Séminaire P.LELONG
(Analyse)
16e année, 1975/76.

27 Avril 1976

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (II)

par Michel WALDSCHMIDT

Dans son étude sur les fonctions entières d'une variable dont les dérivées en certains points sont algébriques, E.G.STRAUS démontrait un résultat général ([8] , theorem 4) dont voici une conséquence : si f est une fonction entière transcendante dans $\mathbb{C}$, d'ordre $\leq \rho$, et si K est un corps de nombres, l'ensemble des $w \in K$, tels que $f^{(k)}(w) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est fini, et a au plus $\rho\,[K : \mathbb{Q}]$ éléments. Il posait à la fin de son papier ([8] , p. 198) le problème de la généralisation de ce résultat aux fonctions méromorphes, ou aux fonctions de plusieurs variables complexes.

La généralisation aux fonctions méromorphes d'une variable (avec une borne moins précise pour le nombre de points) est une conséquence d'un résultat de Th.SCHNEIDER, obtenu indépendamment à la même époque et par une méthode complétement différente ([6] , Satz III, et [7], Satz 12). On peut remarquer que la méthode de Straus ne peut s'appliquer qu'à des fonctions transcendantes en des points algébriques, tandis que celle de Schneider concerne plus généralement les valeurs de deux fonctions algébriquement indépendantes.

Un premier essai de généralisation des résultats de Straus aux fonctions de plusieurs variables fut entrepris par A.BAKER en 1966 [1], par une troisième méthode, reposant sur des formules d'interpolation (voir à ce sujet [10] § 1) ; ainsi, quand f est une fonction entière transcendante dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre $\leq \rho$, l'ensemble des $w \in \mathbb{C}^n$ où toutes les dérivées partielles de f prennent des valeurs dans $\mathbb{Z}$ ne peut pas contenir tous les points à coordonnées dans $\mathbb{Z}$ d'un hypercube de côté $\geqslant \rho$. Le résultat de BAKER est en fait un peu plus précis, mais la méthode ne paraît pas pouvoir s'adapter à des situations plus générales (fonctions méromorphes, points à coordonnées algébriques).

Dans l'introduction de l'exposé précédent [10] , nous avions mentionné une conjecture de NAGATA [4] , qui a été résolue par BOMBIERI [3], et qui suggère que la généralisation naturelle de la finitude d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est la propriété, pour un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, d'être contenu dans une hypersurface algébrique; au lieu de majorer le cardinal de l'ensemble, on majore alors le degré de l'hypersurface.

C'est dans ce contexte que nous allons généraliser les résultats de Straus aux fonctions méromorphes de n variables complexes. La différence avec la situation de BOMBIERI [3] provient du fait que nous ne supposerons pas que les fonctions considérées satisfont des équations différentielles. D'autre part nous essayerons d'obtenir des majorations précises pour les degrés des hypersurfaces ; en fait dans le cas $n = 1$ nous obtiendrons mieux que Straus, puisque notre majoration sera : $(\rho - 1)\,[K : \mathbb{Q}] + 1$. Malheureusement la présence de plusieurs variables introduit, à l'heure actuelle, des termes parasites, et à une borne C pour $n = 1$ correspond la borne $nC + 2n$ pour $n \geqslant 2$. Il semble raisonnable d'espérer obtenir un jour la même borne C pour toutes les valeurs de n . En attendant, il est commode de noter :

$$n_* = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ n & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases} ;$$

ainsi $nC + 2n_*$ vaut C pour $n = 1$, et $nC + 2n$ pour $n \geqslant 2$.

Nous considérerons d'abord (§ 1) les points algébriques de $\mathbb{C}^n$ où une fonction transcendante d'ordre fini a toutes ses dérivées dans $\mathbb{Z}$; nous généraliserons ensuite (§ 2) à des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes ; le théorème 2.2. contient tous les autres énoncés. Après avoir étudié (§ 3) la croissance des coefficients de Taylor de fonctions entières ou méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, nous démontrerons le théorème 2.2. La partie arithmétique (§ 4) de cette démonstration sera suivie d'une discussion (§ 5) sur les zéros de fonctions entières, avec la fin de la démonstration du théorème 2.2., l'énoncé d'une conjecture, et quelques justifications de cette conjecture. Cette étude nous conduira à un lien surprenant entre les zéros d'une fonction entière et les degrés de certaines hypersurfaces algébriques.

§ 1. - Fonctions transcendantes en des points algébriques.

Nous dirons qu'une fonction f, entière dans $\mathbb{C}^n$, est d'ordre ϱ si

$$\varrho = \limsup_{R \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} \|f\|_R}{\operatorname{Log} R} ,$$

où $\|f\|_R = \sup_{z \in B_R(0)} |f(z)|$ est le maximum de $|f(z)|$ sur la boule euclidienne $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C}^n ; \|z\| \leqslant R\}$. Une définition équivalente de ϱ est (cf. (3.3.) ci-dessous):

$$\varrho = \limsup_{|k| \to \infty} \frac{|k| \operatorname{Log} |k|}{- \operatorname{Log} \frac{|D^k f(o)|}{k!}} ;$$

en fait nous n'utiliserons que l'inégalité :

pour tout $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Log} |D^k f(o)| \leqslant (1 - \frac{1}{\varrho + \varepsilon}) |k| \operatorname{Log} |k| + O(|k|)$, qui est une conséquence facile des inégalités de Cauchy (cf. lemme 3.1. ci-dessous). Cette inégalité montre que, si $D^k f(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, et si $\varrho < 1$, alors $D^k f(0) = 0$ pour $|k|$ suffisamment grand, autrement dit f est un polynôme. Par translation on obtient le résultat suivant

LEMME 1.1. - *Si f est une fonction entière transcendante dans* $\mathbb{C}^n$ *et s'il existe* $w \in \mathbb{C}^n$ *tel que*

$$D^k f(w) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^n,$$

alors f est au moins d'ordre 1.

On pourrait aussi, quand f est d'ordre 1, minorer son type [8], mais nous ne le ferons pas.

Quand f est une fonction entière transcendante dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre fini, nous allons étudier l'ensemble des points $w \in \mathbb{C}^n$, à coordonnées algébriques (autrement dit $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$), où f a toutes ses dérivées dans $\mathbb{Z}$. Par exemple soit $a \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq 0$; la fonction entière transcendante $z \mapsto \exp(a.z)$ est d'ordre 1, et, d'après le théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de e^{α} [4, 7, 10], l'ensemble considéré est formé des $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ qui annulent le polynome $a.z = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$; autrement dit cet ensemble est l'intersection avec $\overline{\mathbb{Q}}^n$ d'un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. Plus généralement, si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est un polynôme en n variables à coefficients algébriques, l'ensemble des $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ correspondant à la fonction $z \mapsto \exp(P(z))$ est contenu dans l'hypersurface algébrique $P(w) = 0$.

THÉORÈME 1.2. - <u>Soit</u> f <u>une fonction entière transcendante dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre fini</u> ρ. <u>Soit</u> δ <u>un entier positif.</u> <u>L'ensemble des</u> $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$, <u>tels que</u> $[\mathbb{Q}(w) : \mathbb{Q}] \leqslant \delta$ <u>et</u>

$$D^k f(w) \in \mathbb{Z} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad k \in \mathbb{N}^n$$

<u>est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal</u> <u>à</u> $n\delta(\rho - 1) + n + 2n_*$.

Il est particulièrement intéressant de remarquer que la majoration du degré de l'hypersurface ne dépend pas de δ quand $\rho = 1$. Grâce au lemme 5.2. ci-dessous, cela permet de déduire du théorème 1.2. le corollaire suivant

COROLLAIRE 1.3. - <u>Soit</u> f <u>une fonction entière transcendante dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre 1. L'ensemble des</u> $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ <u>tels que</u> $D^k f(w) \in \mathbb{Z}$ <u>pour tout</u> $k \in \mathbb{N}^n$ <u>est contenu dans une hypersurface algébrique de degré au plus</u> $n + 2n_*$.

Dans le cas n = 1, le corollaire 1.3. peut être étendu aux fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ ([2], critère I). Pour n quelconque, on peut généraliser le théorème 1.2. aux fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, mais on obtient une moins bonne majoration du degré de l'hypersurface.

Nous dirons qu'une fonction f, méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, est d'ordre inférieur ou égal à ρ, si elle peut s'écrire comme quotient de deux fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à ρ. On vérifie (cf. lemme 3.6. ci-dessous) que cette définition est cohérente.

THÉORÈME 1.4. - <u>Soit</u> f <u>une fonction méromorphe transcendante dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre inférieur ou égal à</u> ρ. <u>Soit</u> δ <u>un entier positif. L'ensemble des</u> $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$, <u>où</u> f <u>est analytique, pour lesquels</u> $[\mathbb{Q}(w) : \mathbb{Q}] \leq \delta$ <u>et</u>

$$D^k f(w) \in \mathbb{Z} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad k \in \mathbb{N}^n ,$$

<u>est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à</u> $n\delta\rho + 2n_*$.

