Séminaire P.LELONG, H.SKODA
(Analyse)
18e et 19e année, 1978/1979.

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES (III)

par Michel W A L D S C H M I D T

Les deux premières parties de cette étude sur les propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables sont parues dans ce séminaire d'Analyse (Lecture Notes in Math., vol. 524, p. 106-129 et vol. 578, p. 108-135). L'exposé donné le 21 Novembre 1978 était consacré à une démonstration du théorème de Baker (dans le cas réel homogène) par la méthode de Schneider en plusieurs variables, et aux résultats principaux des chapitres 7 et 8 de [Wa 2] (voir aussi "Transcendence methods" , lecture 9, Queen's papers in pure and applied mathematics, Kingston (Ontario), 1979).

Le texte qui suit est un développement de la méthode de Schneider en plusieurs variables, consistant en une généralisation en dimension supérieure du théorème des six exponentielles.

Le théorème des six exponentielles est l'énoncé de transcendance suivant : soient $\gamma_1,\ldots, \gamma_\ell$ (resp. $\lambda_1,\ldots, \lambda_d$) des nombres complexes Q-linéairement indépendants. On suppose $\ell d > \ell + d$ (c'est-à-dire $\ell \geq 2$, $d \geq 3$ où $\ell \geq 3$, $d \geq 2$). Alors l'un au moins des nombres $\exp(\gamma_i \lambda_j)$ est transcendant. On en déduit que si un nombre complexe x est tel que p^x soit algébrique pour une infinité de nombres premiers p (trois suffisent), alors x est rationnel.

Nous étudions une généralisation à plusieurs variables :

$\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell, \lambda_1, \ldots , \lambda_d$ sont dans $\mathbb{C}^n$, et on veut montrer que l'un des nombres $\exp\langle\gamma_i,\lambda_j\rangle$ est transcendant, où $\langle\gamma,\lambda\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$. Nous montrerons qu'un lemme de Schwarz conjecturé dans [Wa 2] permettrait d'établir ce résultat sous l'hypothèse $\mu(\Gamma)\,\mu(\Lambda) > \mu(\Gamma) + \mu(\Lambda)$, où $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\ell$, $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \ldots + \mathbb{Z}\lambda_d$, et μ est l'exposant de Dirichlet généralisé défini dans [Wa 2] § 1.3. (voir § 3a ci-dessous ; pour n = 1, $\mu(\Gamma) = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, \Gamma$). Nous établirons quelques cas particuliers de cette conjecture. Ainsi nous montrons que si $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ est tel que $p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}$ soit algébrique pour une infinité de couples de nombres premiers p_1,p_2, alors l'un au moins des trois nombres x_1, x_2, $x_1 + x_2$ est rationnel.

Cette étude est motivée par un problème de WEIL [We] et SERRE [Se] sur certains types de caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres algébriques (§ 1). Dans cette direction, nous établirons l'énoncé suivant. Soient k un corps de nombres , $\{\sigma\}$ les plongements de K dans $\mathbb{C}$, et $(x_\sigma)\in\mathbb{R}^d$, où $d = [k : \mathbb{Q}]$. On suppose que le rang du groupe des unités de k est ≤ 2. Si $\prod_\sigma (\sigma\alpha)^{x_\sigma} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha\in k^*$, alors $(x_\sigma)\in\mathbb{Q}^d$. Si de plus les nombres $\prod_\sigma (\sigma\alpha)^{x_\sigma}$ appartiennent tous à un même corps de nombres, alors $(x_\sigma)\in\mathbb{Z}^d$. Pour le problème de Weil il serait utile de supprimer l'hypothèse que les x_σ sont réels (et aussi de supprimer l'hypothèse sur le rang du groupe des unités de k).

