## CHAPITRE 6

### Zéros de polynômes exponentiels

Nous avons vu apparaître, dans chacune des démonstrations de transcendance concernant la fonction exponentielle, des fonctions du type :

$$F(z) = \sum_{h=1}^{\ell} P_h(z) e^{w_h z} ,$$

où $P_1,\ldots,P_\ell$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ , et $w_1,\ldots,w_\ell$ sont des nombres complexes. Pour qu'une telle fonction $F$ ne soit pas identiquement nulle, il suffit, d'après (1.4.2), que les polynômes $P_1,\ldots,P_\ell$ ne soient pas tous nuls, et que les nombres $w_1,\ldots,w_\ell$ soient deux à deux distincts. Nous allons majorer, dans ce cas, le nombre de zéros de $F$ dans un disque $|z| \leqslant \rho$ . Il est clair que ce nombre $n(f,\rho)$ doit dépendre

1) de $\rho$ (comme le montrent les fonctions $\sin z$ et $\cos z$) ;

2) de $\Omega = \max_{1\leqslant h\leqslant \ell} |w_h|$ (considérer, par exemple, les zéros de $\sin \lambda z$ , $\lambda > 0$ réel, dans le disque $|z| \leqslant 1$) ;

3) de $n = \sum_{h=1}^{\ell} 1 + \deg P_h$ (étudier le cas de la fonction

$$(e^{\frac{z}{m}} - 1)^m \quad , \quad m > 0 \quad \text{entier} \quad ).$$

Nous verrons que ces trois quantités

$$\rho \ , \ \Omega = \max_{1\leqslant h\leqslant \ell} |w_h| \ , \ n = \sum_{h=1}^{\ell} \deg P_h$$

suffisent pour majorer $n(F,\rho)$.

§6.1 Enoncé du théorème, et principes de la démonstration

Théorème 6.1.1. *Soient* $p_1,\dots,p_\ell$ *des nombres entiers positifs,* $b_{k,j}$ , $(1 \leqslant j \leqslant p_k \,,\ 1 \leqslant k \leqslant \ell)$ *des nombres complexes non tous nuls,* $w_1,\dots,w_\ell$ *des nombres complexes deux à deux distincts, et* $\rho > 0$ *un nombre réel. On note*

$$\Omega = \max_{1\leqslant k\leqslant \ell} |w_k| \ , \text{ et } \ n = \sum_{k=1}^{\ell} p_k \ .$$

*Alors le nombre* $n(F,\rho)$ *de zéros, dans le disque* $|z| \leqslant \rho$ , *de la fonction*

$$z \mapsto F(z) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}\, z^{j-1}\, e^{w_k z} \tag{6.1.2}$$

*est majoré par*

$$n(F,\rho) \leqslant 2(n-1) + 5\rho\Omega \ . \tag{6.1.3}$$

Il est facile, en utilisant la formule (1.5.3) de Jensen, de majorer (lemme 6.2.1) le nombre de zéros, dans un disque $|z| \leqslant \rho$ , d'une fonction entière non nulle $f$ , en fonction du quotient

$$\frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}} \ ,$$

où $R_2 > R_1 > 0$ , et $R_2 > \rho$ . Le problème est donc de majorer

$$\frac{|F|_{R_2}}{|F|_{R_1}}$$

pour la fonction $F$ définie par (6.1.2). On utilisera les propriétés particulières de la fonction exponentielle sous la forme suivante : pour $1 \leqslant j \leqslant p_k$ , $1 \leqslant k \leqslant \ell$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ , on a

$$\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left(z^{j-1} e^{w_k z}\right)_{z=0} = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left(z^{i-1}\right)_{z=w_k} \ , \tag{6.1.4}$$

les deux membres étant égaux à

$$\begin{cases} \dfrac{(i-1)!}{(i-j)!}\, w_k^{i-j} & , \text{ si } i \geqslant j , \\ \\ 0 & , \text{ si } i < j \end{cases}$$

