CHAPITRE 7

Propriétés d'indépendance algébrique de la fonction exponentielle

Grâce aux résultats des chapitre 5 et 6, on peut obtenir des énoncés d'indépendance algébrique concernant les valeurs de la fonction exponentielle, sans utiliser de type de transcendance ; on remplace cette notion par le critère 5.1.1, et on utilise le théorème 6.1.1 pour vérifier les conditions (5.1.2).

Nous étudierons les analogues des résultats de transcendance des chapitres 2 et 3, où nous remplaçons partout le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques par une extension de $\mathbb{Q}$ de degré de transcendance 1.

§7.1 Complément à un théorème de Lang

On sait déjà, grâce au théorème 2.2.3, que, si $u_1,\ldots,u_n$ (resp. $v_1,\ldots,v_m$) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si $mn > m+n$ (c'est-à-dire $m \geqslant 3$ et $n \geqslant 2$, ou $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 3$), alors l'un des nombres

$$e^{u_i v_j}\ , \quad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

est transcendant. Plus généralement, le théorème 4.1.2 montre que, si $mn \geqslant \tau(m+n)$, $(\tau > 1)$, alors ces nombres n'appartiennent pas tous à une extension K de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ. Rappelons que, si K a un degré de transcendance q sur $\mathbb{Q}$, alors $\tau \geqslant q+1$. Nous allons voir que, dans le cas $q=1$, on peut remplacer τ par 2 et supprimer l'hypothèse sur le type de transcendance de K.

Théorème 7.1.1. *Soient* $u_1,\dots,u_n$ *des nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soient* $v_1,\dots,v_m$ *des nombres complexes,* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Si*

$$mn > 2(m+n) ,$$

alors deux des nombres

$$\exp(u_i v_j) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) ,$$

sont algébriquement indépendants (sur $\mathbb{Q}$*).*

La condition $mn > 2(m+n)$ apparaîtra de façon naturelle, mais compte tenu de la symétrie entre m et n, on peut noter que les seuls cas intéressants sont $(m = n = 4)$ et $(m = 3 \ , \ n = 6)$.

Indiquons quelques corollaires du théorème 7.1.1. D'abord, dans le cas $m = n = 4$, si on choisit

$$u_1 = 1 \ , \ u_2 = a \ , \ u_3 = b \ , \ u_4 = ab \ ,$$
$$v_1 = \ell \ , \ v_2 = a\ell \ , \ v_3 = b\ell \ , \ v_4 = ab\ell \ ,$$

on obtient le

Corollaire 7.1.2. *Soient* a , b , ℓ *trois nombres complexes ; on suppose que les nombres*

$$1 , a , b , ab$$

sont $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants, et que* $\ell \neq 0$. *Alors deux des 9 nombres*

$$e^{\ell} , e^{a\ell} , e^{b\ell} , e^{ab\ell} , e^{a^2\ell} , e^{b^2\ell} , e^{a^2b\ell} , e^{ab^2\ell} , e^{a^2b^2\ell} ,$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

En particulier, deux des 3 nombres

$$2^{\sqrt{2}} , 2^{\sqrt{3}} , 2^{\sqrt{6}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$; de même, le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(e^{\pi} , e^{\pi\sqrt{3}} , e^{i\pi\sqrt{3}})$$

est supérieur ou égal à 2.

Choisissons maintenant

$$u_1 = 1 , u_2 = a , u_3 = b , u_4 = ab ;$$

$$v_1 = \ell_1 , v_2 = b\ell_1 , v_3 = \ell_2 , v_4 = b\ell_2 .$$

Corollaire 7.1.3. *Soit* b *un nombre irrationnel quadratique (c'est-à-dire tel que* $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 2$). *Soient* ℓ_1 , ℓ_2 , a *trois nombres complexes. On suppose que* $a \notin \mathbb{Q}(b)$, *et que*

$$\ell_1 , b\ell_1 , \ell_2 , b\ell_2$$

sont $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants.*

Alors deux des huit nombres

$$e^{\ell_i} , e^{a\ell_i} , e^{b\ell_i} , e^{ab\ell_i} , \quad (i = 1,2)$$

sont algébriquement indépendants.

Enfin, si on choisit

$$u_1 = 1 , u_2 = t , u_3 = t^2 , u_4 = t^3 ,$$

$$v_1 = a , v_2 = at , v_3 = at^2 , v_4 = at^3 ,$$

on déduit du théorème 7.1.1 le

Corollaire 7.1.4. *Soient* t *un nombre complexe transcendant, et* a *un nombre complexe non nul. Deux des sept nombres*

$$\exp(at^i) \quad , \quad (0 \leqslant i \leqslant 6)$$

sont algébriquement indépendants.

Choisissons maintenant $m = 3$, $n = 6$, avec

$$u_1 = \text{Log } 2 \ , \ u_2 = t \text{ Log } 2 \ , \ u_3 = \frac{1}{t} \text{ Log } 2 \ ,$$

$$u_4 = \text{Log } 3 \ , \ u_5 = t \text{ Log } 3 \ , \ u_6 = \frac{1}{t} \text{ Log } 3 \ ,$$

$$v_1 = 1 \qquad , \ v_2 = t \qquad , \ v_3 = \frac{1}{t} \ .$$

Corollaire 7.1.5. *Soit* t *un nombre complexe transcendant tel que les* 6 *nombres*

$$\text{Log } 2 \ , \ t \text{ Log } 2 \ , \ t^2 \text{ Log } 2 \ , \ \text{Log } 3 \ , \ t \text{ Log } 3 \ , \ t^2 \text{ Log } 3$$

soient $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors deux des huit nombres*

$$2^t \ , \ 2^{\frac{1}{t}} \ , \ 2^{t^2} \ , \ 2^{\frac{1}{t^2}} \ , \ 3^t \ , \ 3^{\frac{1}{t}} \ , \ 3^{t^2} \ , \ 3^{\frac{1}{t^2}}$$

sont algébriquement indépendants.

Pour démontrer le théorème 7.1.1, on reprend la démonstration du théorème 4.1.2; avec les notations du §4.4, les relations (4.4.4) montrent que la fonction F_N admet au moins M^{mn} zéros dans le disque

$$|z| \leqslant \rho = M^n(|v_1|+\ldots+|v_m|) \ ;$$

utilisons le théorème 6.1.1, avec

$$p_1+\ldots+p_\ell = (2N^m)^n \ , \quad \text{et} \quad \Omega = 2N^m(|u_1|+\ldots+|u_n|) \ .$$

On obtient :

$$M^{mn} \leqslant 2^n N^{mn} + 2N^m M^n \Big(\sum_{i=1}^{n} |u_i|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} |v_j|\Big) ,$$

d'où

$$M \leqslant 2N ,$$

quand N est suffisamment grand. Compte tenu de cette inégalité, le résultat démontré au §4.4 s'énonce alors :

Théorème 7.1.6. *Soient* m *et* n *deux nombres entiers tels que* $mn > m+n$. *Soient* $u_1,\dots,u_n$ (*resp.* $v_1,\dots,v_m$) *des nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants. Soit* K_1 *le sous-corps de* $\mathbb{C}$ *obtenu en adjoignant à* $\mathbb{Q}$ *les* mn *nombres*

$$\exp(u_i v_j) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ .$$

Soit t *une taille sur* K_1 . *Alors il existe une suite* $(\xi_N)_{N \geqslant N_0}$ *d'éléments non nuls de* K *vérifiant*

$$\operatorname{Log}|\xi_N| << -N^{mn} \operatorname{Log} N$$

et

$$t(\xi_N) << N^{m+n}$$

pour $N \to +\infty$.