On peut en fait déduire les théorèmes 1.2. et 1.4. d'un énoncé très général dans lequel on suppose seulement que les nombres $D^k f(w)$ sont algébriques ; pour des raisons techniques de démonstration, on est contraint d'imposer des conditions sur les dénominateurs et les conjugués de ces nombres algébriques (concernant le cas n = 1, voir [6] Satz III, [7], Satz 12, [1] Theorem 4, et [2] critère I). Ces conditions sont automatiquement vérifiées quand les fonctions considérées satisfont des équations différentielles d'un certain type ([7], Satz 13 ; [4] chap. IV ; [3]) ; mais néanmoins ces restrictions sont tout-à-fait indésirables.

CONJECTURE 1.5. - <u>Soit</u> f <u>une fonction méromorphe transcendante dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre inférieur ou égal à</u> ρ. <u>L'ensemble des</u> $w \in \overline{\mathbb{Q}}^n$, <u>où</u> f <u>est analytique, et pour lesquels</u>

$$D^k f(w) \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad k \in \mathbb{N}^n$$

<u>est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à</u> ρ.

§ 2. - Fonctions algébriquement indépendantes.

Au lieu de considérer une fonction transcendante f, c'est-à-dire une fonction $f(z) = f(z_1,\dots,z_n)$ telle que $z_1,\dots, z_n, f(z_1,\dots,z_n)$ soient algébriquement indépendantes, on peut considérer plus généralement n + 1 fonctions algébriquement indépendantes.

THÉORÈME 2.1. - *Soient $f_1,\dots,f_{n+1}$ des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_{n+1}$ respectivement. L'ensemble des $w \in \mathbb{C}^n$, où $f_1,\dots,f_{n+1}$ sont toutes analytiques, et où*

$$D^k f_j(w) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^n, \; j = 1, \dots, n+1,$$

est contenu dans une hypersurface algébrique de degré au plus
$n(\rho_1 + \dots + \rho_{n+1}) + 2n_*$.

On peut améliorer légèrement cette borne, en considérant d fonctions $(d > n)$, sous la forme $\frac{n}{d-n}(\rho_1 + \dots + \rho_d) + 2n_*$ (cf. [9] exercice 3.3.g).

Pour n'effectuer qu'une démonstration, nous allons formuler un énoncé général qui contiendra tous les énoncés précédents.

THÉORÈME 2.2. - *Soit ν un entier, $1 \leqslant \nu \leqslant n+1$, et soient $f_1,\dots,f_\nu$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre inférieur ou égal à $\rho_1,\dots,\rho_\nu$ respectivement ; on suppose que $f_1,\dots, f_\nu$ sont algébriquement indépendantes sur le corps $\mathbb{Q}(z_1,\dots, z_{n-\nu+1})$. Soit δ un entier positif. L'ensemble des $w = (w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{C}^n$, tels que*

1. *les nombres $w_1,\dots,w_{n-\nu+1}$ sont algébriques, et*

$$[\mathbb{Q}(w_1,\dots,w_{n-\nu+1}) : \mathbb{Q}] \leqslant \delta ;$$

2. *pour* $1 \leqslant j \leqslant \nu$, f_j *est analytique en* w ;
3. *pour* $1 \leqslant j \leqslant \nu$ *et* $k \in \mathbb{N}^n$, $D^k f_j(w) \in \mathbb{Z}$,

est contenu dans une hypersurface algébrique de degré Δ inférieur ou égal à

$$n\delta(\rho_1 + \dots + \rho_\nu) + 2n_*,$$

<u>de plus, si</u> $f_1,\dots,f_\nu$ <u>sont entières, alors</u>

$$\Delta \leq n\delta(\rho_1 + \dots + \rho_\nu) - n(\delta - 1) + 2n_* .$$

<u>Remarque 2.3.</u> Nous verrons au § 4 que l'hypothèse $D^k f_j(w) \in \mathbb{Z}$ peut être remplacée par $D^k f_j(w) \in \mathbb{Z}[i]$ par exemple, sans que les majorations de Δ soient modifiées.

Quand on remplace l'hypothèse $D^k f_j(w) \in \mathbb{Z}$ par $D^k f_j(w) \in \overline{\mathbb{Q}}$ (moyennant des conditions techniques comme nous l'avons dit à la fin du § 1), on retrouve les propriétés arithmétiques de fonctions périodiques que nous avions indiquées dans [10] § 3.

Bien que les énoncés que nous avons obtenus soient particulièrement simples (du fait que l'on ne considère que des valeurs entières des dérivées), ils contiennent néanmoins certains résultats de transcendance. Par exemple la transcendance de nombres tels que π, Log 2, ou plus généralement log $\frac{p}{q}$ pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \neq 0$ (avec $\pi = -i \log(-1)$) se déduit de 1.3. ($n = 1$, $f(z) = q\, e^z$, $w_o = 0$, $w_1 = \log \frac{p}{q}$), tandis que l'irrationnalité de e^π est une conséquence du théorème 2.1., grâce à la remarque 2.3. (si $e^\pi = \frac{u}{v}$, considérer les fonctions $v\, e^z$ et $u\, e^{iz}$ aux points $0, \pi$ et $i\pi$).

D'autre part nous avons supposé que chaque fonction méromorphe f_j s'écrivait sous la forme g_j/h_j, avec g_j, h_j entières d'ordre au plus ρ_j ; nous n'avons pas supposé que, en chaque point considéré w, il existait une telle écriture avec $h_j(w) \neq 0$ (cette condition peut toujours être réalisée; c'est banal dans le cas $n=1$, mais pas dans le cas $n \geq 2$) ; cette hypothèse intervenait explicitement chez LANG ([4] Chapitre IV, dans la définition d'une fonction méromorphe d'ordre inférieur ou égal à ρ définie en un point), et implicitement chez BOMBIERI ([3] , p. 281, dans la démonstration du lemme 4, où il est nécessaire de supposer $g(\zeta') \neq 0$). L'astuce qui nous permet ici de nous débarrasser simplement de cette hypothèse superflue est due à David MASSER (M.P.C.P.S.,79 (1976),p. 63).

§ 3. - Quelques lemmes sur les fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$.

Nous allons étudier la croissance des coefficients de Taylor d'une fonction entière d'ordre fini. Au § 1, nous avons défini l'ordre (exact) d'une fonction entière. Il est commode d'introduire l'ordre strict : une fonction f, entière dans $\mathbb{C}^n$, sera dite d'ordre strict inférieur ou égal à ϱ si

$$\operatorname{Log}\|f\|_R \ll R^{\varrho} \quad \text{quand} \quad R \to \infty.$$

Il est bien normal que l'ordre d'une fonction entière soit lié à la rapidité avec laquelle décroissent ses coefficients de Taylor, disons à l'origine. Nous n'utiliserons que le fait qu'une fonction d'ordre fini a de "petits" coefficients (lemme 3.1.), mais il paraît intéressant d'en indiquer la réciproque (remarque 3.2.).

LEMME 3.1. - Soit f une fonction analytique au voisinage d'un point w de $\mathbb{C}^n$. Il existe un nombre $c_1 > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\operatorname{Log}\left|\frac{D^k f(w)}{k!}\right| \leqslant c_1 \left(|k| + 1\right) .$$

De plus, si f est entière d'ordre strict inférieur ou égal à ϱ, il existe $c_2 > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\operatorname{Log}\left|\frac{D^k f(w)}{k!}\right| + \frac{|k|}{\varrho} \operatorname{Log}(|k| + 1) \leqslant c_2(|k| + 1).$$

On remarquera que la première inégalité exprime simplement que la série de Taylor de f en w converge dans un voisinage de w.

Démonstration du lemme 3.1.

►Il n'y a pas de restriction à supposer w = 0. Notons $a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0)$, $(k \in \mathbb{N}^n)$ les coefficients de Taylor de f à l'origine. On considère un polydisque D(0,r) au voisinage duquel f est analytique, et on note $|f|_r$ le maximum de f sur ce polydisque. Les inégalités de Cauchy :

$$|a_k| \leqslant r^{-|k|} . |f|_r \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^n$$

entraînent la première inégalité. Supposons maintenant que f est entière d'ordre strict $\leqslant \rho$; pour tout $r > 1$, on a

$$\operatorname{Log} |a_k| \leqslant - |k| \operatorname{Log} r + c_2 r^{\rho} ,$$

où c_2 ne dépend que de f (on a supposé $w = 0$) .

Choisissons $r = |k|^{1/\rho}$; on obtient

$$\operatorname{Log} |a_k| \leqslant - \frac{1}{\rho} |k| \operatorname{Log} |k| + c_2 |k|$$

pour $|k|$ suffisamment grand, ce qui permet de conclure ◀

<u>Remarque 3.2.</u> Inversement, <u>si</u> $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ <u>est une suite (indexée par</u> $\mathbb{N}^n$<u>) de nombres complexes, telle que</u>

$|a_k| \leqslant |k|^{-\lambda |k|}$ <u>pour</u> $|k|$ <u>suffisamment grand, avec</u> $\lambda > 0$, <u>alors la fonction</u>

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k$$

<u>est entière dans</u> $\mathbb{C}^n$, <u>d'ordre strict</u> $\leqslant \frac{1}{\lambda}$.