On en déduit aisément (6.4.2) que, pour tout $u \in \mathbb{C}$ , on a

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) ,$$

où $a_1,\dots,a_n$ sont les nombres complexes tels que le polynôme

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, z^{i-1}$$

vérifie

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(e^{zu})_{z=w_k} , \ 1 \leqslant j \leqslant p_k \ (1 \leqslant k \leqslant \ell) .$$

On obtient l'existence de $P$ , ainsi qu'une majoration des $a_h$ , en utilisant une formule d'interpolation (6.3.1). Il ne reste plus qu'à utiliser les inégalités de Cauchy

$$(6.1.5) \qquad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{R_1^{i-1}}{(i-1)!} \left| \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) \right| \leqslant |F|_{R_1} ,$$

pour en déduire la majoration voulue de

$$\frac{|F|_{R_2}}{|F|_{R_1}} .$$

## §6.2 Majoration du nombre de zéros d'une fonction holomorphe

Lemme 6.2.1. *Soient* $R_1$ , $R_2$ , $\rho$ *trois nombres réels, vérifiant*

$$R_2 > R_1 > 0 \quad , \quad \text{et} \quad R_2 \geqslant \rho > 0 .$$

*Soit* $f$ *une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé* $|z| \leqslant R_2$. *Si* $f$ *n'est pas identiquement nulle dans le disque* $|z| \leqslant R_2$, *alors le nombre* $n(f,\rho)$ *de zéros de* $f$ *dans le disque* $|z| \leqslant \rho$ *vérifie*

$$n(f,\rho)\ \mathrm{Log}\left(\frac{R_2^2-R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)}\right) \leqslant \mathrm{Log}\ \frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}} .$$

*Démonstration*

Notons $z_1,\dots,z_\sigma$ les zéros de $f$ dans le disque $|z| \leqslant \rho$ (avec $\sigma = n(f,\rho)$). La fonction

$$g(z) = f(z) \, . \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{R_2^2 - z\bar{z}_j}{R_2(z-z_j)}$$

est holomorphe dans un ouvert contenant $|z| \leqslant R_2$ , donc

$$|g|_{R_1} \leqslant |g|_{R_2} ;$$

or

$$|g|_{R_2} = |f|_{R_2} ,$$

et

$$|g|_{R_1} \geqslant |f|_{R_1} \, . \left(\frac{R_2^2-R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)}\right)^{\sigma} ,$$

d'où le résultat.

## §6.3 Une formule d'interpolation

Nous voulons montrer, avec les notations du théorème 6.1.1, que pour tout $u \in \mathbb{C}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, vérifiant

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = u^{j-1} e^{w_k u} , \quad 1 \leqslant j \leqslant p_k \; (1 \leqslant k \leqslant \ell) .$$

De plus, nous voulons majorer les coefficients de $P$.

Lemme 6.3.1. *Soient $p_1, \dots, p_\ell$ des nombres entiers positifs, $w_1, \dots, w_\ell$ des nombres complexes deux à deux distincts, et $u$ un nombre complexe. On note*

$$n = p_1 + \dots + p_\ell \quad \text{et} \quad \Omega = \max_{1 \leqslant h \leqslant \ell} |w_h| .$$

*Il existe un polynôme et un seul*

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1} \in \mathbb{C}[X] ,$$

*de degré inférieur à $n$, vérifiant les $n$ conditions*

$$(6.3.2) \qquad \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} (e^{uz})_{z=w_k} , \quad (1 \leqslant j \leqslant p_k , \; 1 \leqslant k \leqslant \ell) .$$

*De plus, on a*

$$(6.3.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} (i-1)! |a_i| \leqslant e^{\Omega(|u|+1)} . \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1}$$

Démonstration

L'unicité est évidente. Pour démontrer l'existence de $P$, on note

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

la suite

$$(w_1, \dots, w_1, w_2, \dots, w_2, \dots, w_\ell, \dots, w_\ell) ,$$

où chaque $w_k$ est répété $p_k$ fois $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$.

