# APPENDICE

## Théorèmes locaux

Les résultats généraux que nous avons étudiés (théorèmes 2.2.1, 3.3.1 et 4.5.1) concernaient des fonctions entières ou méromorphes dans tout le plan complexe. Il est quelquefois utile de connaître des énoncés analogues pour des fonctions analytiques ou méromorphes dans un domaine borné de $\mathbb{C}$. En voici plusieurs exemples, suivis de quelques résultats concernant le cas p-adique.

### §A.1 La méthode de Schneider

Supposons, avec les notations du théorème 2.2.1, que l'ensemble $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$ soit borné. On peut alors remplacer l'hypothèse que les fonctions $f_1,\ldots,f_d$ sont entières d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\ldots,\rho_d$ respectivement, par l'hypothèse que ces fonctions sont analytiques dans un ouvert suffisamment grand (par exemple elles peuvent être entières d'ordre infini). Plus précisément :

Théorème A.1.1. *Soient $K$ un corps de nombres, et $f_1,\ldots,f_d$ des fonctions analytiques dans un disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant r\}$, algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de points deux à deux distincts du disque $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant \frac{r}{3}\}$. On suppose que, pour tout $i = 1,\ldots,d$ et pour tout $n \geqslant n_0$, on a*

$$f_i(z_n) \in K .$$

*Alors*

$$(\text{A.1.2}) \qquad \sum_{i=1}^{d} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} \cdot \operatorname{Log} \max_{n_0\leqslant m\leqslant n} s(f_i(z_m)) \geqslant d-1 .$$

Démonstration

Nous allons montrer que, si $\rho_1,\dots,\rho_d$ sont des nombres réels positifs tels que

$$\max_{n_0\leqslant m\leqslant n} s(f_i(z_m)) \leqslant n^{\rho_i} \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

alors on a

$$\rho_1+\dots+\rho_d \geqslant d-1 .$$

On note

$$\rho = \frac{\rho_1+\dots+\rho_d}{d} \qquad \text{et} \qquad \delta = [K:\mathbb{Q}] .$$

Un argument que nous avons déjà utilisé plusieurs fois (voir par exemple (2.2.5)) permet de ne considérer que le cas

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d} \rho_i < \rho + \frac{1}{d} .$$

Il existe un nombre $r_1 > r$ tel que les fonctions $f_1,\dots,f_d$ soient analytiques dans le disque $|z| \leqslant r_1$ .

Le lemme (1.3.1) de Siegel montre l'existence, pour $n$ suffisamment grand, d'un polynôme non nul

$$P_n \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_d] ,$$

de degré $\leqslant 2\delta n^{\frac{1}{d}+\rho-\rho_i}$ par rapport à $X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$, et de taille $< \delta d\, n^{\frac{1}{d}+\rho}$ , tel que la fonction

$$F_n = P_n(f_1,\dots,f_d)$$

vérifie

$$F_n(z_m) = 0 \quad \text{pour} \quad n_o \leqslant m < n_o+n \, .$$

Comme l'ensemble des zéros de $F_n$ dans le compact $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant \frac{r}{3}\}$ est fini, les nombres

$$F_n(z_\nu) \quad , \quad \nu \geqslant n_o$$

ne sont pas tous nuls. Soit $\nu$ le plus petit entier positif tel que

$$\xi_n = F_n(z_\nu) \neq 0 \, .$$

On a donc $\nu \geqslant n_o+n$ , et $\xi_n$ est un élément non nul de $K$ dont la taille est majorée, grâce à (1.2.5), par

$$s(\xi_n) \leqslant 4\delta d \; \nu^{\frac{1}{d}+\rho} \, .$$

Pour majorer $|\xi_n|$ , on utilise le principe du maximum, sur le disque $|z| \leqslant r_1$ , pour la fonction

$$F_n(z) \, . \prod_{m=n_o}^{\nu-1} (z-z_m)^{-1} \, .$$

On obtient

$$\mathrm{Log}|\xi_n| \leqslant -\frac{\nu}{2} \, . \, \mathrm{Log}(\frac{3r_1-r}{2r}) \, .$$

La relation (1.2.3) donne alors, pour $n$ (donc $\nu$) suffisamment grand :

$$\frac{1}{d} + \rho \geqslant 1 \; ,$$

ce qui démontre le théorème **A.1.1**.

## §A.2 La méthode de Gel'fond

Voici, sans démonstration, un résultat analogue au théorème 3.3.1 (mais plus faible) dans lequel on suppose seulement que les fonctions étudiées sont analytiques dans un disque.

Théorème A.2.1. *Soient* $K$ *un corps de nombres,* $f_1,\dots,f_h$ *des fonctions analytiques dans un disque* $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant r\}$ , *et* $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ *une suite de points deux à deux distincts du disque* $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant \frac{r}{3}\}$ , *tels que*

$$f_i(z_n) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant h \quad \text{et} \quad n \geqslant n_0 \ .$$

*On suppose que deux des fonctions* $f_1,\dots,f_h$ *sont algébriquement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$ , *et que la dérivation* $\frac{d}{dz}$ *opère sur le corps* $K(f_1,\dots,f_h)$. *Alors on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant h \\ n_0\leqslant m\leqslant n}} s(f_i(z_m)) > 0 \ . \tag{A.2.2}$$

*Si, de plus, la dérivation* $\frac{d}{dz}$ *opère sur le* $K$-*espace vectoriel* $K + Kf_1+\dots+Kf_h$ , *alors on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant h \\ n_0\leqslant m\leqslant n}} s(f_i(z_m)) = +\infty \ . \tag{A.2.3}$$

## §A.3 Type de transcendance

Il n'est pas difficile de généraliser les résultats des deux paragraphes précédents aux extensions de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance fini ; on peut également les étendre aux fonctions méromorphes dans un disque. On obtient ainsi les deux énoncés suivants.

