique d'Orsay
May 16th, 17th, 22nd, 23rd and 24th at IHES

"Number theory over function fields"

Abstract: Since Weil, mathematicians have understood that there is a deep analogy between the ordinary integers and polynomials in one variable over a finite field, as well as between number fields and the fields of functions on algebraic curves over finite fields. Using this, we can take classical problems in number theory and consider their analogues involving polynomials over finite fields, to which new geometric techniques can be applied that aren't available in the classical setting. In this course, I will survey recent progress on such problems.

Specifically, I will try to highlight how the geometric perspective produces connections to other areas of mathematics, including how the circle method for counting solutions to Diophantine equations can be used to study the topology of moduli spaces of curves in varieties, how geometric approaches to the Cohen-Lenstra heuristics and their generalizations motivate new results of a purely probabilistic nature, and how the analytic theory of automorphic forms over function fields is connected to geometric Langlands theory.

https://fondation-hadamard.fr/en/articles/2023/01/20/hadamard-lectures-2023/

Fraction continue régulière d'une série formelle

Tout élément de $\mathbb{F}(T)$ a un développement unique en fraction continue $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ avec $A_i \in \mathbb{F}[T]$ pour $i \geq 0$ et $\deg A_i \geq 1$ pour $i \geq 1$.
Pour $x \in \mathbb{F}((1/T))$:

$$x = [A_0, A_1, \ldots].$$

Quotients partiels : A_n.
Réduites : P_n/Q_n avec $P_n = P_n(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ et $Q_n = Q_n(A_1, \ldots, A_n)$.
Quotients complets : $x_n = [A_n, A_{n+1}, \ldots]$.
Donc

$$x = [A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, x_n] = \frac{x_n P_{n-1} + P_{n-2}}{x_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Approximation diophantienne et fractions continues

Pour $x = [A_0, A_1, \dots] \in \mathbb{F}((1/T))$,

$$P_n = P_n(A_0, A_1, \dots, A_n), \quad Q_n = Q_n(A_1, \dots, A_n),$$

on a

$$|Q_n| = |A_n| \cdot |A_{n-1}| \cdots |A_1| \quad (n \geq 1)$$

et

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{|Q_n|\,|Q_{n+1}|} = \frac{1}{|A_{n+1}|\,|Q_n|^2} \quad (n \geq 0).$$

Les réduites sont les meilleures approximations

Soit P_n/Q_n la n-ème réduite du développement en fraction continue de $x \in \mathbb{F}((T^{-1})) \setminus \mathbb{F}(T)$.
Théorème. Soit A/B un élément de $\mathbb{F}(T)$ tel que $|B| \leq |Q_n|$. Alors

$$|Q_n x - P_n| \leq |Bx - A|$$

avec égalité si et seulement si $(A, B) = (P_n, Q_n)$.

Corollaire. Pour $|B| \leq |Q_n|$ on a

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \left| x - \frac{A}{B} \right|$$

avec égalité si (mais pas seulement si) $(A, B) = (P_n, Q_n)$.

Théorème de Legendre

Adrien–Marie Legendre

(1752 – 1833)

Nombres réels : *Si*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q^2},$$

alors p/q *est une réduite du développement en fraction continue régulière de* x.

Séries formelles : *Si*

$$\left|x - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{|Q|^2},$$

alors P/Q *est une réduite du développement en fraction continue de* x.

Théorème de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange

(1736 – 1813)

Nombres réels : *Le développement en fraction continue d'un nombre réel irrationnel x est infini ultimement périodique si et seulement si le nombre x est quadratique.*

Séries formelles : *Si le développement en fraction continue d'un élément $x \in \mathbb{F}((T^{-1})) \setminus \mathbb{F}(T)$ est infini ultimement périodique, alors x est quadratique sur $\mathbb{F}(T)$.*
La réciproque n'est vraie que quand le corps $\mathbb{F}$ est fini.

