



**Rationnels,
irrationnels,
infinis**

Michel Waldschmidt

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>

Résumé

Les nombres rationnels permettent de traiter de nombreux problèmes, mais ils ne suffisent pas : on a souvent besoin de faire intervenir des nombres réels qui peuvent être irrationnels (*incommensurables*). Pour bien comprendre l'irrationalité, il faut quelques notions de ce qu'est l'infini. Les deux concepts : *irrationalité* et *infini* sont étroitement liés.

Les nombres rationnels sont les éléments de base des *mathématiques discrètes*, les nombres réels permettent d'étudier les phénomènes *continus*.

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres entiers pour compter

Entiers “naturels” : 1, 2, 3, 4, ...

Addition, multiplication.

Élément neutre pour la multiplication : 1

$$a \times 1 = a.$$

On ajoute un élément neutre 0 pour l'addition :

$$a + 0 = a, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pour soustraire (calcul de déficits), on introduit les entiers négatifs $-1, -2, -3, -4, \dots$ ce qui donne les entiers “relatifs” :

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$a + (-a) = 0.$$

Nombres rationnels

On peut ajouter, soustraire ou multiplier les entiers naturels.

Pour pouvoir les diviser, on introduit les nombres rationnels, quotients de deux entiers, avec un dénominateur positif :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \dots$$

Deux quotients d'entiers peuvent donner la même fraction si on peut *simplifier* :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad = bc : \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

Fractions irréductibles : le dénominateur est minimal (*on ne peut plus simplifier*).

On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions irréductibles a/b avec $b > 0$, a et b n'ayant pas de diviseur commun > 1 .

Nombres rationnels

On peut ajouter, soustraire ou multiplier les entiers naturels.

Pour pouvoir les diviser, on introduit les nombres rationnels, quotients de deux entiers, avec un dénominateur positif :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \dots$$

Deux quotients d'entiers peuvent donner la même fraction si on peut *simplifier* :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad = bc : \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

Fractions irréductibles : le dénominateur est minimal (*on ne peut plus simplifier*).

On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions irréductibles a/b avec $b > 0$, a et b n'ayant pas de diviseur commun > 1 .

Nombres rationnels

On peut ajouter, soustraire ou multiplier les entiers naturels.

Pour pouvoir les diviser, on introduit les nombres rationnels, quotients de deux entiers, avec un dénominateur positif :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \dots$$

Deux quotients d'entiers peuvent donner la même fraction si on peut *simplifier* :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad = bc : \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

Fractions irréductibles : le dénominateur est minimal (*on ne peut plus simplifier*).

On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions irréductibles a/b avec $b > 0$, a et b n'ayant pas de diviseur commun > 1 .

Nombres rationnels

On peut ajouter, soustraire ou multiplier les entiers naturels.

Pour pouvoir les diviser, on introduit les nombres rationnels, quotients de deux entiers, avec un dénominateur positif :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{5}, \dots$$

Deux quotients d'entiers peuvent donner la même fraction si on peut *simplifier* :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad = bc : \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

Fractions irréductibles : le dénominateur est minimal (*on ne peut plus simplifier*).

On note \mathbf{Q} l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions irréductibles a/b avec $b > 0$, a et b n'ayant pas de diviseur commun > 1 .

Énumérer les nombres rationnels $a/b = \frac{a}{b}$

Les nombres entiers sont rationnels : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$:

$$3 = \frac{3}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1}.$$

On peut donner une liste de nombres comportant tous les rationnels sans en oublier aucun !

Montrons-le pour les nombres rationnels positifs :

	1	2	3	4
1	1/1	2/1	3/1	4/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3
4	1/4	2/4	3/4	4/4

	1	2	3	4
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

Énumérer les nombres rationnels $a/b = \frac{a}{b}$

Les nombres entiers sont rationnels : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$:

$$3 = \frac{3}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1}.$$

On peut donner une liste de nombres comportant tous les rationnels sans en oublier aucun !

Montrons-le pour les nombres rationnels positifs :

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	1/1	2/1	3/1	4/1
<i>2</i>	1/2	2/2	3/2	4/2
<i>3</i>	1/3	2/3	3/3	4/3
<i>4</i>	1/4	2/4	3/4	4/4

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	1	2	4	7
<i>2</i>	3	5	8	
<i>3</i>	6	9		
<i>4</i>	10			

Numéroter sans répétition les nombres rationnels

Si on ne veut pas répéter les mêmes nombres rationnels, comme $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$, on les enlève de la liste quand ils y apparaissent sous forme simplifiable :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1/2		3/2	
3	1/3	2/3		4/3
4	1/4		3/4	

	1	2	3	4
1	1	2	4	6
2	3		7	
3	5	8		
4	9			

On obtient la liste des nombres rationnels positifs

$1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, \dots$

Par exemple si $a + b < c + d$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Si $a + b = c + d$, mais $a > c$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Numéroter sans répétition les nombres rationnels

Si on ne veut pas répéter les mêmes nombres rationnels, comme $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$, on les enlève de la liste quand ils y apparaissent sous forme simplifiable :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1/2		3/2	
3	1/3	2/3		4/3
4	1/4		3/4	

	1	2	3	4
1	1	2	4	6
2	3		7	
3	5	8		
4	9			

On obtient la liste des nombres rationnels positifs

1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, ...

Par exemple si $a + b < c + d$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Si $a + b = c + d$, mais $a > c$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Numéroter sans répétition les nombres rationnels

Si on ne veut pas répéter les mêmes nombres rationnels, comme $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$, on les enlève de la liste quand ils y apparaissent sous forme simplifiable :

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	1	2	3	4
<i>2</i>	1/2		3/2	
<i>3</i>	1/3	2/3		4/3
<i>4</i>	1/4		3/4	

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	1	2	4	6
<i>2</i>	3		7	
<i>3</i>	5	8		
<i>4</i>	9			

On obtient la liste des nombres rationnels positifs

1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, ...

Par exemple si $a + b < c + d$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Si $a + b = c + d$, mais $a > c$, alors a/b apparaîtra avant c/d dans la liste.

Il n'y a pas plus d'éléments dans une suite double infinie que dans une suite infinie

Il y a “autant” de nombres entiers naturels que de nombres pairs ou que de nombres impairs ... ou que de nombres rationnels !

entiers > 0 :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
pairs :	2	4	6	8	10	12	14	16	...
impairs :	3	5	7	9	11	13	15	17	...
entiers :	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
rationnels > 0 :	1	2	1/2	3	1/3	4	3/2	2/3	...
rationnels :	0	1	-1	2	-2	1/2	-1/2	3	...

Quand on peut faire la liste, on parle *d'infinité dénombrable*.

Les nombres rationnels forment un ensemble infini dénombrable.

Il n'y a pas plus d'éléments dans une suite double infinie que dans une suite infinie

Il y a "autant" de nombres entiers naturels que de nombres pairs ou que de nombres impairs ... ou que de nombres rationnels !

entiers > 0 :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
pairs :	2	4	6	8	10	12	14	16	...
impairs :	3	5	7	9	11	13	15	17	...
entiers :	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
rationnels > 0 :	1	2	1/2	3	1/3	4	3/2	2/3	...
rationnels :	0	1	-1	2	-2	1/2	-1/2	3	...

Quand on peut faire la liste, on parle *d'infinité dénombrable*.

Les nombres rationnels forment un ensemble infini dénombrable.

Il n'y a pas plus d'éléments dans une suite double infinie que dans une suite infinie

Il y a “autant” de nombres entiers naturels que de nombres pairs ou que de nombres impairs ... ou que de nombres rationnels !

entiers > 0 :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
pairs :	2	4	6	8	10	12	14	16	...
impairs :	3	5	7	9	11	13	15	17	...
entiers :	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
rationnels > 0 :	1	2	1/2	3	1/3	4	3/2	2/3	...
rationnels :	0	1	-1	2	-2	1/2	-1/2	3	...

Quand on peut faire la liste, on parle *d'infinité dénombrable*.

Les nombres rationnels forment un ensemble infini dénombrable.

Al-Sabi Thâbit ibn Qurrâ al-Harrânî (836–901)



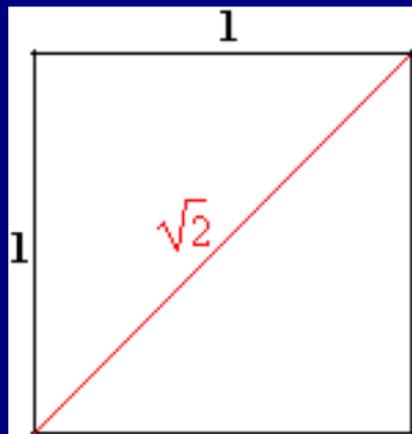
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Thabit.html>

Mesurer avec les nombres réels

Les nombres réels positifs sont ceux qui permettent de mesurer des longueurs.

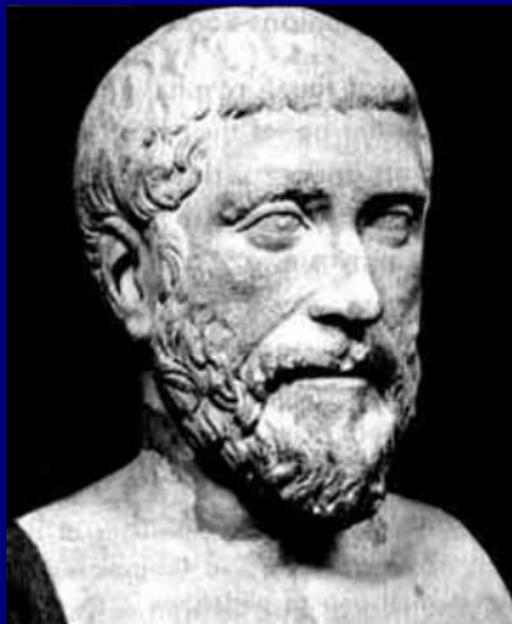
Certaines constructions géométriques conduisent à des longueurs qui ne sont pas des nombres rationnels.

Par exemple la diagonale du carré unité a pour longueur $\sqrt{2}$ qui ne peut pas être écrit comme quotient de deux entiers naturels : c'est un nombre *irrationnel* (on dit aussi *incommensurable*).

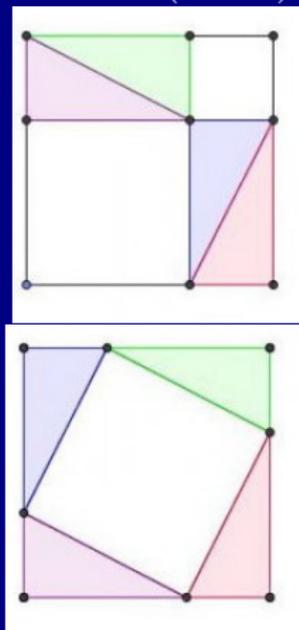


$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ \dots$$

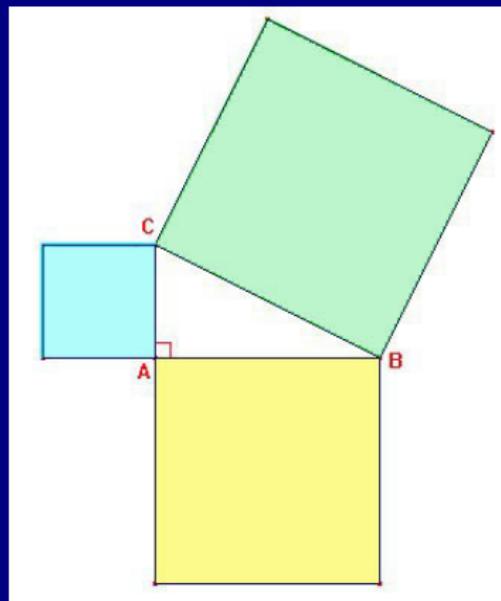
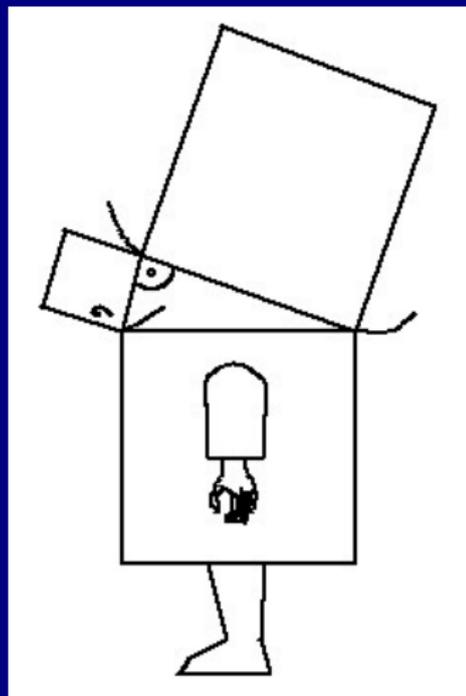
Pythagore de Samos \sim 569 BC – \sim 475 BC



$$a^2 + b^2 = c^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

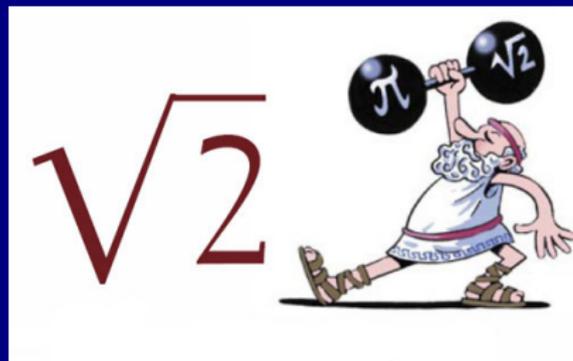


Le théorème de Pythagore



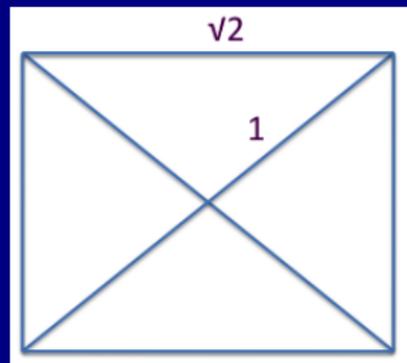
La diagonale du carré

La longueur d de la diagonale d'un carré de côté a vérifie $d^2 = 2a^2$.

