08/07/2022

Université de N'Djamena (Tchad)

Introduction à la théorie des nombres transcendants.

Michel Waldschmidt

Professeur Émérite, Sorbonne Université,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Leibniz

1646 – 1716

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leibniz.html

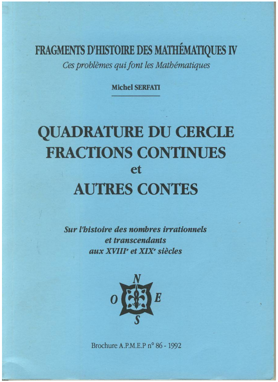
Leonhard Euler

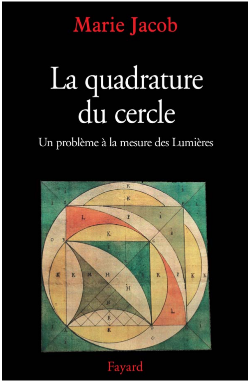
Euler

1707–1783

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html

Quadrature du cercle





Irrationalité de π

Āryabhaṭa, né vers 476 AD : $\pi \sim 3.1416$.

Nīlakaṇṭha Somayājī, né vers 1444 AD : *Why then has an approximate value been mentioned here leaving behind the actual value ? Because it (exact value) cannot be expressed.*

K. Ramasubramanian, *The Notion of Proof in Indian Science*, 13th World Sanskrit Conference, 2006.

Johann Heinrich Lambert

Lambert

1728 – 1777

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lambert.html

Lambert et le roi Frederick II de Prusse

— Que savez vous, Lambert ?
— Tout, Sire.
— Et de qui le tenez–vous ?
— De moi-même !

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,
Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.

$\tan(v)$ est irrationnel quand $v \neq 0$ est rationnel
Par conséquent π est irrationnel, car $\tan(\pi/4) = 1$.

Lambert (extrait début)

Mais comme, après la fraction $\frac{11}{14}$ trouvée par *Archimede*, qui ne donne qu'un à peu près, on paſſe à celle de *Metius*, $\frac{355}{452}$, qui n'eſt pas non plus exacte, & dont les nombres ſont conſidérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure, que la ſomme de cette ſuite, bien loin d'être égale à une fraction ſimple, eſt une quantité irrationelle.

§. 2. Quelque vague que ſoit ce raiſonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne ſont pas celui de la quadrature du cercle. La plûpart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraine quelque fois juſqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils ſe trouveroient ſatisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut toute autre choſe. Et s'agît-il de démontrer, qu'en effet le diametre n'eſt pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonſtration doit être ſi rigide, qu'elle ne le cede à aucune démonſtration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que les géométres n'en ſeront point ſurpris. Ils doivent être accoutumés depuis longtems à ne s'attendre à autre choſe. Mais voici ce qui

Lambert §89

§. 89. Tout ce que je viens de faire voir ſur les quantités tranſcendentes circulaires & logarithmiques, paroit être fondé ſur des principes beaucoup plus univerſels, mais qui ne ſont pas encore aſſez développés. Voici cependant ce qui pourra ſervir à en donner quelque idée. Il ne ſuffit pas d'avoir trouvé que ces quantités tranſcendentes ſont irrationelles, c'eſt à dire incommenſurables à l'unité. Cette propriété ne leur eſt pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne ſont gueres du reſſort de l'analyſe, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme *algébriques*: & telles ſont toutes les *quantités irrationelles radicales*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ &c. & toutes les *racines irrationelles des équations algébriques*, comme p. ex. celles des équations

$$0 = xx - 4x + 1,$$
$$0 = x^3 - 5x + 1,$$

&c.

321

Je nommerai les unes & les autres *quantités irrationelles radicales*, & voici le théoreme, que je crois pouvoir être démontré.