▶ Pour le démontrer on écrit (formellement)

$$\|f\|_R \leqslant \Big(\sum_{|k| < K_o} |a_k|\Big) R^{K_o} + \sum_{K=K_o}^{\infty} (K + 1)^n \frac{R^K}{K^{\lambda K}} ,$$

et, pour K suffisamment grand, on majore

$$(K + 1)^n \frac{R^K}{K^{\lambda K}} \quad \text{par} \quad \frac{(c_3 R^{1/\lambda})^{\lambda K}}{(\lambda K)^{\lambda K}} , \text{ d'où}$$

$$\|f\|_R \leqslant \exp(c_4 R^{1/\lambda}) \text{ pour tout } R > 1$$ ◀

Jointe au lemme 3.1., la remarque 3.2. montre que l'on a, pour f entière dans $\mathbb{C}^n$ et $a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0)$:

$$(3.3.) \quad \limsup_{R \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} \|f\|_R}{\operatorname{Log} R} = \limsup_{|k| \to \infty} \frac{|k| \operatorname{Log} |k|}{- \operatorname{Log} |a_k|} .$$

Pour les applications que nous avons en vue, nous allons utiliser le lemme 3.1. pour étudier la croissance des coefficients de Taylor de fonctions du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_\nu^{\lambda_\nu}$. L'inégalité que nous obtiendrons dans le cas de fonctions analytiques au voisinage d'un point est essentiellement celle de [2] prop. 1 bis, qui est un raffinement de [7] , chap. II, formule (21). Dans le cas de fonctions entières d'ordre fini, nous obtiendrons des estimations meilleures, et c'est cette amélioration qui nous permet d'avoir des majorations plus précises que celles de Straus (ce point est en particulier fondamental pour obtenir le corollaire 1.3.).

Commençons par des fonctions du type f^λ.

LEMME 3.4. - <u>Soit f une fonction analytique au voisinage d'un point $w \in \mathbb{C}^n$. Il existe $c_1 > 0$ tel que, pour tout Λ, K entiers positifs, et $\lambda \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^n$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$, $|k| = K$, on ait</u>

$$\operatorname{Log}\left|\frac{1}{k!} D^k f^\lambda(w)\right| \leqslant c_1(K+\Lambda) + n\Lambda \operatorname{Log}(K+1) .$$

<u>De plus, si f est entière dans $\mathbb{C}^n$, d'ordre strict $\leqslant \rho$, il existe c_2 tel que</u>

$$\max_{\substack{0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \\ |k| = K}} \operatorname{Log}\left|\frac{1}{k!} D^k f^\lambda(w)\right| \leqslant -\frac{1}{\rho} K \operatorname{Log}\left(\frac{K}{\Lambda}+1\right) + c_2(K+\Lambda) + n\Lambda \operatorname{Log}(K+1) .$$

<u>Démonstration</u>.

On écrit la formule de Leibnitz :

$$\frac{1}{k!} D^k f^\lambda = \sum_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\lambda = k} \prod_{j=1}^{\lambda} \frac{1}{\varkappa_j!} D^{\varkappa_j} f ,$$

où la somme est étendue à l'ensemble des $(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda) \in \mathbb{N}^{n\lambda}$, avec $\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\lambda = k$; le nombre de termes de cette somme est majoré par $(K+1)^{n\Lambda}$. D'après le lemme 3.1. ,

$$\operatorname{Log} \prod_{j=1}^{\lambda} \frac{1}{\varkappa_j!} \left| D^{\varkappa_j} f(w)\right| \leqslant c_1 \sum_{j=1}^{\lambda} (|\varkappa_j|+1) \leqslant c_1(K+\Lambda),$$

ce qui donne la première inégalité.

Supposons maintenant f entière d'ordre strict $\leqslant \rho$; le lemme 3.1. donne alors

$$\operatorname{Log} \prod_{j=1}^{\lambda} \frac{1}{\varkappa_j!} \left|D^{\varkappa_j} f(w)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\lambda} \left\{ \frac{-1}{\rho} |\varkappa_j| \operatorname{Log}(|\varkappa_j|+1) + c_2(|\varkappa_j|+1)\right\}$$
$$\leqslant -\frac{1}{\rho} K \operatorname{Log}\left(\frac{K}{\Lambda}+1\right) + c_2(K+\Lambda).$$

La dernière inégalité provient de la convexité de la courbe $y = x\operatorname{Log}(x+1)$: si $x_1,\ldots,x_\lambda$ (avec $\lambda \geqslant 1$) sont des nombres réels $\geqslant 0$, avec $x_1+\ldots+x_\lambda = X$, on a

$$X \operatorname{Log}\left(\frac{X}{\lambda}+1\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\lambda} x_j \operatorname{Log}(x_j+1)$$

LEMME 3.5. - Soient $f_1, \dots, f_\nu$ des fonctions analytiques dans un voisinage d'un point $w \in \mathbb{C}^n$. Il existe un nombre $c_5 > 0$ ayant la propriété suivante. Soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$, K des entiers rationnels positifs ; pour $0 \leqslant \lambda_j \leqslant \Lambda_j$ $(1 \leqslant j \leqslant \nu)$ et $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| = K$, on a

$$\operatorname{Log}\left|\frac{1}{k!} D^k(f_1^{\lambda_1} \dots f_\nu^{\lambda_\nu})(w)\right| \leqslant c_5 K + \left(\sum_{j=1}^{\nu} \Lambda_j\right)(c_5 + n \operatorname{Log}(K+1)) .$$

De plus, si $f_1, \dots, f_\nu$ sont toutes des fonctions entières, d'ordre strict $\leqslant \varrho_1, \dots, \varrho_\nu$ respectivement, alors pour tout réel τ dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, on a

$$\operatorname{Log}\left|\frac{1}{k!} D^k(f_1^{\lambda_1} \dots f_\nu^{\lambda_\nu})(w)\right| \leqslant -(1-\tau)K \min_{1 \leqslant j \leqslant \nu}\left\{\frac{1}{\varrho_j} \operatorname{Log}\left(\frac{\tau K}{\nu \Lambda_j}+1\right)\right\} + c_5 K + \left(\sum_{j=1}^{\nu} \Lambda_j\right)(c_5 + n \operatorname{Log}(K+1)).$$

Démonstration.

▶ On écrit encore une fois la formule de Leibnitz :

$$\frac{1}{k!} D^k(f_1^{\lambda_1} \dots f_\nu^{\lambda_\nu}) = \sum_{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_\nu = k} \prod_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\varkappa_j !} D^{\varkappa_j} f_j^{\lambda_j} .$$

Le nombre de termes de la somme est au plus $(K+1)^{n\nu}$, que l'on majore par $\exp(c_6 K)$. La première inégalité est alors immédiate à partir du lemme 3.4. Pour obtenir la deuxième inégalité, on minore

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\varrho_j} |\varkappa_j| \operatorname{Log}\left(\frac{|\varkappa_j|}{\Lambda_j} + 1\right)$$

en ne considérant que les j pour lesquels $|\varkappa_j| \geqslant \frac{\tau K}{\nu}$, et en remarquant que la somme de ces $|\varkappa_j|$ est supérieure à $(1-\tau)K$ ◀

Afin de pouvoir introduire la notion d'ordre pour une fonction méromorphe, il faut d'abord démontrer le lemme suivant.

LEMME 3.6. - Soient g et h deux fonctions entières non identiquement nulles d'ordre strict $\leqslant \varrho$. On suppose que g/h est entière. Alors g/h est d'ordre strict $\leqslant \varrho$.

Autrement dit si f et h sont des fonctions entières non nulles, et si fh et h sont d'ordre strict $\leqslant \varrho$, alors f est d'ordre strict $\leqslant \varrho$.

Démonstration (d'après [5], lemme 7.4.10 et propositions 7.4.11, 7.4.12).

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$, on note $\operatorname{Log}_+ x = \max\{\operatorname{Log} x, 0\}$, et

$\mathrm{Log}_- x = \max\{-\mathrm{Log}\, x, 0\}$.

Désignons par $\lambda(v, 0, r)$ la moyenne d'une fonction v sur la sphère $\|z\| = r$ de centre 0 et de rayon $r > 0$.