Nous énonçons d'abord quatre problèmes (A), (A_0), (B), (C), et nous montrons (§ 1) les implications (C) $\Longrightarrow$(B) $\Longrightarrow$(A) $\Longrightarrow$$(A_0)$. Nous montrons ensuite (§ 2) que (B) est un cas particulier de la conjecture de Schanuel, puis (§ 3) que (C) est une conséquence du lemme de Schwarz conjectural de [Wa 2], § 7.1. Ensuite (§ 4) nous énonçons les résultats que l'on peut obtenir sur la transcendance des nombres $\exp\langle\gamma_i, \lambda_j\rangle$ et nous les appliquons aux problèmes (B) et (C) grâce à un lemme de transfert (§ 5). La démonstration du théorème principal (th. 4.1.) est donnée au § 6.

§ 1. Sur certains types de caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres algébriques.

a/ Enoncés des problèmes.

Soient k un corps de nombres, k_λ, $(1\leq\lambda\leq r_1+r_2)$ ses complétés pour les valuations archimédiennes, $\eta_\lambda = [k_\lambda : \mathbb{R}]$ ($\eta_\lambda = 1$ pour $1\leq\lambda\leq r_1$, $\eta_\lambda = 2$ pour $r_1<\lambda\leq r_1+r_2$), f_λ des entiers rationnels, φ_λ des nombres réels, $(1\leq\lambda\leq r_1+r_2)$, σ un nombre réel et $\mathfrak{f}$ un idéal non nul de k. Pour $\alpha\in k$, on note α_λ l'image de α dans k_λ. D'autre part soit $k^*(\mathfrak{f})$ le sous-groupe de k^* formé des α/α' où α et α' sont des entiers de k tels que $\alpha\equiv\alpha'\equiv 1 \mod \mathfrak{f}$. Pour $\alpha\in k^*(\mathfrak{f})$, on définit

$$X(\alpha) = \prod_\lambda \left(\frac{\alpha_\lambda}{|\alpha_\lambda|}\right)^{f_\lambda} \cdot |\alpha_\lambda|^{-\eta_\lambda(\sigma + i\varphi_\lambda)}$$

Si $\sigma\in\mathbb{Q}$ et $\varphi_\lambda = 0$ pour $1\leq\lambda\leq r_1+r_2$, alors $X(\alpha)\in\overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha\in k^*(\mathfrak{f})$.

Si, de plus, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

a) $\sigma\in\mathbb{Z}$, et f_λ est pair pour $r_1<\lambda\leq r_1+r_2$;

b) 2σ est un entier impair, $r_1=0$, et f_λ est impair pour $r_1<\lambda\leq r_1+r_2$;

alors il existe des entiers r_λ, $s_\lambda\in\mathbb{Z}$ tels que

$$X(\alpha) = \pm\prod_\lambda \alpha_\lambda^{r_\lambda}\,\overline{\alpha}_\lambda^{s_\lambda},$$

donc il existe un corps de nombres contenant tous les $X(\alpha)$, $\alpha\in k^*(\mathfrak{f})$.

Dans [We], A.WEIL demande si la réciproque est vraie. Nous formulons cette question sous forme de deux problèmes. Le premier permettrait de montrer que si χ est un caractère du groupe des classes d'idèles de k pour lequel les coefficients de la série L de Hecke associée à χ sont algébriques, alors χ est de type (A) au sens de [We].

Problème (A). - Si $X(\alpha) \in \bar{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha \in k^*(\mathfrak{f})$, montrer que $\sigma \in \mathbb{Q}$ et que $\varphi_\lambda = 0$ pour $1 \leqslant \lambda \leqslant r_1 + r_2$.

Le second problème concerne le cas où les coefficients de la série L de Hecke sont dans un corps de nombres fixé; il s'agit de montrer que χ est de type (A_o) au sens de [We]. Nous montrerons que c'est bien le cas si on suppose à priori que χ est de type (A).

Problème (A_o). - S'il existe un corps de nombres K tel que $X(\alpha) \in K$ pour tout $\alpha \in k^*(\mathfrak{f})$, alors $2\sigma \in \mathbb{Z}$, et $f_\lambda \equiv 2\sigma \bmod 2$ pour $r_1 + 1 \leqslant \lambda \leqslant r_1 + r_2$. Si de plus $r_1 \geqslant 1$, alors $\sigma \in \mathbb{Z}$.

