CHAPITRE 8

La méthode de Baker

§8.1 Indépendance linéaire de logarithmes

Nous avons vu (2.1.2) que le théorème de Gel'fond Schneider pouvait être formulé de la manière suivante :

si ℓ_1 , ℓ_2 sont deux logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de deux nombres algébriques, alors ℓ_1 , ℓ_2 sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

D'autre part le théorème (3.1.1) de Hermite Lindemann peut s'énoncer :

si ℓ est un logarithme non nul d'un nombre algébrique, alors 1 , ℓ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

En 1966, Baker montra qu'il était possible de généraliser le théorème de Gel'fond Schneider au cas de plusieurs logarithmes $\ell_1,\ldots,\ell_n$ [Baker, 1966], résolvant ainsi une conjecture dont Gel'fond avait montré l'importance [Gel'fond, T, p. 126 et 177]. Puis, en 1967, Baker généralisait son résultat [Baker, 1967], en démontrant le

Théorème 8.1.1. *Soient $\ell_1,\ldots,\ell_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres*

$$1 , \ell_1,\ldots,\ell_n$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

On déduit évidemment de ce théorème celui de Gel'fond Schneider et celui de Hermite Lindemann. D'autre part, soit L l'ensemble des logarithmes de nombres algébriques :

$$L = \{\ell \in \mathbb{C} \; ; \; e^{\ell} \in \overline{\mathbb{Q}}\} .$$

Alors L est un sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, et le théorème de Baker contient les deux corollaires suivants [Serre, 1969] :

<u>Corollaire</u> 8.1.2. <u>Tout élément non nul de</u>

$$\overline{\mathbb{Q}}.L = \{\alpha_1\ell_1+\dots+\alpha_m\ell_m \; ; \; \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}} \; , \; \ell_i \in L \; , \; n \geqslant 1\}$$

<u>est transcendant.</u>

<u>Corollaire</u> 8.1.3. <u>L'injection de</u> L <u>dans</u> $\mathbb{C}$ <u>se prolonge en une application</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéaire et injective de</u> $\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} L$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$.

On pourra vérifier, en utilisant des arguments simples d'algèbre linéaire, que le théorème de Baker est équivalent à l'ensemble des deux corollaire 8.1.2 et 8.1.3, et que le corollaire 8.1.3 est équivalent au suivant :

<u>Corollaire</u> 8.1.4. <u>Soient</u> $\ell_1,\dots,\ell_m$ <u>des logarithmes non nuls de nombres algébriques</u> $\alpha_1,\dots,\alpha_m$, <u>et</u> $\beta_1,\dots,\beta_m$ <u>des nombres algébriques. On suppose</u>

$$1 \, , \, \beta_1,\dots,\beta_m$$

$\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants. Alors le nombre</u>

$$e^{\beta_1\ell_1+\dots+\beta_m\ell_m} = \alpha_1^{\beta_1}\dots\alpha_m^{\beta_m}$$

<u>est transcendant.</u>

Voici deux derniers corollaires concernant les produits de nombres α^{β} .

<u>Corollaire</u> 8.1.5. <u>Soient</u> $\ell_1,\dots,\ell_m$ <u>des logarithmes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants de nombres algébriques, et</u> $\beta_1,\dots,\beta_m$ <u>des nombres algébriques. On suppose que l'un au moins des nombres</u> $\beta_1,\dots,\beta_m$ <u>est irrationnel. Alors le nombre</u>

$$\exp(\beta_1 \ell_1 + \ldots + \beta_m \ell_m) = \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_m^{\beta_m}$$

est transcendant.

Corollaire 8.1.6. Soient $\ell_1, \ldots, \ell_m$ des logarithmes de nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, et $\beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres algébriques, $\beta_o \neq 0$. Alors le nombre

$$\exp(\beta_o + \beta_1 \ell_1 + \ldots + \beta_m \ell_m) = e^{\beta_o} . \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_m^{\beta_m}$$

est transcendant.

On peut résumer les trois derniers corollaires en disant que, cas triviaux exclus, le nombre

$$e^{\beta_o} \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_m^{\beta_m}$$

est transcendant (pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_m$ algébriques).

