INDEPENDANCE ALGEBRIQUE DE NOMBRES DE LIOUVILLE

par

Michel WALDSCHMIDT

C.N.R.S. U.A. 763 (*Problèmes Diophantiens*)
Institut Henri Poincaré 11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS Cedex 05

Résumé : Nous donnons un aperçu historique sur le sujet, en distinguant deux types de résultats : d'une part ceux qui conduisent à produire des ensembles de nombres algébriquement indépendants (dont certains ont la puissance du continu) par des valeurs de séries lacunaires, d'autre part ceux qui reposent sur des énoncés d'approximation diophantienne, en particulier des mesures de transcendance.

§1. Construction de nombres algébriquement indépendants et séries lacunaires.

Liouville a montré qu'un nombre réel irrationnel possédant de très bonnes approximations rationnelles est transcendant. Plus généralement, le procédé de Liouville permet de construire des nombres algébriquement indépendants.

Rappelons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ est dit *algébriquement libre* (sous-entendu sur $\mathbb{Q}$) si pour toute partie finie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de E (où les x_i sont deux-à-deux distincts) et tout polynôme non nul P dans $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$, le nombre $P(x_1,\ldots,x_n)$ n'est pas nul. On dit aussi que E est constitué d'éléments *algébriquement indépendants*.

Toute base de transcendance de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}$) sur $\mathbb{Q}$ est une partie algébriquement libre ayant la puissance du continu.

Le premier exemple explicite d'un ensemble de nombres algébriquement indépendants ayant la puissance du continu a été donné par J. von Neumann en 1927 : c'est l'ensemble des nombres

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2^{[\rho\nu]}-2^{\nu^2}}, \qquad (\rho>0).$$

Une autre construction de nombres algébriquement indépendants a été proposée par O. Perron en 1932.

Comme cas particulier d'un énoncé général, H. Kneser en 1960 déduit l'indépendance algébrique des nombres

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\left[n^{n+\tau}\right]}, \quad (0\leq\tau<1).$$

Une autre généralisation de la construction de von Neumann, due à F. Kuiper et J. Popken (1962), valable sur un corps valué complet, conduit à la famille algébriquement libre

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\left[m^{\tau}\right]-m^m}, \quad (\tau>0).$$

La même année, W.M. Schmidt a mis en lumière les propriétés spécifiques de ces ensembles qui permettent de démontrer l'indépendance algébrique ; il a énoncé une condition suffisante pour l'indépendance algébrique de nombres réels faisant intervenir des approximations simultanées. Il en déduit, par exemple, le résultat antérieur de Kneser. Cet énoncé de Schmidt a été d'abord utilisé en 1974 par A. Durand pour obtenir l'indépendance algébrique des nombres

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\left[2^{\tau^n}\right]}, \qquad (\tau>1),$$

puis raffiné par A. Durand en 1976 :

<u>Théorème</u> - *Soient* $\theta_1,\dots,\theta_s$ *des nombres réels avec* $s\geq 1$. *On suppose que pour tout entier* $n\geq 1$, *il existe un entier* $q\geq 1$ *tel que*

$$0 < n^{s-1}.\|q\theta_s\| < n^{s-2}.\|q\theta_{s-1}\| <\dots< n.\|q\theta_2\| < \|q\theta_1\| \leq q^{-n}.$$

Alors $\theta_1,\dots,\theta_s$ *sont algébriquement indépendants.*

On a noté $\|.\|$ la distance à l'entier le plus proche :

$$\|q\theta\| = \min_{m\in\mathbb{Z}} |q\theta-m|.$$

Dans le cas $s=1$, un nombre $\theta=\theta_1$ vérifiant les hypothèses du théorème est ce qu'on appelle un *nombre de Liouville*

L'énoncé de Durand (1976, th.2) est plus général, puisqu'il remplace les approximations rationnelles par des approximations algébriques. Par exemple pour chaque nombre algébrique réel α, $0<\alpha<1$, la famille

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^{[\tau n!]}, \qquad (\tau>0)$$

est algébriquement libre. Il est intéressant de noter que l'énoncé de Durand dans le cas $s=1$ donne alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre complexe soit transcendant (1976, th.1).