On en déduit immédiatement le théorème 4.1.2 (grâce au lemme 4.2.23) et le théorème 7.1.1 (grâce à 5.1.4).

§7.2 Complément au théorème de Gel'fond Schneider

Après avoir étudié l'indépendance algébrique de nombres

$$\exp(u_i v_j) ,$$

nous allons étudier l'indépendance de

$$u_i , \exp(u_i v_j) .$$

Le théorème 2.1.1 de Gel'fond Schneider montre que, si u_1 , u_2 sont deux nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si v est un nombre complexe non nul, les nombres

$$u_1 , u_2, e^{u_1 v} , e^{u_2 v}$$

ne sont pas tous algébriques.

<u>Théorème</u> 7.2.1. <u>Soient</u> $u_1,\dots,u_n$ (<u>resp</u>. $v_1,\dots,v_m$) <u>des nombres complexes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants</u>. <u>Si</u>

$$mn \geq 2m + n ,$$

<u>alors deux des nombres</u>

$$u_i , \exp(u_i v_j) , \quad (1 \leq i \leq n , 1 \leq j \leq m)$$

<u>sont algébriquement indépendants</u>.

Les cas intéressants sont $(m = n = 3)$ et $(m = 2 , n = 4)$.

Voici quelques corollaires du théorème 7.2.1.

Choisissons d'abord $m = n = 3$, puis

$$u_1 = 1 , u_2 = t , u_3 = t^2 ,$$

$$v_1 = \ell , v_2 = t\ell , v_3 = t^2\ell .$$

Corollaire 7.2.2. _Soient_ t _un nombre complexe transcendant, et_ $\ell \neq 0$ _un logarithme d'un nombre algébrique. Alors le corps_

$$\mathbb{Q}(t\ ,\ e^{\ell t}\ ,\ e^{\ell t^2}\ ,\ e^{\ell t^3}\ ,\ e^{\ell t^4})$$

a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ _supérieur ou égal à_ 2.

On peut remarquer que l'un des trois nombres

$$e^{\ell t}\ ,\ e^{\ell t^2}\ ,\ e^{\ell t^3}$$

est transcendant, grâce à (2.2.3).

Corollaire 7.2.3. _Soit_ b _un nombre algébrique, de degré sur_ $\mathbb{Q}$ _supérieur ou égal à_ 3. _Soit_ a _un nombre algébrique_, $a \neq 0$, $a \neq 1$. _Alors deux des_ 4 _nombres_

$$a^b\ ,\ a^{b^2}\ ,\ a^{b^3}\ ,\ a^{b^4}$$

sont algébriquement indépendants.

Ce résultat, dû à Gel'fond, admet pour conséquence l'indépendance algébrique des deux nombres

$$a^b\ ,\ a^{b^2}\ ,$$

quand $a \neq 0,1$ est algébrique, et b est irrationnel cubique ($[\mathbb{Q}(b):\mathbb{Q}] = 3$).

Par exemple

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(2^{\sqrt[3]{2}}\ ,\ 2^{\sqrt[3]{4}}) = 2\ .$$

Dans le cas

$$u_1 = 1\ ,\ u_2 = b_1\ ,\ u_3 = b_2\ ,$$

$$v_1 = \ell_1\ ,\ v_2 = \ell_2\ ,\ v_3 = \ell_3\ ,$$

on obtient le

Corollaire 7.2.4. *Soient* b_1 , b_2 *deux nombres algébriques, tels que* 1 , b_1 , b_2 *soient* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soient* ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 *trois logarithmes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques. Deux des six nombres*

$$e^{\ell_j b_i} \quad , \quad (i = 1,2 \ ; \ j = 1,2,3)$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On peut démontrer une variante de ce résultat, en prenant $n = 4$, $m = 2$, et

$$u_1 = 1 \ , \ u_2 = b_1 \ , \ u_3 = b_2 \ , \ u_4 = b_3 \ ,$$

$$v_1 = \ell_1 , \ v_2 = \ell_2 \ .$$

Corollaire 7.2.5. *Soient* b_1 , b_2 , b_3, *des nombres algébriques, tels que*

$$1 \ , \ b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3$$

soient $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soient* ℓ_1 , ℓ_2 *deux logarithmes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques. Deux des six nombres*

$$e^{\ell_i b_j} \quad , \quad (i = 1,2 \ ; \ j = 1,2,3)$$

sont algébriquement indépendants.

Considérons maintenant les nombres

$$1 \ , \ \frac{\ell_1}{\ell_2} \ , \ \beta \ , \ \beta\frac{\ell_1}{\ell_2} \ ,$$

$$\ell_2 \ , \ \beta\,\ell_2 \ .$$

Corollaire 7.2.6. *Soit* β *un nombre algébrique irrationnel. Soient* ℓ_1 , ℓ_2 *deux logarithmes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\left(\frac{\ell_1}{\ell_2} \ ; \ e^{\ell_1\beta} \ , \ e^{\ell_2\beta} \ , \ e^{\ell_1\beta^2} \ , \ e^{\ell_2\beta^2}\right) \geqslant 2 \ .$$

C'est ainsi que deux des 3 nombres

$$\frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 3}\ ,\ 2^{i}\ ,\ 3^{i}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Enfin, le choix

$$u_1 = 1\ ,\ u_2 = b\ ,\ u_3 = c\ ,\ u_4 = bc\ ,$$

$$v_1 = \ell\ ,\ v_2 = c\ell$$

conduit à l'énoncé suivant :

Corollaire 7.2.7. *Soient* b *et* c *deux nombres algébriques, tels que*

$$1\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ bc$$

soient $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soit* ℓ *un nombre complexe non nul. Le degré de transcendance, sur* $\mathbb{Q}$ *, du corps*

$$\mathbb{Q}(e^{\ell}\ ,\ e^{b\ell}\ ,\ e^{c\ell}\ ,\ e^{bc\ell}\ ,\ e^{c^2\ell}\ ,\ e^{bc^2\ell})$$

est supérieur ou égal à 2.

On retrouve par exemple un résultat du §7.1 :

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(2^{\sqrt{2}}\ ,\ 2^{\sqrt{3}}\ ,\ 2^{\sqrt{6}}) \geqslant 2\ .$$

Pour démontrer le théorème 7.2.1, on établit le résultat suivant :

Théorème 7.2.8. *Soient* $m \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 2$ *deux nombres entiers. Soient* $u_1,\dots,u_n$ (*resp.* $v_1,\dots,v_m$) *des nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Soit* K_2 *le sous-corps de* $\mathbb{C}$ *obtenu en adjoignant à* $\mathbb{Q}$ *les* $(m+1)n$ *nombres*

$$u_i\ ,\ e^{u_i v_j}\ ,\quad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)\ .$$

Soit t *une taille sur* K_2 . *Alors il existe une suite* $(\xi_N)_{N \geqslant N_0}$ *d'éléments non nuls de* K_2 , *vérifiant*

$$\text{Log}|\xi_N| << -N^n \text{ Log } N \ ,$$

et

$$t(\xi_N) << N^{\frac{m+n}{m+1}} . (\text{Log } N)^{\frac{1}{m+1}} \ ,$$

pour $N \to +\infty$.

On en déduit, en utilisant 5.1.4, le théorème 7.2.1. D'autre part le lemme 4.2.23 conduit à la généralisation suivante du théorème de Gel'fond Schneider.