§8.2 Principe de la démonstration

La démonstration va s'effectuer par l'absurde. On suppose que $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et que les nombres

$$1, \ell_1, \ldots, \ell_n$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement dépendants ; on souhaite arriver à une contradiction. Ecrivons une relation non triviale de dépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres $1, \ell_1, \ldots, \ell_n$:

$$\beta_o + \beta_1 \ell_1 + \ldots + \beta_n \ell_n = 0, \quad \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad (\beta_o, \ldots, \beta_n) \neq (0, \ldots, 0).$$

L'un au moins des nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ est non nul ; par exemple $\beta_n \neq 0$. Quitte à diviser tous les β_j par $-\beta_n$, on peut supposer $\beta_n = -1$, et

(8.2.1) $$\ell_n = \beta_o + \beta_1 \ell_1 + \ldots + \beta_{n-1} \ell_{n-1} \; ; \; \beta_i \in \overline{\mathbb{Q}} \; , \; (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

L'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des nombres $\ell_1, \ldots, \ell_n$ montre que les fonctions

$$z \, , \, e^{\ell_1 z}, \ldots, e^{\ell_n z}$$

sont algébriquement indépendantes (lemme 1.4.1). Ces fonctions prennent des valeurs dans le corps

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

pour tout $z \in \mathbb{Z}$. Le <u>premier pas</u> consistera à construire un polynôme non nul

$$P \in \mathbb{Z}[X_o \, , X_1, \ldots, X_n]$$

(dépendant d'un paramètre N suffisamment grand), tel que la fonction

(8.2.2) $$F(z) = P(z \, , e^{\ell_1 z}, \ldots, e^{\ell_n z})$$

possède de nombreux zéros. Pour utiliser (8.2.1), il faut faire intervenir les dérivées de F, c'est-à-dire imposer à ces zéros un ordre de multiplicité élevé (comme dans la méthode de Gel'fond). Mais ces dérivées prennent, pour $z \in \mathbb{Z}$, des valeurs dans le corps

$$E = \overline{\mathbb{Q}}(\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}) \; ,$$

qui n'est pas une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ (d'ailleurs, on ne connait, pour son degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$, que l'encadrement

$$1 \leqslant \dim_{\mathbb{Q}} E \leqslant n-1 \; ;$$

on ne connait donc pas de type de transcendance de E sur $\mathbb{Q}$).

Pour résoudre, dans $\mathbb{Z}$, un système d'équations

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_{i,j}\, x_i = 0 \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

à coefficients $a_{i,j}$ dans $\mathbb{Q}[\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}]$, on exprime chacun des nombres

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_{i,j}\, x_i \qquad , \quad (1 \leqslant j \leqslant m) ,$$

comme polynômes en $\ell_1,\ldots,\ell_n$; les coefficients de ces polynômes sont des formes linéaires à coefficients algébriques en $x_1,\ldots,x_\nu$; on peut alors utiliser le lemme 1.3.1 de Siegel pour annuler chacun de ces coefficients, ce qui résoudra le système. On peut remarquer que, dans les méthodes précédentes, le nombre m d'équations était toujours du même ordre de grandeur que le nombre ν d'inconnues, alors qu'ici il devra être beaucoup plus petit.

Il faut donc exprimer les nombres

$$\frac{d^s}{dz^s} F(x) \quad , \quad s \text{ entier} \geqslant 0 \ , \ x \in \mathbb{Z} \ ,$$

comme polynômes en $\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}$. Pour cela, on écrit explicitement $P \in \mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_n]$:

$$P = \sum_{\lambda_0 \geqslant 0} \cdots \sum_{\lambda_n \geqslant 0} p(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) X_0^{\lambda_0} \cdots X_n^{\lambda_n} \ ;$$

la fonction F , définie par (8.2.2), s'écrit

$$F(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\ z^{\lambda_0} \exp(\lambda_1 \ell_1 + \ldots + \lambda_n \ell_n) z \ ,$$

où $(\lambda) = (\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$. Grâce à la relation (8.2.1), on peut également écrire F sous la forme

$$F(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\ z^{\lambda_0} \exp(\lambda_n \beta_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \beta_i) \ell_i) z \ . \tag{8.2.3}$$

