# APPROXIMATION DES VALEURS DE FONCTIONS TRANSCENDANTES

PAR

MAURICE MIGNOTTE ET MICHEL WALDSCHMIDT

(Communicated by Prof. T. A. SPRINGER at the meeting of September 28, 1974)

Si des fonctions méromorphes d'ordre fini prennent en de nombreux points des valeurs presque algébriques, elles sont algébriquement dépendantes.

De nombreux résultats classiques concernant la transcendance des valeurs de fonctions exponentielles ou elliptiques peuvent être généralisés en des critères du type suivant (cf. [L] chap. II th. 1, [R] et [W] th. 2.2.1). Soient $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes d'ordre fini, prenant des valeurs algébriques en de nombreux points; alors, sous des hypothèses convenables, $f_1, \dots, f_d$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbf{Q}$.

Nous remplaçons ici l'hypothèse que ces valeurs sont algébriques par l'hypothèse qu'elles s'approchent très bien par des nombres algébriques. Voici le genre de résultat qu'on peut en déduire.

*Soit $f$ une fonction entière transcendante d'ordre $\leqslant \varrho$; soient $l > 0$ un nombre réel, et $(p_k/q_k)_{k \geqslant k_0}$ une suite de nombres rationnels deux à deux distincts tels que, pour tout entier $k \geqslant k_0$, on ait*

$$\max(|p_k|, |q_k|) \leqslant k^{1/l}; \quad \operatorname{Log} \|f(p_k/q_k)\| \leqslant -\frac{4}{l} k \operatorname{Log} k.$$

*Alors on a $\varrho \geqslant l$.*

(On a noté

$$\|z\| = \min_{n \in \mathbf{Z}} |z-n|$$

la distance du nombre complexe $z$ à l'entier le plus proche.)

Pour démontrer ces résultats, nous utilisons une fonction auxiliaire (proposition 1) dont la construction est suffisamment générale pour être intéressante en elle-même.

Ensuite, la méthode est une extension de celle qui a permis à SCHNEIDER, en 1934, de montrer la transcendance de nombres $\xi$ de la forme $a^b$, ou $\operatorname{Log}\alpha/\operatorname{Log}\beta$ ($a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ algébriques).

Le résultat obtenu ici ne contient pas de mesure de transcendance de ces nombres $\xi$; il faudrait pour cela modifier légérement la démonstration et utiliser les propriétés des polynômes exponentiels, ce que nous envisageons de faire dans un prochain article.

1. *Enoncé des résultats*

Les notations sont, de manière générale, celles de [L] et [W]. En particulier, une fonction entière $f$ sera dite d'ordre inférieur ou égal à $\varrho$ s'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $z$ complexe avec $|z|\geqslant 1$, on ait

$$|f(z)|\leqslant \exp(C|z|^{\varrho}),$$

ce que l'on notera

$$\operatorname{Log}|f|_R=\operatorname{Log}\sup_{|z|=R}|f(z)|\ll R^{\varrho} \text{ pour } R\to\infty.$$

Etant donné un nombre algébrique non nul $a$, de conjugués complexes $a_1=a, a_2, \dots, a_k$, et de dénominateur $d$, on définit la taille de $a$ par

$$t(a)=\max(\operatorname{Log}|a_1|, \dots, \operatorname{Log}|a_k|, \operatorname{Log} d).$$

On a la propriété fondamentale suivante. Si $a$ est un nombre algébrique non nul, de degré au plus égal à $n$, on a l'inégalité ([W] Propriété (1.2.3.)):

$$(*)\qquad \operatorname{Log}|a|\geqslant -2nt(a).$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème. *Soient $\varrho_1, \dots, \varrho_d, \sigma_1, \dots, \sigma_d, l$, des nombres réels positifs, avec*

$$d\geqslant 2,\ \sigma_1+\dots+\sigma_d=(d-1)l,\ \varrho_i<\sigma_i\ (1\leqslant i\leqslant d).$$

*Soient $K$ un corps de nombres, $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}$, et $(S_N)_{N\geqslant N_0}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbf{C}$, vérifiant*

$$\max_{z\in S_N}|z|\ll N \text{ pour } N\to\infty$$

*et*

$$N^l\leqslant \operatorname{Card} S_N\leqslant N^l+1.$$

*Soient $g_1, \dots, g_d$ des fonctions entières dans $\mathbf{C}$, sans zéros dans $\bigcup_{N\geqslant N_0} S_N$, telles que les fonctions $g_1f_1, \dots, g_df_d$ soient entières.*

*On suppose que, pour $1\leqslant i\leqslant d$, $g_i$ et $f_ig_i$ ont un ordre inférieur ou égal à $\varrho_i$, et que l'on a*

(i) $\operatorname{Log}\max_{z\in S_N} 1/|g_i(z)|\ll N^{\sigma_i}$ *pour* $N\to\infty$.