Théorème 7.2.9. *Soient* $\tau > 1$ *un nombre réel, et* K *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *de type de transcendance inférieur ou égal à* τ *sur* $\mathbb{Q}$. *Soient* $u_1, \ldots, u_n$ *(resp.* $v_1, \ldots, v_m$*) des nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Si*

$$mn \geqslant \tau m + (\tau - 1)n \ ,$$

alors l'un au moins des nombres

$$u_i \ , \ \exp(u_i v_j) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

est transcendant sur K .

Comme pour le théorème de Gel'fond Schneider, il y a deux démonstrations possibles de 7.2.8, correspondant à une extension de la méthode de Schneider et de celle de Gel'fond respectivement.

Première démonstration du théorème 7.2.8

Soit $(x_1, \ldots, x_q, y)$ le système générateur de K_2 sur $\mathbb{Q}$ permettant de définir la taille t , et soit $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_q, y]$.

Soit N un entier suffisamment grand. On définit

$$R_o = \left[N^{\frac{m+n}{m+1}} (\text{Log } N)^{-\frac{m}{m+1}} \right] , \tag{7.2.10}$$

et

$$(7.2.11) \qquad R_1 = \left[N^{\frac{n-1}{m+1}} (\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{m+1}} \right] .$$

Le lemme 4.3.1 permet de montrer l'existence d'un polynôme non nul

$$P_N \in \mathbb{A}[X_o,\dots,X_m] ,$$

avec

$$\deg_{X_o} P_N \leqslant 2R_o \ , \ \deg_{X_j} P_N \leqslant R_1 \ , \ (1 \leqslant j \leqslant m)$$

et

$$t(\text{coefficients de } P_N) << R_1 N + R_o \ \mathrm{Log}\ N ,$$

tel que la fonction

$$F_N(z) = P_N(z , e^{v_1 z},\dots,e^{v_m z})$$

vérifie

$$F_N(k_1u_1+\dots+k_nu_n) = 0 \quad \text{pour} \quad k_i = 1,\dots,N \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n) .$$

D'après le théorème 6.1.1, le nombre $n(F_N,\rho)$ de zéros de la fonction F_N dans le disque

$$|z| \leqslant \rho = 3.N(\sum_{i=1}^{n} |u_i|)$$

est majoré par

$$2(2R_o+1)(R_1^m+1) + 5\rho\Omega$$

avec

$$\Omega = R_1(\sum_{j=1}^{m} |v_j|) .$$

Pour N suffisamment grand, on a

$$5\rho\Omega \leqslant 30\ N^{\frac{m+n}{m+1}}(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{m+1}}.(\sum_{i=1}^{n}|u_i|)(\sum_{j=1}^{m}|v_j|) \leqslant N^n .$$

donc

$$n(F_N,\rho) < (3N)^n .$$

Par conséquent l'un des nombres

$$F_N(h_1u_1+\ldots+h_nu_n) \quad , \quad (1 \leqslant h_i \leqslant 3N \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

est non nul. Notons ξ_N l'un de ces nombres non nuls. Alors ξ_N appartient à K_2 , et il est facile de majorer sa taille par

$$t(\xi_N) \ll R_1N + R_o\ \mathrm{Log}\ N ,$$

donc

$$t(\xi_N) \ll N^{\frac{m+n}{m+1}}(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{m+1}} .$$

Pour majorer ξ_N , on utilise le principe du maximum sur le disque

$$|z| \leqslant R = N^{1+\frac{1}{m+1}}$$

pour la fonction entière

$$F_N(z) . \prod_{k_1=1}^{N} \cdots \prod_{k_n=1}^{N} (z - k_1u_1 - \ldots - k_nu_n)^{-1} .$$

On majore $|F_N|_R$ par

$$\mathrm{Log}|F_N|_R \ll R_1R + R_o\ \mathrm{Log}\ R \ll N^n(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{m+1}} ,$$

car $m+n+1 \leqslant n(m+1)$.

D'autre part l'inégalité

$$\frac{R}{3N \sum_{i=1}^{n} |u_i|} > N^{\frac{1}{m+2}}$$

permet de majorer

$$\sup_{|z|=R} \prod_{k_1=1}^{N} \cdots \prod_{k_n=1}^{N} \left| \frac{(h_1-k_1)u_1+\ldots+(h_n-k_n)u_n}{z-k_1u_1-\ldots-k_nu_n} \right|$$

par

$$\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{m+2}}}\right)^{N^n} = \exp\left(-\frac{1}{m+2} N^n \operatorname{Log} N\right) ;$$

on en déduit

$$\operatorname{Log}|\xi_N| \leqslant -\frac{1}{m+3} N^n \operatorname{Log} N ,$$

ce qui démontre le théorème 7.2.8.

<u>Deuxième démonstration du théorème</u> 7.2.8

On conserve les mêmes valeurs (7.2.10) et (7.2.11) de R_o et R_1 en fonction de N. Le lemme 4.3.1 permet de construire, pour N suffisamment grand, un polynôme non nul

$$P_N \in \mathbf{A}[X_1,\ldots,X_n] ,$$

de degré inférieur ou égal à $2N$ par rapport à X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et dont les coefficients ont une taille majorée par

$$t(\text{coefficients}) \ll R_1N + R_o \operatorname{Log} N ,$$

tel que la fonction

$$F_N(z) = P_N(e^{u_1z},\ldots,e^{u_nz})$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(k_1v_1+\ldots+k_mv_m) = 0 \quad \text{pour} \quad k_j = 1,\ldots,R_1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \quad \text{et} \quad s = 0,\ldots,R_o-1 .$$

Le théorème 6.1.1 montre qu'il existe des entiers $h_1,\ldots,h_m$, σ , vérifiant

$$1 \leqslant h_j \leqslant 2^{n+2}R_1 \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{R_o}{2} - 1 ,$$

et tels que

$$\xi_N = \frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F_N(h_1 v_1 + \ldots + h_m v_m) \neq 0 .$$

On utilise le principe du maximum, sur le disque $|z| \leqslant R$, avec

$$R = N^{\frac{n}{2} - \frac{1}{3}} ,$$

pour la fonction entière

$$\left(\frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F_N(z)\right) . \prod_{k_1=1}^{R_1} \ldots \prod_{k_m=1}^{R_1} (z - k_1 v_1 - \ldots - k_m v_m)^{-\left[\frac{R_o}{2}\right]} .$$

On remarque que, pour N suffisamment grand, on a

$$\operatorname{Log} \sup_{|z|=R} \left| \frac{d^\sigma}{dz^\sigma} F_N(z) \right| < N^n ,$$

et

$$\sup_{|z|=R} \prod_{k_1=1}^{R_1} \ldots \prod_{k_m=1}^{R_1} \left| \frac{(h_1 - k_1)v_1 + \ldots + (h_m - k_m)v_m}{z - k_1 v_1 - \ldots - k_m v_m} \right| \leqslant \exp\left(- \frac{1}{3m+4} R_1^m \operatorname{Log} N\right) .$$

On en déduit

$$\operatorname{Log} |\xi_N| \leqslant - \frac{1}{16m} N^n \operatorname{Log} N .$$

D'autre part on peut majorer la taille de ξ_N :

$$t(\xi_N) << R_1 N + R_o \operatorname{Log} N << N^{\frac{m+n}{m+1}} . (\operatorname{Log} N)^{\frac{1}{m+1}} ,$$

ce qui démontre de nouveau le théorème 7.2.8.

