

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Series: Institut de Mathématique, Faculté des Sciences d'Orsay

Advisor: J. P. Kahane

402

---

**Michel Waldschmidt**

Université de Paris-Sud, Orsay/France

**Nombres Transcendants**

---



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1974

**Library of Congress Cataloging in Publication Data**

Waldschmidt, Michel, 1946-  
Nombres transcendants.

(Lecture notes in mathematics, 402)

"Cours donné à l'Université de Paris-Orsay 1973."

Bibliography: p.

I. Numbers, Transcendental. I. Title. II. Series:

Lecture notes in mathematics (Berlin) 402.

QA3.L28 no. 402 [QA247.5] 510'.8s [512'.73]

74-13826

---

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 10F35  
Secondary: 33A10, 30A68,  
12F20, 10F05

---

ISBN 3-540-06874-0 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York  
ISBN 0-387-06874-0 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1974.

Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

## Introduction

Ce premier cours sur les nombres transcendants a été enseigné à Orsay, en 1973. Comme il s'agissait d'un cours semestriel, il n'était pas question de traiter tous les aspects de cette théorie ; le choix s'est porté sur l'étude des valeurs de la fonction exponentielle. A l'exception de la méthode de Lindemann Weierstrass et des résultats effectifs (mesures de transcendance, minoration effective de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, indépendance d'exponentielles et d'un U-nombre,...), il semble que tous les résultats actuellement connus sur la transcendance ou l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions exponentielles soient présentés ici, dans le cours ou en exercices.

La théorie des nombres transcendants possède l'avantage de fournir des énoncés (et des conjectures) très aisément compréhensibles par des personnes non initiées ; de plus, et c'est peut-être moins connu, les démonstrations nécessitent également très peu de connaissances préalables. Le chapitre 1 contient les notations et les principaux résultats (classiques) qui sont utilisés dans toute la suite.

Les énoncés de la première partie (chapitres 2, 3 et 4) concernent les valeurs de fonctions méromorphes en une suite de points ; les applications les plus intéressantes utilisent les variétés de groupe, mais, par souci de simplicité, nous nous contenterons du théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de  $a^b$ , d'un théorème de Lang sur la transcendance des nombres  $e^{x_i y_j}$ , et du théorème de Hermite Lindemann sur  $e^\alpha$ . Nous appelons "méthode de Schneider" (chapitre 2) celle qui consiste à construire une fonction s'annulant en de nombreux points distincts, et

"méthode de Gel'fond" (chapitre 3) celle qui impose, en plus, un ordre de multiplicité élevé à ces zéros. Par exemple, pour la transcendance de  $a^b$ , la méthode de Schneider utilise les remarques suivantes :

si  $a$ ,  $b$  et  $a^b$  sont des nombres algébriques, avec  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$  et  $b \notin \mathbb{Q}$ , alors les deux fonctions

$$z, a^z$$

sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ , et prennent des valeurs algébriques pour

$$z = i + jb, (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$$

tandis que la méthode de Gel'fond est fondée sur les propriétés suivantes :

si  $a$ ,  $b$  et  $a^b$  sont trois nombres algébriques, avec  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$  et  $b \notin \mathbb{Q}$ , alors les deux fonctions

$$e^z, e^{bz}$$

sont algébriquement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ , prennent des valeurs algébriques en

$$z = j \cdot \text{Log } a, j \in \mathbb{Z},$$

et vérifient des équations différentielles à coefficients algébriques.

A partir de ces remarques, la structure des deux méthodes est la même : on construit (en utilisant le principe des tiroirs de Dirichlet) une fonction auxiliaire ayant de nombreux zéros ; on considère ensuite un point où cette fonction ne s'annule pas ; on majore la valeur de la fonction en ce point (en utilisant des propriétés analytiques), puis on minore cette valeur (grâce à des considérations arithmétiques) ce qui permet d'obtenir le résultat voulu.

On peut généraliser ces résultats en remplaçant le corps  $\bar{\mathbb{Q}}$  des nombres algébriques par une extension de  $\mathbb{Q}$  de "type de transcendance" fini (chapitre 4). Mais, pour la fonction exponentielle, on peut faire mieux (chapitre 7), au prix de quelques complications techniques : on utilise un critère de transcendance de Gel'fond (chapitre 5) ainsi qu'un résultat de Tijdeman sur la répartition des zéros de polynômes exponentiels (chapitre 6).