Lambert §90

§. 90. Je dis donc *qu'aucune quantité tranſcendente circulaire & logarithmique ne ſauroit être exprimée par quelque quantité irrationelle radicale, qui ſe rapporte à la même unité, & dans laquelle il n'entre aucune quantité tranſcendente.* Ce théoreme ſemble devoir être démontré de ce que les quantités tranſcendentes dépendent de

$$e^x,$$

où l'expoſant eſt variable, au lieu que les quantités radicales ſuppoſent des expoſans conſtans. Ainſi p. ex. un arc de cercle étant rationel ou commenſurable au rayon, ſa tangente, que nous avons vu être irrationelle, ne ſauroit être une racine quarrée de quelque quantité rationelle. Car ſoit l'arc propoſé $= \omega$, & faiſons tang $\omega = \sqrt{a}$, nous aurons

$$t\,\omega^2 = \frac{f\,\omega^2}{\cos\omega^2} = \frac{1 - \cos 2\,\omega}{1 + \cos 2\,\omega} = a,$$

d'où il ſuit

$$\cos 2\,\omega = \frac{1 - a}{1 + a}:$$

or cette quantité étant rationelle, il s'enſuit que l'arc $2\,\omega$ eſt irrationel, ce qui étant contre l'hypotheſe, il eſt clair qu'en faiſant tang $\omega = \sqrt{a}$, la quantité a ne ſauroit être rationelle, & que partant la tangente d'un arc rationel quelconque n'eſt point une racine quarrée de quelque quantité rationelle.

Lambert §91

§. 91. Ce théoreme étant une fois démontré dans toute son universalité, il s'ensuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationelle, il n'y aura pas moien de la déterminer par quelque construction géométrique. Car tout ce qu'on peut construire géométri-

quement revient aux quantités rationelles & radicales; & il s'en faut même de beaucoup que ces dernieres puissent indifféremment être construites. On voit bien qu'il en sera de même de tous les arcs de cercles dont la longueur ou les deux points extremes sont donnés, soit par des quantités rationelles, soit par des quantités radicales. Car, si la longueur de l'arc est donnée, il faudra trouver ses deux points extremes, en y employant la corde, le sinus, la tangente, ou quelque autre ligne droite qui, pour pouvoir être construite, sera toujours dépendante ou réduisible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationelles ou radicales, ces lignes seront transcendentes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extremes de l'arc sont donnés, j'entens par des quantités rationelles ou radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente: ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.

Joseph Liouville

Liouville
1809 – 1882

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Liouville.html

Les premiers exemples de nombres transcendants

» Ainsi *les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine x d'une équation algébrique de degré n, à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance $(n-2)^{\text{ème}}$ du dénominateur de la réduite précédente.*

» Il suffira de donner aux quotients incomplets μ un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient

(885)

incomplet quelconque, on forme chacun des suivants μ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la loi $\mu = q^q$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, m étant l'indice du rang de μ.

» Au reste la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{1\cdot 2}} + \frac{1}{a^{1\cdot 2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{a^{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}} + \ldots,$$

a étant un nombre entier.

Generiques vs mesure pleine, Baire vs Lebesgue

René Baire
(1874 – 1932)

Henri Léon Lebesgue
(1875 – 1941)

Baire : G_δ = intersection dénombrable d'ouverts denses.
Ensemble *maigre* : complement d'un G_δ.

Les nombres qui ne satisfont pas une condition diophantienne forment un ensemble générique en systèmes dynamiques. Pour la mesure de Lebesgue, l'ensemble des nombres de Liouville (i.e. ceux qui ne satisfont pas une condition diophantienne) est de mesure nulle.

Mathematical genealogy

René Baire (1899)

|

Arnaud Denjoy (1909)

|

Charles Pisot (1938)

|

Yvette Amice (1965)

|

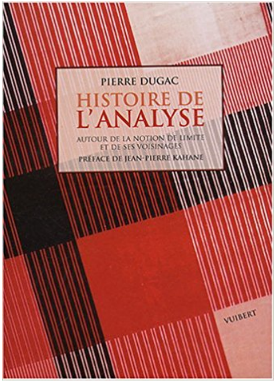
Jean Fresnel (1967)

|

Michel Waldschmidt (1972)

http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu

Pierre Dugac (1926 – 2000)



Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire. Arch. History Exact Sci. **15** (1975/76), no. 4, 297–383.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Dugac

Mathematical genealogy

Leonhard Euler (1726)
|
Joseph Louis Lagrange (BA 1754)
|
Simeon Denis Poisson (1800)
|
Michel Chasles (1814)
|
Gaston Darboux (1866)
|
Émile Picard (1877)