§7.3 Complément au théorème de Hermite Lindemann

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous étudions l'indépendance algébrique de nombres

$$u_i \ , \ v_j \ , \ \exp(u_i v_j) \ .$$

Le théorème 3.1.1 de Hermite Lindemann montre que l'un des trois nombres

$$u_1 \ , \ v_1 \ , \ e^{u_1 v_1}$$

est transcendant, si $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$.

Théorème 7.3.1. Soient $u_1,\dots,u_n$ (resp. $v_1,\dots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si

$$mn > m+n \ ,$$

alors deux des nombres

$$u_i \ , \ v_j \ , \ \exp(u_i v_j) \ , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

sont algébriquement indépendants.

Le cas intéressant (remarquer la symétrie entre m et n) est $m = 2$, $n = 3$.

Le principal corollaire du théorème 7.3.1 s'obtient en choisissant

$$u_1 = a \ , \ u_2 = at \ , \ u_3 = at^2 \ ,$$
$$v_1 = 1 \ , \ v_2 = t \ .$$

Corollaire 7.3.2. Soient t un nombre complexe transcendant, et a un nombre complexe non nul. Deux des 6 nombres

$$a \ , \ t \ , \ e^{a} \ , \ e^{at} \ , \ e^{at^2} \ , \ e^{at^3}$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier, soit r un nombre rationnel non nul ; on a

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(e\ ,\ e^{e^{r}}\ ,\ e^{e^{2r}}\ ,\ e^{e^{3r}}) \geqslant 2\ ,$$

et, si $\ell \neq 0$ est un logarithme d'un nombre algébrique, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\ell\ ,\ e^{\ell^{r+1}}\ ,\ e^{\ell^{2r+1}}\ ,\ e^{\ell^{3r+1}}) \geqslant 2\ .$$

Le cas t algébrique conduit au

Corollaire 7.3.3. *Soit $\ell \neq 0$ un logarithme d'un nombre algébrique. Soit b un nombre algébrique de degré supérieur ou égal à 3. Deux des nombres*

$$\ell\ ,\ e^{\ell b}\ ,\ e^{\ell b^2}\ ,\ e^{\ell b^3}$$

sont algébriquement indépendants.

Pour démontrer le théorème 7.3.1, il suffit, grâce à 5.1.4, que l'on établisse le résultat suivant.

Théorème 7.3.4. *Soient m et n deux nombres entiers positifs, et $u_1,\ldots,u_n$ (resp. $v_1,\ldots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit K_3 le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les $mn+m+n$ nombres*

$$u_i\ ,\ v_j\ ,\ \exp(u_i v_j)\quad ,\quad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)\ .$$

Soit t une taille sur K_3. Il existe une suite $(\xi_N)_{N \geqslant N_0}$ d'éléments non nuls de K_3 vérifiant

$$\mathrm{Log}|\xi_N| << - N^{mn+m+n}\ ,$$

et

$$t(\xi_N) << N^{m+n}$$

pour $N \to +\infty$.

En utilisant le lemme 4.2.23, on en déduit également la généralisation suivante du théorème de Hermite Lindemann.

Théorème 7.3.5. Soient $\tau \geq 1$ un nombre réel, et K un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$. Soient $u_1,\dots,u_n$ (resp. $v_1,\dots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si

$$mn > (\tau-1)(m+n) ,$$

alors l'un au moins des nombres

$$u_i \ , \ v_j \ , \ \exp(u_i v_j) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m)$$

est transcendant sur K.

Démonstration du théorème 7.3.4

Notons $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q,y]$, où $(x_1,\dots,x_q,y)$ est le système générateur de K_3 sur $\mathbb{Q}$ permettant de définir la taille t.

Soit N un entier suffisamment grand. On définit :

$$R_0 = [N^{m+n}(\operatorname{Log} N)^{-1}] ,$$

et

$$R_1 = N^m .$$

On peut construire, en utilisant le lemme 4.3.1, un polynôme non nul

$$P_N \in \mathbf{A}[X_0,\dots,X_n] ,$$

de degré $\leqslant 2R_0$ par rapport à X_0, de degré $\leqslant R_1$ par rapport à $X_1,\dots,X_n$, et dont les coefficients ont une taille majorée par

$$t(\text{coefficients}) \ll N^{m+n} ,$$

tel que la fonction

$$F_N = P_N(z , e^{u_1 z}, \dots, e^{u_n z})$$

vérifie

$$\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} F_N(k_1 v_1 + \dots + k_m v_m) = 0 \ , \quad \text{pour} \quad s = 1, \dots, R_o \ , \quad \text{et} \quad k_j = 1, \dots, N^n \ (1 \leqslant j \leqslant m) \ .$$

Le théorème 6.1.1 prouve l'existence d'entiers $h_1, \dots, h_m$, σ, vérifiant

$$1 \leqslant h_j \leqslant 8N^n \ , \ (1 \leqslant j \leqslant m) \ , \ 1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{R_o}{2} \ ,$$

tels que

$$\xi_N = \frac{d^{\sigma-1}}{dz^{\sigma-1}} F_N(h_1 v_1 + \dots + h_m v_m) \neq 0 \ .$$

Alors ξ_N est un élément non nul de K_3, dont la taille est majorée par

$$t(\xi_N) << N^{m+n} \ .$$

Le principe du maximum, sur le disque

$$|z| \leqslant R = N^{n+\frac{1}{2}}$$

appliqué à la fonction entière

$$\left(\frac{d^{\sigma-1}}{dz^{\sigma-1}} F_N(z)\right) . \prod_{k_1=1}^{N^n} \dots \prod_{k_m=1}^{N^n} (z - k_1 v_1 - \dots - k_m v_m)^{-\left[\frac{R_o}{2}\right]}$$

conduit à la majoration

$$\mathrm{Log}|\xi_N| \leqslant -\frac{1}{5} N^{mn+m+n} \ ,$$

ce qui démontre le théorème 7.3.4.

§7.4 Le huitième problème de Schneider

Dans les théorèmes 7.1.1 et 7.2.1, les hypothèses sur m et n $(mn \geqslant 2(m+n)$ et $mn \geqslant 2m+n)$ étaient des inégalités larges, alors que l'hypothèse $mn > m+n$ du théorème 7.3.1 est une inégalité stricte. Nous allons étudier ce qui se passe quand $mn = m+n$, c'est-à-dire $m = n = 2$. On connait actuellement le résultat partiel suivant.

Théorème 7.4.1. *Soient* u_1 , u_2 *(resp.* v_1 , v_2*) deux nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Si les deux nombres*

$$e^{u_1 v_1} , e^{u_2 v_1}$$

sont algébriques, alors deux des nombres

$$u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , e^{u_1 v_2} , e^{u_2 v_2}$$

sont algébriquement indépendants.

On déduit de ce théorème la transcendance du nombre

$$e^e + ie^{e^2}$$

(cf. [Schneider, T, Problème 8]).

Plus généralement le choix

$$u_1 = v_2 = 1 \quad , \quad u_2 = v_1 = e^r$$

donne le

Corollaire 7.4.2. *Soit* $r \neq 0$ *un nombre rationnel. L'un des deux nombres*

$$e^{e^r} , e^{e^{2r}}$$

est transcendant.