Les travaux plus récents concernent les séries lacunaires. La transcendance des valeurs de telles séries a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux de H. Cohn en 1946, K. Mahler en 1965, G. Baron et E. Braune en 1970, puis P.L. Cijsouw et R. Tijdeman en 1973 ; mais ici nous avons choisi de nous concentrer sur l'étude de l'indépendance algébrique.

W.W. Adams (1978) montre que les nombres

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_k^{-\nu_i}, \qquad (1\leq k\leq q)$$

sont algébriquement indépendants, quand $p_1,\dots,p_q$ sont des entiers ≥ 2 multiplicativement indépendants, et $(\nu_i)_{i\geq 1}$ une suite croissante d'entiers vérifiant

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} \nu_{i+1}/\nu_i = \infty.$$

Des énoncés généraux sont déduits par P. Bundschuh et F.J. Wylegala (1979) du critère de Durand. Ils obtiennent l'indépendance algébrique de nombres $f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_t)$, quand $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ sont des nombres algébriques et f une série lacunaire :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . z^{e_k}$$

(avec des hypothèses sur α_j, a_k, e_k ; en particulier la suite d'entiers e_k est croissante et vérifie $\lim_{k\longrightarrow\infty} e_{k+1}/e_k = \infty$.). Enfin, indépendamment, I. Shiokawa et Zhu Yao Chen ont donné des énoncés (un peu trop techniques pour être explicités ici) qui conduisent à l'indépendance algébrique de nombres de la forme $f_\nu(\alpha_j)$ quand les f_ν sont différentes séries lacunaires ; ils retrouvent ainsi certains exemples antérieurs (von Neumann, Perron, Kneser, Schmidt, Durand, Adams). Le dernier article de Zhu repose sur un raffinement du critère d'indépendance algébrique de Durand.

Après Kuiper et Popken, la construction de nombres p-adiques algébriquement indépendants a été étudiée par P. Bundschuh et R. Wallisser (1975) qui démontrent l'analogue du critère de Schmidt pour des éléments de $\mathbb{Q}_p$, et obtiennent des familles algébriquement libres d'entiers p-adiques, par exemple

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{\left[2^{\tau^n}\right]}, \qquad (\tau>1),$$

ainsi que les fractions continues

$$[a_0(\tau), a_1(\tau), \dots], \qquad (\tau>1),$$

où

$$a_n(\tau) = p^{\left[2^{\tau^n}\right]}.$$

Le critère de Durand a été traduit en p-adique par F.J. Wylegala en 1979.

Les méthodes p-adiques ont été utiles à Kumiko Nishioka pour l'étude de l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} z^{-k!}.$$

En 1984, elle obtient l'indépendance algébrique de deux nombres de la forme $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$, aussi bien dans le domaine complexe que dans le cas p-adique. Dans le cas complexe, elle utilise un argument p-adique. Elle étend ensuite son énoncé à l'indépendance algébrique de trois nombres de cette forme, avant de résoudre en 1986 le cas général, démontrant ainsi une conjecture de D.W. Masser : si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques dans l'ouvert $0<|\alpha|<1$ de $\mathbb{C}$, tels que, pour $1\leq i\neq j\leq n$, α_i/α_j ne soit pas une racine de l'unité, alors les nombres

$$f^{(\ell)}(\alpha_j), \qquad (\ell\geq 0,\ 1\leq j\leq n)$$

sont algébriquement indépendants. On a désigné par $f^{(\ell)}$ la dérivée d'ordre ℓ de la fonction $f(z) = \sum_{k\geq 0} z^{-k!}$. La démonstration utilise un théorème d'Evertse sur l'équation $x_1+\ldots+x_n = 0$ en S-unités, théorème qui repose sur les résultats d'approximation simultanée de nombres algébriques de W.M. Schmidt et H.P.F. Schlickewei. Enfin elle a étendu son énoncé à des suites récurrentes linéaires plus générales.

