CHAPITRE 5

Un critère de transcendance

Pour utiliser les résultats du chapitre précédent, il faut pouvoir majorer le type de transcendance de certains corps, et c'est là un problème difficile.

Cette difficulté peut être contournée en ce qui concerne la fonction exponentielle, et pour le cas de degré de transcendance 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; au lieu de chercher à minorer chacun des nombres $P(\alpha)$, $(P \in \mathbb{Z}[X]\ ,\ P(\alpha) \neq 0)$, on considère une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$, et on montre que les nombres $|P_n(\alpha)|$ ne peuvent pas être tous trop petits ; ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, il n'existe pas de suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant

$$0 < |P_n(\alpha)| \leqslant e^{-6n^2}\ ,\ \deg P_n \leqslant n\ ,\ \operatorname{Log} H(P_n) \leqslant n\ ,$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

§5.1 Enoncés des résultats

Théorème 5.1.1. Soient $c > 1$ et $d > 1$ deux nombres réels ; soient $(\gamma_n)_{n\geqslant n_o}$ et $(\delta_n)_{n\geqslant n_o}$ deux suites croissantes (au sens large) de nombres réels, tendant vers $+\infty$ avec n, et telles que

(5.1.2) $$\gamma_{n+1} \leqslant c\,\gamma_n \quad , \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} \leqslant d\,\delta_n \quad , \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_o \, .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de polynômes non nuls $(P_n)_{n\geqslant n_o}$ de $\mathbb{Z}[X]$, vérifiant

$$\deg P_n \leqslant \delta_n \quad ; \quad \operatorname{Log} H(P_n) \leqslant \gamma_n \, ,$$

et

(5.1.3) $$\operatorname{Log}|P_n(\alpha)| \leqslant -\,\delta_n((c+d+1)\gamma_n + (2d+1)\delta_n) \, ,$$

pour tout $n \geqslant n_o$.

Alors α est algébrique.

On montrera de plus que $P_n(\alpha) = 0$ pour tout n suffisamment grand.

On utilisera essentiellement ce résultat sous la forme plus faible suivante.

Corollaire 5.1.4. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type fini sur $\mathbb{Q}$; soit t une taille sur K (définie à partir d'un système générateur de K sur $\mathbb{Q}$). Il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante.

Soit $(t_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite croissante de nombres réels, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty \quad , \quad \text{et} \quad t_{n+1} \leqslant 2t_n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_o \, .$$

On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n\geqslant n_o}$ d'éléments non nuls de K tels que

$$\operatorname{Log}|\xi_n| \leqslant -\,C t_n^2 \, ,$$

<u>et</u>

$$t(\xi_n) \leqslant t_n ,$$

<u>pour tout entier</u> $n \geqslant n_o$.

<u>Alors le degré de transcendance de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>est supérieur ou égal à</u> 2.

<u>Démonstration du corollaire</u> 5.1.4

Soit $(x_1,\ldots,x_q,y)$ le système générateur de K sur $\mathbb{Q}$ permettant de définir la taille t . Pour $n \geqslant n_o$, soit $\partial_n = d(\xi_n)$ le dénominateur de ξ_n , et π_n la norme (de K sur $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)$) de $\partial_n \xi_n$. D'après 4.2.8 et 4.2.20, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , ne dépendant que de $x_1,\ldots,x_q,y$, telles que

$$t(\pi_n) \leqslant c_1 t(\partial_n \xi_n) \leqslant c_2 t(\xi_n) \leqslant c_2 t_n ,$$

et

$$\mathrm{Log}|\pi_n| \leqslant \mathrm{Log}|\partial_n \xi_n| + c_1 t(\partial_n \xi_n) \leqslant \mathrm{Log}|\xi_n| + c_2 t_n .$$

On choisit

$$C = 10 c_2^2 + 1 .$$

Soit $n_1 \geqslant n_o$ tel que $t_{n_1} \geqslant c_2$; pour $n \geqslant n_1$, on a

$$t(\pi_n) \leqslant c_2 \, t_n ,$$

et

$$\mathrm{Log}|\pi_n| \leqslant -10 c_2^2 t_n^2 .$$

Or π_n est un élément non nul de $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$; on a évidemment $q \neq 0$ (puisque $|\pi_n| < 1$, donc $\pi_n \notin \mathbb{Z}$), et le théorème 5.1.1 (avec $\gamma_n = \delta_n = c_2 t_n$, $c = d = 2$) montre que l'on a aussi $q \neq 1$. D'où $q \geqslant 2$.