Quitte à translater l'origine, on peut supposer $h(0) \neq 0$. Comme

$$\mathrm{Log}_+ \left|\frac{g}{h}\right| \leqslant \mathrm{Log}_+ |g| + \mathrm{Log}_- |h| ,$$

et que, $\mathrm{Log}\,|h|$ étant sous-harmonique,

$$\mathrm{Log}\,|h(0)| \leqslant \lambda(\mathrm{Log}\,|h|, 0, r) = \lambda(\mathrm{Log}_+ |h|, 0, r) - \lambda(\mathrm{Log}_- |h|, 0, r),$$

on a

$$\lambda(\mathrm{Log}_+ \left|\frac{g}{h}\right|, 0, r) \leqslant \lambda(\mathrm{Log}_+ |g|, 0, r) + \lambda(\mathrm{Log}_+ |h|, 0, r) - \mathrm{Log}\,|h(0)| .$$

D'autre part on a évidemment

$$\lambda(\mathrm{Log}_+ |g|, 0, r) \leqslant \mathrm{Log}\,|g|_r \quad , \text{ et } \lambda(\mathrm{Log}_+ |h|, 0, r) \leqslant \mathrm{Log}\,|h|_r .$$

Enfin, en exprimant par la formule de Poisson la fonction harmonique H qui prend les valeurs $\mathrm{Log}_+ \left|\frac{g}{h}\right|$ sur la sphère $\|z\| = r$, et en écrivant $\mathrm{Log} \left|\frac{g}{h}\right| \leqslant H$, on trouve

$$\mathrm{Log}\, \left|\frac{g}{h}\right|_{\frac{r}{2}} \leqslant 3.2^{2n-2}\, \lambda(\mathrm{Log}_+ \left|\frac{g}{h}\right| , 0, r).$$

D'où finalement

$$\mathrm{Log} \left|\frac{g}{h}\right|_{\frac{r}{2}} \leqslant 2^{2n}(\mathrm{Log}\,|g|_r + \mathrm{Log}\,|h|_r - \mathrm{Log}\, |h(0)|). \blacktriangleleft$$

Ce lemme 3.6. nous autorise à introduire la définition suivante :

DÉFINITION. Une fonction f, méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, est dite d'ordre strict $\leqslant \rho$ s'il existe deux fonctions entières g, h , d'ordre strict $\leqslant \rho$, telles que $f = g/h$.

Contrairement au cas des fonctions entières, l'ordre d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^n$ n'est pas déterminé par la décroissance des coefficients de Taylor en un point régulier (considérer par exemple $1/(1-z_1)$).

Au § 1, nous avons considéré des fonctions transcendantes ; rappelons qu'une fonction f, analytique au voisinage d'un point $w \in \mathbb{C}^n$, est dite algébrique s'il existe $P \in \mathbb{C}\,[x_1,\ldots,x_{n+1}]$, $P \neq 0$, tel que $P(z, f(z)) \equiv 0$ au voisinage de w . Une fonction qui n'est pas algébrique est dite transcendante (En fait nous pourrions nous limiter à ne considérer que des polynômes à coefficients algébriques). Bien que le lemme suivant soit probablement classique, il semble opportun d'en écrire une démonstration.

LEMME 3.7. - <u>Les seules fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$ et algébriques, sont les polynômes. Les seules fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$ et algébriques sont les fractions rationnelles.</u>

<u>Démonstration.</u>

► Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, algébrique :

$$P_o f^k + \dots + P_{k-1} f + P_k = 0, \; P_o \not\equiv 0.$$

Montrons déjà que $P_o f$ est entière. Ecrivons $f = g/h$, où g et h sont deux fonctions entières .

Montrons que, en tout point $w \in \mathbb{C}^n$, on a (avec les notations de [10])

$$\Theta_{P_o g}(w) \geqslant \Theta_h(w) ,$$

ce qui permettra de conclure grâce au théorème de Cousin dans $\mathbb{C}^n$. Comme $\Theta_{P_o g}(w) = \Theta_{P_o}(w) + \Theta_g(w)$, il suffit de considérer $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $\Theta_h(w) > \Theta_g(w)$.

Comme

$$P_o g^k = - P_1 h g^{k-1} - \dots - P_k h^k ,$$

on a

$$\Theta_{P_o}(w) + k \Theta_g(w) \geqslant \min_{1 \leqslant \ell \leqslant k} \left\{ \ell \Theta_h(w) + (k - \ell) \Theta_g(w) \right\} ,$$

donc

$$\Theta_{P_o}(w) + \Theta_g(w) \geqslant \min_{1 \leqslant \ell \leqslant k} \left\{ (\ell - 1) (\Theta_h(w) - \Theta_g(w)) \right\} + \Theta_h(w) \geqslant \Theta_h(w).$$

Donc la fonction $F = P_o f$ est entière , et vérifie

$$F^k + P_1 F^{k-1} + P_o P_2 F^{k-2} + \dots + P_o^{k-1} P_k = 0.$$

Pour r grand, soit $w \in \mathbb{C}^n$, $\|w\| = r$, tel que $|F(w)| = |F|_r$; on constate alors que $|F|_r$ croît comme une puissance de r, donc F est un polynôme. Enfin il est clair qu'une fonction rationnelle entière est un polynôme. ◄

§ 4. - Démonstration du théorème 2.2. (Partie arithmétique).

Nous allons effectuer la partie arithmétique de la démonstration du théorème 2.2., la fin de la démonstration étant reportée au § 5.

Pour cela, nous considérons un sous-ensemble fini S de $\mathbb{C}^n$, dont tous les éléments w vérifient les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème 2.2. Soit $\varepsilon>0$, et soit $\chi = \delta(\rho_1 + \dots + \rho_\nu) + \varepsilon$ dans le cas général, et $\chi = \delta(\rho_1 + \dots + \rho_\nu) - (\delta - 1) + \varepsilon$ quand les fonctions $f_1, \dots, f_\nu$ sont entières. Notre but est de démontrer le résultat suivant. (Les notations sont celles de [10]).

LEMME 4.1. - Il existe une suite $(\emptyset_N)$ de fonctions entières non identiques à 0 dans $\mathbb{C}^n$, et il existe une suite (M_N) d'entiers positifs, avec $M_N \geqslant N$, telles que

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| < M_N$, et $w \in S$,

$$D^k \emptyset_N(w) = 0 .$$

2. Pour tout $r > 0$, on a

$$\Theta_{\emptyset_N}(0, r) \leqslant (\chi + o(1)) M_N \text{ quand } N \to \infty.$$

Tout le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration du lemme 4.1.

Manifestement, il n'y a pas de restriction à supposer que les fonctions $f_1, \dots, f_\nu$ sont d'ordre strict inférieur ou égal à $\rho_1, \dots, \rho_\nu$ respectivement. Pour $1 \leqslant j \leqslant \nu$, notons g_j, h_j deux fonctions entières, d'ordre strict $\leqslant \rho_j$, telles que $f_j = g_j/h_j$, avec $h_j = 1$ si f_j est entière; de plus, pour $w \in S$, soit $k_{j,w} \in \mathbb{N}^n$ tel que

$$|k_{j,w}| = \Theta_{h_j}(w) \quad \text{et} \quad D^{k_{j,w}} h_j(w) \neq 0 .$$

Désignons par d un entier rationnel positif tel que dw_i soit entier algébrique pour tout $w = (w_1, \dots, w_n) \in S$ et $1 \leqslant i \leqslant n - \nu + 1$.

Soit Λ un entier suffisamment grand ; on désignera par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{12}$ des fonctions positives de Λ qui tendent vers 0 quand Λ tend vers l'infini ; en particulier, Λ est choisi suffisamment grand pour que $\varepsilon_8 < \varepsilon/(\rho_1 + \dots + \rho_\nu)$.

Après avoir choisi ainsi Λ, pour démontrer le lemme 4.1., et en particulier pour en vérifier la propriété 2, on considère un nombre réel $r>0$, puis on désigne par N un entier suffisamment grand.

On définit des entiers $\Lambda_1,\dots,\Lambda_\nu$, L, par

$$\Lambda_j = \left[N^{1 - \frac{\rho_j}{\rho_1+\dots+\rho_\nu}\cdot\Lambda}\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu \quad ;$$

$$L = \left[N.\Lambda^{-\frac{\nu}{n-\nu+2}}\right].$$

Par convention, on notera (λ,ℓ) au lieu de $(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu,\ell_1,\dots,\ell_{n-\nu+1})$, $0 \leqslant \lambda_j < \Lambda_j$, $(1 \leqslant j \leqslant \nu)$, $0 \leqslant \ell_i \leqslant L$, $(1 \leqslant i \leqslant n-\nu+1)$. Ainsi on écrira $\sum_\lambda \sum_\ell$ au lieu de

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\Lambda_1-1}\dots\sum_{\lambda_\nu=0}^{\Lambda_\nu-1}\ \sum_{\ell_1=0}^{L-1}\dots\sum_{\ell_{n-\nu+1}=0}^{L-1}$$

Nous noterons $\varphi_{\lambda,\ell}$ les fonctions

$$\varphi_{\lambda,\ell}(z) = f_1(z)^{\lambda_1}\dots f_\nu(z)^{\lambda_\nu}\, z_1^{\ell_1}\dots z_{n-\nu+1}^{\ell_{n-\nu+1}} .$$

Nous poserons $\mu = 1$ dans le cas général ($f_1,\dots,f_\nu$ méromorphes), et $\mu = 1 - \frac{1}{\rho_1+\dots+\rho_\nu}$ dans le cas où $f_1,\dots,f_\nu$ sont entières.