Soit $\Gamma$ un cercle dont l'intérieur $D$ contient tous les points $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Soient $t \in D$, et $z \in \Gamma$. En écrivant l'identité

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-\alpha_i} + \frac{t-\alpha_i}{z-\alpha_i} \cdot \frac{1}{z-t}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtient :

(6.3.4) $$\frac{1}{z-t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{s<i} (t-\alpha_s)}{\prod_{s\leqslant i} (z-\alpha_s)} + \frac{\prod_{s\leqslant n} (t-\alpha_s)}{(z-t) \prod_{s\leqslant n} (z-\alpha_s)} ,$$

où un produit vide est, comme d'habitude, égal à 1. On multiplie (6.3.4) par $\frac{1}{2i\pi} e^{zu}$, et on intègre sur $\Gamma$ :

$$e^{tu} = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{s<i} (t-\alpha_s) + R_n(t) ,$$

où

(6.3.5) $$c_i = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{e^{zu}\,dz}{\prod_{s\leqslant i} (z-\alpha_s)} , \quad 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

et

$$R_n(t) = \Big(\prod_{s\leqslant n} (t-\alpha_s)\Big) \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{e^{zu}\,dz}{(z-t) \prod_{s\leqslant n} (z-\alpha_s)} .$$

Comme $R_n$ est une fonction entière qui admet les zéros $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, le polynôme

(6.3.6) $$P(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{s<i} (t-\alpha_s)$$

vérifie (6.3.2).

Une majoration grossière des coefficients $c_1,\dots,c_n$ pourrait être obtenue en choisissant pour $\Gamma$ le cercle de centre 0 et de rayon $\Omega+1$ ; alors la représentation intégrale (6.3.5) donnerait

$$|c_i| \leqslant (\Omega+1)\, e^{|u|(\Omega+1)} , \quad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Mais on peut montrer un peu mieux :

$$(6.3.7) \qquad |c_i| \leqslant \frac{|u|^{i-1}}{(i-1)!} e^{|u|\Omega} \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Pour cela, on développe en série

$$\prod_{s=1}^{i} (z-\alpha_s)^{-1}$$

sous la forme

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_{r,i}\; z^{-(r+i)} ,$$

où $A_{r,i}$ est la somme de tous les $\binom{r+i-1}{r}$ produits

$$\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_i^{r_i} \quad , \quad (r_1+\cdots+r_i = r \ , \ r_1,\ldots,r_i \text{ entiers } \geqslant 0) .$$

On aura donc

$$|A_{r,i}| \leqslant \binom{r+i-1}{r}\Omega^r \quad , \quad (r \geqslant 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n) .$$

D'autre part on déduit de (6.3.5) :

$$c_i = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{r+i-1}}{(r+i-1)!} A_{r,i} ,$$

ce qui démontre (6.3.7).

Il ne reste plus qu'à majorer les coefficients $a_1,\ldots,a_n$ de $P$ ; on a

$$a_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} P(0) = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{g=1}^{n} c_g \cdot \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\Big( \prod_{s<g} (z-\alpha_s)\Big)_{z=0} ;$$

or

$$\left|\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\Big( \prod_{s<g} (z-\alpha_s)\Big)_{z=0}\right| \leqslant \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\Big( \prod_{s<g} (z+\Omega)\Big)_{z=0} ,$$

d'où

$$(i-1)!\,|a_i| \leqslant e^{|u|\Omega} . \sum_{g=i}^{n} |u|^{g-1} \frac{\Omega^{g-i}}{(g-i)!} .$$

On majore enfin $\displaystyle\sum_{i=1}^{g} \frac{\Omega^{g-i}}{(g-i)!}$ par $e^{\Omega}$, d'où la relation (6.3.3).