Théorème A.3.1. On considère

- un sous-corps $K$ de $\mathbb{C}$, de type de transcendance inférieur ou égal à $\tau$ sur $\mathbb{Q}$ $(\tau \geqslant 1)$, et de type fini sur $\mathbb{Q}$
- des fonctions $f_1,\dots,f_d$, méromorphes dans un disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant r\}$, algébriquement indépendantes sur $K$ ;
- une suite $(z_n)_{n\geqslant n_o}$ de points du disque $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant \frac{r}{3}\}$, deux à deux distincts, non pôles de $f_1,\dots,f_d$, tels que

$$f_i(z_n) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d \quad \text{et} \quad n \geqslant n_o \; ;$$

- des fonctions $h_1,\dots,h_d$, analytiques dans $\Delta$, ne s'annulant pas aux points $z_n$, $(n \geqslant n_o)$, et telles que $h_1 f_1,\dots,h_d f_d$ soient analytiques dans $\Delta$.

Alors on a

$$\sum_{i=1}^{d} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} \cdot \operatorname{Log} \max_{n_o\leqslant m\leqslant n} \left\{s(f_i(z_m)) \, , \operatorname{Log} \frac{1}{|h_i(z_m)|}\right\} \geqslant \frac{d}{\tau} - 1 \, .$$

Remarque : On peut choisir pour $h_i$ le polynôme unitaire dont les racines sont les pôles de $f_i$ (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans $|z| \leqslant r$.

Théorème A.3.2. Soit $K$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ de type de transcendance inférieur ou égal à $\tau$ sur $\mathbb{Q}$ et de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soient $f_1,\dots,f_h$ des fonctions méromorphes dans un disque $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant r\}$ ; soit $(z_n)_{n\geqslant n_o}$ une suite de points distincts du disque $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leqslant \frac{r}{3}\}$, non pôles de $f_1,\dots,f_h$, tels que

$$f_i(z_h) \in K \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant h \, , \; n \geqslant n_o \, .$$

Soient $g_1,\dots,g_h$ des fonctions analytiques dans $\Delta$, sans zéros aux points $z_n$, $(n \geqslant n_o)$, et telles que $g_1 f_1,\dots,g_h f_h$ soient analytiques dans $\Delta$.

Soit $d$ le degré de transcendance sur $K$ du corps $K(f_1,\dots,f_h)$.

Si la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur le corps $K(f_1,\ldots,f_h)$, alors on a

$$(A.3.3) \qquad \limsup_{n\to+\infty} n^{-\frac{d-\tau}{\tau(d-1)}} \cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant h \\ n_0\leqslant m\leqslant n}} \{t(f_i(z_m)), -\mathrm{Log}\,|h_i(z_m)|\} > 0 \,.$$

Si la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur le K-espace vectoriel $K+Kf_1+\ldots+Kf_h$, et si $d > \tau > 1$, alors

$$(A.3.4) \qquad \limsup_{n\to+\infty} n^{-\frac{d-\tau}{(\tau-1)d}} \cdot \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant h \\ n_0\leqslant m\leqslant n}} \{t(f_i(z_m)), -\mathrm{Log}\,|h_i(z_m)|\} > 0 \,.$$

## §A.4 Cas p-adique

Dans tous les énoncés généraux concernant les fonctions analytiques ou méromorphes (dans un disque ou dans $\mathbb{C}$) que nous avons étudiés, on peut remplacer le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par un corps $\mathbb{C}_p$ valué ultramétrique, complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p$ ($p > 0$ premier). Un exemple typique de tel corps est fourni par le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

On définit la fonction exponentielle p-adique par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \;;$$

mais ici, la série ne converge que dans le disque $|z| < p^{-\frac{1}{p-1}}$ de $\mathbb{C}_p$ (dont on a normalisé la valeur absolue par $|p| = \frac{1}{p}$). Ainsi, contrairement au cas complexe, la fonction exponentielle p-adique n'est pas entière, mais seulement analytique dans un disque. Par conséquent, pour obtenir des résultats de transcendance sur cette fonction, il faudra utiliser les théorèmes locaux (A.1.1, A.2.1,...). On déduit par exemple de l'analogue p-adique du théorème A.1.1 les deux corollaires suivants, correspondant respectivement au théorème 2.2.3 de Lang et au théorème 2.1.1 de Gel'fond Schneider.

Théorème A.4.1. Soient $u_1,\ldots,u_n$ (resp. $v_1,\ldots,v_m$) des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\mathbb{C}_p$, tels que

$$|u_i v_j| < p^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \; , \; 1 \leqslant j \leqslant m \; .$$

Si $mn > m+n$, alors un des nombres

$$\exp(u_i v_j) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant n \; , \; 1 \leqslant j \leqslant m)$$

est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

On définit la fonction logarithme $p$-adique par

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \; ;$$

cette fonction $z \mapsto \mathrm{Log}(1+z)$ est analytique dans le disque $|z| < 1$.

Théorème A.4.2. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux éléments de $\mathbb{C}_p$, vérifiant

$$|\alpha - 1| < 1 \quad \text{et} \quad |\beta \,\mathrm{Log}\, \alpha| < p^{-\frac{1}{p-1}} \; .$$

On suppose que $\beta$ est irrationnel, et que $\alpha$ n'est pas racine de l'unité. Alors l'un au moins des trois nombres

$$\alpha \; , \; \beta \; , \; \alpha^{\beta} = \exp(\beta \,\mathrm{Log}\, \alpha)$$

est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Comme en complexe, on peut également obtenir ce résultat en utilisant des équations différentielles (cf. A.2.1) ; de la même manière, on obtient l'analogue $p$-adique du théorème 3.1.1 de Hermite Lindemann.