René Baire (1899)
|
Arnaud Denjoy (1909)
|
Charles Pisot (1938)
|
Yvette Amice (1965)
|
Jean Fresnel (1967)
|
Michel Waldschmidt (1972)

http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu

Wetzlarer Bier Waldschmidt Euler

Charles Hermite

Hermite
1822 – 1901

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hermite.html

Henri Padé

Padé

1863 – 1953

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pade.html

"Nous avons été amené à nous occuper de cette question par une parole de Monsieur Hermite, recueillie dans une de ses leçons, et par laquelle il laissait entrevoir que cachait encore sans doute cette théorie"
Henri Padé, Thèse: *Sur la Représentation Approchée d'une Fonction par des Fractions Rationnelles* (1882)

Functions : rational, algebraic, transcendental

Rational functions : $\mathbb{C}(z)$.

Algebraic functions : $P\big(z, f(z)\big) = 0$

Example :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} z^n \qquad (|z| < 1).$$

Transcendental functions. Examples :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

$$\frac{1}{z}\log(1-z) = -\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+1} \qquad (|z| < 1).$$

The exponential function

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z, \qquad e^0 = 1.$$

L. Euler

$$e^{i\pi} = -1.$$

Leonhard Euler

1707 – 1783

Charles Hermite and Ferdinand Lindemann

Hermite (1873)

Transcendence of e

$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,4\ldots$

Lindemann (1882)

Transcendence of π

$\pi = 3.141\,592\,653\,5\ldots$

Hermite – Lindemann Theorem (1882)

Ch. Hermite

1822 – 1901

von Lindemann

1852 – 1939

Theorem. *If* w *is a nonzero complex number, one at least of the two numbers* w, e^w *is transcendental.*

Consequences : transcendence of e, π, $\log\alpha$, e^β, for algebraic α and β assuming $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\log\alpha \neq 1$.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Hermite.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Lindemann.html

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Cantor

1845 – 1918

ROBERT GRAY. *Georg Cantor and Transcendental Numbers*. The American Mathematical Monthly, Vol. **101**, No. 9 (Nov., 1994), pp. 819-832.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cantor.html

David Hilbert

Hilbert

1862 – 1943

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html

Constance Reid : Hilbert

The second problem became known as Hilbert's α^β conjecture. As Hilbert notes, corollaries of this conjecture include the transcendence of $2^{\sqrt{2}}$ and of $e^\pi = (e^{\pi i})^{-i} = (-1)^{-i}$.

An amusing incident concerning this conjecture is related in C. Reid's biography of Hilbert [Rei, C]. Carl Ludwig Siegel came to Gottingen as a student in 1919. He always remembered a lecture by Hilbert who, wanting to give his audience examples of problems in the theory of numbers which seem simple at first glance but which are, in fact, incredibly difficult, mentioned the Riemann Hypothesis, Fermat's Last Theorem and the transcendence of $2^{\sqrt{2}}$. Hilbert said that given recent progress he hoped to see the proof of the Riemann Hypothesis in his lifetime. Fermat's problem required totally new methods and possibly the youngest members of the audience would live to see it solved. As for $2^{\sqrt{2}}$, Hilbert said that no one at the lecture would live to see its proof. Hilbert was wrong! Siegel proved the transcendence of $2^{\sqrt{2}}$ about 10 years later (unpublished) and the solution of the α^β conjecture came shortly afterwards. He was right about Fermat's theorem and the Riemann Hypothesis is still unproved.

- Constance Reid. Hilbert. Springer Verlag 1970.
- Jay Goldman. The Queen of Mathematics : A Historically Motivated Guide to Number Theory. Taylor & Francis, 1998.

George Pólya

Pólya

1887 – 1985

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Polya.html

Aleksandr Osipovich Gelfond

Gelfond

1906 – 1968

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gelfond.html

Carl Ludwig Siegel

Siegel

1896 – 1981

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Siegel.html

Theodor Schneider

Schneider

1911 – 1988

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Schneider.html

Gel'fond – Schneider Theorem (1934)

Solution of Hilbert's Seventh Problem

Theorem. *For a and b algebraic numbers with $a \neq 0$ and $b \notin \mathbb{Q}$, for $\log a \neq 0$, the number*

$$a^b = \exp(b \log a)$$

is transcendental.