C'est sous cette forme que l'on calcule les dérivées de F :

$$\frac{d^s}{dz^s} F = \sum_{\sigma_0 + \ldots + \sigma_{n-1} = s} \frac{s\,!}{\sigma_0 ! \ldots \sigma_{n-1} !}\ \ell_1^{\sigma_1} \cdots \ell_{n-1}^{\sigma_{n-1}} F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}} \ , \tag{8.2.4}$$

où, pour $(\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, on définit

$$(8.2.5)\quad F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \cdot \frac{d^{\sigma_o}}{dz^{\sigma_o}}\left(z^{\lambda_o} e^{\lambda_n \beta_o z}\right) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i+\lambda_n\beta_i)^{\sigma_i} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i+\lambda_n\beta_i)\ell_i z\right) .$$

On remarque que les fonctions $F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}$ prennent des valeurs dans le corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n \ , \ \beta_o,\ldots,\beta_{n-1}) ,$$

pour tout $z \in \mathbb{Z}$; d'autre part, grâce à (8.2.4), il suffit d'annuler tous les nombres

$$F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(z) \ , \ (\sigma_o+\ldots+\sigma_{n-1} = s) ,$$

pour en déduire

$$\frac{d^s}{dz^s} F(z) = 0 .$$

Ainsi, pour effectuer le premier pas, on résout un système

$$F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(z) = 0 ,$$

pour des valeurs convenables de z , $\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}$.

Nous avons déjà remarqué que le nombre de zéros connus de F , c'est-à-dire le nombre d'équations

$$\frac{d^s}{dz^s} F(z) = 0 ,$$

doit être beaucoup plus petit que le nombre de coefficients de F . A cause de ce fait, pour trouver une valeur non nulle de F (<u>deuxième pas</u>), on cherche un couple

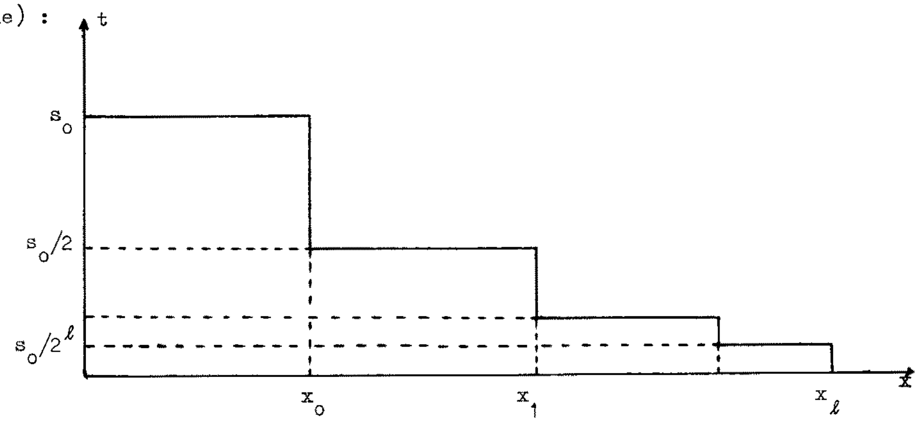
$$(t,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ , \ t \geqslant 0 ,$$

tel que

$$\frac{d^t}{dz^t} F(x) \neq 0 ,$$

et tel que (t,x) appartienne à une région $\mathcal{R}$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ayant la forme suivante (dans le cas classique de la méthode de Gel'fond par exemple, on choisit pour $\mathcal{R}$ un rectangle) :

(8.2.6)



Le théorème (6.1.1) nous permettra de trouver un tel couple (t,x), ce qui montre l'existence d'entiers $\tau_o,\ldots,\tau_{n-1}$, vérifiant

$$\tau_o+\ldots+\tau_{n-1} = t \ , \ \tau_j \geqslant 0 \ , \ \text{et} \ \ \xi = F_{\tau_o,\ldots,\tau_{n-1}}(x) \neq 0 \ .$$