Théorème A.4.3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, tel que

$$0 < |\alpha| < p^{-\frac{1}{p-1}} .$$

Alors $\exp(\alpha)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

La situation est moins bonne dans l'étude de l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle ; par exemple, dans la démonstration du théorème 4.1.2, la relation (4.4.8) :

$$-M^{\tau(m+n)} << -M^{mn} \operatorname{Log} M \quad \text{pour} \quad M \to +\infty$$

a été obtenue en utilisant le principe du maximum sur un disque très grand ; ceci est impossible en p-adique, et on obtient seulement, au même stade de la démonstration,

$$-M^{\tau(m+n)} << -M^{mn} \qquad \text{quand} \quad M \to +\infty \ ;$$

ainsi, pour que la conclusion du théorème 4.1.2 soit encore vérifiée, il faut supposer que l'on a l'inégalité stricte $mn > \tau(m+n)$.

De même il est facile de constater que les analogues p-adiques des théorèmes 7.1.6, 7.2.8 et 7.3.4 sont vrais, à condition de supposer

$$|u_i v_j| < p^{-\frac{1}{p-1}} , \ (1 \leqslant i \leqslant n \ , \ 1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

et de remplacer la majoration de $\operatorname{Log}|\xi_N|$ par

$$\operatorname{Log}|\xi_N| << -N^{mn} \qquad \text{pour } 7.1.6 \ ;$$

$$\operatorname{Log}|\xi_N| << -N^{n} \qquad \text{pour } 7.2.8 \ ;$$

$$\operatorname{Log}|\xi_N| << -N^{mn+m+n}.(\operatorname{Log} N)^{-1} \quad \text{pour } 7.3.4 \ ;$$

(les traductions des théorèmes 5.1.1 et 6.1.1 ne présentent pas de difficulté). On en déduit que les théorèmes 7.3.1 et 7.3.5 sont vrais sans changement en p-adique (dès que les nombres $\exp(u_i v_j)$ existent), tandis que, dans les hypothèses des théorèmes 4.1.2, 7.1.1, 7.2.1 et 7.2.9, il faut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes. Voici par exemple ce que devient le théorème 7.2.3 de Gelfond dans $\mathbb{C}_p$.

<u>Théorème</u> A.4.4. <u>Soient</u> $\alpha$ <u>et</u> $\beta$ <u>des éléments de</u> $\mathbb{C}_p$, <u>algébriques sur</u> $\mathbb{Q}$, $\alpha$ <u>n'étant pas racine de l'unité et</u> $\beta$ <u>étant irrationnel de degré</u> $r \geq 4$. <u>On suppose</u>

$$|\alpha - 1| < 1 \quad \underline{\text{et}} \quad |\beta^{\ell} \operatorname{Log} \alpha| < p^{-\frac{1}{p-1}}, \; (1 \leq \ell \leq r).$$

<u>Alors deux des cinq nombres</u>

$$\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^5}$$

<u>sont algébriquement indépendants sur</u> $\mathbb{Q}$.

Quand $r = 3$, on ne peut déduire des résultats cités précédemment que l'indépendance algébrique de deux des nombres

$$\operatorname{Log} \alpha \; , \; \alpha^{\beta} \; , \; \alpha^{\beta^2} \; .$$

<u>On conjecture</u> que, si $\beta$ est irrationnel cubique, les deux nombres

$$\alpha^{\beta} \; , \; \alpha^{\beta^2}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Plus généralement, on peut transposer en p-adique toutes les conjectures du §7.5.

Contrairement à l'habitude, les résultats p-adiques sont donc moins bons que leurs analogues complexes ; ainsi la traduction en p-adique du théorème de Lindemann Weierstrass, ou bien du théorème de Schneider sur la transcendance de $\wp(\alpha)$, n'a pas encore été effectuée.

## §A.5 Références

L'étude des propriétés locales de transcendance de valeurs de fonctions analytiques a débuté avec deux travaux de Schneider, en 1951 et 1953 ; le but en était la caractérisation de fonctions algébriques ou rationnelles par les valeurs qu'elles prennent aux points de la suite $\frac{1}{n}$ ; on obtient par exemple un des énoncés de Schneider en choisissant, dans le théorème A.1.1,

$$d = 2 \ , \ f_1(z) = z, \text{et} \quad z_n = \frac{1}{n} \ .$$

Une généralisation aux suites convergentes de points (avec une traduction en p-adique) fut effectuée par Içen en 1955. Tous ces résultats devaient être approfondis par Hilliker, qui étudiait les valeurs de fonctions $f_1,\ldots,f_d$ , analytiques au voisinage de 0 et algébriquement indépendantes, en une suite de points convergeant vers 0 [Hilliker, 1966]. Les théorèmes des paragraphes A.1, A.2 et A.3 sont extraits de [Waldschmidt, 1972 a, §8].