*On suppose que, pour $1\leqslant i\leqslant d$, $N\geqslant N_0$ et $z\in S_N$, il existe un élément $\beta_{i,N}(z)$ de $K$, de taille vérifiant*

(ii) $t(\beta_{i,N}(z))\ll N^{\sigma_i}$ *pour $N\to+\infty$, tel que, pour tout $N\geqslant N_0$,*

(iii) $\operatorname{Log}|f_i(z)-\beta_{i,N}(z)|\leqslant -N^l(q_N+2\operatorname{Log}N)$, *où $(q_N)_{N\geqslant N_0}$ est une suite de nombres réels positifs vérifiant*

(iv) $\min_{\substack{z\neq z'\\ z,z'\in S_N}}|z-z'|\gg \exp(-q_N)$ *pour* $N\to\infty$.

*Alors $f_1, \dots, f_d$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbf{Q}$.*

Nous verrons que l'hypothèse (iv) peut être remplacée par

$$\text{(iv)}' \quad \min_{z' \in S_N} \prod_{\substack{z \in S_N \\ z \neq z'}} |z-z'| \gg \exp -N^l \cdot q_N.$$

Les hypothèses (iii) et (iv) (ou (iv)') montrent que les nombres $f_i(z)$, pour $z \in S_N$, doivent être d'autant plus proches de nombres algébriques que les points de $S_N$ sont proches les uns des autres.

Dans le cas particulier $\beta_{i,N}(z) = f_i(z)$ (c'est-à-dire $f_i(z) \in K$) pour $1 \leq i \leq d$, $N \geq 0$, et $z \in S_N$, le résultat était déjà connu, sous une forme un peu plus faible ([W] Théorème 2.2.1). On obtient par conséquent comme corollaire le théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de $a^b$, pour $a \neq 0, 1$, et $b \notin \mathbf{Q}$, $a$ et $b$ algébriques.

Quand on choisit $f_1(z) = z$ et $d = 2$, on obtient un critère pour qu'une fonction méromorphe vérifie une relation du type

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ pour tout } z \in \mathbf{C},$$

où $P$ est un polynôme non nul à coefficients entiers. Il est facile de vérifier que cette condition équivaut au fait que $f$ est une fraction rationnelle à coefficients algébriques. Pour simplifier l'énoncé, nous choisissons $K = \mathbf{Q}$.

Corollaire 1: *Soient $f$ une fonction entière d'ordre $\leq \varrho$, $(p_k/q_k)_{k \geq k_0}$ et $(a_k/b_k)_{k \geq k_0}$ deux suites de nombres rationnels, les $p_k/q_k$, $k \geq k_0$, étant deux à deux distincts. Soit $l > \varrho$ un nombre réel; on suppose que l'on a*

$$\max(|p_k|, |q_k|) \ll k^{1/l} \text{ et } \operatorname{Log} |b_k| \ll k^{\varrho/l} \text{ pour } k \to \infty;$$

$$|f(p_k/q_k) - a_k/b_k| \leq k^{-4k/l} \text{ pour } k \geq k_0.$$

*Alors $f$ est un polynôme à coefficients algébriques.*

Le résultat annoncé dans l'introduction s'obtient en choisissant $b_k = 1$ pour tout $k \geq k_0$.