§5.2 Principe de la démonstration du critère

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul ; notons $\alpha_1,\dots,\alpha_h$ les racines distinctes de P, et $r_1,\dots,r_h$ leur ordre de multiplicité :

$$P = a_n \prod_{i=1}^{h} (X-\alpha_i)^{r_i} .$$

On constate déjà que les racines $\alpha_1,\dots,\alpha_h$ sont suffisamment éloignées les unes des autres (le nombre $\alpha_i-\alpha_j$ est algébrique non nul pour $i \neq j$, et on utilise 1.2.3). Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$P(\alpha) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{h} (\alpha-\alpha_i)^{r_i}$$

soit très petit. Alors α est proche d'une des racines de P (soit α_1 cette racine), donc assez loin des autres racines. On peut écrire le polynôme minimal de α_1 sur $\mathbb{Z}$ sous la forme

$$Q = b_s \prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i) ,$$

avec $k \leqslant h$. Donc Q^{r_1} divise P, et on constate que $Q(\alpha)^{r_1}$ est à peu près aussi petit que $P(\alpha)$.

Ainsi, à partir d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, tel que $P(\alpha)$ soit petit, on peut construire un polynôme irréductible Q tel que Q^{r_1} divise P, et que $Q^{r_1}(\alpha)$ soit petit. Dans l'énoncé du théorème 5.1.1, on est ramené au cas où chaque polynôme P_n est une puissance d'un polynôme irréductible Q_n, soit $P_n = Q_n^{r_n}$.

On considère alors le résultant de P_n et P_{n+1} ; c'est un entier rationnel dont on peut majorer la valeur absolue par 1 (grâce aux majorations 5.1.3 et aux conditions 5.1.2). On en déduit

$$Q_n = Q_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \text{ suffisamment grand.}$$

Donc tous les polynômes P_n sont des puissances d'un même polynôme irréductible Q. Il est alors facile de déduire des hypothèses la relation

$$Q(\alpha) = 0 ,$$

qui montre que α est algébrique.

§5.3 Lemmes auxiliaires

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme suivant.

Lemme 5.3.1. *Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbf{Z}[X]$, de degré p et q respectivement.*

Alors P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[X]$ si et seulement si pour tout nombre complexe α on a

$$(5.3.2) \qquad (p+q)\, \|P\|^q . \|Q\|^p . \max(|P(\alpha)|, |Q(\alpha)|) > 1 .$$

Démonstration

Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, ils ont une racine commune α, et l'inégalité (5.3.2) n'est pas vérifiée au point α.

Pour démontrer la réciproque, on considère le résultant R des deux polynômes P et Q : si

$$P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j ,$$

R est le déterminant

$$R = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{q} \qquad \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{p} \\ \left|\begin{matrix} a_p & & & b_q & & \\ a_{p-1} & a_p & & b_{q-1} & b_q & \\ \vdots & a_{p-1} & \vdots & \vdots & b_{q-1} & \vdots \\ a_0 & \vdots & a_p & b_0 & \vdots & b_q \\ & a_0 & a_{p-1} & & b_0 & b_{q-1} \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{matrix}\right| \end{array} .$$

La valeur de R ne change pas si on remplace la dernière ligne par

$$(\alpha^{q-1}P(\alpha)\ ,\ \alpha^{q-2}P(\alpha),\dots,P(\alpha)\ ,\ \alpha^{p-1}Q(\alpha)\ ,\ \alpha^{p-2}Q(\alpha),\dots,Q(\alpha))\ ,$$

comme on peut le constater en multipliant la ième ligne de R par α^{p+q-i} et en ajoutant à la dernière ligne la somme des autres. De même, la valeur de R n'est pas modifiée si on remplace la première ligne par

$$(\alpha^{-p}P(\alpha)\ ,\ \alpha^{-p-1}P(\alpha),\dots,\alpha^{-p-q+1}P(\alpha)\ ,\ \alpha^{-q}Q(\alpha),\dots,\alpha^{-p-q+1}Q(\alpha))\ ,$$