Développement pseudo–périodiques

Un élément $x \in \mathbb{F}((T^{-1})) \setminus \mathbb{F}(T)$ a un développement en fraction continue régulière pseudo périodique

$$[A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, B_1, \ldots, B_{2t}, aB_1, a^{-1}B_2, aB_3, \ldots, a^{-1}B_{2t},$$

$$a^2B_1, a^{-2}B_2, \ldots, a^{-2}B_{2t}, a^3B_1, a^{-3}B_2, \ldots]$$

si et seulement s'il existe R, S, T, U dans $\mathbb{F}[T]$ vérifiant

$$x = \frac{Rx + S}{Tx + U}$$

où la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 et n'est pas multiple de la matrice identité.

Si D est un polynôme irréductible sur toute extension quadratique de $\mathbb{F}$, alors le développement en fraction continue régulière de $\sqrt{D}$ n'est pas pseudo–périodique.

Références sur les fractions continues et les séries formelles

Alain Lasjaunias

A. Lasjaunias.
A survey of Diophantine approximation in fields of power series.
Monatsh. Math., 130(3) :211–229, 2000.

A. Lasjaunias.
A short survey on diophantine approximation in fields of formal numbers.
https://www.math.u-bordeaux.fr/~alasjaun/survey.pdf.

Références sur les fractions continues et les séries formelles

Wolfgang M. Schmidt

W. M. Schmidt.
On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields.
Acta Arith.,
95(2) :139–166, 2000.

Géométrie des nombres

Hermann Minkowski

(1864–1909)

Référence :
Eva Bayer–Fluckiger.
Hermann Minkowski, Grand prix de l'Académie à 18 ans.
Tangente, n°111, Juillet-Août 2006.

http://alg-geo.epfl.ch/~bayer/files/MINKOWSKI.pdf

Slides

the father of all beamer talks

March 2, 2007 1 Comment lievenlb 3 min read

SHARE

Who was the first mathematician to give a slide show talk? I don't have the definite answer to this question, but would like to offer a strong

candidate : **Hermann Minkowski** gave the talk "Zur Geometrie der Zahlen" (On the geometry of numbers) before the third ICM in 1904 in Heidelberg and even the title page of his paper in the proceedings indicates that he did present his talk using slides (Mit Projektionsbildern auf einer Doppeltafel)

Géométrie des nombres de Minkowski

XX.

Zur Geometrie der Zahlen.

(Mit Projektionsbildern auf einer Doppeltafel.)

(Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses. Heidelberg 1904. S. 164—173.)

Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, von dem Charles Hermite einmal als der „introduction des variables continues dans la théorie des nombres“ gesprochen hat. Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen.

Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die *Geometrie der Zahlen* bezeichnet habe.

H. Minkowski ICM 1904

Géométrie des nombres de Minkowski

Soient Λ un réseau de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ un sous–ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mu(\mathcal{C})$ la mesure de Lebesgue de $\mathcal{C}$ et par $v(\Lambda)$ le volume du réseau Λ (mesure de Lebesque d'un parallélogramme fondamental de $\mathbb{R}^n/\Lambda$).

Theorème. On suppose $\mu(\mathcal{C}) > v(\Lambda)$. Alors il existe $x \neq y$ dans $\mathcal{C}$ tels que $x - y \in \Lambda$.

Corollaire. Si, de plus, $\mathcal{C}$ est convexe et symétrique par rapport à l'origine, et si $\mu(\mathcal{C}) > 2^n v(\Lambda)$, alors $\mathcal{C} \cap \Lambda \neq \{0\}$.

Theorème des minima successifs de Minkowski

Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les minima successifs du réseau Λ relativement au convexe symétrique $\mathcal{C}$: λ_j est le plus petit λ tel que $\lambda\mathcal{C}$ contienne j éléments $\mathbb{Z}$–linéairement indépendants de Λ.

Premier théorème de Minkowski :
Si $\mu(\mathcal{C}) > 2^n v(\Lambda)$, alors $\lambda_1 \leq 1$.