Cette étude prend fin par un exposé de la méthode de Baker (chapitre 8). Comme compléments à ce cours, nous étudierons (en appendice) quelques théorèmes locaux, concernant non plus des fonctions entières, mais des fonctions analytiques dans un disque.

Les différents chapitres sont, dans une large mesure, indépendants les uns des autres ; en particulier chacun des chapitres 2, 3, 4, 6 et appendice peut être lu séparément.

Les exercices proposés sont de difficulté et d'intérêt inégaux ; certains sont des applications directes de théorèmes étudiés auparavant, d'autres au contraire apportent des développements et des compléments à certains résultats du cours. L'ordre logique n'a pas toujours été respecté pour les exercices, mais le lecteur scrupuleux pourra vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

Ces pages ont été dactylographiées, avec beaucoup de soin et de compétence, par Madame BONMARDEL ; je l'en remercie vivement. Je suis également reconnaissant à Maurice MIGNOTTE, Pieter Leendert CIJSOUW, et Peter BUNDSCHUH, qui ont relu le manuscrit et y ont apporté quelques corrections.

Orsay, juillet 1973.

## Sommaire

### Chapitre 1

#### PRELIMINAIRES

1.1 Généralités sur les extensions de corps.....	1
1.2 Corps de nombres.....	3
1.3 Un lemme de Siegel pour les corps de nombres.....	9
1.4 Extensions transcendantes.....	14
1.5 Généralités sur les fonctions complexes.....	19
1.6 Références.....	25
Exercices.....	26

### Chapitre 2

#### LA METHODE DE SCHNEIDER

2.1 Une première démonstration du théorème de Gel'fond Schneider.....	42
2.2 Valeurs algébriques de fonctions entières.....	49
2.3 Références.....	58
Exercices.....	60

### Chapitre 3

#### LA METHODE DE GEL'FOND

3.1 Le théorème de Hermite Lindemann.....	71
3.2 Une deuxième démonstration du théorème de Gel'fond Schneider.....	75
3.3 Fonctions satisfaisant des équations différentielles.....	77
3.4 Références.....	87
Exercices.....	89

## VII

### Chapitre 4

#### TYPE DE TRANSCENDANCE

4.1 Définition, et énoncé d'un premier résultat.....	100
4.2 Taille sur une extension de $\mathbb{Q}$ de type fini.....	103
4.3 Un lemme de Siegel pour les extensions de $\mathbb{Q}$ de type fini.....	117
4.4 Démonstration du premier résultat.....	120
4.5 Indépendance algébrique des valeurs de fonctions méromorphes.....	125
4.6 Références.....	129
Exercices.....	133

### Chapitre 5

#### UN CRITERE DE TRANSCENDANCE

5.1 Énoncés des résultats.....	144
5.2 Principe de la démonstration.....	146
5.3 Lemmes auxiliaires.....	147
5.4 Démonstration du critère.....	153
5.5 Références.....	155
Exercices.....	156

### Chapitre 6

#### ZEROS DE POLYNOMES EXPONENTIELS

6.1 Énoncé du théorème, et principes de la démonstration.....	164
6.2 Majoration du nombre de zéros d'une fonction holomorphe.....	166
6.3 Une formule d'interpolation.....	167
6.4 Démonstration du théorème.....	170
6.5 Références.....	173
Exercices.....	175

### Chapitre 7

#### PROPRIETES D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

7.1 Complément à un théorème de Lang.....	183
7.2 Complément au théorème de Gel'fond Schneider.....	188
7.3 Complément au théorème de Hermite Lindemann.....	197
7.4 Le huitième problème de Schneider.....	201
7.5 Références, conjectures.....	206
Exercices.....	211

VIII

Chapitre 8

LA METHODE DE BAKER

8.1 Indépendance linéaire de logarithmes.....	227
8.2 Principe de la démonstration.....	229
8.3 Démonstration du théorème de Baker.....	234
8.4 Un énoncé effectif (sans démonstration).....	238
Exercices.....	241

Appendice A

THEOREMES LOCAUX

A.1 La méthode de Schneider.....	248
A.2 La méthode de Gel'fond.....	251
A.3 Type de transcendance.....	251
A.4 Cas p-adique.....	253
A.5 Références.....	257
Exercices.....	260
Bibliographie.....	271
Index.....	275