si $\alpha \neq 0$ (ajouter à la première ligne la ième ligne multipliée par α^{-i}). On utilise la première transformation si $|\alpha| \leqslant 1$, et la deuxième si $|\alpha| > 1$. On développe alors R par rapport à la ligne ainsi modifiée ; pour majorer les cofacteurs, on utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\Big|\sum_i u_i\, v_i\Big|^2 \leqslant \sum_i |u_i|^2 . \sum_j |v_j|^2\ ,$$

qui montre que la valeur absolue d'un déterminant est majorée par le produit des normes euclidiennes de ses colonnes (inégalité de Hadamard).

Ainsi

$$|R| \leqslant q\,.\,|P(\alpha)|\,.\,\|P\|^{q-1}\,.\,\|Q\|^{p} + p\,.\,|Q(\alpha)|\,.\,\|P\|^{q}\,.\,\|Q\|^{p-1} < (p+q)\,.\,\|P\|^{q}\,.\,\|Q\|^{p}\,.\,\max(|P(\alpha)|,|Q(\alpha)|)\ .$$

Les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $R \neq 0$ [Lang, A., chap.V §10], donc si et seulement si $|R| \geqslant 1$ (puisque $R \in \mathbb{Z}$).

D'où le lemme 5.3.1.

Une application intéressante du lemme 5.3.1 est la suivante

<u>Lemme</u> 5.3.3. <u>Soit</u> $\alpha \in \mathbb{C}$. <u>Soit</u> $P \in \mathbb{Z}[X]$ <u>un polynôme de degré</u> d <u>et de hauteur</u> $H(P) = e^h$. <u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux diviseurs de</u> P , <u>non nuls et premiers entre eux.</u> <u>Alors on a</u>

$$\max(|F(\alpha)|,|G(\alpha)|) > e^{-d(h+d)} . \tag{5.3.4}$$

<u>Démonstration.</u> On peut supposer F et G non constants (sinon on a trivialement $\max(|F(\alpha)|,|G(\alpha)|) \geqslant 1 > e^{-d(h+d)}$).

D'après le lemme 5.3.1, on a

$$1 < (f+g)\,\|F\|^{g}\,\|G\|^{f}\,.\max(|F(\alpha)|,|G(\alpha)|) ,$$

où f est le degré de F , et g celui de G . Or on a, d'après le lemme 4.2.14 :

$$\|F\|\,.\,\|G\| \leqslant 2^{d-\frac{1}{2}}.\,\|P\| ,$$

donc

$$\|F\|^{g}\|G\|^{f} \leqslant (\|F\|\,.\,\|G\|)^{d-1} \leqslant 2^{(d-\frac{1}{2})(d-1)}\,.\,\|P\|^{d-1} .$$

On majore alors $\|P\|$ par $(d+1)^{\frac{1}{2}}\,e^{h}$, grâce à (1.2.7). On remarque ensuite que $d \geqslant f+g \geqslant 2$ entraîne $(1+d)^{\frac{1}{2}} < (\frac{e}{2})^{d}$, d'où le lemme.

Le lemme suivant montrera que, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ prend une valeur très petite en un point $\alpha \in \mathbb{C}$, alors il existe un facteur Q de P , puissance d'un polynôme irréductible, qui prend également une valeur petite en α .

<u>Lemme</u> 5.3.5. <u>Soit</u> $\alpha \in \mathbb{C}$; <u>soit</u> $P \in \mathbb{Z}[X]$ <u>un polynôme de degré</u> $d \geqslant 1$ <u>et de hauteur</u> $H(P) = e^h$. <u>Soient</u> $\lambda_1 \geqslant 3$ <u>et</u> $\lambda_2 \geqslant 3$ <u>deux nombres réels tels que</u>

$$\mathrm{Log}\,|P(\alpha)| \leqslant -\, d(\lambda_1 h + \lambda_2 d) \, .$$

<u>Alors il existe un polynôme</u> Q , <u>divisant</u> P , <u>et puissance d'un polynôme irréductible dans</u> $\mathbb{Z}[X]$, <u>tel que</u>

$$\mathrm{Log}\,|Q(\alpha)| \leqslant -\, d((\lambda_1 - 1)h + (\lambda_2 - 1)d) \, . \tag{5.3.6}$$

<u>Démonstration</u>. Le cas $d = 1$ étant trivial, supposons $d \geqslant 2$.