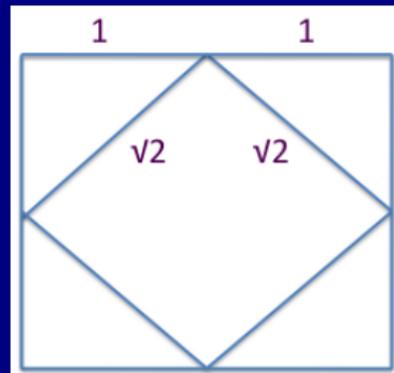


Un carré de côté 1 a pour diagonale $\sqrt{2}$: son carré est 2.

Racine de deux comme diagonale du carré



$$\text{Aire } 2 = 4 \times 1/2$$



$$\text{Aire } 4 = 2 + 4 \times 1/2$$

Racine de deux sur la toile

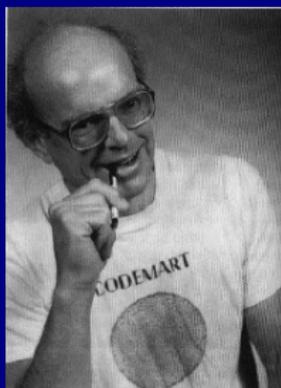
Les décimales de $\sqrt{2}$ sont sur la toile

1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 3, 0, 9, 5, 0, 4, 8, 8, 0, 1,
6, 8, 8, 7, 2, 4, 2, 0, 9, 6, 9, 8, 0, 7, 8, 5, 6, 9, 6, 7, 1, 8, ...

<http://oeis.org/A002193>

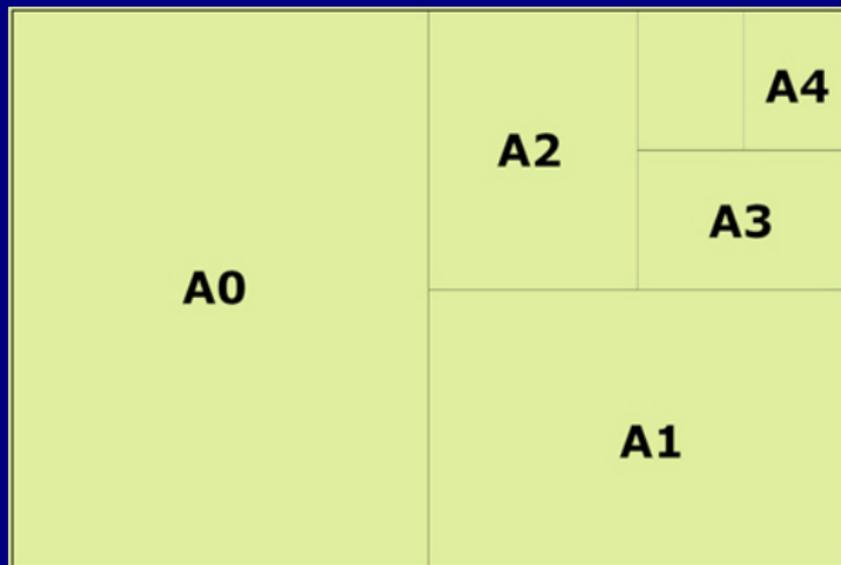
The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane



Le format A4

Le nombre $\sqrt{2}$ est le double de son inverse : $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$.
Si on plie en deux une feuille de papier rectangulaire dont le rapport des côtés est $\sqrt{2}$, on obtient deux feuilles rectangulaires dont le rapport des côtés est encore $\sqrt{2}$.



La norme ISO 216 : trois séries de format *A*, *B*, *C*



International
Organization for
Standardization

<http://www.iso.org/>

Une feuille *A0* a pour aire théorique 1 m^2 ; les longueurs des côtés du rectangle en mètres sont donc x et y avec $xy = 1$ et $y = x\sqrt{2}$, par conséquent

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0,840\,896\,415\dots \quad \text{et} \quad y = \sqrt[4]{2} = 1,189\,207\,115\dots$$

Le format retenu est 841mm pour le petit côté et 1189mm pour le grand, soit une aire de $0,999\,49 \text{ m}^2$. Le rapport associé est $1189/841 = 1,413\,79\dots$

On retrouve ce format en Iran et en Égypte au XIV^e siècle.

La norme ISO 216

Le *Grand Registre* de Lazare Carnot sous la révolution (loi sur le timbre du 11 mars 1798) est le format *A2* de 420cm par 594cm. Son aire est le quart de celle du format *A0* et quatre fois celle du format *A4*.

Le format *A4* est 21 cm de largeur et 29,7 cm de longueur. Son aire $623,7 \text{ cm}^2$ est proche de 625 cm^2

Les taux d'agrandissement des photocopieuses ordinaires sont 141%, 119%, 84% et 71%, qui approchent les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414\dots, & \sqrt[4]{2} &= 1,189\dots, \\ 1/\sqrt[4]{2} &= 0,840\dots, & 1/\sqrt{2} &= 0,707\dots\end{aligned}$$

La norme ISO 216

Le *Grand Registre* de Lazare Carnot sous la révolution (loi sur le timbre du 11 mars 1798) est le format *A2* de 420cm par 594cm. Son aire est le quart de celle du format *A0* et quatre fois celle du format *A4*.

Le format *A4* est 21 cm de largeur et 29,7 cm de longueur. Son aire 623,7 cm² est proche de 625 cm²

Les taux d'agrandissement des photocopieuses ordinaires sont 141%, 119%, 84% et 71%, qui approchent les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414\dots, & \sqrt[4]{2} &= 1,189\dots, \\ 1/\sqrt[4]{2} &= 0,840\dots, & 1/\sqrt{2} &= 0,707\dots\end{aligned}$$

La norme ISO 216

Le *Grand Registre* de Lazare Carnot sous la révolution (loi sur le timbre du 11 mars 1798) est le format *A2* de 420cm par 594cm. Son aire est le quart de celle du format *A0* et quatre fois celle du format *A4*.

Le format *A4* est 21 cm de largeur et 29,7 cm de longueur. Son aire $623,7 \text{ cm}^2$ est proche de 625 cm^2

Les taux d'agrandissement des photocopieuses ordinaires sont 141%, 119%, 84% et 71%, qui approchent les nombres irrationnels $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt[4]{2}$, $1/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414\dots, & \sqrt[4]{2} &= 1,189\dots, \\ 1/\sqrt[4]{2} &= 0,840\dots, & 1/\sqrt{2} &= 0,707\dots\end{aligned}$$

Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$



- Benoît Rittaud, Éditions *Le Pommier* (2006).

<http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud/RacineDeDeux>

Histoire de $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56 \dots$

Approximation : 1, 414 212 96 Différence : 0, 000 000 60



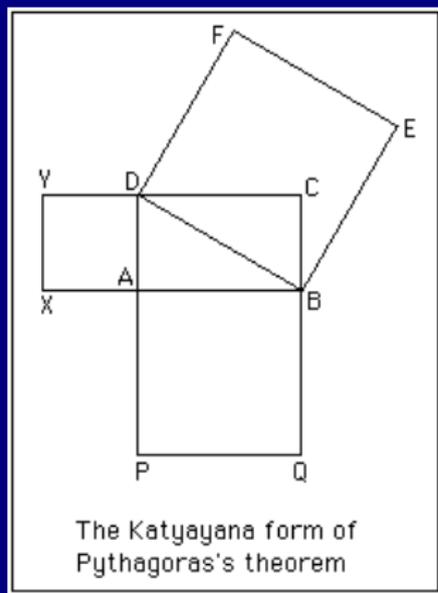
Tablette d'un scribe
babylonien de la première
dynastie (entre 1900 et 1600
av. J-C.)

Yale Babylonian Collection
YBC 7289

Histoire de $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 56 \dots$

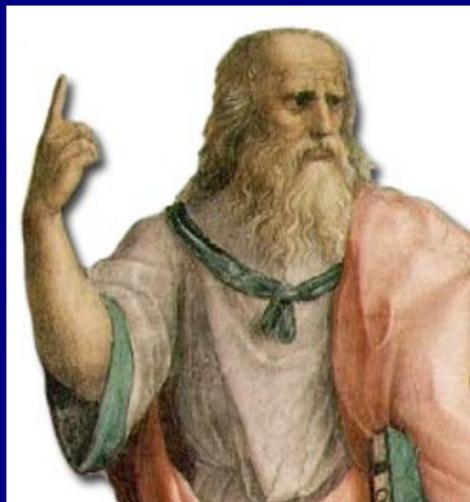
Sulvasutras (Apastamba),
(entre 600 et 400 av. J-C.)

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \\ &= \frac{577}{408} \\ &= 1,414\ 215\ 68\dots \end{aligned}$$



Différence : 0, 000 002 12

Irrationalité dans l'antiquité grecque



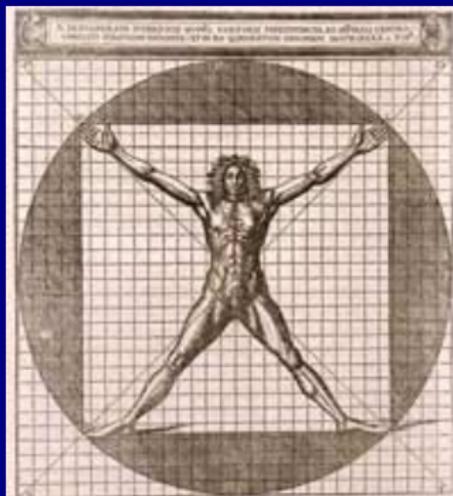
Platon, *La République* :
lignes incommensurables,
diagonales irrationnelles.

Théodore de Cyrène
(vers 370 av. J-C.)
irrationalité de $\sqrt{3}, \dots, \sqrt{17}$.

Théétète : si un entier n est le carré d'un nombre rationnel,
c'est le carré d'un entier.

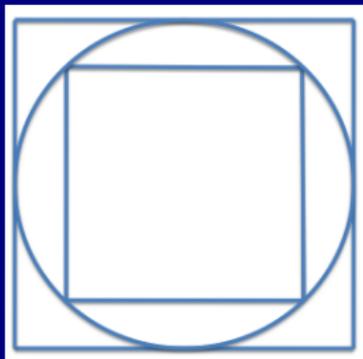
Marcus Vitruvius Pollis (Vitruve, 88-26 av. J.C.)

Architecte et ingénieur de l'époque romaine, Vitruve explique qu'un homme aux bras et jambes écartés s'inscrit à la fois dans un cercle et dans un carré, figures géométriques parfaites.



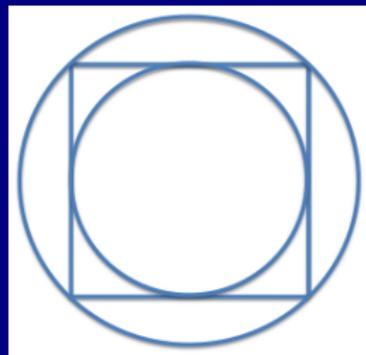
L'homme de Vitruve

Cercles et carrés



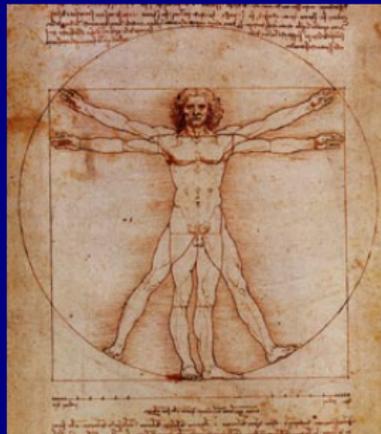
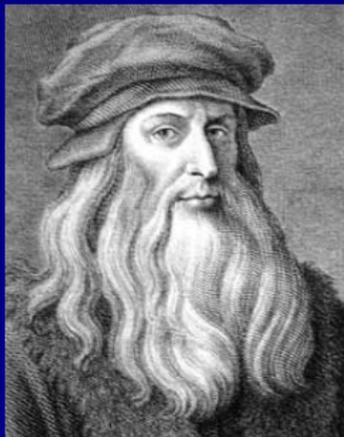
Quand deux carrés touchent un même cercle en quatre points, l'un est le double de l'autre

Quand deux cercles touchent un même carré en quatre points, l'un est le double de l'autre



Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

“De divina proportione” (1489)



Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Si $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, alors a et b ne sont pas tous deux pairs.