Récemment, l'énoncé de Durand cité plus haut sur l'indépendance algébrique des nombres

$$\theta_d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2^{d^n}}, \qquad \text{(d entier >1)},$$

a été complété par F. Amoroso, qui montre que si la suite d'entiers positifs $d_1<d_2<\ldots<d_m<\ldots$ est suffisamment lacunaire, chacun des corps $\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ a un type de transcendance (au sens de S.Lang, dans son livre sur les nombres transcendants) fini. C'est un des premiers exemples explicites de corps de degré de transcendance arbitrairement grand ayant cette propriété, avec ceux fournis par les travaux récents de P.G. Becker et K. Nishioka sur les mesures d'indépendance algébrique pour les valeurs de fonctions satisfaisant les équations fonctionnelles introduites par K. Mahler.

Pour compléter cette première partie, citons enfin le texte de P. Bundschuh dans ce volume, où on trouvera de nouveaux résultats originaux sur le sujet que nous venons de présenter.

§2. Utilisation de résultats d'approximation.

La plupart des méthodes de transcendance conduisent non seulement à des énoncés qualitatifs (transcendance, indépendance linéaire, indépendance algébrique), mais aussi à des minorations (mesures de transcendance, minorations de combinaisons linéaires, mesures d'indépendance algébrique).

Ces raffinements quantitatifs permettent de construire des nombres algébriquement indépendants.

Prenons un exemple. Le théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de $\log\alpha$ (pour α algébrique, $\alpha\neq0$, $\log\alpha\neq0$) peut être raffiné en une mesure de transcendance de $\log\alpha$, c'est-à-dire en une minoration de $|P(\log\alpha)|$ quand $P\in\mathbb{Z}[X]$ est un polynôme non nul, en fonction du degré et de la hauteur de P (la hauteur est le maximum des valeurs absolues des coefficients). On en déduit l'indépendance algébrique de $\log\alpha$ et η, quand η est un nombre transcendant admettant de très bonnes approximations algébriques. En effet, s'il existait un polynôme non nul $A\in\mathbb{Z}[X,Y]$ tel que $A(\log\alpha,\eta)=0$, en remplaçant η par une approximation algébrique ξ, on obtiendrait un nombre $|A(\log\alpha,\xi)|$ très petit. On multiplie le polynôme $A(X,\xi)$ par un dénominateur de ξ de manière à ce que les coefficients du produit soient entiers algébriques, on prend la norme sur $\mathbb{Q}$, et on obtient un polynôme non nul $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $|P(\log\alpha)|$ soit petit, ce qui contredit la mesure de transcendance de $\log\alpha$.

Cette remarque a été faite dès 1927 par D.D. Mordoukhaÿ-Boltovskoÿ. Son hypothèse sur η était : pour tout entier $\nu\geq1$, il existe un nombre rationnel p/q tel que

$$0 < \left|\eta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\nu!}} .$$

Sous la même hypothèse, il obtient l'indépendance algébrique des nombres $\eta, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ quand $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Pour cela, il raffine le théorème de Lindemann- Weierstrass en donnant une mesure d'indépendance algébrique de $e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}$, c'est-à-dire une minoration de $|P(e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n})|$ pour $P\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ non nul.

Peu de temps après, K. Mahler obtenait, indépendamment, des énoncés plus précis : il suppose seulement que η est un nombre de Liouville, c'est-à-dire que pour tout $\upsilon \geq 1$, il existe $p/q \in \mathbb{Q}$ avec

$$0 < \left|\eta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\upsilon}}.$$

C'est au cours de cette étude que Mahler développe sa première classification des nombres transcendants. Une propriété importante de cette classification est que deux nombres algébriquement dépendants appartiennent à la même classe (voir à ce sujet le livre de Schneider, Chap. III).