D'autre part, en choisissant

$$u_1 = 1 \ , \ u_2 = x \ , \ u_3 = \ell \ , \ u_4 = \ell x \ ,$$

on obtient le

<u>Corollaire</u> 7.4.3. <u>Soit</u> $\ell \neq 0$ <u>un nombre complexe. Soit</u> x <u>un nombre complexe, algébrique sur</u> $\mathbb{Q}(\ell)$, <u>et irrationnel. Alors un des nombres</u>

$$e^{\ell} \ , \ e^{x\ell} \ , \ e^{x^2\ell}$$

<u>est transcendant.</u>

Par exemple, si $\ell \neq 0$ est un logarithme d'un nombre algébrique, et si $r \neq 0$ est un nombre rationnel, les nombres

$$e^{\ell^{r+1}} \ , \ e^{\ell^{2r+1}}$$

ne sont pas tous deux algébriques. Pour $x = 1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}$, $\ell = \ell_1$, le corollaire 7.4.3 montre que, si ℓ_1 , ℓ_2 sont deux logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, alors l'une au moins des deux propriétés suivantes est vraie :

(i) ℓ_1 , ℓ_2 sont algébriquement indépendants

(ii) le nombre $\exp(\frac{\ell_1^2}{\ell_2})$ est transcendant.

On peut obtenir un résultat du même genre sur e et π (avec $u_1 = v_1 = i\pi$, $u_2 = v_2 = 1$) : si le nombre e^{π^2} est algébrique, alors les deux nombres e et π sont algébriquement indépendants. Il revient au même de dire que le nombre

$$e^{\pi^2} + i\,P(e,\pi)$$

est transcendant, si $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ est un polynôme non constant.

Enfin le théorème 7.4.1 contient la transcendance des nombres

$$e^{\pi^r} + i\, e^{\pi^{2-r}} \quad , \quad (r \in \mathbb{Q})$$

et

$$\mathrm{Log}\ \pi + i \exp\left(\frac{\pi^2}{\mathrm{Log}\ \pi}\right) ;$$

(choisir $u_1 = \pi^r$, $u_2 = i\pi$, $v_1 = 1$, $v_2 = i\pi^{1-r}$, puis $u_1 = i\pi$, $u_2 = \mathrm{Log}\ \pi$, $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{i\pi}{\mathrm{Log}\ \pi}$).

Il y a deux méthodes pour démontrer 7.4.1. La première, qui est exposée en détail dans [Brownawell, 1971 d] et [Waldschmidt, 1971 b], consiste à étudier les valeurs des fonctions

$$z \ , \ e^{u_1 z} \ , \ e^{u_2 z}$$

aux points

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \ , \ (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ .$$

La deuxième méthode, suggérée dans [Waldschmidt, 1972a §7], utilise les fonctions

$$z \ , \ e^{v_1 z} \ , \ e^{v_2 z} \ ,$$

et les points $k_1 u_1 + k_2 u_2$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous allons préciser ici cette deuxième méthode. Considérons les deux corps

$$L = \mathbb{Q}(e^{u_1 v_1} \ , \ e^{u_2 v_1})$$

et

$$K = L(u_1 \ , \ u_2 \ , \ v_1 \ , \ v_2 \ , \ e^{u_1 v_2} \ , \ e^{u_2 v_2}) \ .$$

Le théorème de Hermite Lindemann montre que le degré de transcendance de K sur $\mathbb{Q}$ est supérieur ou égal à 1. Supposons que ce degré de transcendance soit égal à 1. Il existe $w \in K$, transcendant sur $\mathbb{Q}$, et $w_1 \in K$, entier sur $\mathbb{Z}[w]$, tel que $K = \mathbb{Q}(w,w_1)$; donc $K = L(w,w_1)$. Soient $\delta_1 = [K : \mathbb{Q}(w)]$ le degré de w_1 sur $\mathbb{Z}[w]$ et $\delta_2 = [L : \mathbb{Q}]$. Soit N un entier suffisamment grand. On définit des fonctions de N par :

$$R_o = N^2(\mathrm{Log}\, N)^{-\frac{3}{4}} \quad ;$$

$$R_1 = N\,(\mathrm{Log}\, N)^{\frac{1}{2}} \quad ;$$

$$R_2 = 2\,\delta_2\, N(\mathrm{Log}\, N)^{-\frac{3}{4}} \quad ;$$

$$S = N^2(\mathrm{Log}\, N)^{-1} .$$

Remarquons que $R_oR_1R_2 = 2\delta_2\, N^2 S$.

Le lemme 1.3.1 de Siegel permet de montrer qu'il existe un polynôme non nul

$$P_N = \sum_{\lambda_o=o}^{R_o} \sum_{\lambda_1=o}^{R_1} \sum_{\lambda_2=o}^{R_2} p_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) X_o^{\lambda_o} X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2} ,$$

à coefficients $p_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2)$ dans $\mathbb{Z}[w,w_1]$:

$$p_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{h=o}^{\delta_1-1} \sum_{k=o}^{R_3} q_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2,h,k) w^k w_1^h ,$$

avec $q_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2,h,k) \in \mathbb{Z}$, et

$$R_3 \ll N^2(\mathrm{Log}\, N)^{-\frac{3}{4}} ,$$

$$\mathrm{Log}\, \max|q_N(\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2,h,k)| \ll N^2(\mathrm{Log}\, N)^{\frac{1}{2}} ,$$

tel que la fonction

$$F_N(z) = P_N(z\ , e^{v_1 z}\ , e^{v_2 z})$$

vérifie

$$\frac{d^s}{dz^s} F_N(\ell_1 u_1 + \ell_2 u_2) = 0 \ , \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \ell_1 = 1,\dots,N \ , \\ \ell_2 = 1,\dots,N \ , \\ s = 0,\dots,S-1 \ . \end{cases}$$

Grâce au théorème 6.1.1, on sait qu'il existe des entiers j_1, j_2, s_o , tels que

$$1 \leqslant j_1 \leqslant 3N \ , \ 1 \leqslant j_2 \leqslant 3\,\delta_2 N \ , \ 0 \leqslant s_o \leqslant \left[\frac{S}{2}\right] ,$$

et

$$\xi_N = \frac{d^{s_o}}{dz^{s_o}} F_N(j_1 u_1 + j_2 u_2) \neq 0 \ .$$

Le principe du maximum, sur le disque $|z| \leqslant R = N^2$, pour la fonction

$$\frac{d^{s_o}}{dz^{s_o}} F_N \cdot Q_N^{-1} ,$$

où

$$Q_N = \prod_{\ell_1=1}^{N} \prod_{\ell_2=1}^{N} (X - \ell_1 u_1 - \ell_2 u_2)^{\left[\frac{S}{2}\right]-1} ,$$

permet de majorer ξ_N :

$$\mathrm{Log}|\xi_N| << - N^4 \ .$$

(On utilise les majorations

$$\mathrm{Log}\left|\frac{d^{s_o}}{dz^{s_o}} F_N\right|_R << N^3(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathrm{Log}\ \frac{|Q_N(w_o)|}{|Q_N|_R} << - N^2 S\ \mathrm{Log}\ N << - N^4 \quad).$$

On majore la taille de ξ_N :

$$t(\xi_N) << N^2(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Ces majorations ne sont pas assez fines pour utiliser 5.1.4. Soit π_N la norme (de K sur $\mathbb{Q}(w)$) de $\partial_N \xi_N$, où ∂_N est un dénominateur de ξ_N (par rapport au système générateur (w, w_1) de K sur $\mathbb{Z}$). Alors π_N est un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[w]$, vérifiant

$$t(\pi_N) \ll N^2(\mathrm{Log}\ N)^{\frac{1}{2}}$$

(grâce à 4.2.20) et

$$\deg_w \pi_N \ll N^2(\mathrm{Log}\ N)^{-\frac{3}{4}} ,$$

avec

$$\mathrm{Log}|\pi_N| \ll - N^4 .$$

Le théorème 5.1.1 montre que le nombre w est algébrique, ce qui contredit le résultat de Hermite Lindemann. Le théorème 7.4.1 est donc démontré.