Les problèmes de transcendance de nombres p-adiques furent abordés pour la première fois par Mahler, en 1932, avec la traduction du théorème de Hermite Lindemann, puis en 1934, avec celle du théorème de Gel'fond Schneider (par la méthode de Gel'fond ; celle de Schneider fut traduite en 1940, par Veldkamp). Un critère général de dépendance algébrique de fonctions analytiques p-adiques (analogue au critère complexe de [Schneider, 1948], et précédant celui de Içen) fut démontré par Günther en 1952, ce qui lui permit de retrouver comme corollaires la transcendance de $\exp \alpha$ (par la méthode de Gel'fond) et celle de $\alpha^\beta$ (par la méthode de Schneider) [Günther, 1952]. Dans sa thèse, en 1964, Adams démontra l'analogue p-adique du théorème A.2.1, ainsi que de nombreux autres résultats : un critère de transcendance (que l'on peut raffiner par la méthode exposée au chapitre 5), un théorème sur l'indépendance algébrique de deux des nombres $\alpha^{\beta},\dots,\alpha^{\beta^{r-1}}$ (avec les notations de A.4.4) et une mesure de transcendance de $\alpha^{\beta}$ (qui peut aussi être améliorée par la méthode de [Cijsouw, 1972]). L'essentiel de la méthode d'Adams [Adams, 1964] consistait à transposer les démonstrations complexes à l'aide de l'intégrale de Schnirelman; mais il est possible (et même plus facile) d'obtenir les mêmes résultats en utilisant les propriétés spécifiques de fonctions analytiques $p$-adiques ; ceci a été exposé par exemple par Serre pour le théorème A.4.1 [Serre, 1966] (voir aussi [Lang, T, appendice]), et par Brumer, en 1967, pour l'analogue $p$-adique du théorème de Baker. Enfin, en 1972, Shorey a donné une traduction du théorème 6.1.1 de Tijdeman, et l'a appliqué à l'étude de propriétés d'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle $p$-adique [Shorey, 1972]. On trouvera d'autres résultats du même genre dans [Waldschmidt, 1972 a, §9].

Parmi les applications que pourrait avoir une étude plus poussée des propriétés arithmétiques locales de fonctions analytiques, mentionnons le deuxième problème de [Schneider, T] :

> démontrer le théorème sur la transcendance des valeurs de la fonction modulaire $j(\tau)$ par une étude directe de cette fonction, et non par l'étude des $\wp$-fonctions.

Il pourrait être utile de passer par l'intermédiaire des fonctions modulaires $P$ , $Q$ , $R$ , qui sont analytiques (par rapport à la variable complexe $q$) dans le disque unité du plan complexe ; comme la dérivation $q\frac{d}{dq}$ opère sur le corps $\mathbb{Q}(P,Q,R)$, on constate facilement (cf. exercice 3.3.e) que la conclusion A.2.2 est vraie pour ces trois fonctions $P$, $Q$, $R$. Mais ce résultat semble encore insuffisant pour donner des énoncés intéressants de transcendance sur les fonctions modulaires.

# EXERCICES

Exercice A.1.a. Soient $f_1,\ldots,f_d$ des fonctions analytiques dans un disque ouvert

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < r\} ,$$

algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de $\Delta$ deux à deux distincts, admettant au moins un point d'accumulation dans $\Delta$, telle que

$$f_i(z_n) \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant d \; , \; n \geqslant 0 \; .$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note

$$\delta_n = [\mathbb{Q}(f_1(z_n),\ldots,f_d(z_n)) : \mathbb{Q}] \; .$$

1. Soient $R_1,\ldots,R_d$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait

$$\prod_{i=1}^{d} R_i(n) > \sum_{h=0}^{n} \delta_h \; ;$$

on note :

$$\mu_n = \frac{R_1(n)\ldots R_d(n)}{\delta_0+\ldots+\delta_n} \; , \; (n \geqslant 0) \; .$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $r_n$ un nombre réel vérifiant

$$\max_{0\leqslant h\leqslant n} |z_h| < r_n < r \; .$$

Montrer que, pour tout entier $n$ suffisamment grand, il existe un entier $\nu > n$ tel que

$$\sum_{h=0}^{\nu-1} \operatorname{Log}\left(\frac{r_\nu - \max_{0\leqslant m\leqslant\nu}|z_m|}{|z_\nu - z_h|}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{d} R_i(n) \; \left(\operatorname{Log}(1+|f_i|_{r_\nu}) + (2.\frac{\mu_n\delta_\nu}{\mu_n-1} - 1)(1 + \max_{0\leqslant m\leqslant\nu} s(f_i(z_m)))\right).$$

(Comparez avec l'exercice 2.2.f).

2. On suppose désormais

$$\limsup_{n\to+\infty} |z_n| < r ;$$

soient $r_1$ et $r_2$ deux nombres réels vérifiant

$$\limsup_{n\to+\infty} |z_n| < r_1 < r_2 < r .$$

Soient $S_1,\ldots,S_d$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant

$$S_i(n) \geqslant \max_{o\leqslant h\leqslant n} s(f_i(z_h)) , \ (1 \leqslant i \leqslant d , n \geqslant 0) .$$

Montrer (en utilisant la question précédente avec $\mu_n = d+1$ et

$$R_i(n) = [((d+1)(\delta_o+\ldots+\delta_n).S_1(n)\ldots S_d(n))^{\frac{1}{d}}.S_i(n)^{-1}])$$

que, pour tout entier $n$ suffisamment grand, il existe un entier $\nu > n$ tel que

$$2.\frac{\delta_\nu}{d}.(d+1)^{1+\frac{1}{d}}.(\delta_o+\ldots+\delta_n)^{\frac{1}{d}}.(S_1(n)\ldots S_d(n))^{\frac{1}{d}}.\max_{1\leqslant i\leqslant d}\frac{S_i(\nu)}{S_i(n)} + \nu\,\mathrm{Log}(r_2-r_1) \geqslant \sum_{h=o}^{\nu-1}\mathrm{Log}|z_\nu - z_h|$$