Le carré d'un nombre pair est pair, le carré d'un nombre impair est impair.

Comme $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2}$, on a $a^2 = 2b^2$, ce qui montre que a est pair.

On écrit $a = 2c$, puis $4c^2 = (2c)^2 = a^2 = 2b^2$, et en simplifiant par 2 on trouve $b^2 = 2c^2$, donc b est pair.

Contradiction.

Valuation 2-adique

On peut éviter de raisonner par l'absurde de la façon suivante : un entier se décompose en un produit d'une puissance de 2 par un nombre impair.

L'exposant de 2 dans la puissance est 0 si l'entier est impair, c'est 1 si l'entier est divisible par 2, mais pas par 4, c'est 2 s'il est divisible par $4 = 2^2$, mais pas par 8...

Par exemple l'exposant de 2 pour $21\,504 = 1\,024 \cdot 21$ est 10 car $1\,024 = 2^{10}$.

Valuation 2-adique

On peut éviter de raisonner par l'absurde de la façon suivante : un entier se décompose en un produit d'une puissance de 2 par un nombre impair.

L'exposant de 2 dans la puissance est 0 si l'entier est impair, c'est 1 si l'entier est divisible par 2, mais pas par 4, c'est 2 s'il est divisible par $4 = 2^2$, mais pas par 8...

Par exemple l'exposant de 2 pour $21\,504 = 1\,024 \cdot 21$ est 10 car $1\,024 = 2^{10}$.

Valuation 2-adique

On peut éviter de raisonner par l'absurde de la façon suivante : un entier se décompose en un produit d'une puissance de 2 par un nombre impair.

L'exposant de 2 dans la puissance est 0 si l'entier est impair, c'est 1 si l'entier est divisible par 2, mais pas par 4, c'est 2 s'il est divisible par $4 = 2^2$, mais pas par 8...

Par exemple l'exposant de 2 pour $21\,504 = 1\,024 \cdot 21$ est 10 car $1\,024 = 2^{10}$.

Valuation 2-adique

Pour un carré, l'exposant de 2 est pair : si un entier a a pour exposant r alors a^2 a pour exposant $2r$

$$a = 2^r u \quad \text{avec } u \text{ impair}, \quad a^2 = 2^{2r} u^2$$

(le carré d'un nombre impair est impair).

L'exposant de $2n$ est l'exposant de n plus 1 :

$$n = 2^t s \quad \text{avec } s \text{ impair}, \quad 2n = 2^{t+1} s.$$

Donc pour a et b entiers positifs, l'exposant de 2 pour a^2 et aussi pour b^2 est pair, l'exposant de 2 pour $2b^2$ est impair, et par conséquent a^2 n'est jamais égal à $2b^2$.

Valuation 2-adique

Pour un carré, l'exposant de 2 est pair : si un entier a a pour exposant r alors a^2 a pour exposant $2r$

$$a = 2^r u \quad \text{avec } u \text{ impair}, \quad a^2 = 2^{2r} u^2$$

(le carré d'un nombre impair est impair).

L'exposant de $2n$ est l'exposant de n plus 1 :

$$n = 2^t s \quad \text{avec } s \text{ impair}, \quad 2n = 2^{t+1} s.$$

Donc pour a et b entiers positifs, l'exposant de 2 pour a^2 et aussi pour b^2 est pair, l'exposant de 2 pour $2b^2$ est impair, et par conséquent a^2 n'est jamais égal à $2b^2$.

Valuation 2-adique

Pour un carré, l'exposant de 2 est pair : si un entier a a pour exposant r alors a^2 a pour exposant $2r$

$$a = 2^r u \quad \text{avec } u \text{ impair}, \quad a^2 = 2^{2r} u^2$$

(le carré d'un nombre impair est impair).

L'exposant de $2n$ est l'exposant de n plus 1 :

$$n = 2^t s \quad \text{avec } s \text{ impair}, \quad 2n = 2^{t+1} s.$$

Donc pour a et b entiers positifs, l'exposant de 2 pour a^2 et aussi pour b^2 est pair, l'exposant de 2 pour $2b^2$ est impair, et par conséquent a^2 n'est jamais égal à $2b^2$.

Descente infinie

On a

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Si

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $b < a = \sqrt{2}b < 2b$, alors

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b};$$

mais $0 < a - b < b$.

Descente infinie

On a

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Si

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $b < a = \sqrt{2}b < 2b$, alors

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b};$$

mais $0 < a - b < b$.

Descente infinie

On a

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Si

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $b < a = \sqrt{2}b < 2b$, alors

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b};$$

mais $0 < a - b < b$.

Descente infinie

On a

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Si

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec $b < a = \sqrt{2}b < 2b$, alors

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b};$$

mais $0 < a - b < b$.

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Descente infinie.



Démonstration géométrique d'irrationalité

Le nombre $\sqrt{2}$ a la propriété remarquable suivante :

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Posons $t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56\ \dots$. On a

$$t = 2 + \frac{1}{t}.$$

Prenons un intervalle de longueur t . On le décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Le nombre $\sqrt{2}$ a la propriété remarquable suivante :

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Posons $t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56 \dots$ On a

$$t = 2 + \frac{1}{t}.$$

Prenons un intervalle de longueur t . On le décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Le nombre $\sqrt{2}$ a la propriété remarquable suivante :

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Posons $t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56 \dots$. On a

$$t = 2 + \frac{1}{t}.$$

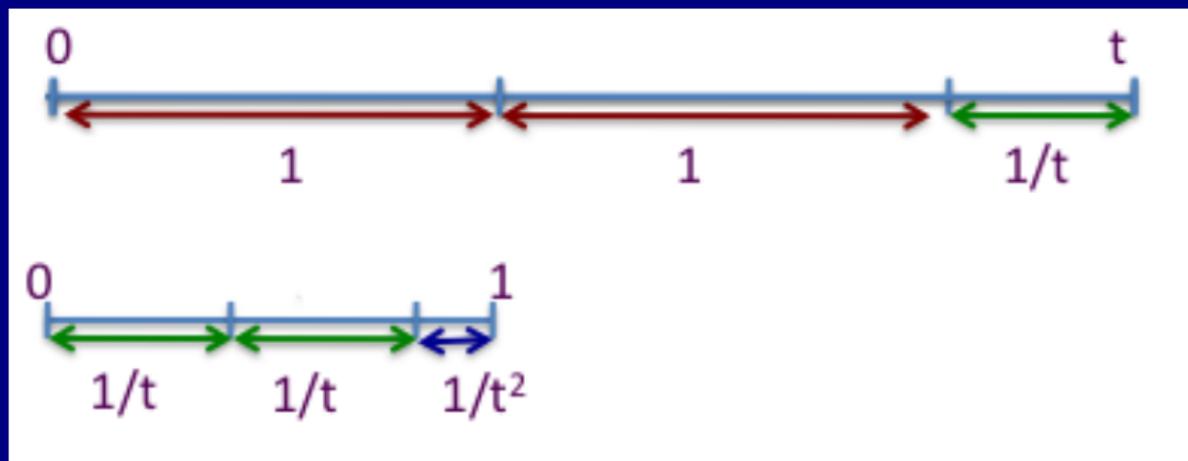
Prenons un intervalle de longueur t . On le décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

$$t = \sqrt{2} + 1 = 2,414\ 213\ 56 \dots = 2 + 1/t$$



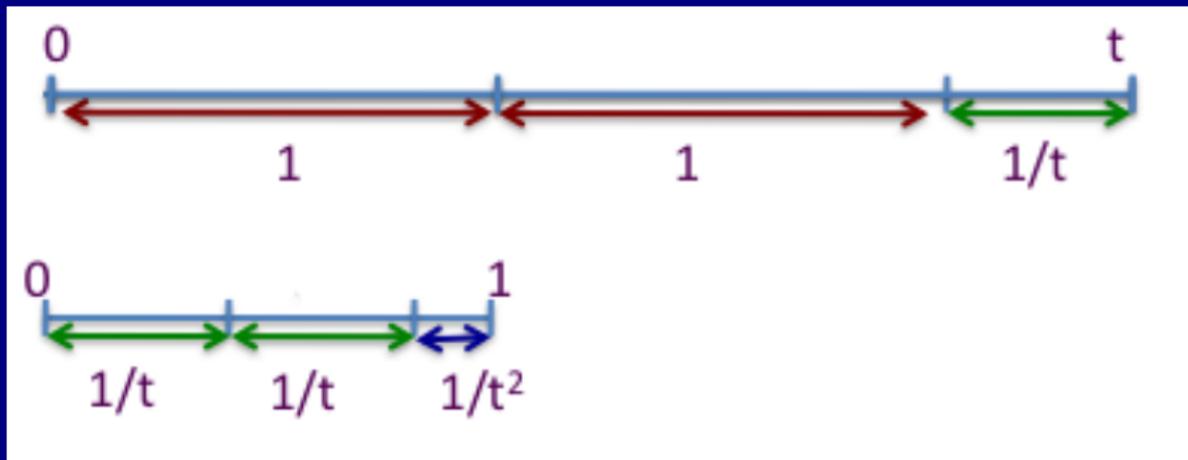
On décompose l'intervalle de longueur 1

$$2 + \frac{1}{t} = t, \quad \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

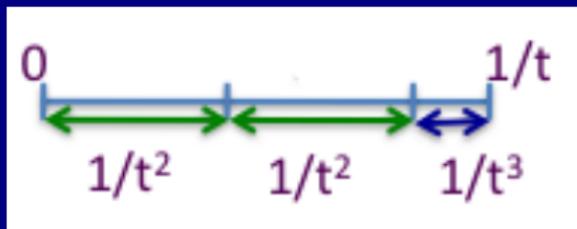


On passe aussi de la première image à la seconde par une homothétie de rapport $1/t$, parce que $t = 2 + 1/t$.

Nouvelle homothétie de rapport $1/t$



Intervalle $(0, 1/t)$ grossi : $\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t}$:



Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Un intervalle de longueur $t = \sqrt{2} + 1$ se décompose en deux intervalles de longueur 1 et un intervalle de longueur $1/t$.

On fait une homothétie de rapport $1/t$: un intervalle de longueur 1 se décompose en deux intervalles de longueur $1/t$ et un intervalle de longueur $1/t^2$.

À l'étape suivante on décompose un intervalle de longueur $1/t$ en deux intervalles de longueur $1/t^2$ et un intervalle de longueur $1/t^3$.

Puis un intervalle de longueur $1/t^2$ en deux intervalles de longueur $1/t^3$ et un intervalle de longueur $1/t^4$.

On peut recommencer indéfiniment : on aura à chaque fois deux grands intervalles et un plus petit.

Décomposition d'un intervalle rationnel

Partons maintenant d'un nombre rationnel $u = a/b$, disons $a > b > 0$ avec a et b entiers.

On va décomposer un segment de longueur u en un nombre entier de segments de longueur 1, plus un segment de longueur plus petite que a/b .

Ce sera plus commode de changer d'échelle en prenant une nouvelle unité de longueur : on décompose alors un segment de longueur a en un nombre entier de segments de longueur b , plus un segment de longueur plus petite que b , disons c , qui est un entier ≥ 0 .

Décomposition d'un intervalle rationnel

Partons maintenant d'un nombre rationnel $u = a/b$, disons $a > b > 0$ avec a et b entiers.

On va décomposer un segment de longueur u en un nombre entier de segments de longueur 1, plus un segment de longueur plus petite que a/b .

Ce sera plus commode de changer d'échelle en prenant une nouvelle unité de longueur : on décompose alors un segment de longueur a en un nombre entier de segments de longueur b , plus un segment de longueur plus petite que b , disons c , qui est un entier ≥ 0 .

Décomposition d'un intervalle rationnel

Partons maintenant d'un nombre rationnel $u = a/b$, disons $a > b > 0$ avec a et b entiers.

On va décomposer un segment de longueur u en un nombre entier de segments de longueur 1, plus un segment de longueur plus petite que a/b .

Ce sera plus commode de changer d'échelle en prenant une nouvelle unité de longueur : on décompose alors un segment de longueur a en un nombre entier de segments de longueur b , plus un segment de longueur plus petite que b , disons c , qui est un entier ≥ 0 .

$$\frac{297}{210} = 1,414\,285\,71\dots$$

Au lieu de $t = 1 + \sqrt{2}$ on va partir du nombre $\frac{297}{210}$ qui est très proche de $\sqrt{2}$.

On commence par simplifier la fraction $\frac{297}{210}$ en recherchant le *pgcd* de 297 et 210.

Première solution :

$$297 = 3^3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Donc le pgcd est 3, on a $297 = 3 \cdot 99$ et $210 = 3 \cdot 70$, et finalement

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

$$\frac{297}{210} = 1,414\,285\,71\dots$$

Au lieu de $t = 1 + \sqrt{2}$ on va partir du nombre $\frac{297}{210}$ qui est très proche de $\sqrt{2}$.

On commence par simplifier la fraction $\frac{297}{210}$ en recherchant le *pgcd* de 297 et 210.

Première solution :

$$297 = 3^3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Donc le pgcd est 3, on a $297 = 3 \cdot 99$ et $210 = 3 \cdot 70$, et finalement

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

$$\frac{297}{210} = 1,414\,285\,71\dots$$

Au lieu de $t = 1 + \sqrt{2}$ on va partir du nombre $\frac{297}{210}$ qui est très proche de $\sqrt{2}$.