Voici quelques uns des énoncés d'indépendance algébrique qui ont été obtenus par l'argument précédent. On désigne par η un nombre transcendant possédant de très bonnes approximations algébriques. L'hypothèse précise dépend de l'énoncé traité. Dans certains cas il suffit que η soit un nombre de Liouville (on peut d'ailleurs conjecturer que cela suffit toujours). Dans tous les cas, le nombre

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . 2^{-2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$$

(où le chiffre 2 figure $2n$ fois) convient.

En 1949, A.O. Gel'fond a montré l'indépendance algébrique de η et α^{β} (pour α et β algébriques, $\alpha \neq 0$, $\log\alpha \neq 0$, $\beta \notin \mathbb{Q}$), de η et $\log\alpha/\log\beta$ (pour α et β algébriques multiplicativement indépendants), et de η, $J_0(\alpha)$, $J_0'(\alpha)$ (pour α algébrique non nul ; J_0 est la fonction de Bessel d'indice 0). En 1963, N.I. Fel'dman démontre l'indépendance algébrique de η et η^{β} (pour β algébrique irrationnel). Puis A.A. Smelev, en 1968, montre que le nombre $\eta_2^{\eta_1}$ est transcendant sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2)$, quand η_1 et η_2 sont deux nombres transcendants admettant simultanément de très bonnes approximations algébriques. On peut par exemple construire η_1 et η_2 algébriquement indépendants par l'un des procédés du §1, et alors les trois nombres η_1, η_2, $\eta_2^{\eta_1}$ sont algébriquements indépendants. Ce texte de Smelev contient de nombreux autres énoncés du même genre. Dans un autre travail la même année il obtient l'indépendance algébrique de η et α^{η} (pour α algébrique non nul, avec $\log\alpha \neq 0$).

En 1976, W.D. Brownawell montre que les trois nombres η, η^{β}, η^{β^2} sont algébriquement indépendants (pour β algébrique de degré 3). Cet énoncé a été raffiné en 1977 par M. Laurent, qui obtient aussi l'indépendance algébrique de 4 des d nombres $\eta, \eta^{\beta},\ldots,\eta^{\beta^{d-1}}$ (quand β est un nombre algébrique de degré $d\geq 7$; on pourrait améliorer cet énoncé maintenant et descendre à $d\geq 5$; plus généralement, les travaux récents de G. Diaz permettent d'obtenir l'indépendance algébrique de k parmi ces d nombres, pourvu que $k \leq \left[\frac{d+3}{2}\right]$, $d\geq 3$).

En développant la méthode de Siegel et Shidlovskiĭ, A.I. Galoschkin a obtenu en 1970 l'indépendance algébrique de η et e^{η}. Cet énoncé a été étendu par K. Väänänen qui obtient l'indépendance algébrique de η_1 et e^{η_2}, et plus généralement de η_1, $f_1(\eta_2),\ldots,f_s(\eta_2)$, quand $f_1,\ldots,f_s$ sont des E-fonctions de Siegel algébriquement indépendantes satisfaisant des équations différentielles linéaires.

Dans sa thèse en 1978, A. Bijlsma utilise la méthode de Baker pour montrer la transcendance sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ du nombre $\alpha_1^{\eta_1}\ldots\alpha_n^{\eta_n}$ (quand les α_j sont des nombres algébriques non nuls, $\log\alpha_j\neq 0$, sous l'hypothèse, au choix, que $1,\eta_1,\ldots,\eta_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, ou que $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$). Il obtient aussi, sous des hypothèses similaires, la transcendance sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ de $\eta_1^{\beta_1}\ldots\eta_n^{\beta_n}$, et la transcendance sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1,\ldots,\eta_{2n})$ de $\eta_1^{\eta_2}\ldots\eta_{2n-1}^{\eta_{2n}}$.