§6.4 Démonstration du théorème 6.1.1

Les hypothèses étant celles du théorème 6.1.1, on note

$$P_h(z) = \sum_{j=1}^{p_h} b_{h,j}\, z^{j-1} \quad , \quad (1 \leqslant h \leqslant \ell) .$$

Soit $u \in \mathbb{C}$ , et soit

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, z^{i-1} \in \mathbb{C}[z]$$

le polynôme, défini au §6.3, vérifiant

$$(6.4.1) \quad \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(e^{uz})_{z=w_k} = u^{j-1} e^{w_k u} \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant p_k \ , \ 1 \leqslant k \leqslant \ell) .$$

Nous allons démontrer la relation

$$(6.4.2) \qquad F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) .$$

En effet, on a

$$\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}(z^{j-1} e^{w_k z})_{z=0} = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(z^{i-1})_{z=w_k} ,$$

grâce à (6.1.4).

D'autre part, en utilisant (6.4.1), on obtient

$$F(u) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}(z^{i-1})_{z=w_k} ;$$

on déduit facilement (6.4.2) de ces deux relations. La majoration (6.3.3) conduit alors à l'inégalité

$$(6.4.3) \qquad |F(u)| \leqslant e^{\Omega(|u|+1)} . \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1} \circ \max_{1 \leqslant g \leqslant n} \frac{1}{(g-1)!} \left| \frac{d^{g-1}}{dz^{g-1}} F(0) \right| .$$

Soit $R_1 > 0$ ; la fonction

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\ell} P_k(zR_1)\, e^{w_k R_1 z}$$

est un polynôme exponentiel, et on a

$$G(u) = F(R_1 u) \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{C} ,$$

donc

$$|G|_1 = \sup_{|u|=1} |G(u)| = |F|_{R_1} .$$

Utilisons l'inégalité (6.4.3) pour la fonction $G$ :

$$|G(u)| \leqslant e^{R_1 \Omega(|u|+1)} . \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1} . |G|_1 ,$$

grâce aux inégalités (6.1.5) de Cauchy.

Donc

$$|F(R_1 u)| \leqslant e^{R_1 \Omega(|u|+1)} . \sum_{i=1}^{n} |u|^{i-1} |F|_{R_1} \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{C} .$$

On obtient ainsi, pour tout $R_1 > 0$ et tout $R_2 > 0$ ,

$$\mathrm{Log} \frac{|F|_{R_2}}{|F|_{R_1}} \leqslant (R_1 + R_2)\Omega + \mathrm{Log} \frac{R_2^n - R_1^n}{R_1^{n-1}(R_2 - R_1)} .$$

On choisit $R_2 > R_1$ , et on majore

$$\mathrm{Log} \frac{R_2^n - R_1^n}{R_1^{n-1}(R_2 - R_1)}$$

par

$$(n-1)\mathrm{Log} \frac{R_2}{R_1} + \mathrm{Log} \frac{R_2}{R_2 - R_1} \leqslant (n-1)\mathrm{Log} \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2 - R_1} .$$

On utilise ensuite 6.2.1 :

(6.4.5) $$n(F,\rho)\ \mathrm{Log}\left(\frac{R_2^2 - R_1 \rho}{R_2(R_1+\rho)}\right) \leqslant (n-1)\mathrm{Log} \frac{R_2}{R_1} + (R_1+R_2)\Omega + \frac{R_1}{R_2 - R_1} ,$$

pour tout $R_1 > 0$ , $R_2 > R_1$ (avec $R_2 > \rho$).