Nous introduisons deux autres problèmes dont la solution impliquerait celle de (A) (et donc celle de (A_o)) et pour lesquels nous résoudrons quelques cas particuliers. Pour les deux problèmes qui suivent, nous considérons des nombres algébriques non nuls $\alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leqslant \lambda \leqslant n,\ \nu = 1,2,\dots)$ et des déterminations $\log \alpha_{\lambda,\nu}$ de leurs logarithmes. On considère des nombres complexes $x_1,\dots,x_n$, et on suppose que les nombres

$$\prod_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda,\nu}^{x_\lambda} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \dots)$$

sont tous algébriques.

Problème (B). - Si les nombres $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leqslant \lambda \leqslant n,\ \nu = 1,2,\dots)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $x_\lambda \in \mathbb{Q}$ pour $1 \leqslant \lambda \leqslant n$.

Problème (C). Si les points de $\mathbb{C}^n$

$$(\log \alpha_{1,\nu}, \dots, \log \alpha_{n,\nu}), \qquad (\nu = 1,2,\dots)$$

sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $1, x_1, \dots, x_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Nous allons établir les liens suivants entre ces problèmes :

$$(C) \Longrightarrow (B) \Longrightarrow (A) \Longrightarrow (A_o).$$

b/ Un lemme préliminaire.

Pour établir les liens entre (A_o), (A) et (B), nous utiliserons le lemme suivant .

LEMME 1.1. - Soient k un corps de nombres, k' une extension de k galoisienne sur $\mathbb{Q}$, et $\mathfrak{f}$ un idéal entier de k . Il existe une suite α_ν d'éléments de $k^*(\mathfrak{f})$, et une suite p_ν de nombres premiers deux-à-deux distincts, tels que

a/ p_ν se décompose totalement dans k'

b/ il existe un idéal de k au-dessus de p_ν , et un seul, $\mathfrak{p}_\nu$, qui divise (α_ν).

c/ $\mathfrak{p}_\nu^2$ ne divise pas (α_ν), et (α_ν) est premier à $\prod_{\mu<\nu}(\alpha_\mu)$.

Démonstration.

a/ Dans chaque classe d'idéaux de l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de k, on choisit un idéal entier premier à $\mathfrak{f}$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal entier de k multiple de chacun d'eux et premier à $\mathfrak{f}$. Grâce au théorème de Tschebotareff il existe un nombre premier p totalement décomposé dans k', avec $(p,\mathfrak{m}\mathfrak{f}) = 1$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de k au-dessus de p, soit $\mathfrak{a}$ l'idéal entier de k choisi au début représentant l'inverse de $\mathfrak{p}$ dans le groupe des classes d'idéaux . Donc $\mathfrak{a}$ divise $\mathfrak{m}$ et par conséquent $(p,\mathfrak{a}) = 1$. Enfin soit β un entier de k générateur de l'idéal $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$. Ainsi β est premier à $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}$ est le seul idéal au-dessus de p qui divise β, et $\mathfrak{p}^2$ ne divise pas β.

b/ Par récurrence on va construire une suite β_o, β_1, ... d'entiers de k premiers à $\mathfrak{f}$, et une suite $p_o, p_1, \ldots$ de nombres premiers, tels que les propriétés a/, b/, c/ soient satisfaites avec α_ν remplacés par β_ν.

Pour construire β_o on utilise le a/, précédent. Une fois construits $\beta_o,\ldots,\beta_{\nu-1}$, on choisit pour $\mathfrak{m}$ un multiple des idéaux premiers divisant les β_i , $(0 \leqslant i < \nu)$, ainsi que de leurs conjugués.

c/ Comme $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$ est fini, en remplaçant la suite $(\beta_o, \beta_1, \ldots)$ par une suite extraite , on peut supposer $\beta_\nu \equiv \beta_o \bmod \mathfrak{f}$. Comme β_o est inversible dans $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$, $\alpha_\nu = \beta_\nu/\beta_o \in k^*(\mathfrak{f})$. Le lemme 1.1. s'en déduit facilement.

c/ Le problème (A_o).