Deuxième théorème de Minkowski :

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \mu(\mathcal{C}) \leq 2^n v(\Lambda).$$

Approximation simultanée de plusieurs nombres réels

L'approximation rationnelle d'un nombre réel α consiste à étudier $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, ce qui équivaut à étudier $|q\alpha - p|$.
En dimension supérieure deux généralisations sont naturelles : étant donnés des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, on peut considérer

- soit
$$\max_{1\le i\le m} \left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right|,$$
pour $p_1, \dots, p_m, q$ dans $\mathbb{Z}$ avec $q > 0$, ce qui est l'étude de l'approximation simultanée des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ par des nombres rationnels ayant le même dénominateur,
- soit
$$|p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m - q|$$
$p_1, \dots, p_m, q$ dans $\mathbb{Z}$, qui est l'étude de formes linéaires à coefficients rationnels.

Approximation simultanée

Soient m et n des entiers positifs, Θ une matrice $n \times m$ à coefficients réels. On considère le sous–groupe

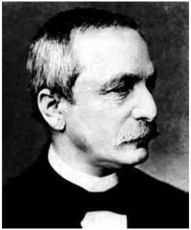
$$G = \Theta\mathbb{Z}^m + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$$

engendré par les m colonnes de Θ et $\mathbb{Z}^n$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + \cdots + a_m\alpha_{1m} + b_1 \\ \vdots \\ a_1\alpha_{n1} + \cdots + a_m\alpha_{nm} + b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème de densité de Kronecker



Leopold Kronecker

(1823 – 1891)

Selon le théorème de densité de Kronecker, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) les n lignes de la matrice Θ sont des vecteurs $\mathbb{Z}$–linéairement indépendants de $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$;
(ii) le sous-groupe G est dense dans $\mathbb{R}^n$.

M. Laurent, On Kronecker's density theorem, primitive points and orbits of matrices, MJCNT 2016.

Approximation simultanée : deux cas particuliers

$m = 1$: même dénominateur

$$\mathbb{Z}\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots \\ \alpha_{n1}\end{pmatrix} + \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n, \qquad \begin{pmatrix}a_1\alpha_{11}+b_1\\ \vdots \\ a_1\alpha_{n1}+b_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$n = 1$: forme linéaire

$$\mathbb{Z}\alpha_{11} + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_{1m} + \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$
$$a_1\alpha_{11} + \cdots + a_m\alpha_{1m} + b_1 \in \mathbb{R}.$$

Exposant de Dirichlet : m/n

Soit $Q \geq 1$. Le convexe symétrique de $\mathbb{R}^{m+n}$

$$\mathcal{C}(Q) = \Big\{(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{m+n} \;\Big|\; \max_{1\leq j\leq m} |x_j| \leq Q,$$

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_1\alpha_{i1} + \cdots + x_m\alpha_{im} + y_i| \leq Q^{-m/n}\Big\}$$

a un volume minoré par une constante positive indépendante de Q. D'après le théorème de Minkowski il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $Q \geq 1$, $\lambda\mathcal{C}(Q)$ contient un élément non nul de $\mathbb{Z}^m$.

Pour tout m, n, pour presque toute matrice $\Theta \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, l'exposant m/n est optimal.

Exposant de Dirichlet : m/n

Avec $m = 1$, on en déduit qu'étant donné $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $Q > 1$ il existe $p_1, \dots, p_n, q$ dans $\mathbb{Z}$ avec $1 \leq q \leq Q$ et

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q\alpha_i - p_i| < cQ^{-1/n}.$$

Pour presque tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ l'exposant $-1/n$ est optimal.

Avec $n = 1$, on en déduit qu'étant donné $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, pour tout $Q > 1$ il existe $(p_1, \dots, p_m, q) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ avec $0 < \max_{1 \leq j \leq m} |p_j| \leq Q$ et

$$|p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m - q| \leq cQ^{-m}.$$

Pour presque tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ l'exposant $-m$ est optimal.

Approximants de Padé

L'analogue pour des séries entières de l'étude de l'approximation simultanée des nombres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ par des nombres rationnels ayant le même dénominateur

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right|$$

pour $p_1, \ldots, p_m, q$ dans $\mathbb{Z}$ avec $q > 0$, correspond aux approximants de Padé de type II.