Terminons par un exemple faisant intervenir les fonctions elliptiques : dans leurs travaux sur la fonction modulaire j, A. Faisant et G. Philibert montrent que $j(\eta_1/\eta_2)$ est transcendant sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1,\eta_2)$. Les nouvelles mesures de transcendance que vient d'obtenir N. Hirata conduisent aussi à des résultats de même nature pour des nombres liés à des groupes algébriques commutatifs.

REFERENCES.

1. Construction de nombres algébriquement indépendants.

J. von NEUMANN.- Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen ; Math. Ann., **99** (1928), 134-141.

O. PERRON.- Uber mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereiches ; Sitz. Bayer. Akad. Wiss., H2 (1932), 79-86.

H. KNESER.- Eine kontinuumsmächtige algebraisch unabhängige Menge reeller Zahlen ; Bull. Soc. Math. Belg., **12** (1960), 23-27.

W.M. SCHMIDT.- Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers ; Bull. Amer. Math. Soc., **68** (1962), 475-478, et **69** (1963), 255.

F. KUIPER and J. POPKEN.- On the so-called von Neumann numbers ; Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A, **65** (=Indag. Math., **24**), (1962), 385-390.

A. DURAND.- Un système de nombres algébriquement indépendants ; C.R. Acad. Sci. Paris Sér.A, **280** (1975), 309-311.

P. BUNDSCHUH und R. WALLISSER.- Algebraische Unabhängigkeit p-adischer Zahlen ; Math. Ann., **221** (1976), 243-249.

P. BUNDSCHUH.- Fractions continues et indépendance algébrique en p-adique ; Journées Arith. Caen, Soc. Math. France Astérisque, **41-42** (1977), 179-181.

A. DURAND.- Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance ; Compositio Math., **35** (1977), 259-267.

W.W. ADAMS.- On the algebraic independence of certain Liouville numbers ; J. Pure Appl. Algebra, **13** (1978), 41-47.

P. BUNDSCHUH und F.J. WYLEGALA.- Uber algebraische Unabhängigkeit bei gewissen nichtfortsetzbaren Potenzreihen ; Arch. Math., **34** (1980), 32-36.

F.J. WYLEGALA.- Approximationsmaβe und spezielle Systeme algebraische unabhängiger p-adischer Zahlen ; Diss. Köln, 1980.

I. SHIOKAWA.- Algebraic independence of certain gap series ; Arch. Math., **38** (1982), 438-442.

ZHU YAO CHEN.- Algebraic independence of the values of certain gap series in rational points ; Acta Math. Sinica, **25** (1982), 333-339.

ZHU YAO CHEN.- On the algebraic independence of certain power series of algebraic numbers ; Chin. Ann. of Math., **5B** (1), (1984), 109-117.

NISHIOKA, K.- Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers ; J. Number Theory, **23** (1986), 354-364.

NISHIOKA, K.- Algebraic independence of three Liouville numbers ; Arch. Math., **47** (1986), 117-120.

NISHIOKA, K.- Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series ; Proc. Japan Acad., Sér. A, **62** (1986), 219-222.

NISHIOKA, K.- Conditions for algebraic independence of certain power series of algebraic numbers ; Compositio Math., **62** (1987), 53-61.

ZHU YAO CHEN.- Arithmetic properties of gap series with algebraic coefficients ; Acta Arith., **50** (1988), 295-308.

XU GUANG SHAN.- Diophantine approximation and transcendental number theory ; *in* Number theory and its applications in China, Contemporary Math., **77** (1988), 127-142.

2. Utilisation de résultats d'approximation.

D.D. MORDUHAI-BOLTOVSKOI.- Quelques propriétés des nombres transcendants de la première classe ; [en russe, suivi d'un résumé en français] Mat. Sbornik, **34** (1927), 55-100.