Décomposons P en produit de puissances de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$:

$$P = aP_1 \ldots P_m \, , \qquad (\text{où } a \in \mathbb{Z}) \, ,$$

ordonnés de telle manière que

$$|P_1(\alpha)| \leqslant \ldots \leqslant |P_m(\alpha)| \, .$$

Pour chaque entier i , $0 \leqslant i \leqslant m$, comparons les deux nombres

$$|a| \, . \prod_{\ell=1}^{i} |P_\ell(\alpha)| \quad \text{et} \quad \prod_{h=i+1}^{m} |P_h(\alpha)| \, ,$$

(un produit vide est égal à 1).

Pour $i = m$, on a

$$|P(\alpha)| < 1 \, ,$$

donc

$$|a| \, . \prod_{\ell=1}^{m} |P_\ell(\alpha)| < 1 \, .$$

Pour $i = 0$, on a

$$|a| \geqslant 1 > |P(\alpha)| \, ,$$

donc

$$|a| > \prod_{h=1}^{m} |P_h(\alpha)| .$$

Il existe donc un entier i , $1 \leqslant i \leqslant m$, tel que

$$|a| . \prod_{\ell=1}^{i-1} |P_\ell(\alpha)| \geqslant \prod_{h=i}^{m} |P_h(\alpha)| ,$$

et

$$|a| \prod_{\ell=1}^{i} |P_\ell(\alpha)| < \prod_{h=i+1}^{m} |P_h(\alpha)| .$$

Utilisons maintenant le lemme 5.3.3, avec

$$F = a . \prod_{\ell=1}^{i-1} P_\ell \quad \text{et} \quad G = \prod_{h=i}^{m} P_h ,$$

puis avec

$$F = a . \prod_{\ell=1}^{i} P_\ell \quad \text{et} \quad G = \prod_{h=i+1}^{m} P_h .$$

On trouve :

$$|a| \prod_{\ell=1}^{i-1} |P_\ell(\alpha)| > e^{-d(h+d)}$$

et

$$\prod_{h=i+1}^{m} |P_h(\alpha)| > e^{-d(h+d)} ,$$

donc

$$|P(\alpha)| = |a| . \prod_{\ell=1}^{i-1} |P_\ell(\alpha)| . |P_i(\alpha)| . \prod_{h=i+1}^{m} |P_h(\alpha)| > |P_i(\alpha)| . e^{-2d(h+d)} ,$$

et par conséquent

$$|P_i(\alpha)| < e^{-(\lambda_1-2)dh-(\lambda_2-2)d^2} .$$

Mais, si $i \neq 1$, le lemme 5.3.3 et l'inégalité

$$|P_1(\alpha)| \leqslant |P_i(\alpha)|$$

entraîneraient

$$-\ d(h+d) < \mathrm{Log}\ |P_i(\alpha)| < -\ (\lambda_1-2)hd - (\lambda_2-2)d^2\ ,$$

ce qui est impossible $(\lambda_1 \geqslant 3\ ,\ \lambda_2 \geqslant 3)$.

Donc $i = 1$, et

$$|a| \cdot |P_1(\alpha)| < \prod_{h=2}^{m} |P_h(\alpha)|\ .$$

Utilisons encore le lemme 5.3.3 :

$$\mathrm{Log} \prod_{h=2}^{m} |P_h(\alpha)| > -\ d(h+d)\ ,$$

d'où

$$|P(\alpha)| > |P_1(\alpha)| \cdot e^{-d(h+d)}\ ,$$

ce qui démontre (5.3.6), avec $Q = P_1$.