*Démonstration du corollaire 1*

▶ Soit $\varepsilon$ un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon < (l-\varrho)/2$. On choisit, dans le théorème,

$$f_1(z) = z; \; f_2(z) = f(z); \; \varrho_1 = \varepsilon; \; \sigma_1 = 2\varepsilon; \; \varrho_2 = \varrho; \; \sigma_2 = l - 2\varepsilon;$$

$$S_N = \{p_k/q_k; \; N^l \leq k \leq 2N^l\}; \; g_1 = g_2 = 1; \; q_N = 2 \operatorname{Log} N.$$

Comme la fonction $f$ est d'ordre $\leq \varrho$ et que l'on a $\operatorname{Log} |b_k| \ll k^{\varrho/l}$ pour $k \to \infty$, on obtient

$$\operatorname{Log} |a_k| \leq \operatorname{Log} |b_k| + \operatorname{Log}(1 + |f(p_k/q_k)|) \ll k^{\varrho/l} \text{ pour } k \to \infty.$$

D'après le théorème 1, les fonctions $z$ et $f(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbf{Q}$, d'où le résultat. ◀

On peut noter que ce corollaire contient le résultat suivant. Soient $f$ et $g$ deux fonctions entières, telles que $f - g$ vérifie les hypothèses du corollaire 1; alors, la différence entre $f$ et $g$ est égale à un polynôme à coefficients algébriques.

Ce résultat peut être formulé de manière moins précise mais plus imagée. Nous dirons que deux fonctions dont la différence vérifie les hypothèses du corollaire sont arithmétiquement proches, en ce sens qu'elles prennent en de nombreux points (bien choisis) des valeurs dont la différence est très proche d'un nombre rationnel (ou, plus généralement, algébrique). Le corollaire obtenu exprime que deux fonctions entières arithmétiquement assez proches diffèrent d'un polynôme à coefficients algébriques; en particulier, elles sont alors simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$ ou non.

Le théorème implique aussi un résultat du type suivant: si une fonction entière transcendante, d'ordre fini, prend, en une suite de points d'un corps de nombres, des valeurs très proches de nombres de ce corps, alors cette suite est, en un certain sens, suffisamment lacunaire. L'exemple le plus simple est le suivant.

Corollaire 2: *Soit $f$ une fonction entière transcendante, d'ordre $\leqslant \varrho$. On suppose qu'il existe une suite d'entiers $(n_1, n_2, \ldots)$ distincts, croissante, telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Log} \|f(n_k)\|}{n_k^{\varrho+\varepsilon} \cdot \operatorname{Log} n_k} = -\infty, \quad \textit{avec } \varepsilon > 0.$$

*Alors, on a*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{k^{1/(\varrho+\varepsilon)}} = +\infty.$$

*Démonstration*:

▶ Supposons que la conclusion du corollaire soit fausse. Alors, quitte à prendre une sous-suite de $(n_k)$, on peut supposer que l'on a:

$$n_k \ll k^{1/(\varrho+\varepsilon)} \ll n_k.$$

Prenons maintenant $f_1(z) = z$, $f_2 = f$, $l = \varrho + \varepsilon$, $\sigma_2 = \varrho + \varepsilon/2$, $\sigma_1 = \varepsilon/2$. Choisissons enfin $S_N = \{n_k;\ N^l \leqslant k < 2N^l + 1\}$, et, bien entendu, $g_1 = g_2 = 1$, $q_N = 0$. Il est alors facile de vérifier que les hypothèses du théorème ont lieu, en prenant

$$\beta_{1,N}(z) = z \text{ si } z \in S_N \text{ et } \beta_{2,N}(n_k) = m_k, \text{ où } \|f(n_k)\| = |f(n_k) - m_k|,\ m_k \in \mathbb{Z}.$$

D'après le théorème $f$ est algébrique. Contradiction. ◀

On remarquera que la conclusion du corollaire 2 n'est intéressante que quand $\varrho + \varepsilon < 1$.

On obtient aussi des résultats de dépendance algébrique entre certaines fonctions transcendantes. Par exemple:

Corollaire 3: *Soit $f$ entière d'ordre $\leqslant \varrho$. Soit $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0, 1$. Soit $l > \varrho + 1$. Soient $(p_k/q_k)_{k \geqslant k_0}$ des rationnels deux à deux distincts. On suppose*

$$\operatorname{Log} \max(|p_k|, |q_k|) \ll k$$

*et*

$$\operatorname{Log}\left(\left\|f\left(\frac{\operatorname{Log}(p_k/q_k)}{\operatorname{Log} a}\right)\right\|\right) \leqslant -\frac{l+2}{l}\, k^l \operatorname{Log} k \quad si \quad k \geqslant k_0.$$