L'analogue de l'étude de formes linéaires à coefficients rationnels.

$$|p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m - q|$$

$p_1, \ldots, p_m, q$ dans $\mathbb{Z}$ correspond aux approximants de Padé de type I.

Approximants de Padé

Charles Hermite

(1822 – 1901)

Henri Padé

(1863 – 1953)

Kurt Mahler

(1903 – 1988)

1873, Hermite : type II, transcendance de e

1893, Hermite : type I, formes linéaires exponentielles

1967, Mahler : application du type I à la transcendance.

Géométrie paramétrique des nombres : références

Wolfgang M. Schmidt

W. M. Schmidt.
Open problems in Diophantine approximation.
§1 : a viewpoint.

In *Diophantine approximations and transcendental numbers (Luminy, 1982)*, volume 31 of *Progr. Math.*, pages 271–287. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

Géométrie paramétrique des nombres : références

Wolfgang M. Schmidt

Leo Summerer

W. M. Schmidt and L. Summerer.
Parametric geometry of numbers and applications.
Acta Arith., 140(1) :67–91, 2009.

W. M. Schmidt and L. Summerer.
Diophantine approximation and parametric geometry of numbers.
Monatsh. Math., 169(1) :51–104, 2013.

Géométrie paramétrique des nombres

Damien Roy

D. Roy.
On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers.
Ann. of Math. (2), 182(2) :739–786, 2015.

Géométrie paramétrique des nombres

Aminata Keita

A. Keita.
Continued fractions and parametric geometry of numbers.
J. Théor. Nombres Bordeaux **29** (2017), 129–135.

A. Keita.
On a conjecture of Schmidt for the parametric geometry of numbers.
Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory **6** *(2016), 166–176.*

https://www.idrc.ca/fr/article/preparer-la-prochaine-generation-de-scientifiques-africains

Approximation simultanée de nombres réels

Soient $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\|\mathbf{u}\| = \max_{1 \le i \le n} |u_i| \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Étant donné $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on veut trouver (ou tout au moins savoir s'il existe) $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ avec $\|\mathbf{x}\|$ pas trop grand et $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|$ aussi petit que possible. Pour $n = 2$, la réponse est donnée par la théorie des fractions continues : quand $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 \neq 0$, les *meilleures* approximations rationnelles sont données par les quotients partiels p_n/q_n associés à la fraction continue régulière de u_2/u_1.

Un corps convexe

Quand $n \geq 2$, on va utiliser la géométrie des nombres de Minkowski. Pour cela on introduit un corps convexe symétrique. L'idée derrière la géométrie paramétrique des nombres (dans $\mathbb{R}^n$) est d'introduire un paramètre $q \geq 0$ et de considérer une famille de corps convexes indexée par q.
Pour $q > 0$, on pose

$$\mathcal{C}(\mathrm{e}^q) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \|\mathbf{x}\| \leq 1, \ |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \mathrm{e}^{-q}\right\}.$$

Meilleures approximations : étant donné q, trouver t minimal tel qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \cap \mathrm{e}^t\mathcal{C}(\mathrm{e}^q) \setminus \{0\}$.

$$\mathrm{e}^t\mathcal{C}(\mathrm{e}^q) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \middle| \ \|\mathbf{x}\| \leq \mathrm{e}^t, \ |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \mathrm{e}^{t-q}\right\}.$$

En d'autres termes, e^t est le premier minimum du réseau $\mathbb{Z}^n$ pour le convexe $\mathcal{C}(\mathrm{e}^q)$.