Le nombre ξ est un élément non nul du corps de nombres

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n \ , \ \beta_o,\ldots,\beta_{n-1})$$

et il est facile de majorer la taille $s(\xi)$ de ξ (troisième pas). Il reste à majorer ξ (quatrième pas) pour obtenir une contradiction avec 1.2.3. L'originalité de la méthode de Baker se trouve essentiellement dans ce quatrième pas. Pour utiliser l'argument classique du principe du maximum, on est amené à dériver la fonction $F_{\tau_o,\ldots,\tau_{n-1}}$. On déduit facilement de (8.2.5) la relation fondamentale suivante :

$$(8.2.7)\qquad \frac{d^u}{dz^u} F_{\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}} = \sum_{\mu_0+\ldots+\mu_{n-1}=u} \frac{u!}{\mu_0!\ldots\mu_{n-1}!} \ell_1^{\mu_1}\ldots\ell_{n-1}^{\mu_{n-1}} \cdot$$
$$\cdot F_{\tau_0+\mu_0,\ldots,\tau_{n-1}+\mu_{n-1}} .$$

La forme de la région $\mathcal{R}$ (8.2.6) montre alors que la fonction $F_{\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}}$ possède de nombreux zéros, avec un ordre de multiplicité élevé, ce qui permet de conclure.

Une présentation légèrement différente de cette méthode est proposée dans [Waldschmidt, 1973b].

§8.3 Démonstration du théorème 8.1.1

Soient $\ell_1,\ldots,\ell_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, et $\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}$ des nombres algébriques. Soit

$$K = \mathbb{Q}(e^{\ell_1} = \alpha_1,\ldots,e^{\ell_n} = \alpha_n , \beta_0,\ldots,\beta_{n-1}) .$$

On note $\delta = [K:\mathbb{Q}]$ le degré de K sur $\mathbb{Q}$, et ∂ le p.p.c.m. des nombres entiers positifs

$$d(\alpha_1),\ldots,d(\alpha_n) , d(\beta_0),\ldots,d(\beta_{n-1}) .$$

On suppose

$$(8.2.1)\qquad \ell_n = \beta_0 + \beta_1\ell_1+\ldots+\beta_{n-1}\ell_{n-1} ,$$

et on souhaite arriver à une contradiction.

Soit N un entier positif suffisamment grand, divisible par 4^n . Si ℓ est un entier positif ou nul, on note

$$\Lambda_\ell = \{(x , \sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n+1} ; 1 \leqslant x \leqslant N^{n+\frac{\ell}{2}} ; \sigma_0+\ldots+\sigma_{n-1} \leqslant 2^{-\ell}N^{2n}\} .$$

On peut remarquer que la région $\mathcal{R}$ dessinée en 8.2.6 est une réunion d'ensembles

$$\{(x,t)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \; ; \text{ il existe } \sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1} \text{ , tels que } (x\,,\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1})\in\Lambda_\ell \text{ et } \sigma_o+\ldots+\sigma_{n-1}=t\} \,,$$

avec $s_o = N^{2n}$ et $x_\ell = N^{n+\frac{\ell}{2}}$.

Pour commencer, nous allons prouver l'existence d'entiers rationnels

$$p(\lambda) = p(\lambda_o,\ldots,\lambda_n) \;,\; (0 \leqslant \lambda_o < 2\delta N^{2n} \;;\; 0 \leqslant \lambda_j < N^{2n-1} \;,\; 1 \leqslant j \leqslant n) \;,$$

non tous nuls, vérifiant

(8.3.1) $$\operatorname{Log} \max_{(\lambda)} |p(\lambda)| << N^{3n-1} \operatorname{Log} N \,,$$

et tels que les fonctions (8.2.5)

$$F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \sum_{\mu=o}^{\sigma_o} \frac{\sigma_o!}{\mu!(\sigma_o-\mu)!} \cdot \frac{\lambda_o!}{(\lambda_o-\mu)!} \cdot (\beta_o\lambda_n)^{\sigma_o-\mu} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j+\lambda_n\beta_j)^{\sigma_j} \cdot z^{\lambda_o-\mu} \cdot e^{(\lambda_1\ell_1+\ldots+\lambda_n\ell_n)z} \,,$$

définies pour $(\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, vérifient

$$F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(x) = 0 \text{ pour } (x\,,\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \Lambda_o \,.$$