§5.4 Démonstration du critère

Supposons les hypothèses du théorème 5.1.1 vérifiées. Le lemme 5.3.5, avec

$$\lambda_1 = \frac{\delta_n}{\deg P_n} \cdot \frac{\gamma_n}{\mathrm{Log}\, H(P_n)} \cdot (c+d+1) \ , \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \left(\frac{\delta_n}{\deg P_n}\right)^2 \cdot (2d+1) \ ,$$

montre que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, il existe un polynôme irréductible $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, et un entier rationnel $r_n \geqslant 1$, tels que le polynôme $R_n = Q_n^{r_n}$ divise P_n, avec

$$(5.4.1) \qquad \mathrm{Log}|R_n(\alpha)| \leqslant - \delta_n((c+d)\gamma_n + 2d\ \delta_n) \ .$$

Comme R_n divise P_n, le lemme 4.2.14 permet de majorer $\|R_n\|$ par $2^{\delta_n - \frac{1}{2}} \cdot \|P_n\|$; or

$$\|P_n\| \leqslant (1+\delta_n)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\gamma_n} \ ,$$

et

$$2^{\delta_n} \cdot (1+\delta_n)^{\frac{1}{2}} < e^{\delta_n} \ ,$$

dès que $\delta_n \geqslant 2$ (donc dès que n est suffisamment grand, disons $n \geqslant n_1$).

Par conséquent

$$\|R_n\| < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\gamma_n + \delta_n} \ .$$

Nous allons utiliser le lemme 5.3.1 pour les deux polynômes R_n et R_{n+1}, avec $n \geqslant n_1$. On a d'une part, grâce à la non décroissance des suites (δ_n) et (γ_n),

$$\max(\mathrm{Log}|R_n(\alpha)|, \mathrm{Log}|R_{n+1}(\alpha)|) \leqslant - \delta_n((c+d)\gamma_n + 2d\ \delta_n) \ ;$$

d'autre part

$$\begin{aligned}(\delta_n+\delta_{n+1}) \cdot \|R_n\|^{\delta_{n+1}} \cdot \|R_{n+1}\|^{\delta_n} &< \frac{\delta_n+\delta_{n+1}}{\sqrt{2}^{\,\delta_n+\delta_{n+1}}} \cdot \exp((\gamma_n+\delta_n)\delta_{n+1} + (\gamma_{n+1}+\delta_{n+1})\delta_n) \\ &\leqslant e^{(\gamma_n+\delta_n)d\delta_n + (c\gamma_n+d\delta_n)\delta_n} \ .\end{aligned}$$

La relation 5.3.2 n'étant pas vérifiée, les deux polynômes $R_n = Q_n^{r_n}$ et $R_{n+1} = Q_{n+1}^{r_{n+1}}$ ne sont pas premiers entre eux, donc

$$Q_n = Q_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_1 .$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_1$, tous les polynômes Q_n sont égaux à un même polynôme irréductible $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Soit $q = \deg Q$.

Comme $Q^{r_n}(\alpha)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a

$$\text{ou bien} \quad Q(\alpha) = 0 , \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty .$$

Or $\delta_n \geqslant qr_n$ et $\gamma_n \geqslant 0$; donc, grâce à (5.4.1),

$$\operatorname{Log}|Q^{r_n}(\alpha)| = r_n \operatorname{Log}|Q(\alpha)| \leqslant -2d\, q^2\, r_n^2 ,$$

d'où

$$\operatorname{Log}|Q(\alpha)| \leqslant -2d\, q^2\, r_n ,$$

ce qui montre que $Q(\alpha) = 0$, donc que α est algébrique, et que $P_n(\alpha) = 0$ pour tout $n \geqslant n_1$.

§5.5 Références

Le premier critère de ce type a été obtenu par Gel'fond en 1949 [Gel'fond, T., chap.III §4 lemme 7]. Il a été repris par Lang en 1965 [Lang, 1965, §6], puis par Tijdeman en 1970 [Tijdeman, 1970b, lemmes 6 et 6']. Ces énoncés ne concernaient que le cas $\gamma_n = \delta_n$; nous verrons au §7 qu'il peut être utile de dissocier ces deux fonctions. La possibilité de séparer γ_n et δ_n est exposée dans [Brownawell, 1971c], et [Waldschmidt, 1971a, §3]. La présentation adoptée ici est essentiellement celle de Brownawell.