§7.5 Références, conjectures

Le plus ancien résultat d'indépendance algébrique concernant les valeurs de la fonction exponentielle est le théorème de Lindemann Weierstrass (1885).

Théorème 7.5.1. *Soient* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *des nombres algébriques* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors les nombres*

$$e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}$$

sont algébriquement indépendants.

Les démonstrations de ce résultat se font par une extension des méthodes de Hermite et Lindemann (cf. §3.4). Comme ces méthodes sont d'un type différent de celles que nous avons présentées, nous ne les développerons pas ici.

Pendant plus d'un demi-siècle, il n'y eut plus de nouveaux énoncés d'indépendance algébrique - à l'exception de quelques résultats liés à la classification de Mahler (ainsi, soit ξ un U nombre - par exemple un nombre de Liouville -, et soient

$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres algébriques, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors les nombres

$$\xi\ ,\ e^{\alpha_1}\ ,\ldots,\ e^{\alpha_n}$$

sont algébriquement indépendants [Mahler, 1931]).

Les premiers résultats d'indépendance algébrique obtenus par les méthodes que nous avons étudiées datent de 1949 [Gel'fond, T, chap.III §4] ; Gel'fond démontrait alors deux théorèmes, correspondant aux théorèmes 7.2.1 (dans le cas $m = n = 3$) et 7.3.1 ; mais ces énoncés comportaient des hypothèses supplémentaires, dues au fait que les seules majorations connues du nombre $n(f,R)$ de zéros d'un polynôme exponentiel

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\ell} P_h(z)\, e^{w_h z}$$

dépendaient alors du nombre

$$\Delta = \min_{i\neq j} |w_i - w_j|$$

(cf. §6.5). Puis, en 1967 et 1968, Smelev obtenait le théorème 7.2.1 (dans le cas $m = 2$, $n = 4$), avec toujours une hypothèse supplémentaire.

Il était facile de voir qu'une majoration convenable de $n(f,R)$, indépendante de Δ , permettrait de supprimer ces hypothèses superflues. Les théorèmes 7.2.1 et 7.3.1 sont exposés dans [Tijdeman, 1970b] et [Waldschmidt, 1971a] (pour le théorème 7.3.1, voir aussi [Smelev, 1968]), tandis que le théorème 7.1.1 se trouve dans [Brownawell, 1971b] et [Waldschmidt, 1971a] ; il a aussi été obtenu, indépendamment, par R. Wallisser (non publié). Les théorèmes 7.2.9 et 7.3.5 sont énoncés sans démonstration dans [Brownawell, 1971a].

Pour trouver les résultats du §7.4, il était indispensable de montrer que l'on pouvait dissocier les deux fonctions γ_n et δ_n du critère 5.1.1 de transcendance (cf. §5.5). Le théorème 7.4.1 a été démontré, indépendamment, dans [Brownawell, 1971 d] et [Waldschmidt, 1971 b]. On trouvera dans ces articles de nombreux autres corollaires.

Aucun de ces résultats ne semble le meilleur possible. La conjecture la plus générale concernant les propriétés de transcendance de la fonction exponentielle a été énoncée par S. Schanuel (cf. [Lang, T, p.30]).

Conjecture 7.5.2. *Si* $x_1,\dots,x_n$ *sont des nombres complexes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants, alors le degré de transcendance sur* $\mathbb{Q}$ *du corps*

$$\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n , e^{x_1},\dots,e^{x_n})$$

est supérieur ou égal à n .

Cette conjecture contient toutes les propriétés connues sur la nature arithmétique des valeurs de la fonction exponentielle (mises à part, évidemment, les propriétés liées aux approximations diophantiennes) ; elle est également réputée contenir toutes les conjectures raisonnables que l'on peut énoncer sur ces valeurs.

Voici quelques conséquences de la conjecture de Schanuel. Elle contient l'indépendance algébrique de e et π , ainsi que l'indépendance algébrique de logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques. Plus généralement, elle contient la conjecture suivante de Gel'fond.

Conjecture 7.5.3. *Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *des nombres algébriques* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants, soient* $\ell_1,\dots,\ell_m$ *des logarithmes* $\mathbb{Q}$-*linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres*

$$e^{\alpha_1},\dots,e^{\alpha_n}\ ,\ \ell_1,\dots,\ell_m$$

<u>sont algébriquement indépendants.</u>

D'autre part, 7.5.2 permettrait de résoudre le problème de l'indépendance algébrique de nombres de la forme α^β [Schneider, T, Problème 7] :

<u>Conjecture</u> 7.5.4. <u>Si</u> $\ell \neq 0$ <u>est un logarithme d'un nombre algébrique</u> α , <u>et si</u> $1\ ,\ \beta_1,\dots,\beta_n$ <u>sont des nombres algébriques</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants, alors les nombres</u>

$$\alpha^{\beta_1} = e^{\ell\beta_1},\dots,\alpha^{\beta_n} = e^{\ell\beta_n}$$

<u>sont algébriquement indépendants.</u>

On déduit de 7.5.4 une conjecture de Gel'fond : si $\ell \neq 0$ est un logarithme d'un nombre algébrique α , et si β est un nombre algébrique de degré

$$[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = d \geqslant 2\ ,$$

alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(\alpha^\beta,\dots,\alpha^{\beta^{d-1}})$$

est égal à $d-1$. Le théorème de Gel'fond Schneider résout le cas $d = 2$, et Gel'fond a résolu le cas $d = 3$ (cf. 7.2.3).

Enfin, un cas particulier de la conjecture de Schanuel est la

<u>Conjecture</u> 7.5.5. <u>Soient</u> $u_1,\dots,u_n$ <u>des nombres complexes</u> $\mathbb{Q}$ - <u>linéairement indépendants</u> ; <u>soit</u> v <u>un nombre complexe transcendant. Alors le degré de transcendance sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>du corps</u>

$$\mathbb{Q}(e^{u_1},\dots,e^{u_n}\ ,\ e^{vu_1},\dots,e^{vu_n})$$

est supérieur ou égal à $n-1$.

Cet énoncé permettrait de résoudre une conjecture de Lang et Schneider (cf. §2.3).

Comme toutes ces conjectures semblent inaccessibles à l'heure actuelle, en voici une dernière qui pourrait être plus facile.

Conjecture 7.5.6. *Soit* $\ell \neq 0$ *un logarithme d'un nombre algébrique, et* β *un nombre irrationnel quadratique. Les deux nombres*

$$\ell \ , \ e^{\ell\beta}$$

sont algébriquement indépendants (exemple : π et e^{π}).

EXERCICES

Exercice 7.1.a. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$; soit d la dimension du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les valeurs propres de M. Soient $t_1,\ldots,t_m$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, de degré de transcendance $\leqslant 1$ sur $\mathbb{Q}$.

On suppose

$$\exp(Mt_j) \in GL_n(K) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m .$$

Montrer que l'on a

$$md < 2(m+d) .$$

Exercice 7.1.b. Soient $\tau > 1$ et τ' deux nombres réels ; soient m et n deux nombres entiers, vérifiant l'une au moins des deux propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) $\tau' < 1$ et $mn \geqslant \tau(m+n)$

(ii) $\tau' \geqslant 1$ et $mn > \tau(m+n)$.