*Alors, il existe un polynôme non nul $P(X, Y)$, à coefficients entiers, tel que*

$$P(a^z, f(z)) = 0, \quad pour\ tout\ z \in \mathbb{C}.$$

*Démonstration*:

▶ On prend

$$S_N = \left\{\frac{\operatorname{Log}(p_k/q_k)}{\operatorname{Log} a};\ N^l \leqslant k < 2N^l + 1\right\} \text{ et } f_1(z) = a^z,\ f_2 = f,\ \sigma_2 = \frac{\varrho + l - 1}{2}.$$

Les détails sont laissés au lecteur. ◀

(Une fonction $f$, comme dans le corollaire 3, est d'ordre $\leqslant 1$.)

## 2. *Lemmes préliminaires*

Lemme 1: *Soient $u_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant \nu,\ 1 \leqslant j \leqslant \mu)$ des nombres réels. Soit $U$ un entier vérifiant*

$$U \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant \mu} \sum_{i=1}^{\nu} |u_{i,j}|$$

*et soient $X$ et $l$ deux nombres entiers positifs tels que*

$$l^\mu < (X+1)^\nu.$$

*Alors, il existe des éléments $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ de $\mathbb{Z}$, non tous nuls, tels que*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} |\xi_i| \leqslant X,$$

*et*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant \mu} \left|\sum_{i=1}^{\nu} u_{i,j}\xi_i\right| \leqslant \frac{UX}{l}.$$

*Démonstration:* C'est le lemme 1.3.2 de [W]. ◀

Lemme 2: *Soit $f$ une fonction entière dans $\mathbb{C}$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes distincts. On pose*

$$Q(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j).$$

*Soit $C$ un cercle dont l'intérieur contient les points $z_1, \ldots, z_n$; soit $C_j$ un cercle de centre $z_j$ et de rayon $\leqslant \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |z_i - z_j|$, pour $j = 1, \ldots, n$. Alors, pour tout point $z$, intérieur à $C$ et extérieur aux $C_j$, on a la relation*

$$\frac{f(z)}{Q(z)} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{n} f(z_j)\int_{C_j} \frac{1}{\zeta - z}\,\frac{d\zeta}{Q(\zeta)}.$$

*Démonstration:* C'est la formule d'interpolation d'Hermite. Voir, par exemple, [L], lemme 6, p. 63. ◀

Nous utiliserons la conséquence suivante du lemme 2.

Lemme 2′: *Soit $f$ une fonction analytique dans un disque $|z|\leqslant R$. Soit $\Lambda$ un ensemble de $m$ points d'un disque $|z|\leqslant R_1$, avec $R_1<R$. Soit $\delta$ le minimum des distances mutuelles des points de $\Lambda$. Alors, on a*

$$|f|_{R_1}<2|f|_R\left(\frac{4R_1}{R}\right)^{m-1}+6\left(\frac{6R_1}{\delta}\right)^{m-1}\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|.$$

*Démonstration*:

▶ Si $4R_1\geqslant R$, le résultat est trivial, puisque $|f|_{R_1}\leqslant|f|_R$. Supposons donc $R>4R_1$. Considérons alors la formule du lemme 2, où $z_1, \ldots, z_m$ désignent les points de $\Lambda$, où $C$ est le cercle $|z|=R$, et $C_j$ le cercle de centre $z_j$ et de rayon $r_j=\min(\delta, R_1)/2$. On majore, pour $|w|=2R_1$,

$$|Q(w)|\leqslant(3R_1)^m;$$

$$\frac{1}{|\zeta-w|}\leqslant\frac{1}{2R_1};\left|\frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}\right|\leqslant\frac{|f|_R}{(R-R_1)^m}\text{ sur } C,$$

et

$$\frac{1}{|\zeta-w|}\leqslant\frac{2}{R_1};\ \frac{1}{|Q(\zeta)|}\leqslant\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m-1}\frac{1}{r_j}\text{ sur } C_j.$$

On majore enfin $3R_1/(R-R_1)$ par $4R_1/R$. ◀

Remarquer que le terme $(6R_1/\delta)^{m-1}$ peut être remplacé par $(3R_1)^{m-1}/\Delta$, avec

$$\Delta=\min_{\lambda\in\Lambda}\prod_{\substack{\lambda'\in\Lambda\\ \lambda'\neq\lambda}}|\lambda'-\lambda|.$$