Montrons que le problème (A_o) est une conséquence du problème (A). On suppose donc

$$X(\alpha) \in K \quad \text{pour tout } \alpha \in k^*(\mathfrak{f}) \ .$$

Grâce à (A), on peut supposer $\sigma \in \mathbb{Q}$ et

$$X(\alpha) = \prod_\lambda \left(\frac{\alpha_\lambda}{|\alpha_\lambda|}\right)^{f_\lambda} |\alpha_\lambda|^{-\eta_\lambda \sigma}$$

Soit ζ_{2m} une racine primitive 2m-ième de l'unité, où m est le dénominateur de σ . Soit k' la clôture galoisienne de $k(\zeta_{2m})$. On peut supposer $k' \subset K$.
On pose

$$a_\lambda = f_\lambda + \sigma \text{ pour } 1 \leqslant \lambda \leqslant r_1$$
$$a_{r_2+\lambda} = \bar{a}_\lambda = \frac{1}{2} f_\lambda + \sigma \text{ pour } r_1 < \lambda \leqslant r_1 + r_2 .$$

Ainsi en désignant par $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ $(d = r_1 + 2r_2)$ les d plongements de k dans $\mathbb{C}$, on a

$$\prod_{j=1}^{d} (\sigma_j \alpha)^{a_j} \in K$$

pour tout $\alpha \in k^*(\mathcal{f})$, et nous allons en déduire $a_j \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$. On désigne par $\tau_1, \ldots, \tau_{d'}$, les plongements de k' dans $\mathbb{C}$, avec $d' = [k' : Q]$, et disons $\tau_j|_k = \sigma_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$. Notons $b_j = a_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$ et $b_j = 0$ pour $d < j \leqslant d'$. Ainsi

$$\prod_{j=1}^{d'} (\tau_j \alpha)^{b_j} \in K \text{ pour tout } \alpha \in k^*(\mathcal{f}).$$

On utilise maintenant la suite (α_ν) construite au lemme 1.1. Soient ℓ un entier, Γ le sous-groupe multiplicatif de k'^* engendré par les $\ell d'$ nombres $\tau_j \alpha_\nu$, $(1 \leqslant j \leqslant d'$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell)$. Grâce à la construction des α_ν on vérifie que le groupe de division de Γ dans k' est Γ lui-même. La théorie de Kummer montre alors que si l'un des nombres rationnels b_j n'est pas entier, le corps obtenu en adjoignant à k' les nombres

$$\prod_{j=1}^{d'} (\tau_j \alpha_\nu)^{b_j}$$

a un degré qui tend vers l'infini quand ℓ tend vers l'infini. Ceci termine la démonstration.

d/ Le problème (A) comme conséquence du problème (B).

On choisit dans $k^*(\mathcal{f}) \cap \mathbb{Q}^*$ trois nombres multiplicativement indépendants. L'hypothèse $X(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ jointe au théorème des six exponentielles implique

$$(r_1 + 2r_2)\sigma + i \sum_\lambda \eta_\lambda \varphi_\lambda \in \mathbb{Q} ,$$

donc $\sigma \in Q$ et $\sum_\lambda \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$.

On pose alors $n = r_1 + r_2 - 1$ (c'est le rang du groupe des unités de k) et on écrit que pour $\alpha \in k^*(\mathcal{f})$ le nombre

$$X(\alpha) \cdot \prod_{\lambda=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{\alpha_\lambda}{|\alpha_\lambda|} \right)^{-f_\lambda} |\alpha_\lambda|^{\eta_\lambda \sigma} = \prod_{\lambda=1}^{n} \left| \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{n+1}} \right|^{-i\eta_\lambda \varphi_\lambda}$$

est algébrique. Utilisant le lemme 1.1., on définit

$$\alpha_{\lambda,\nu} = |\sigma_\lambda \alpha_\nu / \sigma_{r_1+r_2}\alpha_\nu|, \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant n,\ \nu = 1,2,\ldots)$$

$$x_\lambda = i\eta_\lambda \varphi_\lambda \ , \qquad (1 \leqslant \lambda \leqslant n) .$$

Pour résoudre le problème (A) il suffit donc de résoudre le problème (B) dans dans le cas particulier où les x_λ sont imaginaires purs et les $\alpha_{\lambda\ \nu}$ sont réels. Le nombre des variables qui interviendront sera le nombre de Dirichlet de k, $n = r_1 + r_2 - 1$.

e/ <u>Le problème</u> (B) <u>est un cas particulier du problème</u> (C).