On commence par simplifier la fraction $\frac{297}{210}$ en recherchant le *pgcd* de 297 et 210.

Première solution :

$$297 = 3^3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Donc le pgcd est 3, on a $297 = 3 \cdot 99$ et $210 = 3 \cdot 70$, et finalement

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

$$\frac{297}{210} = 1,414\,285\,71\dots$$

Au lieu de $t = 1 + \sqrt{2}$ on va partir du nombre $\frac{297}{210}$ qui est très proche de $\sqrt{2}$.

On commence par simplifier la fraction $\frac{297}{210}$ en recherchant le *pgcd* de 297 et 210.

Première solution :

$$297 = 3^3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Donc le pgcd est 3, on a $297 = 3 \cdot 99$ et $210 = 3 \cdot 70$, et finalement

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

L'algorithme d'Euclide

Deuxième solution :

Le pgcd de 297 et 210 est le même que celui de 210 et $297 - 210 = 87$.

C'est aussi celui de 87 et $210 - 2 \times 87 = 36$,

celui de 36 et $87 - 2 \times 36 = 15$,

celui de 15 et $36 - 2 \times 15 = 6$,

celui de 6 et $15 - 2 \times 6 = 3$,

et comme $6 = 2 \times 3$, le pgcd est 3.

Euclide d'Alexandrie

(~325 av. J-C. – ~265 av. J-C.)



L'école d'Athènes, par Raphael



$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1,414\,285\,71\dots$$



On change d'unité de mesure pour avoir des intervalles de longueur entière.

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

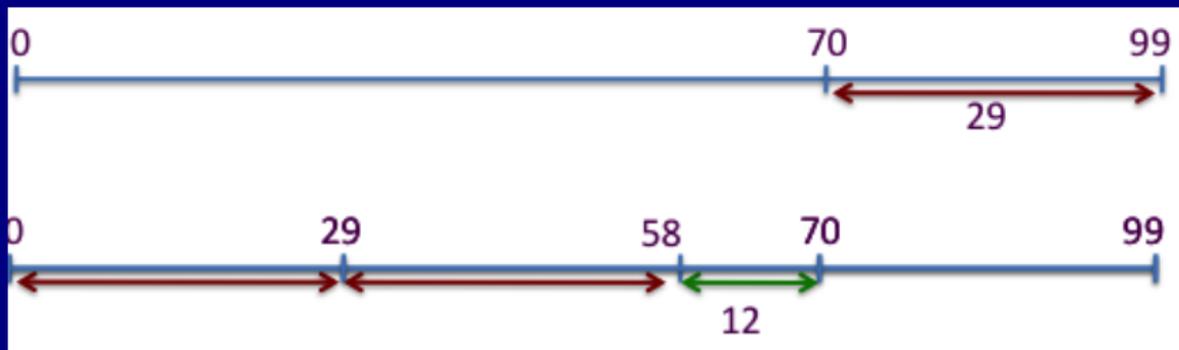
première étape



$$99 = 70 + 29$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

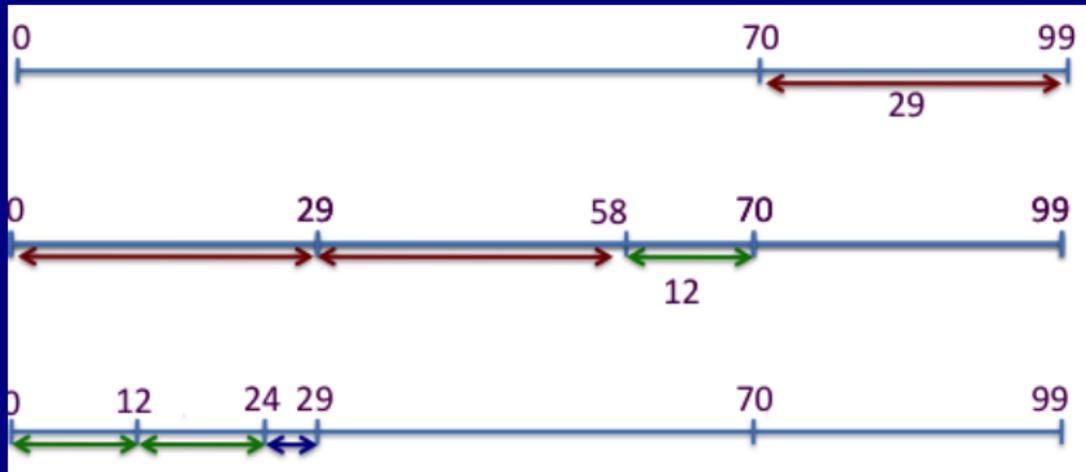
deuxième étape



$$70 = 2 \times 29 + 12$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

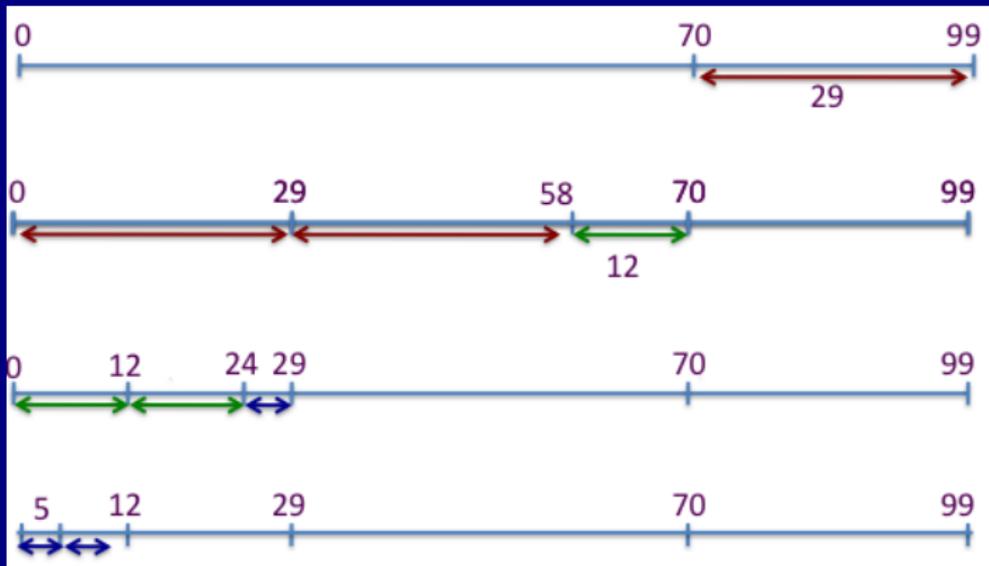
troisième étape



$$29 = 2 \times 12 + 5$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

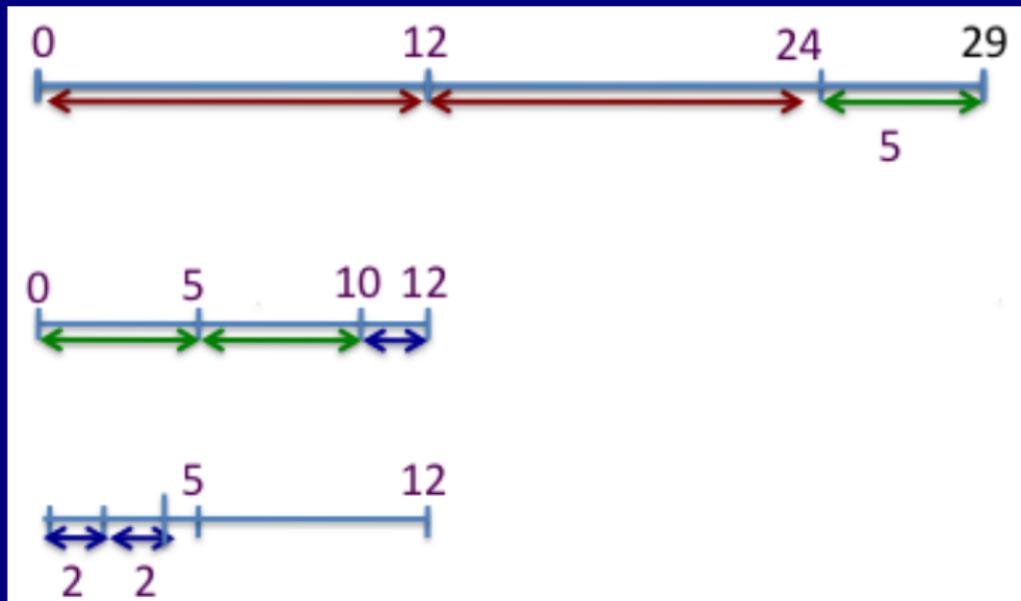
quatrième étape



$$12 = 2 \times 5 + 2$$

Dernières étapes

On “zoome” pour mieux voir :



Démonstration géométrique d'irrationalité

Pour la longueur $t = 1 + \sqrt{2}$, le processus décrit ne s'arrête jamais.

Pour une longueur rationnelle, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'opérations il ne reste plus de petit segment.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration géométrique d'irrationalité

Pour la longueur $t = 1 + \sqrt{2}$, le processus décrit ne s'arrête jamais.

Pour une longueur rationnelle, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'opérations il ne reste plus de petit segment.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration géométrique d'irrationalité

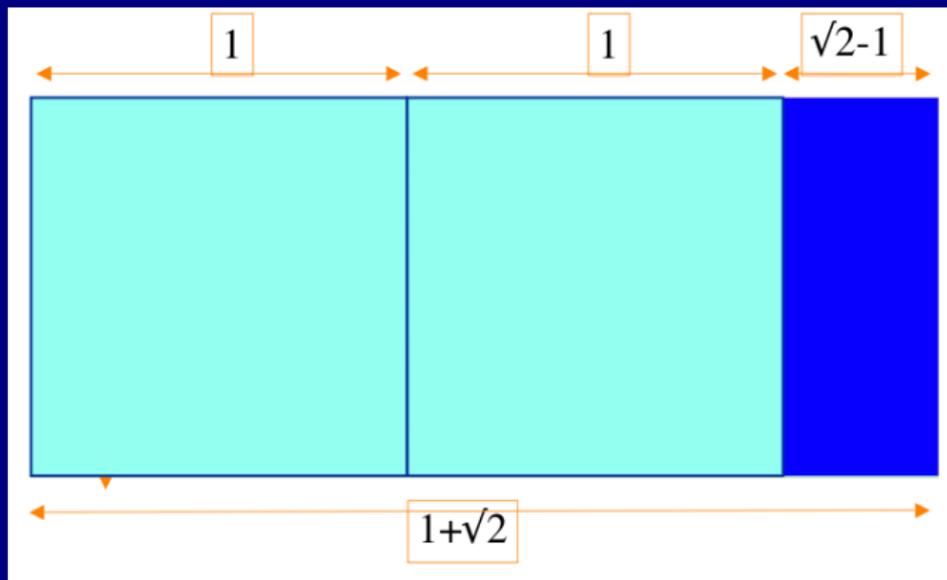
Pour la longueur $t = 1 + \sqrt{2}$, le processus décrit ne s'arrête jamais.

Pour une longueur rationnelle, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'opérations il ne reste plus de petit segment.

Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On déplie la figure géométrique

On part d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 1 and $t = 1 + \sqrt{2} = 2,4142135623731\dots$. La proportion est t .

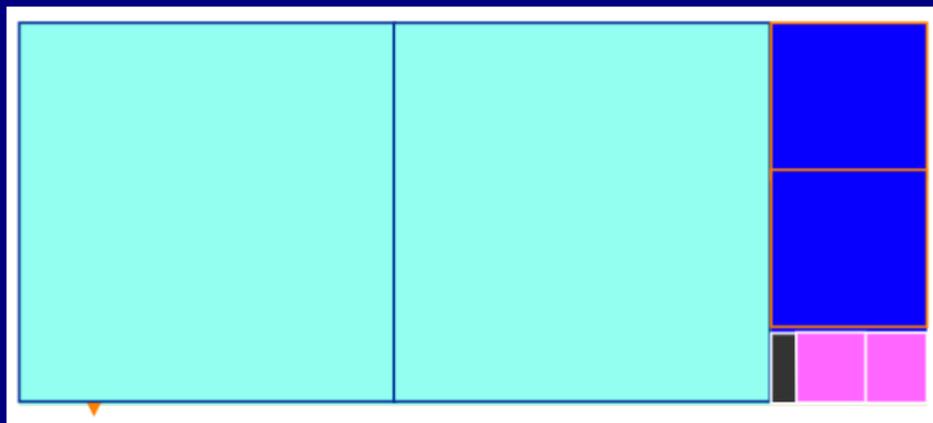


On le décompose en 2 carrés de côtés 1 et un rectangle plus petit dont les côtés sont $t - 2 = 1/t$ et 1.

Le nouveau rectangle a donc encore comme proportion t .

Rectangles ayant pour proportion $t = 1 + \sqrt{2}$

Chacun des rectangles ayant la même proportion t se décompose en deux carrés plus un plus petit rectangle.



Le processus continue indéfiniment : $t = 1 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exemple : le nombre d'or

Le nombre d'or

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887499 \dots$$

vérifie

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Donc si on part d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont pour proportion le nombre d'or, à chaque étape on obtient un carré et un rectangle plus petit ayant la même proportion.