Lemme 3: *Soit*

$$P(X_1, \ldots, X_m)=\sum_{i_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{i_m=0}^{r_m}p_{i_1,\ldots,i_m}X_1^{i_1}\ldots X_m^{i_m},\ r_h\geqslant 1\ \textit{pour}\ h=1, \ldots, m.$$

*un polynôme à coefficients complexes. Soient $a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_m$ des nombres complexes vérifiant*

$$\max|a_h-a'_h|\leqslant\varepsilon,\ \max(1, |a_h|, |a'_h|)\leqslant A_h.$$

*Alors, on a l'inégalité*

$$|P(a_1, \ldots, a_m)-P(a'_1, \ldots, a'_m)|\leqslant m\sum_{(i)}|p_{(i)}|\Big(\prod_{h=1}^{m}r_hA_h^{r_h}\Big)\varepsilon.$$

*Démonstration*:

▶ Par linéarité, il est clair qu'il suffit de prouver cette inégalité lorsque $P$ est de la forme $X_1^{i_1}\ldots X_m^{i_m}$, $i_h\leqslant r_h$ pour $h=1, \ldots, m$. Soit à vérifier la majoration

$$|a_1^{i_1}\ldots a_m^{i_m}-a_1'^{i_1}\ldots a_m'^{i_m}|\leqslant m\Big(\prod_{h=1}^{m}r_hA_h^{r_h}\Big)\varepsilon.$$

Pour $m=1$, le résultat a lieu. Supposons qu'il soit vérifié jusqu'à l'ordre $m-1$ et démontrons le à l'ordre $m$. On a

$$|a_1^{i_1}\dots a_m^{i_m}-a_1'^{i_1}\dots a_m'^{i_m}|\leqslant|a_1^{i_1}\dots a_{m-1}^{i_{m-1}}||a_m^{i_m}-a_m'^{i_m}|+|a_m'^{i_m}||a_1^{i_1}\dots a_{m-1}^{i_{m-1}}-a_1'^{i_1}\dots a_{m-1}'^{i_{m-1}}|$$

$$=A_1^{r_1}\dots A_{m-1}^{r_{m-1}}(r_m A_m^{r_m}\varepsilon)+(m-1)\,A_m^{r_m}\Big(\prod_{h=1}^{m-1} r_h A_h^{r_h}\Big)\,\varepsilon\leqslant m\Big(\prod_{h=1}^{m} r_h A_h^{r_h}\Big)\,\varepsilon.$$

D'où la conclusion, par récurrence sur $m$. ◀

3. *Construction d'une fonction auxiliaire*

La première étape de nombreuses démonstrations de la théorie des nombres transcendants consiste à construire une fonction auxiliaire qui est, en un sens convenable, suffisamment petite. Bien que reposant presque toutes sur le principe des tiroirs, les constructions qui figurent dans la littérature sont souvent très variées dans les détails et seulement applicables à des situations bien particulières. Etant donné des fonctions entières $f_1, \dots f_d$, nous nous proposons de montrer l'existence d'un polynôme non nul $P(X_1, \dots, X_d)$, "pas tros gros", tel que la fonction $F=P(f_1, \dots, f_d)$ soit petite en module dans un grand disque.

PROPOSITION 1: *Soient $\varrho_1, \dots, \varrho_d, \mu_1, \dots, \mu_d, \mu, \xi, C, \varepsilon$ des nombres réels, avec $\mu>0$, $0<\varepsilon<\xi$, $C\geqslant 6\max(2/\varepsilon, \mu+\xi)$ et $d\geqslant 2$, vérifiant*

$$0\leqslant\frac{\mu}{d}+\mu_h\leqslant\mu-\xi\varrho_h,\ \textit{pour}\ h=1, \dots, d,$$