LEMME 4.2. - <u>Soit</u> $w = (w_1,\dots,w_n) \in S$. <u>Pour tout</u> $k \in \mathbb{N}^n$, <u>le nombre</u> $\alpha = D^k\varphi_{\lambda,\ell}(w)$ <u>appartient au corps de nombres</u> $\mathbb{Q}(w_1,\dots,w_{n-\nu+1})$. <u>De plus</u> $d^{(n-\nu+1)L}.\alpha$ <u>est entier algébrique, et le maximum des valeurs absolues des conjugués de</u> α <u>est majoré par</u>

$$\overline{|\alpha|} \leqslant \exp\left\{(\mu + \varepsilon_1)K \operatorname{Log} K\right\},$$

<u>où</u> $K = \max\left\{N\ ,\ |k|\right\}$.

Démonstration du lemme 4.2.

► Ecrivons

$$\frac{1}{k!}\alpha = \sum_{h_1}\cdots\sum_{h_{n-\nu+1}} \frac{1}{h!} D^h(f_1^{\lambda_1}\cdots f_\nu^{\lambda_\nu})(w) \cdot \prod_{i=1}^{n-\nu+1} \binom{\ell_i}{k_i-h_i} w_i^{\ell_i-k_i+h_i},$$

où on a noté $h=(h_1,\dots,h_{n-\nu+1},k_{n-\nu+2},\dots,k_n)$, et où, pour $1\le i\le n-\nu+1$, la somme sur h_i est étendue à l'intervalle $\max(0,k_i-\ell_i)\le h_i\le k_i$. On constate ainsi que $\alpha\in\mathbb{Q}(w_1,\dots,w_{n-\nu+1})$, et que $d^{(n-\nu+1)L}$ est un dénominateur de α.

Majorons $|\overline{\alpha}|$:

$$|\overline{\alpha}|\le k!(1+|k|)^{n-\nu+1}\max_h\left\{\frac{1}{h!}\left|D^h(f_1^{\lambda_1}\cdots f_\nu^{\lambda_\nu})(w)\right|\right\} \cdot \prod_{i=1}^{n-\nu+1}\left(2^L.\max\left\{|\overline{w_i}|^L,1\right\}\right).$$

On majore $k!$ par $|k|^{|k|}$, puis on considère deux cas.

Premier cas : $|k|\le N/\mathrm{Log}\Lambda$. Alors la première partie du lemme 3.5 donne facilement :

$$\mathrm{Log}\,|\overline{\alpha}|\le \varepsilon_1 N\,\mathrm{Log}\,N.$$

Deuxième cas : $|k|>N/\mathrm{Log}\Lambda$. Comme

$$|h|\ge |k|-(n-\nu+1)L > \left(1-\frac{1}{\mathrm{Log}\Lambda}\right)|k|,$$

on a, pour $\tau=1/\mathrm{Log}\Lambda$:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\tau|h|}{\nu\Lambda_j}+1\right) > \left(\frac{\rho_j}{\rho_1+\dots+\rho_\nu}-\varepsilon_2\right)\mathrm{Log}|k|,\quad (1\le j\le \nu);$$

grâce au lemme 3.5 et à la définition de μ, on obtient :

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1}{h!}\left|D^h(f_1^{\lambda_1}\cdots f_\nu^{\lambda_\nu})(w)\right|\right)\le(\mu-1+\varepsilon_3)|k|\,\mathrm{Log}|k|+c_5|k|+\left(\sum_{j=1}^{\nu}\Lambda_j\right)(c_5+n\,\mathrm{Log}(|k|+1)),$$

ce qui permet de conclure. ◄

Nous allons effectuer la démonstration du lemme 4.1. en 3 pas.

Premier pas. Il existe des entiers rationnels $p(\lambda,\ell)$ non tous nuls, majorés par $\exp(\varepsilon_4 N\,\mathrm{Log}\,N)$ en valeur absolue, tels que la fonction

$$F=\sum_\lambda\sum_\ell p(\lambda,\ell)\,\varphi_{\lambda,\ell}$$

vérifie

$$D^k F(w)=0 \quad \text{pour tout } w\in S \text{ et } k\in\mathbb{N}^n,\ |k|<N.$$

►Pour construire ces entiers rationnels, on résout le système

$$\sum_\lambda\sum_\ell p(\lambda,\ell)\, d^{(n-\nu+1)L}.\, D^k\varphi_{\lambda,\ell}(w)=0,$$

ayant $\Lambda_1\cdots\Lambda_\nu L^{n-\nu+1}$ inconnues $p(\lambda,\ell)$ dans $\mathbb{Z}$, au plus N^n Card S équations, à coefficients entiers algébriques dont les conjugués sont majorés en valeur absolue par $\exp\{(\mu+\varepsilon_5)N\,\mathrm{Log}\,N\}$, grâce au lemme 4.2. En utilisant le lemme de Siegel (voir par exemple [9], lemme 1.3.1. et exercice 1.3.b.), on obtient le résultat désiré. ◄

<u>Deuxième pas.</u> <u>Soit</u> $M = \min_{w \in S} \Theta_F(w)$, <u>autrement dit soit</u> M <u>le plus petit entier tel qu'il existe</u> $w_o \in S$ <u>et</u> $k_o \in \mathbb{N}^n$, $|k_o| = M$, <u>avec</u> $D^{k_o} F(w_o) \neq 0$. <u>On a</u> $M \geqslant N$, <u>et</u>

$$\mathrm{Log}\, |D^{k_o} F(w_o)| \geqslant -(\delta - 1)(\mu + \varepsilon_6)\, M\, \mathrm{Log}\, M.$$

▶ En effet, $D^{k_o} F(w_o)$ est un élément non nul d'un corps de nombres de degré $\leqslant \delta$ sur $\mathbb{Q}$. Un dénominateur de ce nombre est $d^{(n-\nu+1)L}$, et le maximum des valeurs absolues des conjugués de ce nombre est majoré par $\exp\left\{(\mu + \varepsilon_7)\, M\, \mathrm{Log}\, M\right\}$, grâce au premier pas $(M \geqslant N)$ et au lemme 4.2. L'inégalité de la taille [9] (1.2.4.) :

$$\mathrm{Log}\, |\xi| \geqslant -(\delta - 1)\, \mathrm{Log}\, |\overline{\xi}| - \delta\, \mathrm{Log}\, \mathrm{den}(\xi),$$

valable pour tout nombre algébrique ξ non nul de degré $\leqslant \delta$, donne la minoration annoncée ◀

<u>Troisième pas.</u> <u>Soit</u> $\emptyset = F \prod_{j=1}^{\nu} h_j^{\Lambda_j}$. <u>La fonction</u> $\emptyset$ <u>est entière, non identiquement nulle, et vérifie</u>

$$D^k \emptyset(w) = 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad w \in S,\ k \in \mathbb{N}^n,\ |k| < M ,$$

<u>et, pour</u> N <u>suffisamment grand (par rapport à</u> Λ <u>et à</u> r),

$$\Theta_\emptyset(0,r) \leqslant (\rho_1 + \dots + \rho_\nu)(\delta\mu - \mu + 1 + \varepsilon_8)\, M .$$

Comme $(\rho_1 + \dots + \rho_\nu)(\delta\mu - \mu + 1) + \varepsilon = \varkappa$, le troisième pas terminera la démonstration du lemme 4.1.

▶Comme

$$\emptyset = \sum_\lambda \sum_\ell p(\lambda, \ell) \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} g_j^{\lambda_j} h_j^{\Lambda_j - \lambda_j} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-\nu+1} z_i^{\ell_i} \right\} ,$$

la fonction $\emptyset$ est entière. D'autre part les relations

$$D^k F(w) = 0 \quad \text{pour } w \in S,\ k \in \mathbb{N}^n,\ |k| < M,$$

provenant de la définition de M (deuxième pas), impliquent

$$D^k \emptyset(w) = 0 \quad \text{pour } w \in S,\ k \in \mathbb{N}^n ,\ |k| < M.$$

De plus , si on note

$$k_o' = k_o + \sum_{j=1}^{\nu} k_{j,w}\, \Lambda_j ,$$

on a

$$D^{k'_o}\emptyset(w_o) = D^{k_o} F(w) . \prod_{j=1}^{\nu}\left[D^{k_{j,w}} h_j(w)\right]^{\Lambda_j} ,$$

<u>pourvu que</u> k_o <u>et</u> $k_{j,w}$ <u>aient été choisis minimaux pour l'ordre lexicographique</u> (cf.D.W. Masser, op.cit.).