Exemple : le nombre d'or

Le nombre d'or

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887499 \dots$$

vérifie

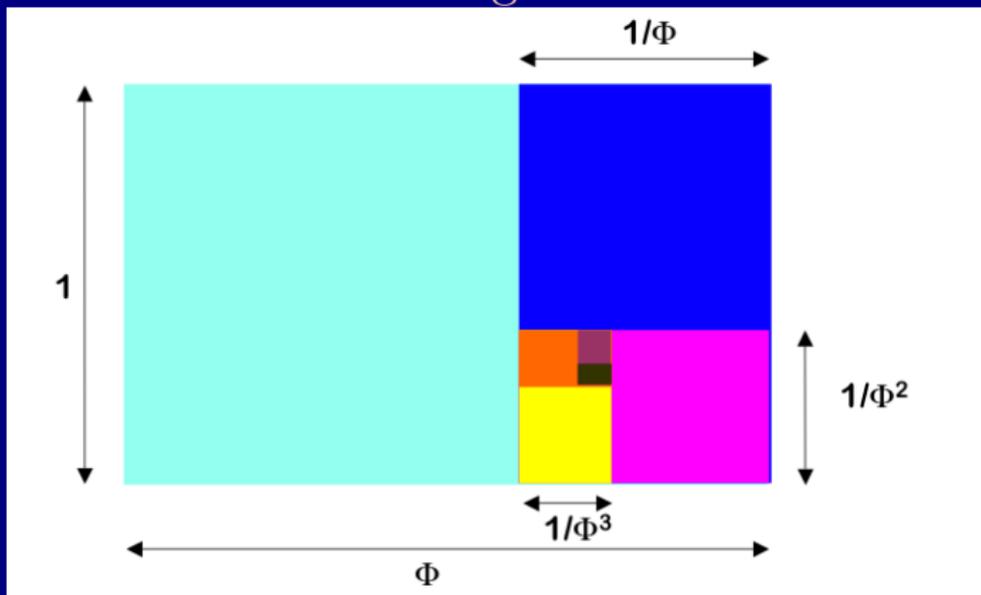
$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Donc si on part d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont pour proportion le nombre d'or, à chaque étape on obtient un carré et un rectangle plus petit ayant la même proportion.

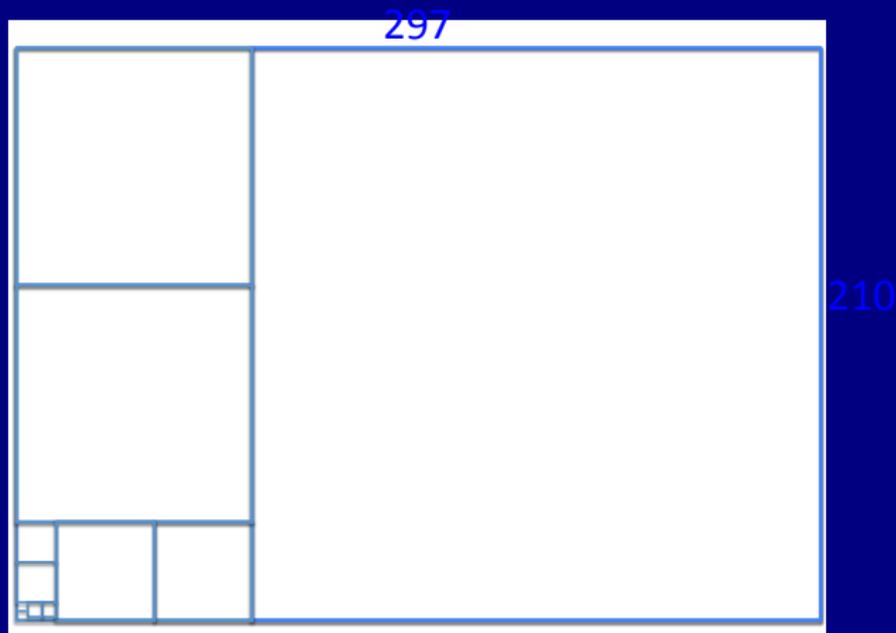
Le nombre d'or

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180339887499 \dots$$

Rectangle d'or



Découper une feuille A4 en 11 carrés



Il y a 5 paires de carrés plus un grand carré.

La fraction d'Apastamba

$$577/408 = 1,414\ 215\ 68\dots$$

Pour le nombre utilisé par Apastamba dans les Sulvasutras
comme approximation de $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408}$$

le dessin est similaire, au lieu de 5 paires de carrés, il y en a
7, donc en tout 15 carrés.

Fraction continue de $\sqrt{2}$

Le nombre $t = 1 + \sqrt{2}$ vérifie $t = 2 + \frac{1}{t}$, donc

$$t = 2 + \frac{1}{t} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}} = \dots$$

et

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}}}}}}}}$$

Fraction continue de $\sqrt{2}$

Le nombre $t = 1 + \sqrt{2}$ vérifie $t = 2 + \frac{1}{t}$, donc

$$t = 2 + \frac{1}{t} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}} = \dots$$

et

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}}}}}}}.$$

Fraction continue de $\sqrt{2}$

Le nombre $t = 1 + \sqrt{2}$ vérifie $t = 2 + \frac{1}{t}$, donc

$$t = 2 + \frac{1}{t} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}} = \dots$$

et

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}}}}}}}}.$$

Fraction continue du nombre d'or

Le nombre $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ vérifie $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, donc

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots$$

et

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}}}}}}$$

Fraction continue du nombre d'or

Le nombre $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ vérifie $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, donc

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots$$

et

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}}}}}}$$

Fraction continue du nombre d'or

Le nombre $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ vérifie $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, donc

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots$$

et

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}}}}}.$$

Algorithme d'Euclide pour le pgcd de 99 et 70

$$99 = 70 + 29$$

$$70 = 2 \cdot 29 + 12$$

$$29 = 2 \cdot 12 + 5$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

$$99 = 70 + 29 \qquad \frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70}$$

$$70 = 2 \cdot 29 + 12 \qquad \frac{70}{29} = 2 + \frac{12}{29}$$

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{12}{29}}$$

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$

$$99 = 70 + 29 \qquad \frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70}$$

$$70 = 2 \cdot 29 + 12 \qquad \frac{70}{29} = 2 + \frac{12}{29}$$

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{12}{29}}$$

Une fraction pour 99/70

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$$

Cinq paires de carrés plus un grand carré.

Une fraction pour 577/408

On a

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}}$$

Sept paires de carrés plus un grand carré.

Le nombre π

Le nombre π est le rapport entre la longueur de la circonférence d'un cercle et son diamètre. C'est aussi le rapport entre l'aire d'un disque circulaire et le carré de son rayon.



Sa valeur est

3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 ...

<http://oeis.org/A000796> Decimal expansion of Pi.

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Pi>

Irrationalité de π

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)
*Mémoire sur quelques propriétés
remarquables des quantités transcendentes
circulaires et logarithmiques,*
Mémoires de l'Académie des Sciences
de Berlin, **17** (1761), p. 265-322 ;
lu en 1767 ; Math. Werke, t. II.



$\tan(v)$ est irrationnel quand $v \neq 0$ est rationnel.
En particulier π est irrationnel car $\tan(\pi/4) = 1$.

Lambert et le roi Frederick II de Prusse



- Que savez vous, Lambert ?
- Tout, Sire.
- Et de qui le tenez-vous ?
- De moi-même !



Développement décimaux des nombres réels

Quand on écrit $\pi = 3, 141\,59\dots$ cela signifie

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \dots$$

Autre exemple : $\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1,4142\dots$ veut dire

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10\,000} + \dots$$

Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\dots$$

Développement décimaux des nombres réels

Quand on écrit $\pi = 3, 141\,59\dots$ cela signifie

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \dots$$

Autre exemple : $\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1,414\,2\dots\dots$ veut dire

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{2}{10\,000} + \dots$$

Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\dots\dots$$

Développement décimaux des nombres réels

Quand on écrit $\pi = 3, 141\,59\dots$ cela signifie

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \dots$$

Autre exemple : $\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1,414\,2\dots\dots$ veut dire

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{2}{10\,000} + \dots$$

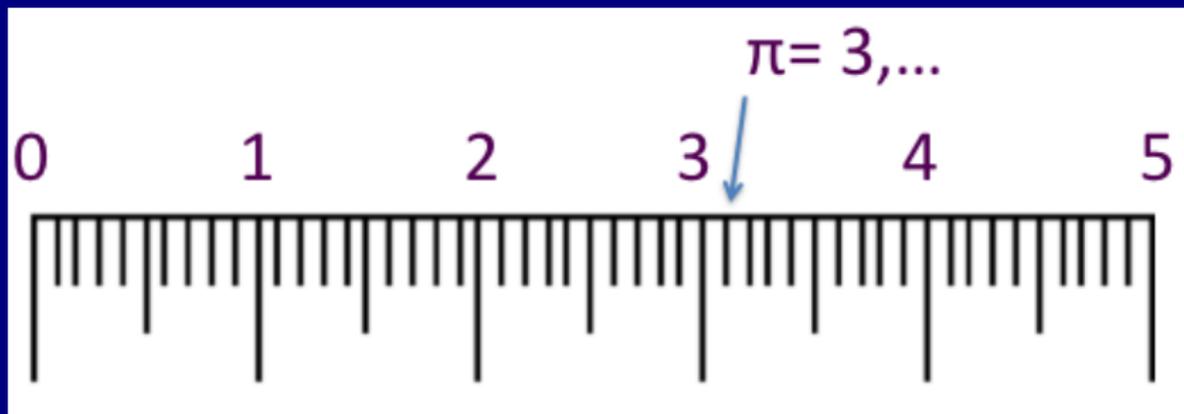
Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\dots\dots$$

Décimales de $\pi = 3, \dots$

La partie entière de π est 3 :

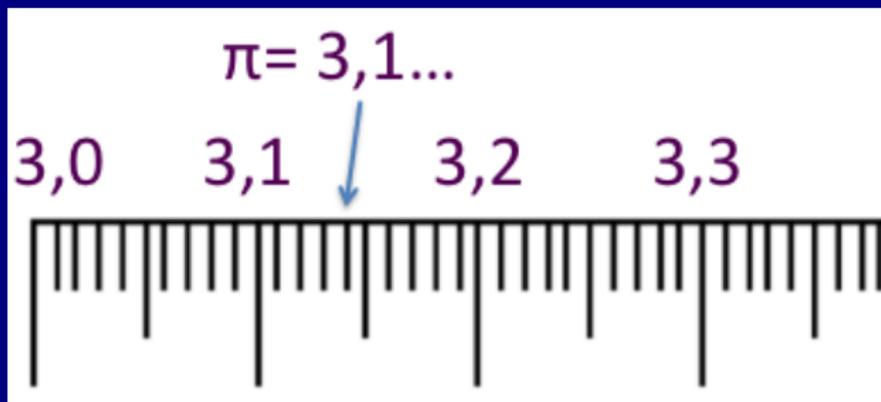
$$3 < \pi < 4$$



Décimales de $\pi = 3,1\dots$

La première décimale après la virgule de π est 1 :

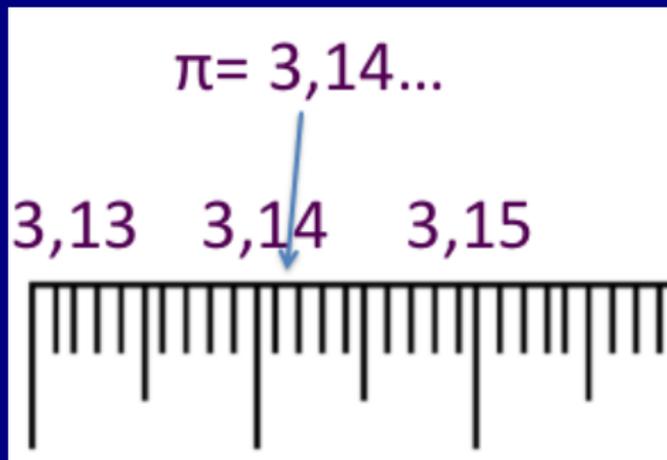
$$3,1 < \pi < 3,2$$



Décimales de $\pi = 3,14\dots$

La deuxième décimale après la virgule de π est 4 :

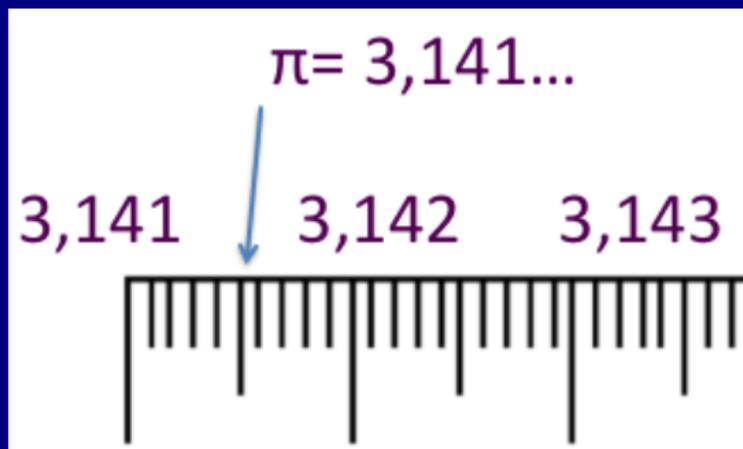
$$3,14 < \pi < 3,15$$



Décimales de $\pi = 3,1415\dots$

La troisième décimale après la virgule de π est 1 :

$$3,141 < \pi < 3,142$$



Développement décimal d'un nombre réel

Quand $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots$ sont des chiffres dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on note

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-1} b_m b_{m+1} \dots$$

le nombre

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \dots + \frac{b_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{b_m}{10^m} + \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} + \dots$$

dans l'intervalle $[0, 1]$.