En posant

$$\gamma = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{R_2^2 - R_1 \rho}{R_2(R_1+\rho)} ,$$

on a

$$R_1 = \rho \cdot \frac{1+\gamma\mu}{\gamma(\gamma-\mu)} ,$$

et on obtient finalement le résultat suivant, beaucoup plus précis que (6.1.3) :

<u>pour tous réels</u> $\gamma$ <u>et</u> $\mu$ <u>vérifiant</u> $\gamma > \mu > 0$ <u>et</u> $\gamma > 1$ , <u>on a</u>

(6.4.6) $$n(F,\rho) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Log}\ \mu} \left((n-1)\mathrm{Log}\ \gamma + \frac{(\gamma\mu+1)(\gamma+1)}{\gamma(\gamma-\mu)} \rho\Omega + \frac{1}{\gamma-1}\right) .$$

Pour obtenir (6.1.3), on choisit par exemple

$$\gamma = 18 \quad , \quad \mu = \frac{9}{2} ,$$

et on majore

$$\frac{1}{\mathrm{Log}\ \mu} \left(\mathrm{Log}\ \gamma + \frac{1}{\gamma-1}\right) \quad \text{par} \quad 2 ,$$

et

$$\frac{(\gamma\mu+1)(\gamma+1)}{\gamma(\gamma-\mu)\mathrm{Log}\ \mu} \quad \text{par} \quad 5 .$$

On remarque enfin que, pour $n = 1$ , on a $n(F,\rho) = 0$ .

L'inégalité (6.4.6) montre également que le nombre de zéros de $F$ dans un carré du plan complexe de côté $L > 0$ (et de centre quelconque) est majoré par

$$2(n-1) + 3L\Omega .$$

Enfin, si on applique cette majoration au polynôme exponentiel $F(z)-z_o$ , $z_o$ étant un nombre complexe, on en déduit une majoration du nombre de solutions $z$ de l'équation $F(z) = z_o$ , dans un carré ou dans un disque de $\mathbb{C}$ .

## §6.5 Références

Dès 1873, Hermite, pour démontrer la transcendance du nombre $e$, étudiait l'ordre du zéro $z = 0$ d'un polynôme exponentiel (voir à ce sujet [Siegel, T.]). En liaison avec des problèmes d'indépendance algébrique, Gel'fond, en 1949 [Gel'fond, T., chap.III §4 lemme III] puis Mahler en 1965 obtenaient des majorations du nombre de zéros de fonctions du type (6.1.2), en fonction des quatre quantités

$$\rho \ , \ \Omega \ , \ n \quad \text{et} \quad \Delta = \min_{i \neq j} |w_i - w_j| \ .$$

On peut voir très simplement pourquoi une telle majoration existe. On peut évidemment supposer

$$\max_{k,j} |b_{k,j}| = 1 \ .$$

Comme le déterminant de la matrice

$$M = \left(\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left(z^{j-1} e^{w_k z}\right)_{z=0}\right)_{(i),(j,k)} ,$$

(avec $1 \leqslant i \leqslant n$ , et $1 \leqslant k \leqslant \ell$ , $1 \leqslant j \leqslant p_k$), est non nul, les $n$ relations

$$\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left(z^{j-1} e^{w_k z}\right)_{z=0} \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \ ,$$

forment un système de Cramer, ce qui permet d'exprimer les nombres $b_{k,j}$ comme fonctions linéaires de $F(0) , F'(0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} F(0)$ :

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k,j,i} \, F^{(i-1)}(0) \quad , \quad (1 \leqslant k \leqslant \ell \ , \ 1 \leqslant j \leqslant p_k) \ .$$

Le calcul des cofacteurs du déterminant de $M$ permettent de majorer les nombres complexes $\lambda_{k,j,i}$ , en fonction de $\Omega$ , $n$ et $\Delta$ , et le principe du maximum fournit une minoration des nombres $\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0)$ , $(1 \leqslant i \leqslant n)$, en fonction du nombre $n(F,\rho)$ de zéros de $F$ dans un disque $|z| \leqslant \rho$ . On obtient ainsi, à partir de la relation

$$1 \leqslant \max_{k,j} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{k,j,i}| \cdot \left|\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} F(0)\right| ,$$

une majoration de $n(F,\rho)$.