Minima successifs

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$.
On considère les minima successifs $\mathbb{Z}^n$ pour le convexe $\mathcal{C}(\mathrm{e}^q)$: on désigne par $L_{\mathbf{u},i}(q)$ le logarithme du i-ème minimum ; autrement dit $L_{\mathbf{u},i}(q)$ est le plus petit nombre réel $t \geq 0$ tel que les solutions $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ de l'inégalité

$$\|\mathbf{x}\| \leq \mathrm{e}^t, \ |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \mathrm{e}^{t-q}$$

engendrent un sous–espace de dimension $\geq i$. Le *graphe combiné* est celui de l'application

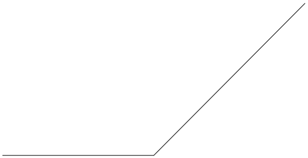
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}_{\mathbf{u}} : & [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & q & \longmapsto & (L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},n}(q)). \end{array}$$

Trajectoire d'un point

Trajectoire d'un point $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$:

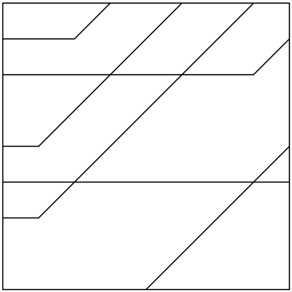
$$q \longmapsto L_{\mathbf{x}}(q) = \max\{\log|\mathbf{x}|\ ,\ q + \log|\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}|\}.$$

Graphe : se compose d'un segment horizontal joignant 0 à $\log|\mathbf{x}| - \log|\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}|$ avec la valeur $\log|\mathbf{x}|$, suivi d'une demi-droite de pente 1.



Trajectoires dans une boite

On considère toutes les trajectoires des éléments $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.



Étant donné un sous–ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, il n'y a qu'un nombre fini de trajectoires qui l'intersectent.

L'intersection est composée de segments horizontaux et de segments de pente 1.

Le graphe combiné $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ est la réunion de sous–ensembles de ces trajectoires.
Au dessus d'un paramètre q donné, il y a n points.

n–systèmes (suivant D. Roy)

Un n–*système* est une application

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P}: & [0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & q & \longmapsto & (P_1(q),\dots,P_n(q)) \end{array}$$

telle que, pour chaque $q \geq 0$,

(S1) on a $0 \leq P_1(q) \leq \cdots \leq P_n(q)$ et
$P_1(q) + \cdots + P_n(q) = q$,

(S2) il existe $\epsilon > 0$ et des entiers $k, \ell \in \{1,\dots,n\}$ tels que

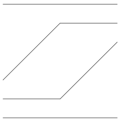
$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} \mathbf{P}(q) + (t-q)\mathbf{e}_\ell & \text{pour } \max\{0, q-\epsilon\} \leq t \leq q, \\ \mathbf{P}(q) + (t-q)\mathbf{e}_k & \text{pour } q \leq t \leq q+\epsilon, \end{cases}$$

où $\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0), \dots, \mathbf{e}_n = (0,\dots,0,1)$,

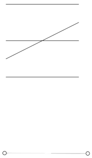
(S3) pour $q > 0$, si les entiers k et ℓ de (S2) satisfont $k > \ell$, alors $P_\ell(q) = \cdots = P_k(q)$.

n–systèmes

$k = \ell$

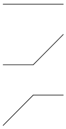


$k < \ell$



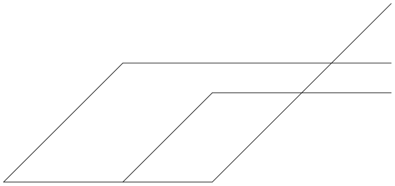
$k > \ell$.

Configuration interdite dans le cas $k > \ell$:



Exemple d'un 3–système

trois segments (un horizontal, deux de pente 1)
trois demi-droites (deux horizontales, une de pente 1)



Théorème fondamental de D. Roy (pour $\mathbb{R}^n$)

Théorème (D. Roy, 2015) *Modulo le groupe additif des fonctions bornées, la classe des graphes combinés* $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ *est identique à la classe des* n*–systèmes.*

Séries formelles

$K = \mathbb{F}(T)$, $K_\infty = \mathbb{F}((1/T))$, $\mathbf{u} \in K_\infty^n$, $\|\mathbf{u}\| = 1$.

$$\mathcal{C}(\mathrm{e}^q) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}_\infty^n \;\middle|\; \|\mathbf{x}\| \leq 1,\ |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq \mathrm{e}^{-q} \right\}.$$