K. MAHLER.- Uber Beziehungen zwischen der Zahl e und den Liouvilleschen Zahlen ; Math. Z., **31** (1930), 729-732.

K. MAHLER.- Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus ; J. reine angew. Math. (Crelle), **166** (1932), 118-150.

D.D. MORDOUKHAY-BOLTOVSKOY.- Sur les conditions pour qu'un nombre s'exprime au moyen d'équations transcendantes d'un type général ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., **52** (1946), 483-486 [Voir M.R. **8**, 317g].

A.O. GEL'FOND.- The approximation of algebraic numbers by algebraic numbers and the theory of transcendental numbers ; Usp. Mat. Nauk., **4** (32), (1949), 19-49. Trad. angl. : Amer. Math. Soc. Transl., **65** (1952), 81-124.

Th. SCHNEIDER.- Introduction aux nombres transcendants ; Springer, 1957 ; Trad. Franç. Gauthier Villars, 1959.

N.I. FEL'DMAN.- Arithmetic properties of the solutions of a transcendental equation ; Vestn. Mosk. Univ. Ser. I, Mat. Mec., fasc. 1 (1964), 13-20. Trad. angl. : Amer. Math. Soc. Transl., (2) **66** (1968), 145-153.

A.A. SMELEV.- A.O. Gel'fond's method in the theory of transcendental numbers ; Mat. Zam., **10** (1971), 415-426. Trad. angl. : Math. Notes, **10** (1971), 672-678.

A.A. SMELEV.- On approximating the roots of some transcendental equations ; Mat. Zam., **7** (1970), 203-210. Trad. angl. : Math. Notes, **7** (1970), 122-126.

A.I. GALOCHKIN.- On diophantine approximations of values of an exponential function and solutions of some transcendental equations ; Vestn. Mosk. Univ. Ser. I, Mat. Mec., fasc.3 (1972), 16-23.

M. WALDSCHMIDT.- Approximation par des nombres algébriques des zéros de séries entières à coefficients algébriques ; C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **279** (1974), 793-796.

W.D. BROWNAWELL and M. WALDSCHMIDT.- The algebraic independence of certain numbers to algebraic powers ; Acta Arith., **32** (1977), 63-71.

W.D. BROWNAWELL.- Algebraic independence of cubic powers of certain Liouville numbers ; manuscrit, 1976.

K. VÄÄNÄNEN.- On the arithmetic properties of certain values of the exponential function ; Studia Sci. Math. Hungar., **11** (1976), 399-405.

K. VÄÄNÄNEN.- On the simultaneous approximation of certain numbers ; J. reine angew. Math. (Crelle), **296** (1977), 205-211.

M. LAURENT.- Indépendance algébrique de nombres de Liouville à des puissances algébriques ; Thèse 3ème cycle, Univ. Paris VI, Oct. 1977.

M. LAURENT.- Indépendance algébrique de nombres de Liouville élevés à des puissances algébriques ; C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **286** (1978), 131-133.

M. WALDSCHMIDT.- Simultaneous approximation of numbers connected with the exponential function ; J. Austral Math. Soc., **25** (1978), 466-478.

A. BIJLSMA.- Simultaneous approximations in transcendental number theory ; Acad. Proef., Amsterdam, 1978.

F.J. WYLEGALA.- Approximationsmaße und spezielle Systeme algebraisch unabhängiger p-adischer Zahlen ; Diss. Köln, 1980.

A. FAISANT et G. PHILIBERT.- Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire j ; J. Number Theory, **25** (1987), 184-200.

R. TUBBS.- A note on some elementary measures of algebraic independence ; Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.

M. WALDSCHMIDT and ZHU YAOCHEN.- Algebraic independence of certain numbers related to Liouville numbers ; Scientia Sinica Ser. A, à paraître.