*et*

$$\mu_1+\dots+\mu_d=0.$$

*Soient $f_1, \dots, f_d$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ et $g_1, \dots, g_d$ des fonctions non nulles telles que les fonctions $g_h$ et $f_h g_h$ soient entières, d'ordre au plus égal à $\varrho_h$, pour $h=1, \dots, d$. Alors, il existe une suite de polynômes $(P_N(X_1, \dots, X_d))_{N\geqslant N_0}$, à coefficients entiers, non nuls, de hauteur $\leqslant H$, de degré en $X_h$ au plus égal à $L_h$, où*

$$\operatorname{Log} H=\frac{1}{C}\,N^\mu\operatorname{Log} N,$$

$$L_h=[C^{2/d}N^{\mu/d+\mu_h}],\ h=1, \dots, d,$$

*qui possède la propriété suivante. Pour tout $z$ vérifiant $1\leqslant|z|\leqslant N^\xi$, on a la majoration*

$$\operatorname{Log}|(\prod_{h=1}^{d} g_h^{L_h}(z))\,P_N(f_1(z), \dots, f_d(z))|\leqslant N^\mu\operatorname{Log}|z|-(\xi-\varepsilon)\,N^\mu\operatorname{Log} N.$$

*Démonstration*:

▶ On construit d'abord, pour $N$ suffisamment grand, un polynôme non nul $P_N$, tel que la fonction $P_N$ $(f_1, \dots, f_d)$ prenne des valeurs très petites en des points bien choisis. On montre ensuite que la suite $(P_N)$ vérifie les propriétés requises.

a) Considérons un compact $K$, ayant la forme d'un carré, contenu dans le disque $|z| \leqslant 1/2$ de $\mathbb{C}$, et ne contenant aucun des pôles des fonctions $f_1, \ldots, f_d$. Soient $c_1$ la longueur du côté de ce carré et

$$c_2 = \max_{1 \leqslant h \leqslant d} \sup_{z \in K} |f_h(z)|.$$

Soit $N$ un entier suffisamment grand, on découpe $K$ en $[N^{\mu/2}]^2$ petits carrés égaux, et on désigne par $E_N$ l'ensemble des centres de ces carrés. On définit ensuite

$$L_0 = C^{2/d} N^{\mu/d},$$

et

$$L_h = [L_0 N^{\mu_h}], \text{ pour } 1 \leqslant h \leqslant d.$$

On a évidemment

$$\max_{0 \leqslant \lambda_h \leqslant L_h;\, 1 \leqslant h \leqslant d} \operatorname{Log} \max_{t \in E_N} |f_1(t)^{\lambda_1} \ldots f_d(t)^{\lambda_d}| \leqslant c_2 \sum_{h=1}^{d} L_h = o(N^\mu).$$

Le lemme 1 montre l'existence d'un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, de degré inférieur ou égal à $L_h$ par rapport à $X_h$, et de hauteur inférieure ou égale à

$$H = \exp\left(\frac{1}{C} N^\mu \operatorname{Log} N\right),$$

tel que la fonction $F_N = P_N(f_1, \ldots, f_d)$ vérifie, pour $N$ assez grand,

$$\max_{t \in E_N} \operatorname{Log} |F_N(t)| \leqslant \frac{2}{C} N^\mu \operatorname{Log} N - \frac{C}{3} N^\mu \operatorname{Log} N \leqslant -\frac{C}{4} N^\mu \operatorname{Log} N.$$

b) Considérons maintenant le polynôme

$$Q_N = \prod_{t \in E_N} (X - t);$$

la formule d'interpolation du lemme 2, appliquée à la fonction

$$G_N = F_N \prod_{h=1}^{d} g_h^{L_h}$$

donne

$$G_N(z) = \frac{1}{2i\pi} Q_N(z) \left[\int_\Gamma \frac{G_N(\zeta)}{Q_N(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \sum_{t \in E_N} G_N(t) \int_{\Gamma_t} \frac{1}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{Q_N(\zeta)}\right],$$

où $\Gamma$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon $R = 2N^\xi$, et $\Gamma_t$ le cercle de centre $t$ et de rayon $(c_1/2) N^{-\mu/2}$. Choisissons $z$ dans la couronne $1 \leqslant |z| \leqslant R$. On a

$$\operatorname{Log} |Q_N(z)| \leqslant N^\mu \operatorname{Log}(|z| + 1),$$

$$\operatorname{Log} \sup_{\zeta \in \Gamma} |G_N(\zeta)| \leqslant \operatorname{Log} H + c_3 \sum_{h=1}^{d} L_h R^{\varrho_h} \leqslant \frac{2}{C} N^\mu \operatorname{Log} N,$$