En déduire que, si les $d$ applications

$$n \mapsto \frac{(\delta_o+\ldots+\delta_n).S_1(n)\ldots S_d(n)}{S_i(n)^d} , \ (1 \leqslant i \leqslant d) ,$$

sont toutes croissantes (au sens large), alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\delta_o+\ldots+\delta_n}{n^d}.\delta_n^d.\prod_{i=1}^{d} S_i(n) > (\tfrac{d}{2})^d.(d+1)^{-(d+1)}.(\mathrm{Log}\,\frac{r_2-r_1}{2r_1})^{-d} .$$

Utiliser enfin cette inégalité pour démontrer le théorème **A.1.1.**

3. On suppose $\delta_n \leqslant \delta$ pour tout $n \geqslant 0$ , et

$$\limsup_{n\to+\infty} |z_n| < \frac{r}{3} .$$

Vérifier l'inégalité

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{-1+\frac{1}{d}}.\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ o\leqslant h\leqslant n}} s(f_i(z_h)) > 0 .$$

Exercice A.1.b. Une fonction $f$, analytique dans un ouvert $V$ de $\mathbb{C}$, est dite algébrique au sens arithmétique si les deux fonctions $z$, $f(z)$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbb{Q}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cela revient au même), c'est-à-dire s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ tel que

$$P(z, f(z)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in V .$$

Soit $f$ une fonction analytique au voisinage de $0$, telle que les nombres

$$f(\tfrac{1}{n}) ,$$

pour $n$ entier suffisamment grand, soient algébriques de degré $\leqslant \delta$. On suppose

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{s(f(\frac{1}{n}))}{n \operatorname{Log} n} \leqslant \frac{1}{108 . \delta^3} .$$

Montrer que $f$ est algébrique au sens arithmétique (utiliser l'exercice A.1.a).

Etudier la réciproque, et comparer avec [Hilliker, 1966].

Exercice A.2.a. Démontrer le théorème A.2.1.

(Indications : les inégalités (A.2.2) et (A.2.3) sont démontrées, dans le cas p-adique, dans [Adams, 1964, théorème 1]).

Démontrer (en utilisant l'exercice 3.3.f) que l'inégalité (A.2.3) peut être remplacée par l'inégalité plus forte

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant h \\ n_0\leqslant m\leqslant n}} s(f_i(z_m)) > 0 . \tag{A.2.4}$$

Donner ensuite des minorations effectives de (A.2.2) et (A.2.4), analogues à celles des exercices A.1.a et A.1.b. (On constatera ainsi qu'on peut remplacer le corps de nombres $K$, dans les hypothèses du théorème A.2.1, par l'ensemble des nombres algébriques de degré inférieur ou égal à $\delta$, $\delta > 0$ donné ; cf. exercice 3.3.c).

Exercice A.3.a. Soit $\Delta$ un disque ouvert de $\mathbb{C}$ , de centre 0 et de rayon $r > 0$ ; soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $\Delta$ , deux à deux distincts, tels que

$$\limsup_{n\to+\infty} |z_n| < \frac{1}{3} r .$$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ , de type fini sur $\mathbb{Q}$ et de type de transcendance inférieur ou égal à $\tau$ $(\tau \geq 1)$. Soient $f_{i,j}$ , $(1 \leq i \leq d\ ,\ 1 \leq j \leq \nu_i)$ des fonctions analytiques dans $\Delta$ , possédant les trois propriétés suivantes

1. Les fonctions $f_{1,1},\dots,f_{d,1}$ sont algébriquement indépendantes sur K .

2. Pour tout $n \geq 0$ , $j = 1,\dots,\nu_i$ et $i = 1,\dots,d$ , on a $f_{i,j}(z_n) \in K$ , avec

$$t(f_{i,j}(z_n)) \ll n^{\rho_i} \quad \text{pour} \quad n \to +\infty .$$

3. La dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur l'anneau $K[f_{i,1},\dots,f_{i,\nu_i}]$ pour tout $i = 1,\dots,d$ .

Pour $1 \leq i \leq d$ , on définit $\varepsilon_i$ par :

$\varepsilon_i = 0$ si la dérivation $\frac{d}{dz}$ opère sur le K-espace vectoriel $K+Kf_{i,1}+\dots+Kf_{i,\nu_i}$ , c'est-à-dire si les $\nu_i$ polynômes exprimant les relations

$$\frac{d}{dz} f_{i,j} \in K[f_{i,1},\dots,f_{i,\nu_i}] \text{ , } (1 \leq j \leq \nu_i)$$

sont tous de degré total 1 ;

$\varepsilon_i = 1$ sinon.

Enfin on note

$$\rho_* = \max_{\varepsilon_i=1} \rho_i$$

(avec $\rho_* = 0$ si $\varepsilon_i = 0$ pour $1 \leq i \leq d$).

Montrer que l'on a

$$(d-\tau)(1-\rho_*) \leq (\tau-1)(\rho_1+\dots+\rho_d) .$$

En déduire le théorème A.3.2 (dans le cas où les fonctions $f_1,\dots,f_h$ sont analytiques dans $\Delta$).