De nouveaux outils ont été développés par Turan en 1953, puis raffinés par Dancs et Turan, Coates, Van der Poorten. En 1959, Turan posa le problème de l'existence d'une telle majoration indépendante de $\Delta$ . Cette conjecture a été résolue par Tijdeman dans sa thèse en 1969 [Tijdeman, 1969, chap.VI, VII] (une autre majoration, obtenue indépendamment, se trouve dans le lemme 3 de [Waldschmidt, 1971a]). La démonstration présentée ici est celle de Tijdeman [Tijdeman, 1970a] et [Tijdeman Balkema 1970] (avec une légère amélioration au lemme 6.2.1, où Tijdeman obtient seulement

$$n(f,\rho)\mathrm{Log}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1+\rho}\right) \leqslant \mathrm{Log}\ \frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}} ,$$

[Tijdeman, 1970a, lemme 1]).

On trouvera, dans les articles de Tijdeman, une bibliographie plus complète.

Il serait très intéressant d'étendre les résultats de ce chapitre à d'autres fonctions que la fonction exponentielle, par exemple les fonctions elliptiques (comme ce sont des fonctions d'ordre $\leqslant 2$, il faudrait remplacer $R$ au moins par $R^2$). Un tel résultat n'est pas encore connu, mais il aurait d'intéressantes applications.

## EXERCICES

Exercice 6.1.a. Soient $b_{k,j}$ $(1 \leqslant k \leqslant \ell\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant p_k)$ des nombres réels non tous nuls, et $w_1,\ldots,w_\ell$ des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que le nombre de zéros réels de la fonction

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} b_{k,j}\, z^{j-1}\, e^{w_k z}$$

est inférieur ou égal à $n-1$ (où $n = p_1+\ldots+p_\ell$). (Reprendre la démonstration de 1.4.2, et faire la démonstration par récurrence sur $\ell$ , en utilisant le théorème de Rolle sous la forme suivante : si une fonction définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ , possède au moins $n$ zéros sur $I$ , et si $m$ est un entier, $0 \leqslant m \leqslant n-1$ , la fonction $\frac{d^m}{dx^m} f$ possède au moins $n-m$ zéros sur $I$) [Gel'fond Linnik, 1962].

En déduire que, si $x_1,\ldots,x_r$ (resp. $w_1,\ldots,w_q$) sont des nombres réels deux à deux distincts, et $s_1,\ldots,s_r$ , $p_1,\ldots,p_q$ sont des nombres entiers positifs ou nuls, le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}(x^{p-1}e^{w_i x})_{x=x_j}\right)_{(s,j),(p,i)}$$

(avec $(1 \leqslant s \leqslant s_j\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ , $(1 \leqslant p \leqslant p_i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant q)$ , $s_1+\ldots+s_r = p_1+\ldots+p_q$) est non nul.

Exercice 6.1.b. Soient $P_1,\dots,P_\ell$ des polynômes non nuls, de degré strictement inférieur à $p_1,\dots,p_\ell$ respectivement. On note

$$n = p_1+\dots+p_\ell .$$

Soient $w_1,\dots,w_\ell$ , $x_0,\dots,x_{n+1}$ des nombres complexes tels que

$$x_i \neq x_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+1 ,$$

et

$$e^{w_h x_i} \neq e^{w_k x_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant h < k \leqslant m \quad \text{et} \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1 .$$

Soit $F$ la fonction

$$z \mapsto \sum_{h=1}^{\ell} P_h(z)\, e^{w_h z} .$$

Montrer que l'un au moins des nombres

$$F(x_i + jx_0) \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1 \; , \; 1 \leqslant j \leqslant \ell ,$$

est non nul.

(Schneider a utilisé ce résultat, dans le cas où les nombres $w_h$ sont des multiples entiers de $\ell = \mathrm{Log}\, a$ , et où les nombres $x_i$ sont de la forme $\lambda+\mu b$ , $\lambda$ et $\mu$ entiers, pour démontrer que $a^b$ est transcendant ; voir [Schneider, 1934] et [Siegel, T., chap.III §1].