Si le nombre est ≥ 1 , on remplace le 0 avant la virgule par la partie entière.

Développement décimal d'un nombre réel

Quand $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots$ sont des chiffres dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on note

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_{m-1} b_m b_{m+1} \dots$$

le nombre

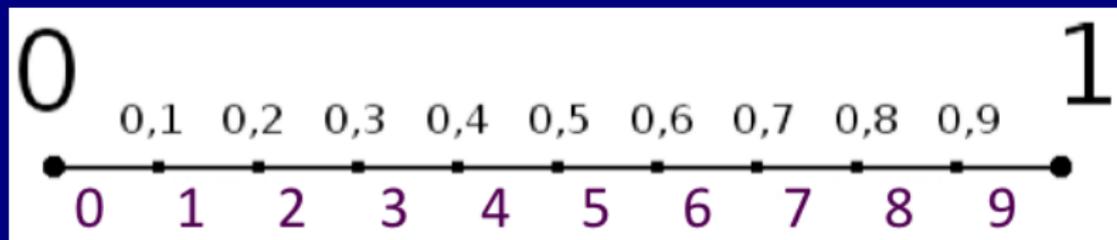
$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \dots + \frac{b_{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{b_m}{10^m} + \frac{b_{m+1}}{10^{m+1}} + \dots$$

dans l'intervalle $[0, 1]$.

Si le nombre est ≥ 1 , on remplace le 0 avant la virgule par la partie entière.

Les chiffres après la virgule

Les nombres réels positifs sont les mesures des longueurs. Prenons un nombre réel positif, enlevons-lui la partie entière, il reste la partie fractionnaire $\{x\}$ entre 0 et 1.

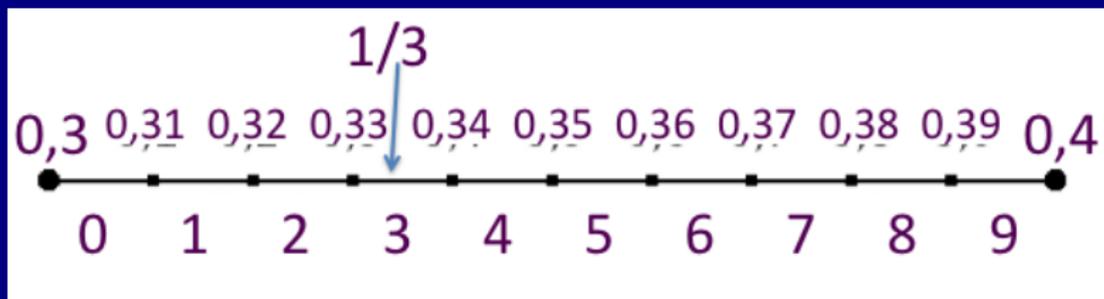


On divise l'intervalle $[0, 1)$ en 10 intervalles de longueur $1/10$, on les numérote de 0 à 9, et on regarde le numéro de l'intervalle dans lequel se trouve $\{x\}$: c'est le premier chiffre de la partie décimale de x , que nous avons noté b_1 .

Le développement décimal de $1/3$

Par exemple $1/3$ est dans l'intervalle entre $0,3$ et $0,4$ qui est numéroté 3, donc le premier chiffre décimal de $1/3$ est 3.

On découpe l'intervalle entre $0,3$ et $0,4$ en 10 intervalles de longueur $1/100 = 0,01$, on les numérote de 0 à 9. Le numéro de l'intervalle dans lequel tombe notre nombre donne son deuxième chiffre après la virgule.



Le développement décimal de $1/3$

Pour le nombre $1/3$, c'est toujours l'intervalle numéroté 3 qui sera le bon, car

$$0,333\dots333 < \frac{1}{3} < 0,333\dots334,$$

ce qui veut dire que les chiffres décimaux de $1/3$ sont tous égaux à 3 :

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots333\dots$$

avec une infinité de 3.

Le développement décimal de $1/3$

Pour le nombre $1/3$, c'est toujours l'intervalle numéroté 3 qui sera le bon, car

$$0,333\dots333 < \frac{1}{3} < 0,333\dots334,$$

ce qui veut dire que les chiffres décimaux de $1/3$ sont tous égaux à 3 :

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots333\dots$$

avec une infinité de 3.

Coder les nombres réels

À chaque longueur x (ou chaque nombre réel positif) on associe une suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$

À chaque suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$ on associe un nombre réel positif x .

Est-ce un bon codage ?

Coder les nombres réels

À chaque longueur x (ou chaque nombre réel positif) on associe une suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$

À chaque suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$ on associe un nombre réel positif x .

Est-ce un bon codage ?

Coder les nombres réels

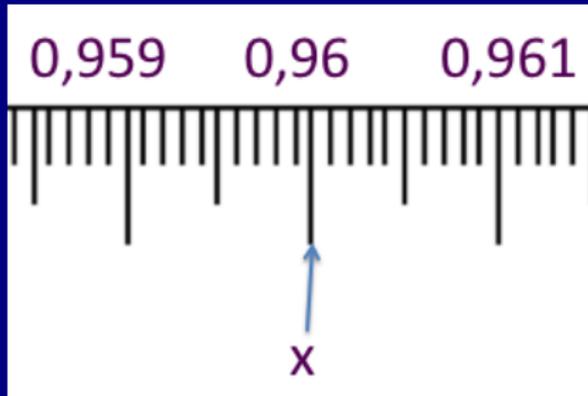
À chaque longueur x (ou chaque nombre réel positif) on associe une suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$

À chaque suite de chiffres $b_0 b_1 b_2 \dots$ on associe un nombre réel positif x .

Est-ce un bon codage ?

Une situation ambiguë

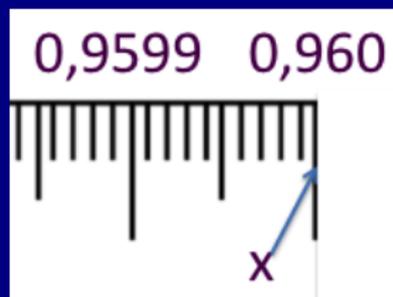
Et si le nombre en question est une extrémité d'un intervalle ? Par exemple si on part de $x = 24/25 = 0,96$, le premier chiffre décimal est 9, pour le second on trouve que $x - 0,9 = 0,06$ est à la limite entre l'intervalle de numéro 5 et celui de numéro 6.



Son développement décimal est $0,960\ 000\ \dots$ que l'on note simplement $0,96$. Cela revient à dire qu'à cette étape, on décide qu'il est dans l'intervalle numéro 6, et ensuite il sera toujours dans l'intervalle numéro 0.

Suite infinie de chiffres 9

Mais on peut aussi à cette étape décréter qu'il est dans le cinquième intervalle. Dans ce cas à chacune des étapes suivantes il sera dans le neuvième intervalle, et on trouvera le développement $0,959\,999\,999\dots$ avec une infinité de 9.



On a $24/25 = 0,96 = 0,959\,999\,999\dots$

De même $1 = 0,999\,999\,999\dots$ avec une infinité de 9.

Les nombres décimaux

On appelle *nombre décimal* un nombre dont le développement n'a qu'un nombre fini de chiffres (ou, si on préfère, dont tous les chiffres après un certain rang sont 0).

Par exemple les entiers sont des nombres décimaux, $24/25$ aussi (mais pas $1/3$ car $1/3 = 0,333\ 333\ \dots$ a une infinité de chiffres non nuls).

Les nombres décimaux sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme a/b avec b une puissance de 10. Par exemple $24/25 = 96/100$.

Sous forme irréductible, les nombres décimaux sont ceux dont le dénominateur est produit de 2 et de 5 uniquement :
Ainsi $25 = 5 \times 5$.

Les nombres décimaux

On appelle *nombre décimal* un nombre dont le développement n'a qu'un nombre fini de chiffres (ou, si on préfère, dont tous les chiffres après un certain rang sont 0).

Par exemple les entiers sont des nombres décimaux, $24/25$ aussi (mais pas $1/3$ car $1/3 = 0,333\ 333 \dots$ a une infinité de chiffres non nuls).

Les nombres décimaux sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme a/b avec b une puissance de 10. Par exemple $24/25 = 96/100$.

Sous forme irréductible, les nombres décimaux sont ceux dont le dénominateur est produit de 2 et de 5 uniquement :
Ainsi $25 = 5 \times 5$.

Les nombres décimaux

On appelle *nombre décimal* un nombre dont le développement n'a qu'un nombre fini de chiffres (ou, si on préfère, dont tous les chiffres après un certain rang sont 0).

Par exemple les entiers sont des nombres décimaux, $24/25$ aussi (mais pas $1/3$ car $1/3 = 0,333\ 333 \dots$ a une infinité de chiffres non nuls).

Les nombres décimaux sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme a/b avec b une puissance de 10. Par exemple $24/25 = 96/100$.

Sous forme irréductible, les nombres décimaux sont ceux dont le dénominateur est produit de 2 et de 5 uniquement :
Ainsi $25 = 5 \times 5$.

Les nombres décimaux

On appelle *nombre décimal* un nombre dont le développement n'a qu'un nombre fini de chiffres (ou, si on préfère, dont tous les chiffres après un certain rang sont 0).

Par exemple les entiers sont des nombres décimaux, $24/25$ aussi (mais pas $1/3$ car $1/3 = 0,333\ 333 \dots$ a une infinité de chiffres non nuls).

Les nombres décimaux sont ceux qui peuvent être écrits sous la forme a/b avec b une puissance de 10. Par exemple $24/25 = 96/100$.

Sous forme irréductible, les nombres décimaux sont ceux dont le dénominateur est produit de 2 et de 5 uniquement :
Ainsi $25 = 5 \times 5$.

Les dénominateurs des nombres décimaux

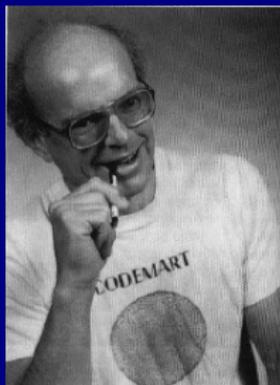
Les dénominateurs des nombres décimaux sous forme irréductible sont dans la liste

1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, 125, 128, 160,
200, 250, 256, 320, 400, 500, 512, 625, 640, 800, 1000, 1024,
1250, 1280, 1600, 2000, 2048, 2500, 2560, 3125, 3200, 4000, ...

<http://oeis.org/A003592>

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

Neil J. A. Sloane



Unicité du développement décimal

Les nombres décimaux possèdent exactement deux développements, l'un n'ayant qu'un nombre fini de chiffres non nuls, l'autre ayant sa suite de chiffres terminant par des 9.

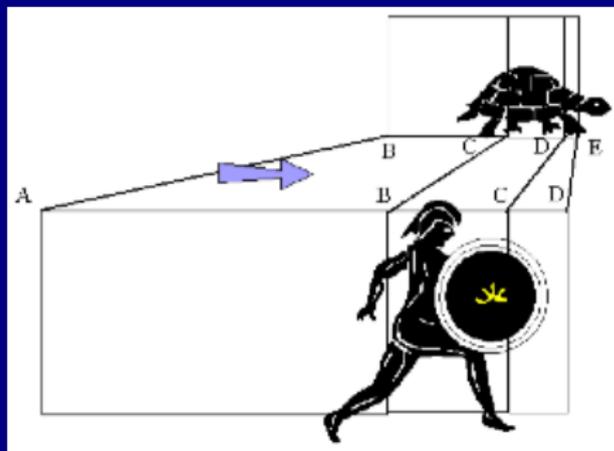
Les nombres qui ne sont pas décimaux ont un développement décimal unique.

Unicité du développement décimal

Les nombres décimaux possèdent exactement deux développements, l'un n'ayant qu'un nombre fini de chiffres non nuls, l'autre ayant sa suite de chiffres terminant par des 9.

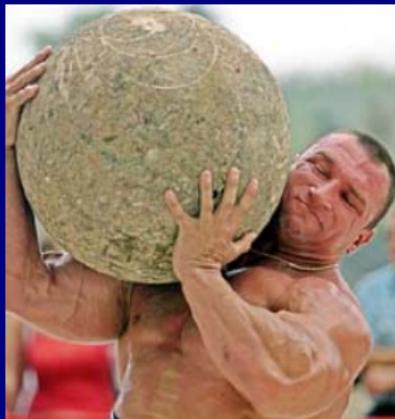
Les nombres qui ne sont pas décimaux ont un développement décimal unique.

Le paradoxe d'Achille et la tortue



Achille veut rattraper la tortue, il part de A quand elle est en B . Il doit d'abord aller à B où elle était initialement. Mais entre temps elle a avancé jusqu'à C . Et quand il arrive à C , elle est déjà à D . Il restera donc toujours à Achille une partie du chemin à parcourir pour la rejoindre.