Exercice A.4.a. Soient $f_1,\dots,f_d$ des fonctions p-adiques, analytiques dans un disque non circonférencié

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}_p \; ; \; |z| < r\} ,$$

et algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points deux à deux distincts de $\Delta$, admettant au moins un point d'accumulation dans $\Delta$, telle que les nombres

$$f_i(z_n) \quad , \quad (1 \leqslant i \leqslant d \, , \, n \geqslant 0) ,$$

soient tous algébriques sur $\mathbb{Q}$. On note

$$\delta_n = [\mathbb{Q}(f_1(z_n),\dots,f_d(z_n)) : \mathbb{Q}] \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 .$$

Soient $R_1,\dots,R_d$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait

$$\prod_{i=1}^{d} R_i(n) \geqslant 2 \sum_{h=0}^{n} \delta_h .$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soient $r_n$ et $s_n$ deux nombres réels vérifiant

$$\max_{0\leqslant h\leqslant n} |z_h| \leqslant r_n < s_n < r .$$

Montrer que, pour tout entier $n$ suffisamment grand, il existe un entier $\nu > n$ tel que

$$\nu \,\mathrm{Log}\, \frac{s_\nu}{r_\nu} \leqslant \sum_{i=1}^{d} R_i(n)[\mathrm{Log}(1+|f_i|_{s_\nu}) + 4\,\delta_\nu\{1 + \max_{0\leqslant m\leqslant \nu} s(f_i(z_m))\}] .$$

Exercice A.4.b. Soient $q \geqslant 0$ un nombre entier, et $\tau \geqslant 1$ un nombre réel ; soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_q$ des éléments de $\mathbb{C}_p$, algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que le corps $K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$ ait un type de transcendance inférieur ou égal à $\tau$ sur $\mathbb{Q}$. (Le type de transcendance d'un sous-corps de $\mathbb{C}_p$ de type fini sur $\mathbb{Q}$ se définit comme dans le cas complexe — chapitre 4 —, mais en utilisant la valeur absolue p-adique ; cf. [Waldschmidt, 1972 a, §4]).

Soient $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites monotones croissantes de nombres positifs, telles que $\sigma_n\delta_n$ tende vers $+\infty$ avec $n$ ; soient $c > 1$ et $d > 1$ deux nombres réels tels que

$$\sigma_{n+1} \leqslant c\,\sigma_n \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} \leqslant d\,\delta_n ,$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe une constante $C = C(\tau,c,d,\alpha_1,\ldots,\alpha_q) > 0$, telle que la propriété suivante soit vérifiée.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_q]$, de degré total $\leqslant d_n$ et de taille $\leqslant \sigma_n$, telle que

$$\operatorname{Log}|P_n(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_q)| \leqslant -C.(\delta_n\sigma_n)^{\tau} ;$$

alors $\alpha$ est algébrique sur $K$, et

$$P_n(\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_q) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 .$$

Calculer ensuite la constante $C$ (en fonction de $c$ et $d$) dans le cas particulier $K = \mathbb{Q}$, $q = 0$, $\tau = 1$.

(Indication. Reprendre la méthode du chapitre 5 — comparer avec l'exercice 5.4.c — et consulter [Adams, 1964, lemme 10]).

Exercice A.4.c. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel ; soient $w_1,\dots,w_\ell$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{C}_p$ ; soient $P_1,\dots,P_\ell$ des polynômes non nuls de $\mathbb{C}_p[X]$, de degré $p_1-1,\dots,p_\ell-1$ respectivement. On note

$$n = p_1+\dots+p_\ell \ , \quad \text{et} \quad \Omega = \max_{1\leqslant i\leqslant \ell} |w_i| \ .$$

La fonction

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\ell} P_k(z)\exp(w_k z)$$

est holomorphe dans le disque

$$|z| < \frac{1}{\Omega}\cdot p^{-\frac{1}{p-1}}$$

de $\mathbb{C}_p$.

Majorer, pour $0 \leqslant r < \frac{1}{\Omega}\, p^{-\frac{1}{p-1}}$, le nombre de zéros de $F$ dans le disque $|z| \leqslant r$ de $\mathbb{C}_p$, en fonction de $n$, $\Omega$ et $r$. (On pourra utiliser, au choix, l'intégrale de Schnirelman et la méthode de [Shorey, 1972, appendice], ou bien la méthode suggérée dans [Waldschmidt, 1972 a, §9]).

**Exercice A.4.d.** Montrer que la fonction sinus p-adique, définie par

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

est analytique dans le disque $|z| < p^{-\frac{1}{p-1}}$ de $\mathbb{C}_p$ . Montrer que, si $\alpha$ est un élément de $\mathbb{C}_p$ algébrique sur $\mathbb{Q}$ , tel que

$$0 < |\alpha| < p^{-\frac{1}{p-1}} ,$$

alors le nombre $\sin \alpha$ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ .

(Indication : introduire la fonction cosinus p-adique par la relation

$$\cos z = \frac{d}{dz} \sin z ,$$

et vérifier que, si $i$ est une racine de $X^2+1$ dans le corps $\mathbb{C}_p$ - qui est algébriquement clos - , on a

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad ).$$

[Günther, 1952].

Exercice A.4.e. Soient $\tau \geqslant \frac{1}{2}$ un nombre réel, $\Omega$ un sous-corps algébriquement clos de $\mathbb{C}_p$, $M \in M_n(\mathbb{C}_p)$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, et $t_1, \ldots, t_m$ des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, tels que les matrices

$$\exp(Mt_j) \quad , \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \ ,$$

soient définies et appartiennent toutes à $GL_n(\Omega)$. Soit $d$ la dimension du sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}_p$ engendré par les valeurs propres de $M$. On suppose que le corps $\Omega$ vérifie au moins une des deux propriétés suivantes

(i) $\Omega$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de type de transcendance inférieur ou égal à $2\tau$.

(ii) Il existe un sous-corps $L$ de $\Omega$, de type de transcendance $\leqslant \tau$ sur $\mathbb{Q}$ (avec $\tau \geqslant 1$), tel que $\dim_L \Omega \leqslant 1$.