Le lemme 5.3.1 est classique ; on en trouvera différentes versions dans [Gel'fond, T., chap.III §4 lemme V], [Lang, T., chap.V §2], [Tijdeman, 1970b, lemme 4], et [Brownawell, 1971c, lemme 1]. On peut trouver des variantes du lemme 5.3.5 dans [Gel'fond, T., chap.III §5 lemmes VI et VI'], [Lang, T., chap.VI, §2, lemme 3], [Tijdeman, 1970b, lemme 5], [Brownawell, 1971c, lemme 3], et [Cijsouw, 1972, lemme 2.14].

Il serait très utile d'étendre le théorème 5.1.1 en un critère d'indépendance algébrique. On souhaiterait par exemple remplacer, dans les hypothèses de 5.1.4, la majoration

$$\operatorname{Log} |\xi_n| \leqslant - c\, t_n^2$$

par

$$\operatorname{Log} |\xi_n| \leqslant - c\, t_n^q ,$$

et en déduire que le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à q . Mais cette conjecture, due à Lang, est fausse [Lang, 1965], [Lang, 1971, §10].

EXERCICES

Exercice 5.1.a. On peut démontrer, en utilisant le théorème de Roth, que le nombre

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-a^k} ,$$

(a entier > 2) est transcendant. En déduire que la constante c ne peut pas être remplacée par $c(1-\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$, dans 5.1.3. [Brownawell, 1971c].

Exercice 5.1.b. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soient $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et $(\delta_n)_{n\geq 1}$ deux suites croissantes (au sens large) de nombres réels, telles que $\gamma_n\delta_n$ tende vers $+\infty$ avec n . Soient $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels, $c_n \geq 1$, $d_n \geq 1$, $c_nd_n > 1$ pour tout $n \geq 1$, avec

$$\gamma_{n+1} \leqslant c_n\gamma_n , \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} \leqslant d_n\delta_n , \text{ pour tout } n \geq 1 .$$

On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques satisfaisant :

$$\mathrm{Log}|\alpha-\xi_n| \leqslant - \delta_n[(c_n+d_n+1)\gamma_n + 2d_n\delta_n + \mathrm{Log}\ 3]$$

pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que α est algébrique, et que $\alpha = \xi_n$ pour tout $n \geq 1$.

(Utiliser l'exercice 4.2.f et consulter [Brownawell, 1971c]).

Exercice 5.1.c. Soit α un U-nombre au sens de la classification de Mahler [Schneider, T., chap.III]. On sait qu'il existe une suite de polynômes non nuls deux à deux distincts $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que les quotients

$$\frac{-\operatorname{Log}|P_n(\alpha)|}{\operatorname{Log}\|P_n\|}$$

tendent vers $+\infty$ avec n. Montrer que l'on a

$$\limsup \frac{\operatorname{Log}\|P_{n+1}\|}{\operatorname{Log}\|P_n\|} = +\infty .$$

Etablir un résultat analogue pour les U^*-nombres de la classification de Koksma (utiliser l'exercice 5.1.b) [Brownawell, 1971c, §II].

Exercice 5.1.d. Enoncer et démontrer l'analogue du théorème 5.1.1 pour les fonctions rationnelles, ou pour les fonctions algébriques, à la place des polynômes [Lang, 1965, p. 191].

Exercice 5.4.a. Soit α un nombre complexe. Soient $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et $(\delta_n)_{n\geq 1}$ deux suites croissantes de nombres réels, telles que $\gamma_n\delta_n$ tende vers $+\infty$ avec n . Soient $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels, telles que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$c_n \geqslant 1\ ,\ d_n \geqslant 1\ ,\ c_n d_n > 1\ ;$$

$$\gamma_{n+1} \leqslant c_n\gamma_n\ ;\ \delta_{n+1} \leqslant d_n\delta_n\ .$$

On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, vérifiant

$$\operatorname{Log} H(P_n) \leqslant \gamma_n\ ;\ \deg P_n \leqslant \delta_n\ ,$$

et

$$\operatorname{Log}|P_n(\alpha)| \leqslant -\ \delta_n((c_n+d_n+1)\gamma_n + (2d_n+1)\delta_n)\ ,$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Montrer que α est algébrique, et que

$$P_n(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1\ .$$

(Pour montrer que, si $\delta_n < 2$, R_n divise R_{n+1} - avec les notations du §5.4 -, on pourra consulter [Brownawell, 1971c]).