Pour cela, on cherche à résoudre le système

$$\partial^{N^{2n}+n.N^{3n-1}} \cdot F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(x) = 0 \text{ pour } (x\,,\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \Lambda_o \,.$$

C'est un système linéaire homogène en $p(\lambda)$, de moins de N^{2n^2+n} équations à $2\delta N^{2n^2+n}$ inconnues, à coefficients dans K entiers sur $\mathbb{Z}$. De plus on peut majorer la taille de ces coefficients :

$$t(\text{coefficients}) << N^{3n-1} + N^{2n} \operatorname{Log} N \,.$$

Le lemme 1.3.1 de Siegel permet de résoudre ce système dans $\mathbb{Z}$, tout en vérifiant

(8.3.1).

Considérons la fonction (8.2.2) ainsi construite :

$$F(z) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda)\, z^{\lambda_o} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i z\right) .$$

Elle est non nulle (grâce à l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de $\ell_1,\ldots,\ell_n$, et au lemme 1.4.1) ; d'après le théorème 6.1.1, le nombre de zéros de F , dans le disque

$$|z| \leqslant N^{2n^2+n} ,$$

est inférieur à

$$4\delta.N^{2n^2+n} + 5.N^{2n^2+n}.N^{2n-1}(|\ell_1|+\ldots+|\ell_n|) ,$$

ce qui est strictement inférieur à

$$2^{-4n^2}.N^{2n^2+3n} ,$$

dès que N est suffisamment grand. Par conséquent les nombres

$$\frac{d^s}{dz^s} F(x) \ , \ 1 \leqslant x \leqslant N^{2n^2+n} \ , \ 0 \leqslant s < 2^{-4n^2}.N^{2n} ,$$

ne sont pas tous nuls. Les relations (8.2.4) montrent qu'il existe un entier ℓ ,

$$1 \leqslant \ell \leqslant 4n^2 ,$$

tel que l'un des nombres

$$F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(x) \ , \ ((x,\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \Lambda_\ell) ,$$

soit non nul. <u>On choisit pour ℓ le plus petit de ces entiers</u>, et on désigne par

$$\xi_N = F_{\sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}}(x)$$

l'un de ces nombres non nuls, avec

$$(x \ , \ \sigma_o,\ldots,\sigma_{n-1}) \in \Lambda_\ell .$$

Alors ξ_N est un élément de K dont il est facile de majorer la taille, en utilisant (8.2.5)

$$s(\xi_N) << N^{3n+\frac{\ell}{2}-1}.\mathrm{Log}\, N .$$

Nous allons montrer que ξ_N vérifie

$$\text{(8.3.2)} \qquad \mathrm{Log}|\xi_N| \leqslant - N^{3n+\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}} ;$$

ainsi ξ_N ne vérifiera pas la relation (1.2.3) :

$$-2[K:\mathbb{Q}]\ s(\xi_N) \leqslant \mathrm{Log}|\xi_N| ,$$

bien que $\xi_N \in K$ soit non nul. Cette contradiction terminera la démonstration.

Pour démontrer (8.3.2), on remarque que, d'après le choix de l'entier ℓ, on a

$$F_{\tau_0,\dots,\tau_{n-1}}(y) = 0 \quad \text{pour} \quad (y\,,\tau_0,\dots,\tau_{n-1}) \in \Lambda_{\ell-1} ;$$

or, comme $(x\,,\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1}) \in \Lambda_\ell$, pour

$$\mu_0+\dots+\mu_{n-1} = u\ ,\ 0 \leqslant u \leqslant 2^{-\ell} N^{2n} ,\quad \text{et} \quad 1 \leqslant y \leqslant N^{\frac{\ell-1}{2}+n} ,$$