Indication : considérer le terme de plus haut degré du déterminant

$$\left| P_h(X+kx_0) e^{w_h k x_0} \right|_{(h,k)} \in \mathbb{C}[X] ,$$

où $1 \leqslant h \leqslant \ell$ , $1 \leqslant k \leqslant \ell$).

Exercice 6.1.c. Soient $w_1,\dots,w_\ell$ des nombres complexes deux à deux distincts.

1) Soient $p_1,\dots,p_\ell$ des nombres entiers positifs, et soit $\Delta$ le déterminant de la matrice

$$\left(x^{j-1}e^{w_k x}\right)_{(0\leqslant x\leqslant n-1);(1\leqslant k\leqslant \ell\,,\,1\leqslant j\leqslant p_k)}\,,$$

avec $n = p_1+\dots+p_\ell$ .

Vérifier l'égalité

$$\Delta = \Big(\prod_{k=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{p_k}(j-1)!\Big).\Big(\prod_{h=1}^{\ell} e^{\frac{1}{2}w_h p_h(p_h-1)}\Big).\Big(\prod_{k=2}^{\ell}\prod_{\lambda=1}^{k-1}(e^{w_k}-e^{w_\lambda})^{p_k p_\lambda}\Big)$$

(voir [Feldman, 1968a, lemme 5]).

2) Soient $\pi_1,\dots,\pi_p$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ , $\mathbb{C}$-linéairement indépendants, de degré $\leqslant p-1$ . Soit $T \in \mathbb{C}$ , $T \neq 0$ . Montrer que le déterminant de la matrice

$$\left(\pi_j(Tx)e^{w_k x}\right)_{(0\leqslant x\leqslant p\ell-1);(1\leqslant j\leqslant p\,,\,1\leqslant k\leqslant \ell)}\,,$$

est non nul

[Feldman, 1968b, lemme 7].

3) En déduire que, si $\ell_1,\dots,\ell_h$ sont des nombres complexes tels que

$$2i\pi\,,\,\ell_1,\dots,\ell_h$$

soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si

$$P \in \mathbb{C}[X_0,\dots,X_h]$$

est un polynôme non nul de degré $\leqslant p_i-1$ par rapport à $X_i$ $(0 \leqslant i \leqslant h)$, alors l'un des nombres

$$P(x\,,e^{\ell_1 x},\dots,e^{\ell_h x})\,,\ (x=0,1,\dots,p_0\dots p_h-1)\,,$$

est non nul.

Exercice 6.1.d. Avec les notations du théorème 6.1.1, construire une fonction $F$ du type (6.1.2), non polynomiale, et admettant les zéros

$$1,\dots,n-1\ ,$$

avec

$$w_k - w_h \notin 2i\pi\,\mathbb{Z} \quad (1 \leqslant k \leqslant \ell\,,\ 1 \leqslant h \leqslant \ell\,,\ k \neq h).$$

(Utiliser l'exercice 6.1.c).

Exercice 6.1.e

Soient $b_{k,h}$ $(1 \leqslant k \leqslant p\ ,\ 1 \leqslant h \leqslant \ell)$ des nombres complexes

1) Soit $\alpha$ un nombre complexe irrationnel.

Exprimer les coefficients $b_{k,h}$ comme combinaisons linéaires des $p\ell$ nombres

$$\sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{p} b_{k,h} \exp[(k+h\alpha)(u+\frac{v}{p})2i\pi]\ ,\ (0 \leqslant u \leqslant \ell-1\ ,\ 0 \leqslant v \leqslant p-1)\ .$$

[Feldman, 1964, lemme 1].