si $N$ assez grand;

$$\operatorname{Log} \sup_{\zeta \in \Gamma} \frac{1}{|Q_N(\zeta)|} < -N^{\mu} \operatorname{Log}(R-1);$$

$$\operatorname{Log} \max_{t \in E_N} |G_N(t)| \leqslant -\frac{C}{4} N^{\mu} \operatorname{Log} N + c_4 \sum_{h=1}^{d} L_h \leqslant -\frac{C}{5} N^{\mu} \operatorname{Log} N,$$

si $N$ assez grand;

$$\sup_{\zeta \in \Gamma_t} |1/(\zeta - z)| \leqslant \frac{2}{c_1} N^{\mu/2};$$

et enfin, pour $N$ assez grand,

$$\sup_{\zeta \in \Gamma_t} \operatorname{Log} \; 1/|Q_N(\zeta)| \leqslant N^{\mu} \operatorname{Log}(4c_1^{-1} N^{\mu/2}) \leqslant \mu N^{\mu} \operatorname{Log} N.$$

Un calcul immédiat achève la démonstration, quand $N$ est suffisamment grand (disons $N \geqslant N_0$). ◀

4. *Démonstration du théorème*

▶ On peut supposer, sans perte de généralité, que l'on a $\max_{1 \leqslant i \leqslant d} \sigma_i \leqslant l$. En effet, si on avait par exemple $\sigma_d > l$, en posant

$$\sigma_i' = \sigma_i + \frac{\sigma_d - l}{d-1}, \quad (1 \leqslant i \leqslant d-1),$$

on serait ramené à considérer les fonctions $f_1, \ldots, f_{d-1}$.

Soit $N$ un entier suffisamment grand; considérons le polynôme $P_N$ de la proposition 1, dans laquelle on choisit:

$$\mu = l; \; \mu_i = \frac{d-1}{d} l - \sigma_i, \; (1 \leqslant i \leqslant d); \; \xi = \min_{1 \leqslant i \leqslant d} \frac{\sigma_i}{\varrho_i}; \; 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2} \min(\xi - 1, 1);$$

$C = 6 \max(2/\varepsilon, \; \mu + \xi)$.

Si les fonctions $f_1, \ldots, f_d$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$, alors les deux fonctions

$$F_N = P_N(f_1, \ldots, f_d) \text{ et } G_N = \Big(\prod_{i=1}^{d} g_i^{L_i}\Big) F_N$$

ne sont pas identiquement nulles; comme la fonction $G_N$ est entière, on en déduit $\lim_{R \to \infty} \operatorname{Log} |G_N|_R > 0$.

Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $M > 0$ tels que

(1) $$\operatorname{Log} |G_N|_M \leqslant -\varepsilon M^l \operatorname{Log} M.$$

On choisit pour $M$ le plus grand entier vérifiant (1). D'après la proposition 1, on a $M \geqslant N$.

a) Soit $z \in S_M$; montrons que le nombre

$$\phi_M(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \prod_{i=1}^{d} (\beta_{i,M}(z))^{\lambda_i}$$

est nul. Pour cela, notons d'abord que $\phi_M(z)$ est un nombre algébrique dont la taille vérifie, grâce à (ii), l'inégalité

$$t(\phi_M(z)) \leqslant c_4 \sum_{h=1}^{d} L_h M^{\sigma_h} + \operatorname{Log} H < \frac{\varepsilon}{3} M^l \operatorname{Log} M.$$

D'autre part, le lemme 3 et l'hypothèse (iii) conduisent à la majoration

$$\operatorname{Log} |F_N(z) - \phi_M(z)| < c_3 \sum_{h=1}^{d} L_h M^{\sigma_h} + \operatorname{Log} H - (q_M + 2 \operatorname{Log} M) \cdot M^l;$$

d'où, pour $N$ assez grand,

$$\operatorname{Log} |F_N(z) - \phi_M(z)| < -(q_M + \tfrac{3}{2} \operatorname{Log} M) \cdot M^l.$$

D'après (1), on obtient la majoration

$$\operatorname{Log} |\phi_M(z)| < -\frac{\varepsilon}{2} M^l \operatorname{Log} M.$$