Le paradoxe de la dichotomie (Zénon d'Élée)



Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que la pierre puisse atteindre l'arbre, elle doit traverser la première moitié des huit mètres.

Ensuite, il lui reste encore quatre mètres à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, deux mètres, et ainsi de suite *ad infinitum* et à chaque fois avec un temps non nul.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxes_de_Z%C3%A9non

Lancer un caillou

La pierre doit faire d'abord $9/10$ du chemin, et il lui restera $1/10$ du chemin à faire. Il faudra ensuite qu'elle fasse $9/10$ de ce chemin restant, et il lui restera à faire $1/100$ du chemin initial.

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{100} = \frac{9}{1\,000} + \frac{1}{1\,000}, \dots$$

Cela s'écrit

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \dots = 0,999\,999\,999\dots$$

Lancer un caillou

La pierre doit faire d'abord $9/10$ du chemin, et il lui restera $1/10$ du chemin à faire. Il faudra ensuite qu'elle fasse $9/10$ de ce chemin restant, et il lui restera à faire $1/100$ du chemin initial.

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{100} = \frac{9}{1\,000} + \frac{1}{1\,000}, \dots$$

Cela s'écrit

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \dots = 0,999\,999\,999\dots$$

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait a différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

La série géométrique

Soit a un nombre réel. On considère les sommes

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$$

$$S_0 = 1, S_1 = 1 + a, S_2 = 1 + a + a^2, S_3 = 1 + a + a^2 + a^3, \dots$$

On écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\ aS_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \end{aligned}$$

et on fait la différence

$$(1 - a)S_n = 1 - a^{n+1}.$$

Donc, si $a \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$ alors $S_n = n + 1$.

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Supposons $0 < a < 1$. Alors S_n est toujours $< 1/(1-a)$, mais la différence $a^{n+1}/(1-a)$ est de plus en plus petite quand n est grand. C'est pourquoi

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Par exemple avec $a = 1/2$ on a $1/(1-a) = 2$ et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 2,$$

tandis qu'avec $a = 1/10$ on a $1/(1-a) = 10/9$ et

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots = 10.$$

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Supposons $0 < a < 1$. Alors S_n est toujours $< 1/(1-a)$, mais la différence $a^{n+1}/(1-a)$ est de plus en plus petite quand n est grand. C'est pourquoi

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Par exemple avec $a = 1/2$ on a $1/(1-a) = 2$ et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 2,$$

tandis qu'avec $a = 1/10$ on a $1/(1-a) = 10/9$ et

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots = 10.$$

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Supposons $0 < a < 1$. Alors S_n est toujours $< 1/(1-a)$, mais la différence $a^{n+1}/(1-a)$ est de plus en plus petite quand n est grand. C'est pourquoi

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Par exemple avec $a = 1/2$ on a $1/(1-a) = 2$ et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots = 2,$$

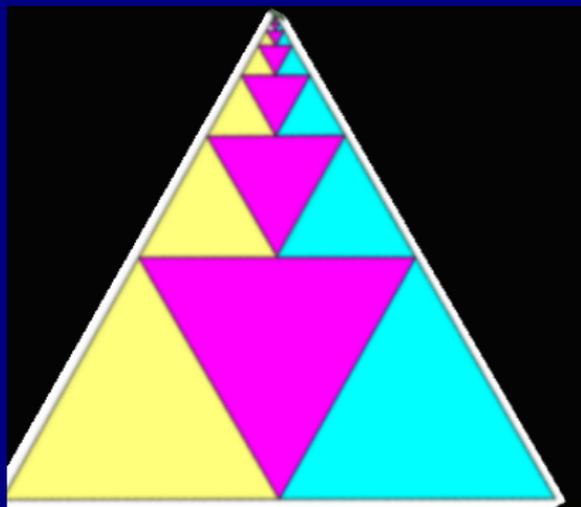
tandis qu'avec $a = 1/10$ on a $1/(1-a) = 10/9$ et

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots = 10.$$

La série géométrique de raison $1/4$

Pour $a = 1/4$ on a $1/(1 - a) = 4/3$ et

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{1}{3}$$



Autre argument pour $1 = 0,999\,999\,\dots$

Nous avons vu la relation

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots333\dots$$

avec une infinité de 3.

Si on multiplie les deux côtés par 3, on trouve

$$1 = 0,999\,999\,\dots$$

avec une infinité de 9.

Autre argument pour $1 = 0,999\,999\,\dots$

Nous avons vu la relation

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots333\dots$$

avec une infinité de 3.

Si on multiplie les deux côtés par 3, on trouve

$$1 = 0,999\,999\,\dots$$

avec une infinité de 9.

Développement décimal de $1/7$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857 \dots$$

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

$$30 = 7 \cdot 4 + 2$$

$$20 = 7 \cdot 2 + 6$$

$$60 = 7 \cdot 8 + 4$$

$$40 = 7 \cdot 5 + 5$$

$$50 = 7 \cdot 7 + 1$$

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

⋮

Le développement est périodique.

Développement décimal de $1/7$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857 \dots$$

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

$$30 = 7 \cdot 4 + 2$$

$$20 = 7 \cdot 2 + 6$$

$$60 = 7 \cdot 8 + 4$$

$$40 = 7 \cdot 5 + 5$$

$$50 = 7 \cdot 7 + 1$$

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

⋮

Le développement est périodique.

Développement décimal des nombres rationnels

Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\ 285\ 714\ 285\ 714\ 285\ 714\ \dots\dots$$

Celui de $1/163$ aussi (la longueur de la période est 81) :

$$\frac{1}{163} = 0,006\ 134\ 969\ 325\ 153\ 374\ 233\ 128\ 834$$

355 828 220 858 895 705 521 472 392
638 036 809 815 950 920 245 398 773
006 134 969 325 153 374 233 128 834 ...

Développement décimal des nombres rationnels

Le développement décimal de $99/70$ est ultimement périodique :

$$\frac{99}{70} = 1,414\,285\,714\,285\,714\,285\,714\, \dots\dots$$

Celui de $1/163$ aussi (la longueur de la période est 81) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{163} = & 0,006\,134\,969\,325\,153\,374\,233\,128\,834 \\ & 355\,828\,220\,858\,895\,705\,521\,472\,392 \\ & 638\,036\,809\,815\,950\,920\,245\,398\,773 \\ & 006\,134\,969\,325\,153\,374\,233\,128\,834\, \dots \end{aligned}$$

Développement décimal des nombres rationnels

Un nombre rationnel a un développement décimal *ultimement périodique* (périodique à partir d'un certain rang)

Inversement, tout nombre dont le développement décimal est ultimement périodique est rationnel.

C'est un *critère d'irrationalité*.

Exercice : 999 ... 9000 ... 0

$$\begin{aligned}1 \times 9 &= 9, \\2 \times 45 &= 90, \\3 \times 3 &= 9, \\4 \times 225 &= 900, \\5 \times 18 &= 90, \\6 \times 15 &= 90, \\7 \times 142857 &= 999\,999, \\8 \times 1\,125 &= 9\,000, \\9 \times 1 &= 9.\end{aligned}$$

En considérant le développement décimal de $1/N$, montrer que tout entier $N > 0$ possède un multiple dont l'écriture en base dix est une suite de 9 suivie éventuellement d'une suite de 0 :

$$999 \dots 9000 \dots 0$$

Exercice : 999 ... 9000 ... 0

$$\begin{aligned}1 \times 9 &= 9, \\2 \times 45 &= 90, \\3 \times 3 &= 9, \\4 \times 225 &= 900, \\5 \times 18 &= 90, \\6 \times 15 &= 90, \\7 \times 142857 &= 999\,999, \\8 \times 1\,125 &= 9\,000, \\9 \times 1 &= 9.\end{aligned}$$

En considérant le développement décimal de $1/N$, montrer que tout entier $N > 0$ possède un multiple dont l'écriture en base dix est une suite de 9 suivie éventuellement d'une suite de 0 :

$$999 \dots 9000 \dots 0$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0, 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901 \dots?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1, 234\,567\,89$ et

$$z = 0, 100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000 \dots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0, 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901 \dots?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1, 234\,567\,89$ et

$$z = 0, 100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000 \dots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0, 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901\, \dots?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1, 234\,567\,89$ et

$$z = 0, 100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000\, \dots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0, 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901 \dots?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1, 234\,567\,89$ et

$$z = 0, 100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000 \dots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Développements périodiques

Quel est le nombre

$$x := 0, 123\,456\,789\,012\,346\,678\,901\,234\,678\,901\, \dots?$$

On l'écrit $x = yz$ avec $y = 1, 234\,567\,89$ et

$$z = 0, 100\,000\,000\,010\,000\,000\,001\,000\,000\, \dots$$

Alors

$$z = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{11}} + \frac{1}{10^{21}} + \frac{1}{10^{31}} + \dots$$

qui est le produit par $1/10$ d'une série géométrique de raison $1/10^{10}$:

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-10}} = \frac{10^9}{9\,999\,999\,999}.$$

Ainsi

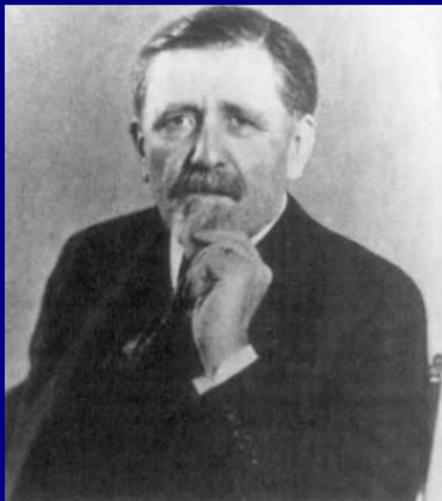
$$x = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}.$$

Les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$

<http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi>

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973
799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483
605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115
278206057147010955997160597027453459686201472851741864088919860
955232923048430871432145083976260362799525140798968725339654633
180882964062061525835239505474575028775996172983557522033753185
701135437460340849884716038689997069900481503054402779031645424
782306849293691862158057846311159666871301301561856898723723528
850926486124949771542183342042856860601468247207714358548741556
570696776537202264854470158588016207584749226572260020855844665
214583988939443709265918003113882464681570826301005948587040031
864803421948972782906410450726368813137398552561173220402450912
277002269411275736272804957381089675040183698683684507257993647
290607629969413804756548237289971803268024744206292691248590521
810044598421505911202494413417285314781058036033710773091828693
1471017111168391658172688941975871658215212822951848847 ...

Émile Borel : 1950



La suite des chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ devrait être "aléatoire" : chacun des chiffres devrait apparaître avec la fréquence $1/10$, chacune des suites de 2 chiffres devrait apparaître avec la fréquence $1/100$...

Émile Borel (1871–1956)

- *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*,
Palermo Rend. **27**, 247-271 (1909).
Jahrbuch Database JFM 40.0283.01
<http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html>
- *Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaînes*,
C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 591-593 (1950).
Zbl 0035.08302

Que sait-on sur la suite des décimales de $\sqrt{2}$?

On sait que la suite des décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas ultimement périodique.

Il en résulte que, parmi les chiffres

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

il y en a au moins deux qui apparaissent une infinité de fois.

On ne sait presque rien d'autre.

Que sait-on sur la suite des décimales de $\sqrt{2}$?

On sait que la suite des décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas ultimement périodique.

Il en résulte que, parmi les chiffres

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

il y en a au moins deux qui apparaissent une infinité de fois.

On ne sait presque rien d'autre.

Que sait-on sur la suite des décimales de $\sqrt{2}$?

On sait que la suite des décimales de $\sqrt{2}$ n'est pas ultimement périodique.

Il en résulte que, parmi les chiffres

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

il y en a au moins deux qui apparaissent une infinité de fois.

On ne sait presque rien d'autre.

L'argument diagonal de Cantor (1891)

Il y a plus de nombres réels que de nombres rationnels : on ne peut pas mettre tous les nombres réels dans une liste (1874 : origine de la théorie de l'infini - théorie des ensembles).

Si x_1, x_2, x_3, \dots est une liste de nombres réels entre 0 et 1, il existe un nombre réel y entre 0 et 1 qui n'est pas dans la liste.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, b_{11} b_{12} b_{13} \dots b_{1n} \dots \\ x_2 & = & 0, b_{21} b_{22} b_{23} \dots b_{2n} \dots \\ x_3 & = & 0, b_{31} b_{32} b_{33} \dots b_{3n} \dots \\ & & \vdots \\ x_n & = & 0, b_{n1} b_{n2} b_{n3} \dots b_{nn} \dots \\ & & \vdots \end{array}$$

L'argument diagonal de Cantor (1891)

Il y a plus de nombres réels que de nombres rationnels : on ne peut pas mettre tous les nombres réels dans une liste (1874 : origine de la théorie de l'infini - théorie des ensembles).