Exercice 5.4.b.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; montrer qu'il n'existe pas de suite $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant

$$0 < |P_n(\alpha)| \leqslant \exp(-6\, n^2) \,,$$

et

$$\max(\deg P_n \,,\ \operatorname{Log} H(P_n)) \leqslant n \,, \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_0 \,.$$

(voir la démonstration de [Tijdeman, 1970b, lemme 6]).

2) Montrer que, si α est un nombre transcendant de Liouville, il existe une suite $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ telle que les inégalités

$$0 < |P_n(\alpha)| < e^{-6n^2} \,,\ \deg P_n \leqslant n \,,\ \operatorname{Log} H(P_n) \leqslant n \,,$$

soient vérifiées pour une infinité d'entiers $n \geqslant n_0$.

En déduire que le théorème 5.1.1 serait faux sans les hypothèses 5.1.2.

Exercice 5.4.c. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants; on suppose que le corps $\mathbb{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_q)$ a un type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$. Soient $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites monotones croissantes de nombres positifs, tels que $\sigma_n\delta_n$ tende vers $+\infty$ avec n, et soit $a > 1$ tel que

$$\sigma_{n+1} \leqslant a\,\sigma_n \ , \ \delta_{n+1} \leqslant a\,\delta_n \ \text{ pour tout } \ n \geqslant 1 \ .$$

Montrer qu'il existe une constante $c = c(a,\alpha_1,\dots,\alpha_q)$ tel que le résultat suivant soit vrai : soit $\alpha \in \mathbb{C}$; on suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{q+1}]$ de degré total $\leqslant \delta_n$ et de taille $\leqslant \sigma_n$, $(n \geqslant 1)$, telle que

$$\operatorname{Log}|P_n(\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_q)| \leqslant -c.(\delta_n\sigma_n)^{\tau} \ ;$$

alors α est algébrique sur $\mathbb{Q}(\alpha_1,\dots,\alpha_q)$, et

$$P_n(\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_q) = 0 \ \text{ pour tout } \ n \geqslant 1 \ .$$

(Ce résultat est dû à Brownawell ; voir également [Smelev, 1971] . La démonstration de Brownawell paraîtra - probablement dans les Transactions of the A.M.S. - dans son article "Gel'fond's method for algebraic independence" ; on y trouvera également les démonstrations des résultats annoncés dans [Brownawell, 1971 a et b] ; cf. exercices 7.1.c, 7.2.d et 7.3.b).

Exercice 5.4.d. Soient $\tau > 1$ et τ' deux nombres réels, et K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de degré de transcendance fini sur $\mathbb{Q}$. On dit que K a un type de transcendance inférieur ou égal à (τ,τ') sur $\mathbb{Q}$ s'il existe une base de transcendance $(x_1,\ldots,x_q)$ de K sur $\mathbb{Q}$ telle que pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_q]$, on ait

$$-t(P)^{\tau}(\mathrm{Log}\ t(P))^{\tau'} << \mathrm{Log}|P(x_1,\ldots,x_q)|$$

(cf. exercice 4.5.b).

1) Généraliser l'exercice 5.4.c aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à (τ,τ') (on remplacera l'inégalité

$$\mathrm{Log}|P_n(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_q)| \leqslant -c(\delta_n\sigma_n)^{\tau}$$

par

$$\mathrm{Log}|P_n(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_q)| \leqslant -c(\delta_n\sigma_n)^{\tau}(\mathrm{Log}\ \sigma_n)^{\tau'}) .$$

2) En déduire le résultat suivant. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type de transcendance inférieur ou égal à (τ,τ') sur $\mathbb{Q}$, et de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soit L une extension de K de type fini. Soit t une taille sur L. Il existe une constante $c > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante de nombres réels telle que

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty \quad , \quad \text{et} \quad t_{n+1} \leqslant 2t_n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_0 .$$

On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n)_{n\geqslant n_0}$ d'éléments non nuls de L tels que

$$\mathrm{Log}|\xi_n| \leqslant -c\ t_n^{2\tau}(\mathrm{Log}\ t_n)^{\tau'} ,$$

et

$$t(\xi_n) \leqslant t_n ,$$

pour tout entier $n \geqslant n_o$.

Alors le degré de transcendance de L sur K est supérieur ou égal à 2.