Les inégalités de Cauchy montrent alors que

$$\text{Log}\left|D^{k'_o}\emptyset(w_o)\right| \leqslant \text{Log}\ \|\emptyset\|_r + (1+\varepsilon_9)M\ \text{Log}\ M\ ;$$

donc, en tenant compte du deuxième pas et du fait que $D^{k_{j,w}} h_j(w)$ est un nombre non nul ne dépendant pas de N, on obtient

$$\text{Log}\ \|\emptyset\|_r \geqslant -\ (\delta\mu - \mu + 1 + \varepsilon_{10})\ M\ \text{Log}\ M\ .$$

Afin d'établir l'inégalité désirée, on remarque que, la fonction $\Theta_{\emptyset}(0,r)$ étant une fonction monotone non décroissante de r, il n'y a pas de restriction à supposer $r > \max_{w\in S}|w|$. On utilise alors une variante dans $\mathbb{C}^n$ de la formule de Jensen-Schwarz (cf. lemme 5.4. ci-dessous) :

$$\text{Log}\|\emptyset\|_r \leqslant \text{Log}\ \|\emptyset\|_R - (1-\tau)\ \Theta_{\emptyset}(0,r)\ \text{Log}\ \frac{\tau R}{6n\ r}\ ,$$

avec $\tau = \frac{1}{\Lambda}$, et $R = M^{\frac{1}{\rho_1+\dots+\rho_\nu}}$; on majore $\|\emptyset\|_R$ en remarquant que, par hypothèse ,

$$\text{Log}\ \max\left\{|g_j|_R\ ,\ |h_j|_R\right\} \leqslant c\ R^{\rho_j}\ ;$$

ainsi

$$\text{Log}\|\emptyset\|_R \leqslant \log(\Lambda_1\dots\Lambda_\nu L^{n-\nu+1}) + \varepsilon_4\ N\ \text{Log}\ N + c\sum_{j=1}^{\nu}\Lambda_j\ R^{\rho_j} + n\ L\ \text{Log}\ R \leqslant \varepsilon_{11}\ M\ \text{Log}\ M,$$

grâce au choix de R. On minore enfin

$(1-\tau)\ \text{Log}\ \frac{\tau R}{6n\ r}$ par $(\frac{1}{\rho_1+\dots+\rho_\nu} - \varepsilon_{12})$ Log M.

En composant les différentes estimations , on trouve

$$\left(\frac{1}{\rho_1+\dots+\rho_\nu} - \varepsilon_{12}\right)\Theta_{\emptyset}(0,r)\ \text{Log}\ M \leqslant (\delta\mu - \mu + 1 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11})M\ \text{Log}\ M.$$

ce qui termine le troisième pas de la démonstration du lemme 4.1.◀

Il est bon de remarquer dès maintenant que, <u>dans le cas</u> n = 1, <u>le lemme 4.1. est suffisant pour démontrer le théorème</u> 2.2. ; en effet, si un sous-ensemble fini S de $\mathbb{C}$ vérifie les conditions 1 et 2 du lemme 4.1., alors d'après la condition 1 on a

$$\Theta_{\emptyset_N}(0,r) \geqslant M_N \cdot \text{Card}\ S$$

dès que $r \geqslant \max_{w \in S} |w|$, donc la condition 2 donne

$$\text{Card } S \leqslant \mathcal{X} .$$

Enfin, pour démontrer la remarque 2.3., il suffit d'utiliser une astuce de [9] p. 93 : si ξ algébrique n'est pas réel, l'inégalité de la taille s'écrit :

$$2 \text{ Log } |\xi| \geqslant -(\delta - 2) \text{ Log } |\bar{\xi}| - \delta \text{ Log den}(\xi),$$

pour tout $\delta \geqslant$ degré de ξ.

§ 5. - Zéros de fonctions entières et hypersurfaces algébriques.

Pour terminer la démonstration du théorème 2.2. , il reste à voir que, si un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ est tel que chacune de ses parties finies vérifie les conditions 1 et 2 du lemme 4.1., alors il est contenu dans une hypersurface algébrique de degré au plus $n\mathcal{X} + 2n$.

Notation. Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et $\mathcal{X}$ un nombre réel positif. Nous dirons que S vérifie la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ s'il existe une suite (ϕ_N) de fonctions entières non identiques à 0 dans $\mathbb{C}^n$, et une suite (M_N) d'entiers positifs, avec $M_N \geqslant N$, telles que

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| < M_N$, et $w \in S$,

$$D^k \phi_N(w) = 0.$$

2. Pour tout $r > 0$, on a

$$\Theta_{\phi_N}(0,r) \leqslant (\mathcal{X} + o(1)) M_N \text{ quand } N \to \infty .$$

LEMME 5.1.- Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{X}$ un nombre réel positif et K un entier positif. On suppose que S vérifie la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Il existe alors un polynôme non nul P, de degré inférieur ou égal à $(n + K - 1)\mathcal{X} + 2n$, tel que

$$\Theta_P(\xi) \geqslant K \quad \text{pour tout} \quad \xi \in S$$

(Nous dirons que P s'annule sur S avec un ordre supérieur ou égal à K).

Pour démontrer le théorème 2.2., on n'utilise ce lemme que dans le cas K = 1. Mais l'énoncé général sera utile plus loin.

Démonstration du lemme 5.1.

▶ On reprend la démonstration de BOMBIERI [3] , p. 282-286. Le lemme 7 de [3] permet de construire , grâce à l'hypothèse $\mathcal{P}_{\varkappa}$, une fonction plurisousharmonique V vérifiant

$$V(z) \leqslant (\varkappa K + o(1)) \ \operatorname{Log}\|z\| \text{ quand } \|z\| \longrightarrow \infty ,$$

et

$$V(z) \leqslant - (K + o(1)) \operatorname{Log}\frac{1}{\|z - \zeta\|} \text{ quand } z \longrightarrow \zeta \in S.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'existence de [3] , il existe une fonction F entière dans $\mathbb{C}^n$, non identique à 0, telle que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |F|^2 \ e^{-cV} (1 + |z|^2)^{-3n} \omega_n < + \infty ,$$

avec $c = 2 \frac{n-1}{K} + 2 + \varepsilon$.

L'inégalité de la moyenne pour la fonction entière F^2 :

$$|F(z_o)|^2 \leqslant \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} \int_{B(z_o, r)} |F(z)|^2 \omega_n < + \infty ,$$

pour $z_o \in \mathbb{C}^n$ et $r > 0$, entraîne

$$|F|^2_R \leqslant \frac{n! \ 2^{2n}}{\pi^n R^{2n}} \left[\sup_{\substack{z \in B(z_o, \frac{R}{2}) \\ |z_o| = R}} e^{cV}(1 + |z|^2)^{3n} \right] \int_{\mathbb{C}^n} |F|^2 e^{-cV} (1 + |z|^2)^{-3n} \omega_n .$$

D'où

$|F|^2_R \leqslant R^{c \varkappa K + 4n + \varepsilon}$ pour R suffisamment grand, ce qui montre que F est un polynome de degré au plus $\frac{c}{2} \varkappa K+2n+ \frac{\varepsilon}{2} = (n+K-1)\varkappa+2n+ \frac{\varepsilon}{2}(\varkappa K+1)$. Comme ce degré Δ est un nombre entier, si on choisit ε suffisamment petit, on en déduit $\Delta \leqslant (n+K-1) \varkappa +2n$. Un calcul analogue au voisinage de $\zeta \in S$ montre que $|F(z)| \cdot |z - \zeta|^{K-1}$ tend vers 0 quand z tend vers ζ, donc $\Theta_F(\zeta) \geqslant K - 1$ ◀

Pour que la démonstration du théorème 2.2. soit complète, il reste à se débarrasser de l'hypothèse de finitude de S.

LEMME 5.2. - Soit S_o un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, et Δ un entier positif. On suppose que toute partie finie de S_o est contenue dans une hypersurface algébrique de degré $\leq \Delta$. Alors S_o est contenu dans une hypersurface algébrique de degré inférieur ou égal à Δ.

Démonstration.

► Notons Π l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[z]$ de degré $\leq \Delta$ et de hauteur 1 ; dans l'espace $\mathbb{C}[z]$ des polynômes, muni de la norme "hauteur", Π est un compact. Pour toute partie finie S de S_o, notons $\mathcal{F}_S$ l'ensemble des éléments de Π qui s'annulent sur S ; d'après l'hypothèse, $\mathcal{F}_S$ est un fermé non vide de Π. Ecrivons S_o comme une réunion croissante de parties finies $S^{(\lambda)}$; comme $S' \subset S'' \Longrightarrow \mathcal{F}_{S''} \subset \mathcal{F}_{S'}$, l'intersection de ces $S^{(\lambda)}$ est non vide. Donc il existe $P \in \Pi$ tel que $P(w) = 0$ pour tout $w \in S$ ◄

La démonstration du théorème 2.2. est ainsi terminée.