Graphe combiné :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L}_\mathbf{u} : & [0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & q & \longmapsto & (L_{\mathbf{u},1}(q), \ldots, L_{\mathbf{u},n}(q)). \end{array}$$

Théorème principal (avec D. Roy) : *L'ensemble des applications* $\mathrm{L}_\mathbf{u}$ *pour* $\|\mathbf{u}\| = 1$ *est l'ensemble des* n*–systèmes.*

Systèmes parfaits (K. Mahler, H. Jager)

Kurt Mahler

(1903 – 1988)

Henk Jager

(with Rob Tijdeman)

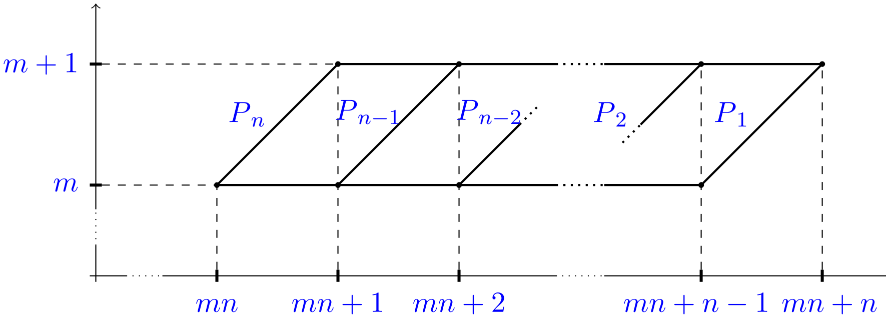
Il existe un unique n-système pour lequel

$$P_1(q) = \left\lfloor \frac{q}{n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad P_n(q) = \left\lceil \frac{q}{n} \right\rceil \quad \text{pour chaque } q \in \mathbb{N}.$$

Quand $q \equiv 0 \mod n$, un tel système a nécessairement $P_1(q) = \cdots = P_n(q) = q/n$.

Systèmes parfaits

Le dessin montre la réunion des graphes de $P_1, \dots, P_n$ au dessus d'un intervalle de la forme $[mn, (m+1)n]$ avec $m \in \mathbb{N}$.



Graphe combiné d'un système parfait

PARAMETRIC GEOMETRY OF NUMBERS 3

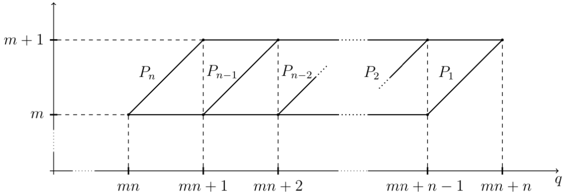


Figure 1: The combined graph of the n-system satisfying (1.4).

$$P_1(q) = \left\lfloor \frac{q}{n} \right\rfloor \quad \text{and} \quad P_n(q) = \left\lceil \frac{q}{n} \right\rceil \quad \text{for each } q \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Référence :
Damien Roy et MW,
Parametric geometry of numbers in function fields.
Mathematika, **63** 3 (2017) 1114–1135. arXiv: 1704.00291 [math.NT].

Exemple d'un système parfait

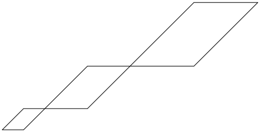
Supposons la caractéristique de $\mathbb{F}$ nulle. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des éléments distincts de $\mathbb{F}$, et soit $\mathbf{u} = \left(\mathrm{e}^{\omega_1/T}, \ldots, \mathrm{e}^{\omega_n/T}\right)$, où

$$\mathrm{e}^{\omega/T} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j}{j!} T^{-j} \in \mathbb{F}[[1/T]] \quad (\omega \in \mathbb{F}).$$

Alors $\|\mathbf{u}\| = 1$ et le graphe combiné $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ est un n-système parfait.