on a

$$(y\,,\sigma_0+\mu_0,\dots,\sigma_{n-1}+\mu_{n-1}) \in \Lambda_{\ell-1} .$$

Par conséquent, grâce aux relations 8.2.7, on constate que la fonction $F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1}}$ possède les zéros $y = 1,\dots,N^{n+\frac{\ell-1}{2}}$, d'ordre au moins égal à $2^{-\ell}N^{2n}$. On applique alors le principe du maximum, sur le disque

$$|z| \leqslant N^{n+\frac{\ell}{2}+\frac{1}{4}} = R ,$$

à la fonction entière

$$F_{\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1}}(z)\,.\prod_{y=1}^{N^{n+\frac{\ell-1}{2}}} (z-y)^{2^{-\ell}.N^{2n}} .$$

Un calcul facile conduit aux majorations

$$\operatorname{Log}|F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}}|_R \ll N^{3n+\frac{\ell}{2}\frac{3}{4}}.\operatorname{Log} N ,$$

et

$$\operatorname{Log} \sup_{|z|=R} \prod_{y=1}^{N^{n+\frac{\ell-1}{2}}} \left|\frac{x-y}{z-y}\right| \leqslant - \frac{1}{5} N^{n+\frac{\ell-1}{2}}.\operatorname{Log} N .$$

Pour N suffisamment grand, on aura

$$\operatorname{Log}|F_{\sigma_0,\ldots,\sigma_{n-1}}|_R \leqslant N^{3n+\frac{\ell-1}{2}} ,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\operatorname{Log}|\xi_N| \leqslant - N^{3n+\frac{\ell-1}{2}} .$$

La majoration (8.3.2) est ainsi démontrée, et on en déduit le théorème 8.1.1.

§8.4 Un énoncé effectif (sans démonstration)

Pour simplifier sa démonstration, nous avons négligé l'aspect effectif du théorème de Baker ; le théorème 8.1.1 montre qu'une forme linéaire non triviale en $1 , \ell_1,\ldots,\ell_n$, à coefficients algébriques, est non nulle ; de plus, et c'est fondamental pour les applications, on peut minorer une telle forme, en fonction des tailles des nombres $\alpha_i = e^{\ell_i}$ et des tailles des coefficients. Parmi les nombreux domaines de la théorie des nombres où ces minorations effectives interviennent, mentionnons :

- les problèmes de nombre de classes de corps quadratiques imaginaires (Baker, Stark,...)
- l'étude de l'approximation de nombres algébriques par des nombres rationnels, et la recherche de points rationnels sur des courbes algébriques (Baker, Coates,

Feldman,...)

- les propriétés de nombres ayant de grands facteurs premiers (Ramachandra, Shorey, Tijdeman).

C'est pour ces raisons que de nombreux mathématiciens (principalement Baker, Feldman et Stark) ont cherché à améliorer les minorations de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. Voici, à titre d'exemple, un énoncé effectif [Feldman, 1968 b].

Théorème 8.4.1. *Soient $\ell_1,\ldots,\ell_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$; soit d un entier positif. Il existe deux constantes positives C et $\varkappa$, ne dépendant que de $n, \ell_1,\ldots,\ell_n, d$, telles que, pour tous nombres algébriques $\beta_0,\ldots,\beta_n$, non tous nuls, de degré inférieur ou égal à d et de hauteur inférieure ou égale à H, on ait*

$$|\beta_0+\beta_1\ell_1+\ldots+\beta_n\ell_n| > C.H^{-\varkappa} .$$

Les constantes C et $\varkappa$ peuvent être explicitées ; par exemple on peut choisir C et $\varkappa$ sous la forme

$$C = (1+d)^{-\varkappa}$$

et

$$\varkappa = (c_0 + 90^{n^2}.n.\mathrm{Log}\ h)^{16n^2} ,$$

où c_0 est une constante absolue (effectivement calculable) et

$$h = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{(1+[\mathbb{Q}(\alpha_i):\mathbb{Q}]).H(\alpha_i) \ ; \ e^{|\ell_i|}\}$$

(la hauteur $H(\alpha)$ d'un nombre algébrique α est par définition la hauteur du polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$).