2) Soit $F$ la fonction définie par

$$F(z) = \sum_{h=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{p} b_{k,h}\ z^{k-1}\ e^{(h-1)z}\ .$$

Exprimer les coefficients $b_{k,h}$ comme combinaisons linéaires des nombres

$$F(\frac{2\pi ix}{\ell})\ ,\quad (x = 0,1,\ldots,p\ell-1)\ ,$$

puis comme combinaisons linéaires des nombres

$$\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} F(2\pi xi)\ ,\quad (0 \leqslant x \leqslant p-1\ ,\ 1 \leqslant s \leqslant \ell)\ .$$

[Feldman, 1960 , lemme 3] et [Feldman, 1951, lemme 6].

Exercice 6.2.a. Soient $R_1$ , $R_2$ , $\rho$ trois nombres réels, $0 < R_1 < R_2$ , $0 < \rho < R_2$ . Soit $f$ une fonction holomorphe non constante dans le disque $|z| \leqslant R_2$ . En utilisant successivement les exercices 1.5.a, 1.5.b et 1.5.c, donner plusieurs majorations de

$$\frac{n(f,\rho)}{\mathrm{Log}\,\dfrac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}}}$$

en fonction de $R_1$ , $R_2$ et $\rho$ .

Exercice 6.3.a. Soit $f$ une fonction holomorphe dans un disque $D$ . Soient $w_1,\ldots,w_\ell$ des points de $D$ , deux à deux distincts, et $p_1,\ldots,p_\ell$ des nombres entiers positifs.

Montrer qu'il existe un polynôme et un seul

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i \, X^{i-1} \in \mathbb{C}[X] ,$$

de degré inférieur (strictement) à

$$n = p_1+\ldots+p_\ell ,$$

vérifiant les $n$ conditions

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} P(w_k) = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} f(w_k) \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant p_k \ , \ 1 \leqslant k \leqslant \ell) .$$

Majorer ensuite les coefficients $a_1,\ldots,a_n$ de $P$ [Balkema Tijdeman, 1970, lemme 2]. (On pourra utiliser l'exercice 1.5.d).

Exercice 6.4.a. Soient $b_1,\dots,b_n$ des nombres complexes, et $g_1,\dots,g_n$ des fonctions analytiques dans un domaine $U$ du plan complexe. Soit

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} b_i\, g_i(z) \ .$$

Soient $z_1,\dots,z_n$ des éléments de $U$ , $s_1,\dots,s_n$ des nombres entiers positifs ou nuls, et $\Delta_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n)$ le cofacteur de

$$\frac{d^{s_i}}{dz^{s_i}}\, g_j(z_i)$$

dans le déterminant

$$\Delta = \left| \frac{d^{s_i}}{dz^{s_i}}\, g_j(z_i) \right|_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ .$$

Montrer que, pour tout $u \in U$ , on a

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{d^{s_i}}{dz^{s_i}}\, F(z_i) \right| . \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(u) \Delta_{i,k} \right| \geqslant |\Delta| . |F(u)| \ .$$

[Van der Poorten, 1969, p. 186].

Exercice 6.5.a. Montrer que le déterminant de la matrice

$$\left(\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\left(z^{j-1}e^{w_h z}\right)_{z=0}\right) = \left(\frac{(i-1)!}{(i-j)!}\, w_h^{i-1}\right) ,$$

où $i$ est l'indice de ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et $(j,h)$ l'indice de colonne

$(1 \leqslant j \leqslant p_h \ , \ 1 \leqslant h \leqslant \ell)$ est égal à

$$\left(\prod_{h=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{p_h} (j-1)!\right) . \prod_{1 \leqslant h<k \leqslant \ell} (w_k - w_h)^{p_k p_h} .$$

(Considérer ce déterminant comme un polynôme en $T = w_1$ , et calculer les dérivées d'ordre $\leqslant p_1 p_2$ au point $T = w_2$).

Calculer aussi les cofacteurs de ce déterminant (utiliser par exemple la méthode de [Van der Poorten, 1969]).