Montrer que le corps K_1 du théorème 7.1.6 n'a pas un type de transcendance inférieur ou égal à (τ,τ') sur $\mathbb{Q}$ (avec la notation de l'exercice 5.4.d).

Indications. On utilisera soit le théorème 7.1.6, soit l'exercice 4.5.b.

Exercice 7.1.c. On suppose que le corps K_1 du théorème 7.1.6 est une extension de degré de transcendance 1 d'un corps L, où L est une extension de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance $\leqslant \tau$.

Montrer que

$$mn < 2\tau(m+n).$$

(Utiliser l'exercice 5.4.c).

[Brownawell, 1971a, th.5].

Exercice 7.1.d. Soient m et n deux nombres entiers positifs, et t, ℓ deux nombres complexes, $\ell \neq 0$ et $t \notin \overline{\mathbb{Q}}$. On suppose qu'il existe un sous-corps L de

$$K = \mathbb{Q}(e^{\ell}, e^{\ell t}, \ldots, e^{\ell t^{m+n-2}}),$$

qui a un type de transcendance inférieur ou égal à τ sur $\mathbb{Q}$.

Montrer que, si $mn \geqslant 2\tau(m+n)$, alors

$$\dim_L K \geqslant 2 .$$

En déduire que trois des 23 nombres

$$e, e^{t}, \ldots, e^{t^{22}}$$

sont algébriquement indépendants.

(Utiliser l'exercice 7.1.c, et le fait que le corps $\mathbb{Q}(e)$ a un type de transcendance $\leqslant 3$ sur $\mathbb{Q}$).

Exercice 7.1.e. On suppose que le corps K_1 du théorème 7.1.6 est une extension de degré de transcendance $\leqslant 1$ d'un corps L, et que L a un type de transcendance $\leqslant (\tau,\tau')$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que, si $\tau' < 1$, alors $mn < 2\tau(m+n)$.

(Utiliser l'exercice 5.4.d).

Exercice 7.2.a. Soient P_1, P_2 deux polynômes de $\mathbb{Z}[X_1,X_2,X_3]$, non nuls et premiers entre eux. Soit α un nombre algébrique de degré 3 (irrationnel cubique). Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} P_1(e^{x}, e^{\alpha x}, e^{\alpha x^2}) = 0 \\ P_2(e^{x}, e^{\alpha x}, e^{\alpha x^2}) = 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution $x \neq 0$ dans $\mathbb{C}$.

(Comparer avec [Gel'fond, T, chap.III §4 cor.3 du th.I]).

Exercice 7.2.b

1) Sous les hypothèses de l'exercice 7.1.a, on suppose que les nombres t_j appartiennent à K. Montrer que

$$md < 2(m+d-1) .$$

2) Sous les hypothèses de l'exercice 7.1.a, on suppose que la matrice M appartient à $M_n(K)$. Montrer que

$$md < 2m+d .$$

Exercice 7.2.c. Soient $\tau > 1$ et τ' deux nombres réels. On suppose que le corps K_2 du théorème 7.2.8 a un type de transcendance $\leqslant (\tau, \tau')$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que, si

$$\tau' < 1 - \frac{\tau}{m+1} ,$$

alors

$$mn < \tau m + (\tau - 1)n .$$

En déduire que, quel que soit τ', on a

$$mn \leqslant \tau m + (\tau - 1)n .$$

(On pourra utiliser, au choix, le théorème 7.2.8 ou l'exercice 4.5.b).

Exercice 7.2.d. On suppose que K_2 est une extension de degré de transcendance $\leqslant 1$ d'un corps L , où L a un type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$.

Montrer que

$$mn < 2\tau m + (2\tau - 1)n .$$

[Brownawell, 1971a, th.3].

Exercice 7.2.e. Soient $\ell_1,\dots,\ell_h$ $(h \geqslant 1)$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques. On note $\alpha_j = e^{\ell_j}$. Soit n le plus petit entier $\geqslant 8+\frac{7}{h}$, et soit β un nombre algébrique de degré $\geqslant n$.

Montrer que trois des nombres

$$e^{\ell_j\beta^k} = \alpha_j^{\beta^k} \qquad (j = 1,\dots,h\ ;\ k = 1,\dots,n)$$

sont algébriquement indépendants.

(Indications. On utilisera l'exercice 7.2.d, avec le fait que le corps $\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\alpha^\beta)$ a un type de transcendance $\leqslant 4$ sur $\mathbb{Q}$ (cf. §4.6). On utilisera le théorème 8.1.1 de Baker pour montrer que les nombres $\ell_1,\dots,\ell_h$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}(\beta)$). En déduire les résultats suivants

1. Si $\alpha \neq 0,1$ est algébrique, et si β est algébrique de degré 15, alors trois des 14 nombres

$$\alpha^\beta\ ,\ \alpha^{\beta^2},\dots,\alpha^{\beta^{14}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

2. Si α_1, α_2 sont deux nombres algébriques possédant des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si β est un nombre algébrique de degré 12, alors trois des 22 nombres

$$\alpha_1^{\beta^k}\ ,\ \alpha_2^{\beta^k}\ ,\ (k = 1,2,\dots,11)$$

sont algébriquement indépendants.

3. Si $\operatorname{Log}\alpha_1$, $\operatorname{Log}\alpha_2$, $\operatorname{Log}\alpha_3$ sont trois logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, et si β est un nombre algébrique de degré 11, trois des 30 nombres

$$\alpha_1^{\beta^k} \ , \ \alpha_2^{\beta^k} \ , \ \alpha_3^{\beta^k} \quad , \quad (k = 1,\ldots,10)$$

sont algébriquement indépendants.

4. Si α_1 , α_2 , α_3 , α_4 sont quatre nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si β est un nombre algébrique de degré 10, alors trois des 36 nombres

$$\alpha_1^{\beta^k} \ , \ \alpha_2^{\beta^k} \ , \ \alpha_3^{\beta^k} \ , \ \alpha_4^{\beta^k} \quad , \quad (k = 1,\ldots,9)$$

sont algébriquement indépendants.

5. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_8$ sont huit nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et si β est un nombre algébrique de degré 9, alors 3 des 64 nombres

$$\alpha_i^{\beta^k} \quad , \quad (k = 1,\ldots,8 \ ; \ i = 1,\ldots,8)$$

sont algébriquement indépendants.

Comparer ces résultats avec ceux de [Smelev, 1971].

Exercice 7.2.f. On suppose que le corps K_2 est une extension de degré de transcendance 1 d'un corps L , et que L a un type de transcendance $\leqslant (\tau,\tau')$ sur $\mathbb{Q}$, avec

$$\tau' < 1 - \frac{2\tau}{m+1} .$$

Montrer que

$$mn < 2\tau m + (2\tau-1)n .$$

(Utiliser l'exercice 5.4.d et le théorème 7.2.8).

Exercice 7.3.a. On suppose que le corps K_3 du théorème 7.3.4 a un type de transcendance $\leqslant (\tau, \tau')$ sur $\mathbb{Q}$ $(\tau > 1 , \tau' \in \mathbb{R})$. Montrer que, si $\tau' < 0$, on a

$$mn < (\tau-1)(m+n).$$

En déduire que, si $\tau' \geqslant 0$, alors

$$mn \leqslant (\tau-1)(m+n).$$

Exercice 7.3.b. On suppose qu'il existe un sous-corps L de K_3 , de type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que, si

$$mn > (2\tau-1)(m+n) ,$$

alors le degré de transcendance de K_3 sur L est supérieur ou égal à 2.