Nous allons maintenant poursuivre la discussion commencée dans [10] sur les possibilités de généralisation à $\mathbb{C}^n$ du résultat classique suivant (considérer par exemple le lemme 6.2.1. de [9], où l'inégalité

$$\left|\frac{R_2^2 - z\,\bar{z}_j}{R_2(z-z_j)}\right| \geq \frac{R_2^2 - R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)} \quad , \ |z| = R_1 \ , \ |z_j| \leq \rho$$

peut être raffinée en :

$$\left|\frac{R_2^2 - z\,\bar{z}_j}{R_2(z-z_j)}\right| \geq \frac{R_2^2 + R_1\rho}{R_2(R_1+\rho)} \ ).$$

Si f est une fonction entière dans $\mathbb{C}$, pour $0 < r < R$, on a

(5.3.) $$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - \Theta_f(0,r) \text{ Log } \frac{R^2 + r^2}{2rR}.$$

Rappelons que $\Theta_f(0,r)$ est alors le nombre de zéros de f dans le disque $|z| \leq r$.

Nous avons utilisé au § 4 l'analogue suivant de (5.3.) en dimension supérieure.

LEMME 5.4. - Soit f une fonction analytique dans un voisinage d'une boule $B_R(0)$ dans $\mathbb{C}^n$. Soient τ et r deux nombres réels, $0 < \tau < 1$, $r \leq R$. Alors on a

$$\text{Log } \|f\|_r \leq \text{Log } \|f\|_R - (1-\tau)\, \Theta_f(0,r) \text{ Log} \frac{\tau R}{6nr}.$$

Démonstration: ▶cf. [3] , proposition 4, p. 273◀

(On peut raffiner ce lemme 5.4., mais ce n'est pas utile ici).

On peut envisager de généraliser (5.3.) d'une autre manière. D'après (5.3.), si S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$, pour toute fonction f, entière dans $\mathbb{C}$, et s'annulant sur S avec un ordre $\geqslant K$, et pour tout r, R réels vérifiant $\max_{w \in S} |w| \leqslant r \leqslant R$, on a

$$(5.5.)\quad \mathrm{Log}\ |f|_r \leqslant \mathrm{Log}\ |f|_R - K\ \mathrm{Card}\ S\ .\ \mathrm{Log}\ \frac{R^2+r^2}{2rR}\ .$$

Nous avons dit dans l'introduction que la généralisation naturelle de la notion de sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$ était la notion de sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ contenu dans une hypersurface algébrique. Pour cette raison nous introduisons la notion suivante

Notation. Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et K un entier positif . On pose

$$\omega(S,K) = \inf\left\{\deg P;\ P \in \mathbb{C}\,[z],\ P \not\equiv 0,\ D^k P(w) = 0 \text{ pour tout } w \in S \text{ et } k \in \mathbb{N}^n, |k| < K\right\}.$$

Ainsi $\omega(S,K)$ est le plus petit degré des hypersurfaces algébriques passant K fois par S. On notera $\omega(S) = \omega(S,1)$.

On a évidemment $\omega(S) \leqslant \omega(S,K) \leqslant K\omega(S)$, et, pour $n = 1$, $\omega(S,K) = K\,\omega(S)$. De plus, comme un polynôme en n variables de degré $\leqslant \Delta$ a $\binom{\Delta+n}{n}$ coefficients, si $\Delta \geqslant 1$ est un entier tel que $\binom{\Delta+n}{n} > \binom{K+n-1}{n}$ Card S, alors $\omega(S,K) \leqslant \Delta$. Ainsi

$$\omega(S,K) \leqslant (K+n-1)(\mathrm{Card}\ S)^{1/n} - (n-1).$$

Il est naturel d'espérer généraliser (5.5.) à $\mathbb{C}^n$ en remplaçant K.Card S par $\omega(S,K)$. Pour cela, d'après le lemme 5.4., il suffirait essentiellement de vérifier $\omega(S,K) \leqslant \Theta_f(0,r)$ pour $r \geqslant \max_{w \in S} |w|$ et pour toute fonction f entière dans $\mathbb{C}^n$ nulle sur S avec un ordre $\geqslant K$. Une telle inégalité n'est pas vraie en général (par exemple pour $S = \{(1,0)\}$ dans $\mathbb{C}^2$, $K = 1$, et $f(z_1,z_2) = z_1 - 1$, on a $\omega(S) = \mathrm{Card}\ S = 1$ et $\Theta_f(0,r) < 1$ pour tout $r > 0$. Mais $\lim_{r \to \infty} \Theta_f(0,r) = 1$). Néanmoins il semble raisonnable d'énoncer la conjecture suivante .

CONJECTURE 5.6. - Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et ε un nombre réel positif. Il existe une constante $r_o = r_o(S, \varepsilon)$ telle que pour tout entier $K > 0$ et pour toute fonction entière f s'annulant sur S avec un ordre $\geqslant K$, on ait

$\Theta_f(0,r) \geqslant \omega(S,K) - K\varepsilon$ pour tout $r \geqslant r_o$.

Autrement dit cette conjecture stipule que parmi les fonctions qui s'annulent sur S, celles qui ont le plus petit Θ sont des polynômes. Comme beaucoup de résultats de ce paragraphe, cette conjecture est triviale quand $n=1$ (avec $r_o = \max_{w \in S} |w|$). Elle serait aussi triviale si on autorisait r_o à dépendre de K.

Voici une première justification de la conjecture 5.6. D'abord, si P est un polynôme non nul, on déduit facilement du lemme 5.4., en faisant tendre R vers $+\infty$:

(5.7.) $$\Theta_P(0,r) \leqslant \deg P \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Inversement, si f est une fonction entière dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant

$$\Theta_f(0,r) \leqslant C \quad \text{pour tout} \quad r > 0,$$

alors l'ensemble des zéros de f est contenu dans une hypersurface algébrique de degré $\leqslant C$. Ce résultat, dû à W.STOLL (cf. [3] , proposition 3 (iii)), serait une conséquence de la conjecture 5.6. : pour toute partie finie S de $\left\{w \in \mathbb{C}^n,\ f(w) = 0\right\}$, on aurait $\omega(S) \leqslant C$, et le lemme 5.2. permet de conclure.

Il y a un exemple en dimension $n \geqslant 2$ dans lequel on sait remplacer essentiellement K Card S par $\omega(S,K)$ dans (5.5.) ; il s'agit du cas d'un ensemble produit $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ (cf. [10] , lemme 1.2.). Il est facile dans ce cas de calculer $\omega(S,K)$.

LEMME 5.8. - Soient $S_1, \ldots, S_n$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{C}$, et soit $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ leur produit dans $\mathbb{C}^n$.

On a $$\omega(S,K) = K \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Card} S_i .$$

Démonstration.

► Remarquons d'abord que l'inégalité

$$\omega(S,K) \leqslant K \min_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Card} S_i$$

est banale, puisque chaque polynôme

$$P_i(z) = \prod_{\zeta\in S_i} (z_i - \zeta)^K$$

s'annule sur S avec un ordre $\geqslant K$.

Pour démontrer l'inégalité dans l'autre sens, on procède par récurrence sur n (le cas n = 1 étant trivial) : soit $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré strictement inférieur à $K \min_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{Card} S_i$ tel que $D^k P(w) = 0$ pour tout $|k| < K$ et $w \in S$. Soit $w_n \in S_n$. Le polynôme

$$P(z_1,\dots,z_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_{n-1}]$$

s'annule sur $S_1 \times \dots \times S_{n-1}$ avec un ordre $\geqslant K$, et a un degré strictement inférieur à $K \min_{1\leqslant i\leqslant n-1} \operatorname{Card} S_i$; d'après l'hypothèse de récurrence, ce polynôme est nul. Maintenant soit $(z_1,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$; le polynôme

$$P(z_1,\dots,z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$$

s'annule sur S_n avec un ordre $\geqslant K$, et a un degré strictement inférieur à $K \operatorname{Card} S_n$. D'où $P \equiv 0$ ◄

Le lemme 5.8. donne des exemples d'ensembles S pour lesquels $\omega(S,K) = K\,\omega(S)$. Mais cette relation n'est pas vraie en général : pour n = 2 et $S = \{(0,0) ; (0,1) ; (1,0)\}$, on a $\omega(S) = 2$, et $\omega(S,2) = 3$ (considérer le polynôme $z_1 z_2(z_1 + z_2 - 1)$).

Nous allons démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 5.9. - <u>Soit</u> S <u>un sous-ensemble de</u> $\mathbb{C}^n$. <u>La suite</u> $\frac{\omega(S,K)}{K}$ <u>converge vers une limite</u> Ω_0 <u>vérifiant</u>

$$\frac{\omega(S)}{n} - 2 \leqslant \Omega_0 \leqslant \omega(S).$$

<u>De plus on a</u> $\omega(S,K) \geqslant \Omega_0 K$ <u>pour tout entier</u> $K > 0$.