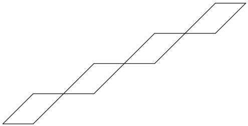
Graphe combiné d'une fraction continue

On considère une fraction continue $[a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots]$ avec $\deg a_0 = 0$, $\deg a_i \geq 1$ ($i \geq 1$).



Graphe combiné d'une fraction continue parfaite

Fraction continue parfaite : $[a_0, a_1, \dots, a_m, \dots]$ avec $\deg a_0 = 0$, $\deg a_i = 1$ $(i \geq 1)$.



Exemple (séries formelles de Fibonacci) :
$\theta = [0, T, T, \dots] = 1/(T + \theta)$, racine de $\theta^2 + T\theta - 1 = 0$.

Conjecture de Littlewood

John Edensor Littlewood

(1885–1977)

Conjecture de Littlewood : pour tout couple de nombres réels θ et ϕ, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que

$$n\|n\theta\| \, \|n\phi\| \leq \epsilon.$$

Ici, $\| \cdot \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Contre exemple pour les séries formelles

Harold Davenport

(1907–1969)

Donald J. Lewis

(1926–2015)

H. Davenport–D. Lewis : il existe Θ et Φ dans $\mathbb{R}((1/T))$ tels que, pour tout $N \in \mathbb{R}[T]$, on ait

$$|N| \, \|N\Theta\| \, \|N\Phi\| \geq \mathrm{e}^{-2}.$$

Ici, $|\cdot|$ désigne la valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{R}((1/T))$ qui est $\mathrm{e}^{\deg(\cdot)}$ sur $\mathbb{R}[T]$, tandis que $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'élément le plus proche de $\mathbb{R}[T]$.

Contre exemple explicite

Alan Baker

(1939–2018)

A. Baker : Pour tout $N \in \mathbb{R}[T]$, on a

$$|N| \, \|N\mathrm{e}^{1/T}\| \, \|N\mathrm{e}^{2/T}\| \geq \mathrm{e}^{-5}.$$

Plus généralement, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des nombres réels distincts non nuls, pour tout $N \in \mathbb{R}[T]$, on a

$$|N| \, \|N\mathrm{e}^{\lambda_1/T}\| \cdots \|N\mathrm{e}^{\lambda_r/T}\| \geq \mathrm{e}^{-(r^3+r)/2}.$$

Conséquence d'une estimation ℓ–adique (avec Damien Roy)

Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des nombres complexes deux-à-deux distincts, $a_1(T), \ldots, a_n(T)$ des polynômes non nuls dans $\mathbb{C}[T]$. Alors on a

$$\left|a_1(T)\mathrm{e}^{\omega_1/T} + \cdots + a_n(T)\mathrm{e}^{\omega_n/T}\right| \prod_{i=2}^{n} |a_i(T)| \geq C(n)^{-1}$$

et

$$|a_1(T)| \prod_{i=2}^{n} \left|a_1(T)\mathrm{e}^{\omega_i/T} - a_i(T)\mathrm{e}^{\omega_1/T}\right| \geq C(n)^{-(n-1)}$$

avec $C(n) = \exp(n(n-1)/2)$.

Quelques autres spécialistes de la géométrie paramétrique des nombres

Dzmitry Badziahin

Yann Bugeaud

Oleg German

Antoine Marnat

Nikolay Moshchevitin

Nguyen Ngoc Ai Van

Anthony Poëls

Développement récent

Tushar Das, Lior Fishman, David Simmons, Mariusz Urbański.
A variational principle in the parametric geometry of numbers, with applications to metric Diophantine approximation
C. R. Math. Acad. Sci. Paris **355** (2017), no. 8, 835–846
arXiv:1704.05277 [math.NT]

- Conjecture de Kadyrov, Kleinbock, Lindenstrauss, et Margulis (preprint 2014),
- Question de Bugeaud, Cheung, et Chevallier (preprint 2016),
- Conjecture de Starkov (2000),
- Conjecture de Schmidt (1983).

Géométrie paramétrique des nombres sur les corps de fonctions

Michel Waldschmidt

Professeur Émérite, Sorbonne Université,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/