[Brownawell, 1971a, th.4].

Exercice 7.3.c. Soit t un nombre complexe transcendant. On suppose que le corps $\mathbb{Q}(t)$ a un type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$. $(\tau \geqslant 2)$. Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Montrer que, si $mn > (2\tau-1)(m+n)$, alors trois des nombres

$$a , t , e^{a} , e^{at},\ldots,e^{at^{m+n-2}}$$

sont algébriquement indépendants.

(Appliquer l'exercice 7.3.b)

Quelles sont les valeurs intéressantes de m et n quand t est égal successivement à

$$\pi , e , \operatorname{Log} 2 , e^{\pi} , 2^{\sqrt{2}} , \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 3} ?$$

(Utiliser les résultats cités au § 4.6).

En déduire que 3 des nombres

$$e , e^{e} , e^{e^{2}},\ldots,e^{e^{19}}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 7.3.d. Soit β un nombre algébrique de degré ≥ 11. Soit $\ell \neq 0$ un logarithme d'un nombre algébrique α. Montrer que 3 des 20 nombres

$$\ell \, , \; e^{\beta\ell} = \alpha^{\beta}, \ldots, e^{\beta^{19}\ell} = \alpha^{\beta^{19}}$$

sont algébriquement indépendants.

(Utiliser l'exercice 7.3.b avec le fait que le corps $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta})$ a un type de transcendance ≤ 4 sur $\mathbb{Q}$). En déduire que, si $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = 11$, alors

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\ell \, , \alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{10}}) \geq 3 \; .$$

Exercice 7.3.e. On suppose qu'il existe un sous-corps L de K_3, de type de transcendance $\leq (\tau,\tau')$ sur $\mathbb{Q}$, tel que $\dim_L K_3 \leq 1$. Montrer que, si $\tau' < 0$, alors

$$mn < (2\tau-1)(m+n) \; .$$

En déduire le résultat de l'exercice 7.3.b.

(Utiliser l'exercice 5.4.d et le théorème 7.3.4).

Exercice 7.4.a. Soit $\beta \neq 0$ un nombre algébrique ; soit $\ell \neq 0$ un logarithme d'un nombre algébrique ; soit $r \neq 0$ un nombre rationnel. Montrer que l'un des deux nombres

$$e^{\beta \ell^{r+1}} , \quad e^{\beta \ell^{2r+1}}$$

est transcendant.

En déduire que, si a et b sont deux nombres algébriques, $b \neq 0$, alors les trois nombres

$$e^{be^{a}} , \quad e^{be^{2a}} , \quad e^{be^{3a}}$$

ne sont pas tous algébriques.

Exercice 7.4.b. Soient x et y deux nombres complexes, $x \neq 0$ et $y \notin \mathbb{Q}$. On suppose e^{xy} et e^{xy^2} algébriques. Montrer que deux des trois nombres

$$x , \quad y , \quad e^{x}$$

sont algébriquement indépendants.

En déduire que, si $\alpha \neq 0$ est algébrique, alors l'un au moins des deux nombres

$$\exp(\alpha e^{\alpha}) , \quad \exp(\alpha e^{2\alpha})$$

est transcendant.

Exercice 7.4.c. Soient α et β deux nombres algébriques non nuls ; montrer que les nombres

$$\exp(\beta e^{\alpha}) \ , \ \exp(\frac{\beta^2}{\alpha} e^{2\alpha})$$

ne sont pas tous deux algébriques.

En déduire que, si $\alpha \neq 1$, l'un des deux nombres

$$\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ \alpha^{\beta} \ , \ \exp \frac{(\mathrm{Log}\ \alpha)^2}{\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ \alpha^{\beta}}$$

est transcendant.

Exercice 7.4.d. Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 des logarithmes de nombres algébriques ; on suppose que ℓ_1 et ℓ_3 , ainsi que ℓ_2 et ℓ_3 , sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Montrer que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\ell_1 , \ell_2 , \ell_3 , \exp(\frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_3})) \geqslant 2 \ .$$

En déduire, pour $r \neq 1$ rationnel, la transcendance de l'un au moins des deux nombres

$$e^{i\pi^{r}} \ , \ e^{i\pi^{2-r}} \ .$$

Exercice 7.4.e. Soient α et β deux nombres algébriques non nuls ; soit $\ell \neq 0$ un logarithme de β. On suppose que le nombre

$$\exp\left(\frac{\ell^2}{\alpha}\right)$$

est algébrique. Montrer que les deux nombres

$$\ell \ , \ e^{\alpha}$$

sont algébriquement indépendants.

Exercice 7.5.a. Donner un exemple de nombres algébriques $\beta_1,\ldots,\beta_n$, irrationnels et $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et d'un logarithme $\ell \neq 0$ d'un nombre algébrique, tels que les nombres

$$e^{\ell\beta_1},\ldots,e^{\ell\beta_n}$$

soient algébriquement dépendants.

(Comparer avec le septième problème de [Schneider, T] et la conjecture 7.5.4).

Exercice 7.5.b. Démontrer que la conjecture 7.5.5 est une conséquence de celle de Schanuel.

(Indications. Soit $n+\ell$ $(0 \leqslant \ell \leqslant n)$ la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les nombres

$$u_1,\ldots,u_n\ ,\ vu_1,\ldots,vu_n\ ;$$

montrer que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(v\ ,\ u_1,\ldots,u_n) \leqslant \ell+1)\ .$$

L'hypothèse v transcendant est-elle nécessaire pour que la conjecture 7.5.5 soit raisonnable - c'est-à-dire conséquence de 7.5.2 ? (considérez les nombres

$$v = \sqrt{2}\ ,\ u_1 = \mathrm{Log}\ 2\ ,\ u_2 = \sqrt{2}\ \mathrm{Log}\ 2\ ,\ u_3 = \mathrm{Log}\ 3\ ,\ u_4 = \sqrt{2}\ \mathrm{Log}\ 3\ ).$$

En déduire que la conjecture 1 de [Waldschmidt, 1971 a] est fausse. Donner un contre exemple semblable à une conjecture de [Ramachandra, 1967, p. 87-88].

Exercice 7.5.c. Déduire de la conjecture 7.5.2 de Schanuel

1) l'indépendance algébrique des 16 nombres

e , π , e^π , Log π , e^e , π^e , π^π , Log 2 , 2^π , 2^e , 2^i , e^i , π^i , Log 3 , $(\mathrm{Log}\ 2)^{\mathrm{Log}\ 3}$, $2^{\sqrt{2}}$.

2) la transcendance de l'un des deux nombres

$$x , x^e ,$$

pour $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

3) la transcendance de l'un au moins des nombres

$$x^x , x^{x^2} ,$$

pour $x \in \mathbb{C}$, $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7.5.d. On définit par récurrence une suite croissante (K_n) de sous-corps de $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$K_o = \overline{\mathbb{Q}} \ ; \ K_n = \overline{K_{n-1}(\exp(K_{n-1}))} \ ;$$

autrement dit K_n est la clôture algébrique dans $\mathbb{C}$ du corps obtenu en adjoignant à K_{n-1} les nombres

$$\exp t \ , \ t \in K_{n-1} \ .$$

Déduire de 7.5.2 la conjecture suivante :

$$\pi \notin \bigcup_{n \geq o} K_n \ .$$

[Lang, 1971, p. 639].