Equivalent form :

Theorem. *If two logarithms of algebraic numbers $\log a_1$, $\log a_2$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$, they are linearly independent over the field $\overline{\mathbb{Q}}$ of algebraic numbers.*

Consequence : transcendence of $2^{\sqrt{2}}$, e^{π}, $\frac{\log 2}{\log 3}$.

Schneider – Lang Theorem (1949, 1966)

Theodor Schneider

1911 – 1988

Serge Lang

1927 – 2005

Let $f_1, \dots, f_m$ *be meromorphic functions in* $\mathbb{C}$. *Assume* f_1 *and* f_2 *are algebraically independent and of finite order. Let* $\mathbb{K}$ *be a number field. Assume* f'_j *belongs to* $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ *for* $j = 1, \dots, m$. *Then the set*

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid w \text{ not pole of } f_j,\ f_j(w) \in \mathbb{K} \text{ for } j = 1, \dots, m\}$$

is finite.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Schneider.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Lang.html

Hermite – Lindemann Theorem

Charles Hermite

1822 – 1901

von Lindemann

1852 – 1939

Carl Louis Ferdinand

Corollary. *If w is a nonzero complex number, one at least of the two numbers w, e^w is transcendental.*

Proof. Let $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(w, \mathrm{e}^w)$. The two functions $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \mathrm{e}^z$ are algebraically independent, of finite order, and satisfy the differential equations $f_1' = 1$, $f_2' = f_2$. The set S contains $\{\ell w \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$. Since $w \neq 0$, this set is infinite ; it follows that $\mathbb{K}$ is not a number field. $\square$

The exponential function

$$\frac{d}{dz}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z, \qquad \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\times \\ & z & \mapsto & \mathrm{e}^z \end{array}$$

$$\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z}.$$

The function $z \mapsto \mathrm{e}^z$ is the exponential map of the multiplicative group $\mathbb{G}_m$.
The exponential map of the additive group $\mathbb{G}_a$ is

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array}$$

The only period is 0.

Elliptic curves and elliptic functions

Elliptic curves : $\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2 \neq 0$.

$$E = \bigl\{(t:x:y)\;;\; y^2t = 4x^3 - g_2xt^2 - g_3t^3\bigr\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C}).$$

Elliptic functions

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

$$\wp(z_1+z_2) = R\bigl(\wp(z_1), \wp(z_2)\bigr)$$

$$\begin{array}{rccc} \exp_E : & \mathbb{C} & \to & E(\mathbb{C}) \\ & z & \mapsto & \bigl(1, \wp(z), \wp'(z)\bigr) \end{array}$$

$$\ker \exp_E = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

Weierstraß elliptic function

$$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

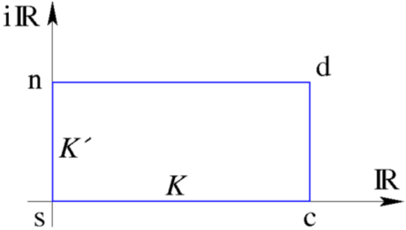
Karl Weierstrass

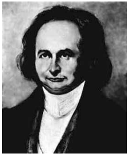
1815–1897

$$\wp'(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{-2}{(z-\omega)^3}.$$

Jacobi 12 elliptic functions

Elliptic curve as an intersection of quadrics : the functions sn and cn.





Karl Jacobi

1804–1851

sn sc sd ns nc nd cs cn cd ds dn dc

https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi_elliptic_functions

Periods of a Weierstrass elliptic function

The set of periods of an elliptic function is a *lattice* :

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{C}\ ;\ \wp(z+\omega) = \wp(z)\} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

A pair of fundamental periods (ω_1, ω_2) is given by

$$\omega_i = 2\int_{e_i}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}, \qquad (i = 1, 2)$$

where

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3).$$

Examples

Example 1 : $g_2 = 4$, $g_3 = 0$, $j = 1728$

A pair of fundamental periods of the elliptic curve

$$y^2 t = 4x^3 - 4xt^2.$$

is given by

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 - t}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2^{3/2}\pi^{1/2}} = 2.6220575542\ldots$$

and

$$\omega_2 = i\omega_1.$$

Examples (continued)

