Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Series: Institut de Mathématique, Faculté des Sciences d'Orsay
Advisor: J. P. Kahane

402

Michel Waldschmidt
Université de Paris-Sud, Orsay/France

Nombres Transcendants

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1974

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Waldschmidt, Michel, 1946-
Nombres transcendants.

(Lecture notes in mathematics, 402)
"Cours donné à l'Université de Paris-Orsay 1973."
Bibliography: p.
1. Numbers, Transcendental. I. Title. II. Series:
Lecture notes in mathematics (Berlin) 402.
QA3.L28 no. 402 [QA247.5] 510'.8s [512'.73]
74-13826

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 10F35
Secondary: 33A10, 30A68, 12F20, 10F05

ISBN 3-540-06874-0 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-06874-0 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

Introduction

Ce premier cours sur les nombres transcendants a été enseigné à Orsay, en 1973. Comme il s'agissait d'un cours semestriel, il n'était pas question de traiter tous les aspects de cette théorie ; le choix s'est porté sur l'étude des valeurs de la fonction exponentielle. A l'exception de la méthode de Lindemann Weierstrass et des résultats effectifs (mesures de transcendance, minoration effective de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, indépendance d'exponentielles et d'un U-nombre,...), il semble que tous les résultats actuellement connus sur la transcendance ou l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions exponentielles soient présentés ici, dans le cours ou en exercices.

La théorie des nombres transcendants possède l'avantage de fournir des énoncés (et des conjectures) très aisément compréhensibles par des personnes non initiées ; de plus, et c'est peut-être moins connu, les démonstrations nécessitent également très peu de connaissances préalables. Le chapitre 1 contient les notations et les principaux résultats (classiques) qui sont utilisés dans toute la suite.

Les énoncés de la première partie (chapitres 2, 3 et 4) concernent les valeurs de fonctions méromorphes en une suite de points ; les applications les plus intéressantes utilisent les variétés de groupe, mais, par souci de simplicité, nous nous contenterons du théorème de Gel'fond Schneider sur la transcendance de a^b, d'un théorème de Lang sur la transcendance des nombres $e^{x_i y_j}$, et du théorème de Hermite Lindemann sur e^α. Nous appelons "méthode de Schneider" (chapitre 2) celle qui consiste à construire une fonction s'annulant en de nombreux points distincts, et "méthode de Gel'fond" (chapitre 3) celle qui impose, en plus, un ordre de multiplicité élevé à ces zéros. Par exemple, pour la transcendance de a^b , la méthode de Schneider utilise les remarques suivantes :

si a , b et a^b sont des nombres algébriques, avec $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \notin \mathbb{Q}$, alors les deux fonctions

$$z \, , \, a^z$$

sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, et prennent des valeurs algébriques pour

$$z = i + jb \, , \, (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \, ;$$

tandis que la méthode de Gel'fond est fondée sur les propriétés suivantes :

si a , b et a^b sont trois nombres algébriques, avec $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \notin \mathbb{Q}$, alors les deux fonctions

$$e^z \, , \, e^{bz}$$

sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, prennent des valeurs algébriques en

$$z = j . \mathrm{Log}\, a \, , \, j \in \mathbb{Z} \, ,$$

et vérifient des équations différentielles à coefficients algébriques.

A partir de ces remarques, la structure des deux méthodes est la même : on construit (en utilisant le principe des tiroirs de Dirichlet) une fonction auxiliaire ayant de nombreux zéros ; on considère ensuite un point où cette fonction ne s'annule pas ; on majore la valeur de la fonction en ce point (en utilisant des propriétés analytiques), puis on minore cette valeur (grâce à des considérations arithmétiques) ce qui permet d'obtenir le résultat voulu.

On peut généraliser ces résultats en remplaçant le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques par une extension de $\mathbb{Q}$ de "type de transcendance" fini (chapitre 4). Mais, pour la fonction exponentielle, on peut faire mieux (chapitre 7), au prix de quelques complications techniques : on utilise un critère de transcendance de Gel'fond (chapitre 5) ainsi qu'un résultat de Tijdeman sur la répartition des zéros de polynômes exponentiels (chapitre 6).

Cette étude prend fin par un exposé de la méthode de Baker (chapitre 8). Comme compléments à ce cours, nous étudierons (en appendice) quelques théorèmes locaux, concernant non plus des fonctions entières, mais des fonctions analytiques dans un disque.

Les différents chapitres sont, dans une large mesure, indépendants les uns des autres ; en particulier chacun des chapitres 2, 3, 4, 6 et appendice peut être lu séparément.

Les exercices proposés sont de difficulté et d'intérêt inégaux ; certains sont des applications directes de théorèmes étudiés auparavant, d'autres au contraire apportent des développements et des compléments à certains résultats du cours. L'ordre logique n'a pas toujours été respecté pour les exercices, mais le lecteur scrupuleux pourra vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

Ces pages ont été dactylographiées, avec beaucoup de soin et de compétence, par Madame BONNARDEL ; je l'en remercie vivement. Je suis également reconnaissant à Maurice MIGNOTTE, Pieter Leendert CIJSOUW, et Peter BUNDSCHUH, qui ont relu le manuscrit et y ont apporté quelques corrections.

Orsay, juillet 1973.

Sommaire

Chapitre 1

PRELIMINAIRES

Chapitre 2

LA METHODE DE SCHNEIDER

Chapitre 3

LA METHODE DE GEL'FOND

Chapitre 4

TYPE DE TRANSCENDANCE

Chapitre 5

UN CRITERE DE TRANSCENDANCE

Chapitre 6

ZEROS DE POLYNOMES EXPONENTIELS

Chapitre 7

PROPRIETES D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Chapitre 8

LA METHODE DE BAKER

Appendice A

THEOREMES LOCAUX