Si x_1, x_2, x_3, \dots est une liste de nombres réels entre 0 et 1, il existe un nombre réel y entre 0 et 1 qui n'est pas dans la liste.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0, b_{11} b_{12} b_{13} \dots b_{1n} \dots \\ x_2 & = & 0, b_{21} b_{22} b_{23} \dots b_{2n} \dots \\ x_3 & = & 0, b_{31} b_{32} b_{33} \dots b_{3n} \dots \\ & & \vdots \\ x_n & = & 0, b_{n1} b_{n2} b_{n3} \dots b_{nn} \dots \\ & & \vdots \end{array}$$

Georg Cantor (1845 - 1918)



Pour chaque chiffre b_{ii} qui prend une valeur dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on choisit un chiffre b'_{ii} dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ avec $b'_{ii} \neq b_{ii}$. Alors

$$y = 0, b'_{11} b'_{22} b'_{33} \dots b'_{nn} \dots$$

n'est pas dans la liste.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>
The MacTutor History of Mathematics archive

Système décimal, système binaire

Base dix : écriture décimale des nombres réels.

Base deux : système binaire — informatique.

$2^{10} = 1024$ – kilo Octets

Questions d'arrondis en informatique théorique.

Système décimal, système binaire

Base dix : écriture décimale des nombres réels.

Base deux : système binaire — informatique.

$2^{10} = 1024$ – kilo Octets

Questions d'arrondis en informatique théorique.

Système décimal, système binaire

Base dix : écriture décimale des nombres réels.

Base deux : système binaire — informatique.

$2^{10} = 1024$ – kilo Octets

Questions d'arrondis en informatique théorique.

Système décimal, système binaire

Base dix : écriture décimale des nombres réels.

Base deux : système binaire — informatique.

$2^{10} = 1024$ – kilo Octets

Questions d'arrondis en informatique théorique.

La constante de Ramanujan $e^{\pi\sqrt{163}}$

Hermite (1859), S. Ramanujan (1914)

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743, 999\,999\,999\,999\,250\,0\dots$$

<http://oeis.org/A060295>

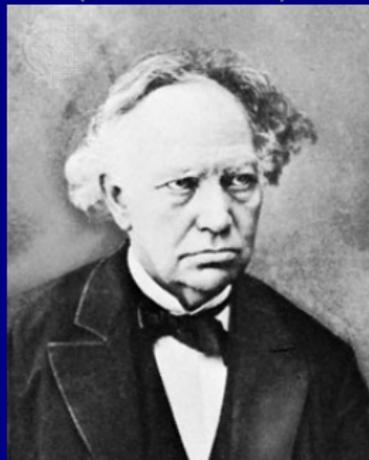
<http://mathworld.wolfram.com/RamanujanConstant.html>

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Ramanujan>

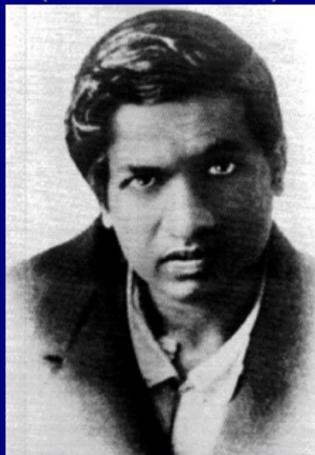
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians>

Scientific American, 1 avril 1975

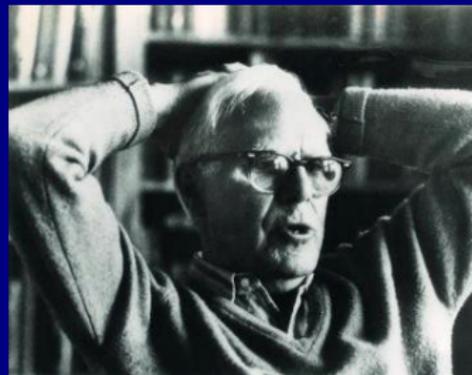
Hermite
(1822-1901)



S. Ramanujan
(1887 - 1920)



Martin Gardner
(1914-2010)



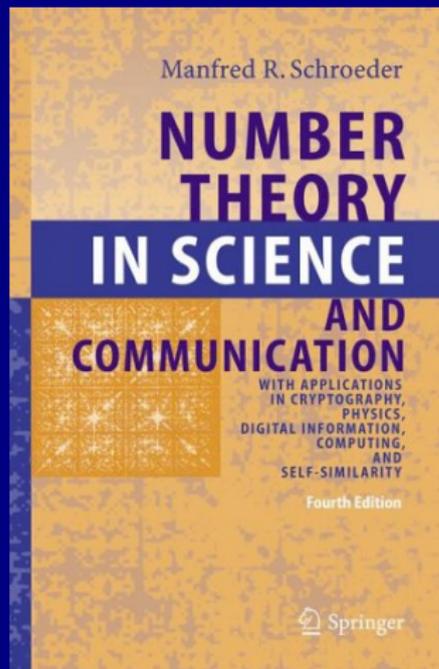
Number Theory in Science and communication

M.R. Schroeder.

**Number theory in
science and
communication :**

*with applications in
cryptography, physics, digital
information, computing and
self similarity*

Springer series in
information sciences **7** 1986.
4th ed. (2006) 367 p.



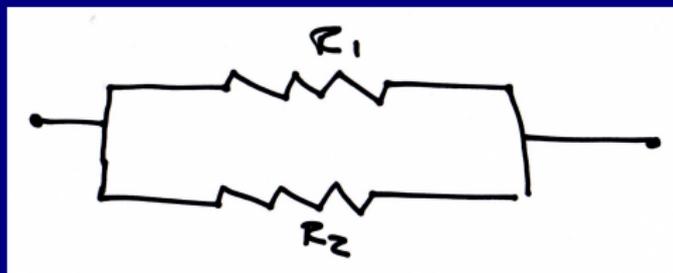
Réseaux électriques

- La résistance R d'un réseau en série



est la somme $R_1 + R_2$.

- La résistance R d'un réseau en parallèle

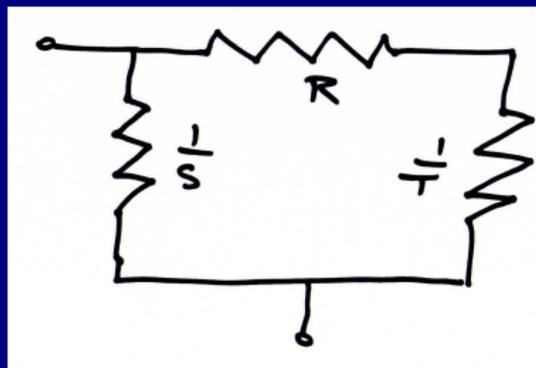


satisfait

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Réseaux et fractions continues

La résistance U du circuit

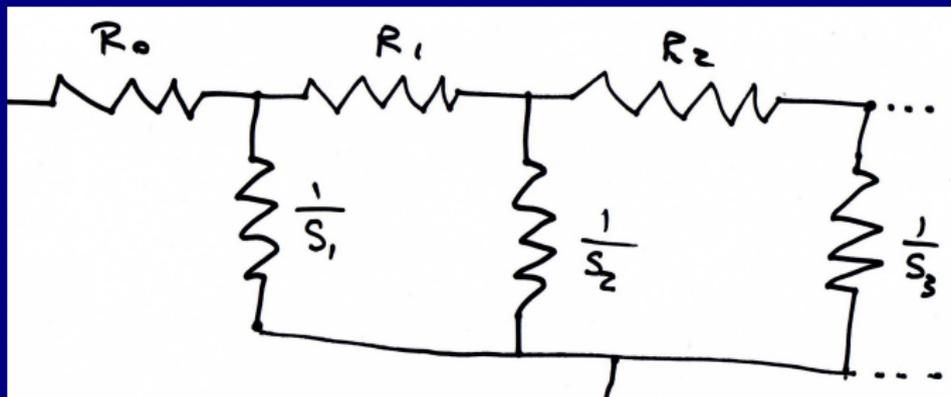


est donnée par

$$\frac{1}{U} = S + \frac{1}{R + \frac{1}{T}} \quad \text{donc} \quad U = \frac{1}{S + \frac{1}{R + \frac{1}{T}}}$$

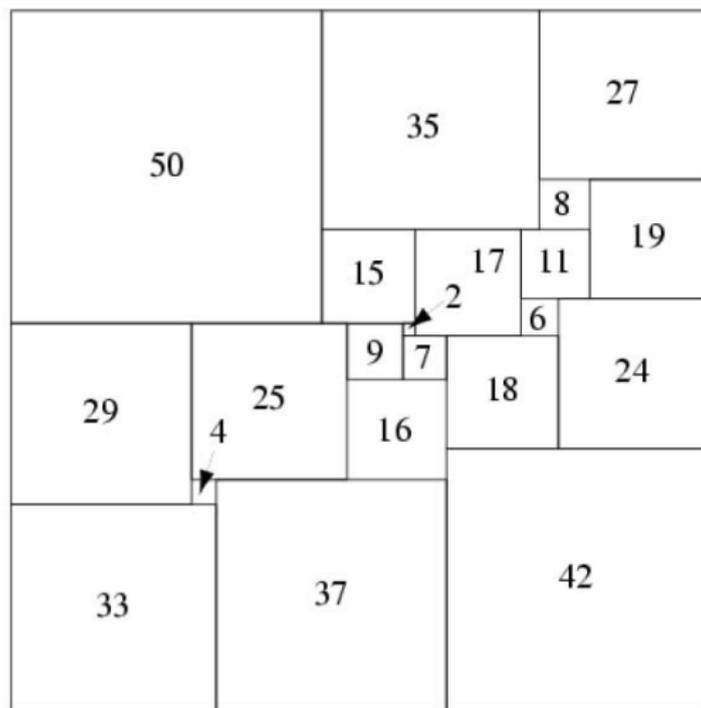
Réseaux électriques, fractions continues et décomposition d'un carré en carrés

- La résistance du réseau suivant est donnée par une fraction continue $[R_0; S_1, R_1, S_2, R_2 \dots]$ pour le circuit



- Les réseaux électriques et les fractions continues ont été utilisés pour trouver la première solution du problème de décomposition d'un carré entier en réunion disjointe de carrés entiers tous distincts.

Quadrature du carré



21-square perfect square

There is a unique simple perfect square of order 21 (the lowest possible order), discovered in 1978 by A. J. W. Duijvestijn (Bouwkamp and Duijvestijn 1992). It is composed of 21 squares with total side length 112, and is illustrated above.

Suite de l'histoire

Nombres algébriques, nombres transcendants.

Quadrature du cercle.

Constructions à la règle et au compas.

Problèmes Diophantiens.

Suite de l'histoire

Nombres algébriques, nombres transcendants.

Quadrature du cercle.

Constructions à la règle et au compas.

Problèmes Diophantiens.

Suite de l'histoire

Nombres algébriques, nombres transcendants.

Quadrature du cercle.

Constructions à la règle et au compas.

Problèmes Diophantiens.

Suite de l'histoire

Nombres algébriques, nombres transcendants.

Quadrature du cercle.

Constructions à la règle et au compas.

Problèmes Diophantiens.

Références

-  JEAN-MARIE DE KONINCK.
 - *1001 problèmes en théorie classique des nombres*, Ellipses, Paris, 2004 ;
 - *Ces nombres qui nous fascinent*, Ellipses, Paris, 2008.
 - *En chair et en maths*, Septembre Éditeur, Québec, 2008.
-  STANISLAS DEHAENE. *La bosse des maths*. Ed. Odile Jacob (1997).
-  JEAN-PAUL DELAHAYE. *Le fascinant nombre π* . Bibliothèque Pour La Science (1997).
-  APOSTOLOS DOXIADIS. *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*. Ed. Seuil (1999).

Références

-  GILLES DOWEK, JEAN-PIERRE BOURGUIGNON, JEAN-CHRISTOPHE NOVELLI, BENOÎT RITTAUD. *Jeux mathématiques et vice-versa*. Le Pommier, 19 (2005).
-  ALBERT DUCROCQ ET ANDRÉ WARUSFEL. *Les mathématiques Plaisir et Nécessité*. Vuibert (2000).
-  GILLES GODEFROY. *L'aventure des nombres*. Ed. Odile Jacob (1997).
-  DENIS GUEDJ.
 - *L'empire des nombres*. Gallimard, Sciences et Techniques 300 (1996)
 - *Le théorème du Perroquet*. Ed. Seuil (1998).

Références

- 📄 MARIE JACOB. La quadrature du cercle – un problème à la mesure des lumières. Fayard (2006).
- 📄 ALEXANDRE MOATTI. *Regards sur les textes fondateurs de la science*, volume 1. Le sel et le fer, **20**, Cassini (2010).
- BENOÎT RITTAUD. *À un mathématicien inconnu*.
- ALAIN JUHEL. *Lambert et l'irrationalité de π* .
- NORBERT VERDIER. *L'irrationalité de e* .
- MICHEL MENDÈS–FRANCE. *Liouville, le découvreur des nombres transcendants*.
- MICHEL WALDSCHMIDT. *La méthode de Charles Hermite en théorie des nombres transcendants*.
- PATRICK DEHORNOY. *Cantor et les infinis*.

Références sur internet

<http://fr.wikipedia.org/wiki/> Wikipedia
Portail des Mathématiques

<http://images.math.cnrs.fr/> Images des mathématiques

<http://trucsmaths.free.fr/> Des trucs et des maths

<http://mathworld.wolfram.com/> Wolfram MathWorld

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>
The MacTutor History of Mathematics archive



**Rationnels,
irrationnels,
infinis**

Michel Waldschmidt

<http://www.math.jussieu.fr/~miw/>