Example 2 : $g_2 = 0$, $g_3 = 4$, $j = 0$

A pair of fundamental periods of the elliptic curve

$$y^2 t = 4x^3 - 4t^3.$$

is

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 - 1}} = \frac{1}{3}\mathrm{B}(1/6, 1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2.428650648\ldots$$

and

$$\omega_2 = \varrho\omega_1,$$

where $\varrho = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

Chowla–Selberg Formula

S. Chowla

1907 - 1995

A. Selberg

1917 - 2007

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (m+ni)^{-4} = \frac{\Gamma(1/4)^8}{2^6\cdot 3\cdot 5\cdot \pi^2}$$

and

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} (m+n\varrho)^{-6} = \frac{\Gamma(1/3)^{18}}{2^8\pi^6}$$

Formula of Chowla and Selberg (1966) : *the periods of elliptic curves with complex multiplication are products of values of the Gamma function at rational points.*

Chowla–Selberg Formula : an example

F. Adiceam

Faustin Adiceam (2011) :

$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2^{19/5}}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{9\pi}{20}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{20}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\times\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{20}\right)\times\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2^{9/5}}\cdot\frac{(5+\sqrt{5})\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right)}{5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{20}\right)\times\Gamma\left(\frac{3}{20}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{20}\right)\times\Gamma\left(\frac{7}{20}\right)}}.$$

Elliptic integrals and ellipses

An ellipse with radii a and b has equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

and the length of its perimeter is

$$2\int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \frac{a^2x^2}{b^4 - b^2x^2}}\ \mathrm{d}x.$$

In the same way, the perimeter of a lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

is given by an elliptic integral

$$4a\int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2}\ \mathrm{d}x.$$

Hypergeometry and elliptic integrals

Gauss Hypergeometric series

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix}\middle|\, z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

C.F. Gauss

1777 - 1855

$$ \begin{aligned} K(z) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ & 1 \end{matrix}\middle|\, z^2\right). \end{aligned} $$

Weierstrass sigma function

Karl Weierstrass

1815–1897

Let $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ be a lattice in $\mathbb{C}$.
The canonical product of Weierstraß associated with Ω is the sigma function σ_Ω defined by

$$\sigma_\Omega(z) = z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

This function has a simple zero at each point of Ω.

Hadamard canonical products

J. Hadamard

1865 - 1963

For $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$-\frac{e^{\gamma z}}{\Gamma(-z)} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

For $\mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Wallis formula for π

John Wallis (Arithmetica Infinitorum 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right) = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

J. Wallis
1616 - 1703

Weierstraß sigma function : an example

For $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$:

$$\sigma_{\mathbb{Z}[i]}(z) = z \prod_{\omega \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \cdot$$

$$\sigma_{\mathbb{Z}[i]}(1/2) = 2^{5/4} \pi^{1/2} \mathrm{e}^{\pi/8} \Gamma(1/4)^{-2} = 0.4749493799\ldots$$

For $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$, the number $\sigma_{\mathbb{Z}[i]}(\alpha)$ is algebraic over

$$\mathbb{Q}\big(\pi,\ \mathrm{e}^{\pi},\ \Gamma(1/4)\big).$$

D.W. Masser, Auxiliary Polynomials in Number Theory, Cambridge Tracts in Mathematics **207** (2016), Cambridge University Press, Chap. 20.

Weierstraß zeta function

The logarithmic derivative of the Weierstraß sigma function is the *Weierstraß* zeta function

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta$$

and the derivative of ζ is $-\wp$. The minus sign is selected so that

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \text{a function analytic at } 0.$$

The function ζ is therefore *quasi–periodic* : for any $\omega \in \Omega$ there exists $\eta = \eta(\omega)$ such that

$$\zeta(z + \omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Legendre relation (1811, 1825)

The numbers $\eta(\omega)$ are the *quasi–periods* of the elliptic curve.
When (ω_1, ω_2) is a pair of fundamental periods, we set $\eta_1 = \eta(\omega_1)$ and $\eta_2 = \eta(\omega_2)$.
Legendre relation :

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi.$$

this is Louis Legendre and not Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Legendre and Fourier

Peter Duren, Changing Faces : The Mistaken Portrait of Legendre.
Notices of American Mathematical Society, **56** (2009) 1440–1443.