1) Montrer que l'on a $$md \leqslant 2\tau(m+d) .$$

2) On suppose que les points $t_1, \ldots, t_m$ appartiennent à $\Omega$. Montrer que

$$md \leqslant 2\tau(m+d-1) .$$

3) On suppose que $M \in M_n(\Omega)$. Montrer que $md \leqslant 2\tau m + (2\tau - 1)d$.

4) On suppose que les points $t_1, \ldots, t_m$ appartiennent à $\Omega$, et que $M \in M_n(\Omega)$.

Montrer que $$md \leqslant 2\tau m + (2\tau-1)(d-1) .$$

Exercice A.4.f. Soient $a_1,\dots,a_m$ des unités de $\mathbb{C}_p$ , algébriques sur $\mathbb{Q}$ , dont les logarithmes p-adiques $\operatorname{Log} a_1,\dots,\operatorname{Log} a_m$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Montrer que les nombres

$$1 , \operatorname{Log} a_1,\dots,\operatorname{Log} a_m$$

sont linéairement indépendants sur la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}_p$ .

[Waldschmidt, 1972 b].

# BIBLIOGRAPHIE

(Cette liste ne comporte que des articles cités dans le cours. L'année indiquée correspond le plus souvent à la date de réception du manuscrit).


ADAMS, William W.-1964. Transcendental numbers in the p-adic domain ; Amer. J. Math., 88 (1966), 279-308.

BALKEMA, A.A., and TIJDEMAN, R.-1970. Some estimates in the theory of exponential sums ; Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 24 (1973), 115-133.

BAKER, Alan-1966. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, I ; Mathematika, 13 (1966), 204-216.

BAKER, Alan-1967. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, II, III ; Mathematika, 14 (1967), 102-107 et 220-228.

BAKER, Alan-1969. Effective methods in diophantine problems ; Proc. Symposia Pure Maths (American Math. Soc.), 20 (1971), 195-205, et 24 (1973) 1-7.

BOMBIERI, Enrico-1970. Algebraic values of meromorphic maps ; Invent. Math., 10 (1970), 267-287.

BROWNAWELL, Dale-1971a. Some transcendence results for the exponential function ; K. Norske Vidensk. Selsk. Skr., 11 (1972), 1-2.

BROWNAWELL, Dale-1971b. The algebraic independence of certain values of the exponential function ; K. Norske Vidensk. Selsk. Skr., 23 (1972), 5 pp.

BROWNAWELL, Dale-1971c. Sequences of diophantine approximations ; J. Number theory 6 (1974), 11-21.

BROWNAWELL, Dale-1971d. The algebraic independence of certain numbers related to the exponential function ; J. Number theory 6 (1974), 22-31.

CIJSOUW, Pieter L.-1972. Transcendence measures ; Akademisch Proefschrift, Amsterdam (1972), 107 pp.

DIEUDONNE, Jean. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire ; Hermann, Enseign. des Sciences, Paris, 1964.

FEL'DMAN, N.I.-1951. Approximation of certain transcendental numbers, I : the approximation of logarithms of algebraic numbers ; Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat., 15 (1951), 53-74 [Trad. angl. : Amer. Math. Soc. Transl., (2) 59 (1966), 224-245].

FEL'DMAN, N.I.-1959. On the measure of transcendence of $\pi$ ; Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 24 (1960), 357-368 [Trad. Angl. : Amer. Math. Soc. Transl., (2) 58 (1966), 110-124].

FEL'DMAN, N.I.-1960. Approximation of the logarithms of algebraic numbers by algebraic numbers ; Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 24 (1960), 475-492 [Trad. angl. : Amer. Math. Soc. Transl., (2) 58 (1966), 125-142].

FEL'DMAN, N.I.-1964. Arithmetic properties of the solutions of a transcendental equation ; Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, Mat. Meh., 1 (1964), 13-20 [Trad. angl. : Amer. Math. Soc. Transl., (2) 66 (1968), 145-153].

FEL'DMAN, N.I.-1968a. Estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers ; Mat. Sbornik, 76 (118), (1968), 304-319 [Trad. angl. : Math. USSR Sbornik, 5 (1968), 291-307].

FEL'DMAN, N.I.-1968b. Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers ; Mat. Sbornik, 77 (119), (1968), 423-436 [Trad. angl. : Math. USSR Sbornik, 6 (1968), 393-406].

FEL'DMAN, N.I., and SHIDLOVSKII, A.B.-1966. The development and present state of the theory of transcendental numbers ; Uspekhi Mat. Nauk, 22 (1967), 3-82 [Trad. angl. : Russian Math. Surveys, 22 (1967), 1-79].

GEL'FOND, A.O.-1934. Sur le septième problème de D. Hilbert ; Dokl. Akad. Nauk SSSR 2 (1934), 1-3 (en russe), et 4-6 (en français).

GEL'FOND, A.O.,T. Transcendental and algebraic numbers ; GITTL, Moscou, (1952) [Trad. angl., Dover, New-York, 1960].

GEL'FOND, A.O., et LINNIK, Yu.V. Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres ; Fizmatgiz, Moscou, 1962 [Trad. Franç. : Gauthier Villars, Paris, 1965 ; trad. angl. : M.I.T. Press, Mass., 1966].

GÜNTHER, Alfred-1952. Über transzendente p-adische Zahlen, I ; J. reine angew. Math., 192 (1953), 155-166.

GÜTING, K. Rainer-1960. Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers ; Michigan Math. J., 8 (1961), 149-159.

HAMMING, R.W.-1970. An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions ; Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 294-297.

HILLE, Einar-1942. Gel'fond's solution of Hilbert's seventh problem ; Amer. Math. Monthly, 49 (1942), 654-661.

HILLIKER, D.L.-1966. On analytic functions which have algebraic values at a convergent sequence of points ; Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 534-550.