Comme l'inégalité (*) n'est pas vérifiée, $\phi_M(z)$ est nul; d'où

$$\operatorname{Log} |F_N(z)| < -(q_M + \tfrac{3}{2} \operatorname{Log} M) \cdot M^l.$$

b) Utilisons maintenant le lemme 2′ avec $\Lambda = S_M$, $R = M^\xi$, $R_1 = M + 1$. On majore:

$$\operatorname{Log} |G_N|_M < \operatorname{Log} H + c_4 \sum_{h=1}^{d} L_h R^{\varrho_h} < \varepsilon M^l \operatorname{Log} M;$$

$$\operatorname{Log} (4R_1/R)^{m-1} < -\xi M^l \operatorname{Log} M + 0(M^l);$$

$$\operatorname{Log} 6(6R_1/\delta)^{m-1} < (q_M + \operatorname{Log} M) \cdot M^l + 0(M^l);$$

$$\operatorname{Log} \sum_{\lambda} |f(\lambda)| < -(q_M + \tfrac{3}{2} \operatorname{Log} M) \cdot M^l + 0(M^l);$$

d'où

$$\operatorname{Log} |G_N|_{M+1} < -\varepsilon(M+1)^l \operatorname{Log} (M+1).$$

Ceci contredit le choix de $M$. Cette contradiction achève la démonstration. ◀

## 5. *Remarques finales*

Terminons par quelques remarques (que nous développerons ailleurs).

Comme nous l'avons déjà dit, le théorème précédent ne contient pas de mesure de transcendance; en effet, une mesure de transcendance d'un nombre complexe $t$ est une minoration de $P(t)$, pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \neq 0$; cette minoration se ramène à l'étude de $|t - \alpha|$, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Ici, au lieu de minorer $|t - \alpha|$, on montre qu'il n'existe pas de suite $\alpha_N$ de nombres algébriques qui possède simultanément les deux propriétés suivantes: la taille des $\alpha_N$ ne croît pas trop vite, les $\alpha_N$ convergent rapidement vers $t$. Ainsi, le résultat peut s'interpréter comme un énoncé de la lacunarité. Pour remédier à ce défaut, il suffit de pouvoir majorer l'entier $M$ de la démonstration du théorème, par exemple par: $M \ll N$, et dans ce cas, il suffit de considérer les approximations $\beta_{i,N}(z)$ (au lieu de $\beta_{i,M}(z)$). Il est clair qu'on ne peut obtenir cette majoration en toute généralité (il suffit, pour s'en convaincre, de considérer les deux fonctions $z$ et $tz$, $t$ transcendant). Néanmoins, on peut démontrer la majoration voulue quand les $f_i$ sont des polynômes exponentiels à coefficients algébriques, et il suffit alors que l'inégalité (iii) soit vérifiée pour une infinité de $N$ (et non plus pour tout $N$).

Il y a d'autres généralisations possibles; ainsi

– on peut remplacer le corps de nombres $K$ par une extension de $\mathbf{Q}$ de type de transcendance fini; le critère de transcendance correspondant est le théorème 4.5.1 de [W].

– on peut améliorer le résultat quand on suppose que les $f_i$ satisfont des équations différentielles; le résultat "non effectif" associé est, par exemple, le théorème 1 du chapitre III de [L] (ou bien [W], théorème 3.3.1).

– on peut obtenir des résultats semblables pour les fonctions de plusieurs variables, généralisant ainsi un énoncé de Bombieri et Lang;

– on peut démontrer un analogue local du théorème (concernant des fonctions méromorphes dans un disque), qui se traduit sans difficulté en $p$-adique.

*Université de Paris-Nord*
*Centre Scientifique et Polytechnique*
*Département de Mathématiques*
*Place du 8 Mai 1945*
*93206 SAINT DENIS*

*Université de Paris VI*
*Mathématiques; Tour 45–46*
*2, Place Jussieu,*
*75230 PARIS CEDEX 05*

## RÉFÉRENCES

[L] : Lang, Serge, Introduction to transcendental numbers, Addison Wesley (1966).

[R] : Ramachandra, K., Contributions to the theory of transcendental numbers. Acta Arith. 14, 65–88 (1968).

[W]: Waldschmidt, Michel, Un premier cours sur les nombres transcendants; Lecture Notes in mathematics, Springer vol. 402 (1974).