The Mathematics Consortium Bulletin, October 2020, vol.2, Issue 2, p. 34–35.
https://www.themathconsortium.in/publication/timcbulletin/vol2/issue2

Examples

For the curve $y^2t = 4x^3 - 4xt^2$ the quasi–periods associated to the previous fundamental periods are

$$\eta_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}, \qquad \eta_2 = -i\eta_1,$$

while for the curve $y^2t = 4x^3 - 4t^3$ they are

$$\eta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega_1} = \frac{2^{7/3}\pi^2}{3^{1/2}\Gamma(1/3)^3}, \qquad \eta_2 = \varrho^2\eta_1.$$

Transcendence and elliptic functions

Siegel (1932) : elliptic analog of Lindemann's Theorem on the transcendence of π.

Schneider (1937) : elliptic analog of Hermite–Lindemann Theorem. General transcendence results on values of elliptic functions, on periods, on elliptic integrals of the first and second kind.

C.L. Siegel
1896 - 1981

Th. Schneider
1911 - 1988

Elliptic analog of Hermite–Lindemann Theorem

Let $w \in \mathbb{C}$, not pole of $\wp$. Then one at least of the numbers g_2, g_3, w, $\wp(w)$ is transcendental.

`Proof` as a consequence of the Schneider–Lang Theorem.
Let $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(g_2, w, \wp(w), \wp'(w))$. The two functions $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \wp(z)$ are algebraically independent, of finite order. Set $f_3(z) = \wp'(z)$. From ${\wp'}^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ one deduces

$$f_1' = 1, \quad f_2' = f_3, \quad f_3' = 6{f_2}^2 - (g_2/2).$$

The set S contains

$$\{\ell w \mid \ell \in \mathbb{Z},\ \ell w \text{ not pole of } \wp\}$$

which is infinite. Hence $\mathbb{K}$ is not a number field. $\square$

Elliptic integrals of the third kind

Quasi–periodicity of the Weierstraß sigma function :

$$\sigma(z+\omega_i) = -\sigma(z)\mathrm{e}^{\eta_i(z+\omega_i/2)} \quad (i=1,2).$$

The function

$$F_u(z) = \frac{\sigma(z+u)}{\sigma(z)\sigma(u)}\mathrm{e}^{-z\zeta(u)}$$

satisfies

$$F_u(z+\omega_i) = F_u(z)\mathrm{e}^{\eta_i u - \omega_i\zeta(u)}.$$

J-P. Serre (1979)

Periods of elliptic integrals of the third kind

Theorem (1979). *Assume* g_2, g_3, $\wp(u_1)$, $\wp(u_2)$, β *are algebraic and* $\mathbb{Z}u_1 \cap \Omega = \{0\}$. *Then the number*

$$\frac{\sigma(u_1 + u_2)}{\sigma(u_1)\sigma(u_2)} \mathrm{e}^{\left(\beta - \zeta(u_1)\right)u_2}$$

is transcendental.

Corollary. *Transcendence of periods of elliptic integrals of the third kind :*

$$\mathrm{e}^{\omega\zeta(u) - \eta u + \beta\omega}.$$

Schneider's Theorem on Euler's Beta function

Th. Schneider

1911 - 1988

Let a, b be rational numbers, not integers. Then the number $\mathrm{B}(a,b)$ is transcendental.

Further results by Th. Schneider (1941) and S. Lang (1960's) on abelian functions, abelian varieties and commutative algebraic groups.

Alan Baker (1966)

Baker

1939 - 2018

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Baker_Alan.html

Gregory V. Chudnovsky (1976)

G.V. Chudnovsky

Yuri V. Nesterenko (1996)

Y. Nesterenko

Université de N'Djamena (Tchad)

Introduction à la théorie des nombres transcendants.

Michel Waldschmidt

Professeur Émérite, Sorbonne Université,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/