LANG, Serge-1965. Report on diophantine approximations ; Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 177-192.

LANG, Serge,A. Algebra ; Addison Wesley, Reading, 1965.

LANG, Serge,T. Introduction to transcendental numbers ; Addison Wesley, 1966.

LANG, Serge-1971. Transcendental numbers and diophantine approximations ; Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 635-677.

LIPMAN, Joseph. Transcendental numbers ; Queen's papers n° 7, Kingston, 1966.

MAHLER, Kurt-1931. Zur approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. J. reine angew. Math., 166 (1932), 118-150.

MAHLER, Kurt-1960. An application of Jensen's formula to polynomials ; Mathematika, 7 (1960), 98-100.

MAHLER, Kurt-1961. On some inequalities for polynomials in several variables ; J. London Math. Soc., 37 (1962), 341-344.

MAHLER, Kurt-1969. Lectures on transcendental numbers ; Proc. Symposia Pure Maths (American Math. Soc.), 20 (1971), 248-274.

MAHLER, Kurt-1971. An arithmetic remark on entire periodic functions ; Bull. Austral. Math. Soc., 5 (1971), 191-195.

MIGNOTTE, Maurice-1973. An inequality about factors of polynomials ; Math. of Computation

NARASIMHAN, Raghavan-1971. Un analogue holomorphe du théorème de Lindemann ; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 21 (1971), 271-278.

POORTEN, A.J. van der-1969. A generalisation of Turán's main theorems to binomials and logarithms ; Bull. Austral. Math. Soc., 2 (1970), 183-195.

POORTEN, A.J. van der-1970. On the arithmetic nature of definite integrals of rational functions ; Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 451-456.

RAMACHANDRA, K.-1967. Contributions to the theory of transcendental numbers ; Acta Arith., 14 (1968), 65-88.

RAMACHANDRA, K.-1968. Lectures on transcendental numbers ; the Ramanujan Institute lectures notes, Madras, 1969 ; 73pp.

RUDIN, Walter. Real and complex analysis ; Mc Graw-Hill series in higher Mathematics, 1965.

SCHMIDT, Wolfgang M.-1971. Approximation to algebraic numbers ; l'Enseignement Mathématique, 17 (1971), 188-253.

SCHNEIDER, Theodor-1934. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen ; J. reine angew. Math., 172 (1934), 65-69.

SCHNEIDER, Theodor-1948. Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise ; Math. Ann., 121 (1949), 131-140.

SCHNEIDER, Theodor,T. Einführung in die transzendenten Zahlen ; Springer, Berlin, 1957 [Trad. franç., Gauthier-Villars, Paris, 1959].

SERRE, Jean-Pierre-1966. Dépendance d'exponentielles p-adiques ; Sem. Delange Pisot Poitou, 1965/66, n° 15, 14pp.

SERRE, Jean-Pierre-1969. Travaux de Baker ; Sem. Bourbaki, 1969/70, n° 368, 14pp. (= Lectures notes in Math., 180 (1971), 73-86).

SHOREY, T.N.-1972. Algebraic independence of certain numbers in p-adic domain ; Nederl. Akad. Wet. Proc. ; ser. A, 75 (1972), 423-442 (= Indag. Math., 34, 1972).

SIEGEL, Carl Ludwig-1931. Über die Perioden elliptischer Funktionen ; J. reine angew. Math., 167 (1932), 62-69.

SIEGEL, Carl Ludwig,T. Transcendental numbers ; Ann. of Math. Studies, Princeton, n° 16 (1949), 102pp.

SMELEV, A.A.-1968. A.O. Gel'fond's method in the theory of transcendental numbers ; Mat. Zametki, 10 (1971), 415-426 [Trad. angl., Math. Notes, 10 (1972), 672-678].

SMELEV, A.A.-1971. On the question of algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers ; Mat. Zametki, 11 (1972), 635-644 [Trad. angl., Math. Notes, 11 (1972), 387-392].

STOLARSKY, Kenneth B.-1972. Extrapolation techniques related to transcendence proofs; (preliminary report : Notices Amer. Math. Soc., 19 (1972), A-386 ; 693-A26).

STRAUS, E.G.-1949. On entire functions with algebraic derivatives at certain algebraic points ; Ann. of Math., 52 (1950), 188-198.

TIJDEMAN, Robert-1969. On the distribution of the values of certain functions ; Academisch Proefschrift, Amsterdam, 1969.

TIJDEMAN, Robert-1970a. On the number of zeros of general exponential polynomials ; Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A, 74 (1971), 1-7 (= Indag. Math., 33, 1971).

TIJDEMAN, Robert-1970b. On the algebraic independence of certain numbers ; Proc. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A, 74 (1971), 146-162 (= Indag. Math., 33, 1971).

WALDSCHMIDT, Michel-1971a. Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle ; Bull. Soc. Math. France, 99 (1971), 285-304.

WALDSCHMIDT, Michel-1971b. Solution du huitième problème de Schneider ; J. Number theory, 5 (1973), 191-202.

WALDSCHMIDT, Michel-1972a. Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes ; Acta Arith., 23 (1973), 19-88.

WALDSCHMIDT, Michel-1972b. Utilisation de la méthode de Baker dans des problèmes d'indépendance algébrique ; C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 275 (1972), 1215-1217.

WALDSCHMIDT, Michel-1973a. Transcendance dans les variétés de groupes ; Sem. Delange Pisot Poitou, 1972/73, n° 23 , 16 pp.

WALDSCHMIDT, Michel-1973b. Initiation aux nombres transcendants ; Publ. Math. Bordeaux, 1 (1973), 1-39 (à paraître en 1974 dans l'Enseignement Math.).

# INDEX