Il serait utile d'améliorer l'inégalité $\Omega_0 \geqslant \frac{\omega(S)}{n} - 2$, et de savoir quelle est la meilleure inégalité possible. Il serait également intéressant de savoir pour quels ensembles finis S on a $\Omega_o = \omega(S)$, c'est-à-dire $\omega(S,K) = K.\omega(S)$ pour tout $K > 0$.

Il est assez surprenant de remarquer que la démonstration de la proposition 5.9. repose sur le lemme 5.1., que l'on énonce ainsi :

(5.10.) Si S vérifie $\mathcal{P}_{\varkappa}$, alors $\omega(S,K) \leqslant (n+K-1)\varkappa + 2n$; en particulier $\varkappa \geqslant \frac{\omega(S)}{n} - 2$.

La proposition 5.9. va apparaître comme une conséquence du théorème suivant , qui établit un lien entre les différents problèmes que nous venons d'évoquer : généraliser (5.5.) à $\mathbb{C}^n$, minorer $\Theta_f(0,r)$ pour une fonction f qui s'annnule sur S à l'ordre K, minorer $\omega(S,K)$ en fonction de K, n et $\omega(S)$; enfin minorer $\varkappa$ quand S vérifie $\mathcal{P}_{\varkappa}$.

THÉORÈME 5.11. - Soient S un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, et Ω un nombre réel positif. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $r_1 = r_1(S,\Omega,\varepsilon)$ telle que pour tout entier K positif et pour toute fonction f entière dans $\mathbb{C}^n$, nulle sur S avec un ordre $\geqslant K$, on ait

$$\Theta_f(0,r) \geqslant K(\Omega - \varepsilon) \text{ pour tout } r \geqslant r_1 .$$

(ii) Pour tout ε avec $0 < \varepsilon < 1$, il existe une constante $r_2 = r_2(S,\Omega,\varepsilon)$ telle que pour tout entier K positif et pour toute fonction f entière dans $\mathbb{C}^n$, nulle sur S avec un ordre $\geqslant K$, on ait

$$\operatorname{Log}|f|_r \leqslant \operatorname{Log}|f|_R - (1-\varepsilon)K(\Omega-\varepsilon) \operatorname{Log}\frac{\varepsilon R}{6nr} \text{ pour tout } R > r \geqslant r_2 .$$

(iii) Pour tout entier K positif, on a

$$\omega(S,K) \geqslant K\Omega .$$

(iv) Pour tout réel $\varkappa$ tel que S vérifie $\mathcal{P}_{\varkappa}$, on a

$$\varkappa \geqslant \Omega .$$

Remarque.

Nous montrerons que les propriétés (i),...,(iv) précédentes sont équivalentes aux propriétés (ii)' et (iii)' suivantes qui sont des conséquences triviales des propriétés (ii) et (iii) respectivement :

(ii)' La propriété (ii) est vérifiée pour tous les polynômes $f \in \mathbb{C}[z]$.

(iii)' La propriété (iii) est vérifiée pour une infinité de K.

Démonstration du théorème 5.11.

▶ (i) $\Longrightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate du lemme 5.4.

(ii)' $\Longrightarrow$ (iii) . Soit K un entier positif. Soit $P_K \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non nul, de degré $\omega(S,K)$, nul sur S à l'ordre au moins K. D'après (ii)', on a

$$\omega(S,K) \geqslant K(\Omega - \varepsilon) \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

(comparer avec la démonstration de (5.7.)).

(iii)' $\Longrightarrow$ (iv). D'après (5.10) , si S vérifie $\mathcal{P}_{\chi}$, on a

$$\omega(S,K) \leqslant (n + K - 1)\chi + 2n \quad \text{pour tout} \quad K \geqslant 1.$$

On utilise (iii)', et on fait tendre K vers l'infini.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). L'idée, due à P.LELONG, consiste à nier (i) .

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $N > 0$, il existe une fonction entière φ_N non nulle, et un entier $K_N > 0$, avec

$$\Theta_{\varphi_N}(w) \geqslant K_N \quad \text{pour tout} \quad w \in S ,$$

et

$$\Theta_{\varphi_N}(0,N) \leqslant K_N(\Omega - \varepsilon).$$

Soit $\phi_N = \varphi_N^N$, et soit $M_N = N\,K_N$. Alors S vérifie la propriété $\mathcal{P}_{\Omega-\varepsilon}$, ce qui contredit (iv). ◀

Remarque. D'après (5.10.), les propriétés précédentes (i),...,(iv) sont vérifiées quand on choisit $\Omega = \frac{\omega(S)}{n} - 2$.

On en déduit la proposition 5.9. (soit $\Omega_0 = \limsup_{N \to \infty} \frac{\omega(S,K)}{K}$; de (iii)' $\Longrightarrow$(iii), on déduit $\omega(S,K) \geqslant \Omega_0 K$ pour tout $K > 0$), ainsi que le corollaire suivant, qui constitue une première approche de la conjecture 5.6.

PROPOSITION 5.12. - Sous les hypothèses de la conjecture 5.6., il existe $r_3 = r_3(S, \varepsilon)$ tel que

$$\Theta_f(0,r) \geqslant K\left(\frac{\omega(S)}{n} - 2 - \varepsilon\right) \text{ pour tout } r \geqslant r_3.$$

Nous avons indiqué un exemple ci-dessus d'un ensemble S pour lequel la propriété (iii) n'est pas vérifiée avec $\Omega = \omega(S)$. Inversement, d'après le lemme 5.8., quand S est un produit $S_1 \times \ldots \times S_n$, la propriété (iii) est vérifiée avec $\Omega = \omega(S) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Card} S_i$. Pour un tel ensemble $S_1 \times \ldots \times S_n$, d'après (i), la conjecture 5.6. est vraie. D'autre part on sait démontrer un peu mieux que (ii) dans ce cas : en utilisant des formules d'interpolation, on peut montrer que $r_2 = \max_{z \in S} \|z\|$ convient (cf. [10] , lemme 1.2.). Un tel raffinement est utile dans certaines applications ([10] , théorème 2.1.). Ici, il nous suffit d'utiliser la propriété (ii) du théorème 5.11. (avec $\Omega = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Card} S_i$) pour déduire du lemme 4.1. l'énoncé suivant qui généralise un résultat de [1] :

THÉORÈME 5.13. - Supposons que l'ensemble des $w \in \mathbb{C}^n$ vérifiant les conditions 1, 2, 3 du théorème 2.2. contienne un produit $S_1 \times \ldots \times S_n$. Alors

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Card} S_j \leqslant \delta(\rho_1 + \ldots + \rho_\nu).$$

De plus, si $f_1, \ldots, f_\nu$ sont entières, alors

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{Card} S_j \leqslant \delta(\rho_1 + \ldots + \rho_\nu) - (\delta - 1).$$

Comme la seule propriété de Θ que nous ayons utilisée au § 4 est le lemme 5.4., on peut évidemment démontrer le théorème 5.13. sans utiliser aucun des résultats de ce § 5, grâce au lemme 1.2. de [10] (ou au lemme 2, chap. IV, § 2 de [4]).

Ce théorème 5.13. laisse espérer une amélioration future de la conclusion du théorème 2.2., sous la forme

$$\Delta \leqslant \delta(\rho_1 + \ldots + \rho_\nu),$$

et, quand $f_1, \ldots, f_\nu$ sont entières,

$$\Delta \leqslant \delta(\rho_1 + \ldots + \rho_\nu) - (\delta - 1).$$

RÉFÉRENCES

[1] BAKER (A.). - A note on integral integer-valued functions of several variables. Proc. Camb. Phil. Soc., 63 , p. 715-720, 1967.

[2] BERTRAND (D.). - Équations différentielles algébriques et nombres transcendants dans les domaines complexe et p-adique. Thèse de 3e Cycle, Université Paris VI, 1975.

[3] BOMBIERI (E.). - Algebraic values of meromorphic maps. Inventiones Math., 10, p. 267-287, 1970.

[4] LANG (S.). - Introduction to transcendental numbers. Addison-Wesley, 1966.

[5] LELONG (P.). - Fonctions entières et fonctionnelles analytiques. Presses de Montréal, 1968.

[6] SCHNEIDER (Th.). - Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. Math. Ann., 121, p. 110-128, 1941.

[7] SCHNEIDER (Th.). - Einführung in die Transzendenten Zahlen. Springer-Verlag, Berlin, 1957 ; trad. franç., Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[8] STRAUS (E.-G.). - On entire functions with algebraic derivatives at certain algebraic points. Ann. of Math., 52, p. 188-198, 1950.

[9] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants. Lecture-Notes in Math., 402, Springer-Verlag, 1974.

[10] WALDSCHMIDT (M.). - Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables (I). Sém. P.LELONG (Analyse), 15e année, 1974/1975. Lecture Notes in Math., 524, Springer-Verlag, 1976.

Michel WALDSCHMIDT
"Analyse complexe et Géométrie"
(Lab. associé C.N.R.S.,n° 213)
Université P.et M.Curie (Paris VI)
Mathématiques, Tour 45-46
4 , Place Jussieu
75230-PARIS CEDEX 05