On peut raffiner ce résultat, par exemple dans les cas $n = 1$, ou $\beta_0 = 0$, ou $\beta_j \in \mathbb{Z}$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$. Voir à ce sujet [Baker, 1969] et les articles récents de Baker et Stark dans les "Annals of Mathematics". Ainsi Baker (Acta Arith., 21 (1972) 117–129, et 24 (1973) 33–36) a démontré que, si n et d sont deux entiers positifs, et $A' \geqslant 2$ un nombre réel, il existe une constante $C = C(n,d,A') > 0$, effectivement calculable, ayant la propriété suivante :

si $A \geqslant 2$ et $B \geqslant 2$ sont deux nombres réels, $a_1,\dots,a_{n-1}$ des nombres algébriques de degré inférieur ou égal à d et de hauteur inférieure ou égale à A', et a_n un nombre algébrique de degré inférieur ou égal à d et de hauteur inférieure ou égale à A , l'inégalité

$$0 < |b_1 \operatorname{Log} a_1 + \dots + b_n \operatorname{Log} a_n| < C^{-\operatorname{Log} A . \operatorname{Log} B}$$

n'a pas de solution $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i| \leqslant B$.

EXERCICES

Exercice 8.1.a

1) Montrer que chacun des corollaires 8.1.3, 8.1.4 et 8.1.5 du théorème 8.1.1 est équivalent au suivant :

(8.1.7) Si $\ell_1,\dots,\ell_n$ sont des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, alors $\ell_1,\dots,\ell_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

(Indications. Pour démontrer que 8.1.4 implique 8.1.7, considérer une relation du type

$$\beta_0\ell_0+\dots+\beta_n\ell_n = 0 ,$$

où $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ sont des nombres algébriques, et $\ell_0,\dots,\ell_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques ; exprimer $\beta_0,\dots,\beta_n$ dans une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel

$$\mathbb{Q}\beta_0+\dots+\mathbb{Q}\beta_n ,$$

pour se ramener au cas où $\beta_0,\dots,\beta_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Déduire de la relation

$$e^{\ell_0} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_0}\,\ell_i\Big)$$

une contradiction avec 8.1.4.

Pour démontrer la réciproque, partir d'une relation

$$\ell_0 = \beta_1\ell_1+\dots+\beta_n\ell_n ,$$

où $\beta_1,\dots,\beta_n$ sont des nombres algébriques, et $\ell_0,\dots,\ell_n$ des logarithmes non nuls de nombres algébriques ; considérer une base du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\ell_0,\dots,\ell_n$, et utiliser 8.1.7 pour montrer que les nombres

$$\beta_0 = -1 \ , \ \beta_1,\dots,\beta_n$$

sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants).

2) Montrer que les corollaires 8.1.2 et 8.1.6 sont équivalents.

3) Montrer que le théorème 8.1.1 est équivalent à l'ensemble des deux corollaires 8.1.2 et 8.1.3.

Exercice 8.1.b. Donner un exemple de nombres algébriques $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_n$, avec $\alpha_i \neq 0,1$, et $\beta_1,\dots,\beta_n$ irrationnels $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que le nombre

$$\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

soit algébrique.

Exercice 8.1.c. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice qui n'est pas nilpotente. Soient $t_1,\dots,t_m$ des nombres complexes, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que

$$\exp Mt_j \in GL_n(\overline{\mathbb{Q}}) \ , \ (1 \leqslant j \leqslant m).$$

1) Montrer que les nombres

$$t_1,\dots,t_m$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

2) On suppose que $M \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$; montrer que les nombres

$$1 \ , \ t_1,\dots,t_m$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants

(Indication : voir exercice 2.1.c).

Exercice 8.1.d. Le théorème 8.1.1 montre que le nombre

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{Log}\ 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

est transcendant. Plus généralement, déduire du théorème de Baker le résultat suivant.

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\overline{\mathbb{Q}}[X]$, premiers entre eux. Notons $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ les zéros distincts de Q, et $\rho_1,\ldots,\rho_n$ les résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ aux pôles $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ respectivement. Soit Γ un chemin du plan complexe, qui est fermé, ou bien qui a des extrémités algébriques ou infinies, et pour lequel l'intégrale

$$I = \int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

existe. Alors le nombre I est algébrique si et seulement si

$$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{z-\alpha_k}\, dz = 0 .$$

En déduire que, si $\deg P < \deg Q$, et si Q n'a pas de zéros multiples (c'est-à-dire $\deg Q = n$), alors I est nul ou transcendant. [Van der Poorten, 1970].

Exercice 8.3.a. Soient $\tau \geqslant 1$ un nombre réel, n , m deux entiers positifs, $u_1,\ldots,u_n$ (resp. $v_1,\ldots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et $\mathcal{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$.

1) Soit r_1 $(1 \leqslant r_1 \leqslant m)$ la dimension du sous-K-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $v_1,\ldots,v_m$. On suppose

$$n \geqslant \tau \quad \text{et} \quad mn \geqslant (\tau-1)(m+n) + r_1 n \ .$$

Montrer que l'un des nombres

$$\exp(u_i v_j) \ , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

est transcendant sur K .

En déduire le théorème 7.2.9.

2) Soit r_2 un nombre réel positif. On suppose que le sous-K-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $1 , v_1,\ldots,v_m$, a une dimension inférieure ou égale à r_2+1 . Montrer que l'un des nombres

$$u_i \ , \ \exp(u_i v_j) \ , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

est transcendant sur K , dès que

$$n \geqslant \tau \ , \ m > r \quad \text{et} \quad mn \geqslant (\tau-1)(m+n) + r_2 n \ .$$

3) généraliser ces résultats aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance $\leqslant (\tau,\tau')$ (cf. exercice 5.4.d) [Waldschmidt, 1972 b].

Exercice 8.3.b. Soient A et I deux nombres réels supérieurs ou égaux à 1. Soit φ une fonction entière. On suppose que, pour tout entier j , $0 \leqslant j \leqslant I$, les trois propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) $\left|\frac{d^j}{dz^j}\varphi(z)\right| \leqslant \exp(A(|z|+1))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\frac{d^j}{dz^j}\varphi(0) = 0$.

(iii) Pour tout entier $k > 0$, la condition

$$\left|\frac{d^j}{dz^j}\varphi(k)\right| < \frac{1}{4}$$

entraîne

$$\frac{d^j}{dz^j}\varphi(k) = 0 \ .$$

Montrer que l'on a

$$\varphi(k) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{5}\exp\left(\frac{I}{2000\,A}\right) .$$

[Stolarsky](des résultats analogues ont également été obtenus par K. Ramachandra).

Exercice 8.4.a. Soient $\ell_1,\ldots,\ell_n$ des logarithmes de nombres algébriques ; montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $\ell_1,\ldots,\ell_n$, et effectivement calculable, telle que, pour tout n-uple d'entiers $(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{Z}^n$, on ait

$$b_1\ell_1+\ldots+b_n\ell_n = 0 ,$$

ou

$$|b_1\ell_1+\ldots+b_n\ell_n| > \exp(- C. \max_{1\leqslant i\leqslant n} |b_i|)$$

(Indications. Soit

$$w = e^{b_1\ell_1+\ldots+b_n\ell_n} - 1 ;$$

si $w = 0$, le nombre $b_1\ell_1+\ldots+b_n\ell_n$ est un multiple entier de $2i\pi$, et le résultat est trivial ; si $w \neq 0$, utiliser les inégalités

$$|N_{\mathbb{Q}(w)/\mathbb{Q}}(d(w).w)| \geqslant 1$$

et $$|e^z-1| \leqslant e^{|z|}-1 \leqslant |z|.e^{|z|} \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbb{C}).$$

[Baker, 1967, II lemme 5 et III lemme 6].

Comparez avec [Gel'fond, T, chap.I §3 théorème IV].