Nous allons établir un résultat plus précis : <u>pour résoudre le problème</u> (B), <u>il suffit que l'on montre, sous les hypothèses qui y figurent, que les nombres</u> 1, $x_1,\ldots, x_n$ <u>sont</u> $\mathbb{Q}$<u>-linéairement dépendants</u>.

<u>Démonstration</u>.

On démontre ceci par récurrence sur n. Le cas n = 1 est banal. On suppose les hypothèses du théorème (B) vérifiées. On suppose donc de plus que l'on a démontré la dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de 1, $x_1,\ldots, x_n$. Soit 1, $\xi_1,\ldots, \xi_r$ (avec $0 \leqslant r < n$) une base sur $\mathbb{Q}$ du $\mathbb{Q}$ espace vectoriel engendré par 1, $x_1,\ldots, x_n$:

$$x_\lambda = a_\lambda + \sum_{s=1}^{r} b_{\lambda,s}\ \xi_s \ , \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant n) .$$

Supposons $r \geqslant 1$. Posons

$$\log \beta_{s,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda,s} \log \alpha_{\lambda,\nu} \ , \ (1 \leqslant s \leqslant r \ , \ \nu \geqslant 1).$$

En extrayant une sous-suite d'entiers ν, et en réordonnant les indices s, on peut supposer que pour tout $\nu \geqslant 1$, $\log \beta_{1,\nu},\ldots, \log \beta_{t,\nu}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et que

$$\log \beta_{j,\nu} = \sum_{u=1}^{t} c_{u,j,\nu} \log \beta_{u,\nu} \ , \ (t < j \leqslant r) ,$$

avec $c_{u,j,\nu} \in \mathbb{Q}$, et $1 \leqslant t \leqslant r$. L'hypothèse d'indépendance linéaire des $\log \alpha_{\lambda,\nu}$ permet de vérifier

$$\log \beta_{j,\nu} = \sum_{u=1}^{t} c_{u,j,1} \log \beta_{u,\nu} \ , \ (t<j\leqslant r \ , \ \nu \geqslant 1).$$

On vérifie aussi que les nombres $\beta_{u,\nu}$, $(1 \leqslant u \leqslant t \ , \nu \geqslant 1)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants , et que si on pose

$$y_u = x_u + \sum_{j=t+1}^{r} c_{u,j,1}\ x_j \ , \quad (1 \leqslant u \leqslant t) ,$$

alors

$$\prod_{u=1}^{t} \beta_{u,\nu}^{y_u} \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{pour tout} \quad \nu \geqslant 1 .$$

Comme $1, y_1, \ldots, y_t$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, l'hypothèse de récurrence donne une contradiction. Donc $r = 0$, et $x_1, \ldots , x_n$ sont rationnels.

f/ <u>Deux méthodes duales.</u>

Il y a deux méthodes de transcendance pour attaquer les problèmes (B) et (C). La première utilise les fonctions

$$e^{z_1}, \ldots , e^{z_n} , e^{x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n} ,$$

et les points de

$$\mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\nu + \ldots$$

avec

$$\gamma_\nu = (\log \alpha_{1,\nu}, \ldots, \log \alpha_{n,\nu}) \in \mathbb{C}^n , \quad (\nu \geqslant 1).$$

La deuxième utilise les fonctions

$$f_\nu(z_1,\ldots, z_n) = \prod_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\,\nu}^{z_\nu}, \quad (\nu \geqslant 1) ,$$

avec les points de $\mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}\,(x_1,\ldots,x_n)$.

L'étude que nous ferons au § 3 montre que si on disposait d'un bon lemme de Schwarz , on pourrait résoudre les problèmes précédents par l'une ou l'autre des méthodes. A l'heure actuelle les lemmes de Schwarz que l'on connait sont un peu plus précis dans le cas de sous-groupes de $\mathbb{R}^n$, et les conditions diophantiennes qu'ils nécessitent sont plus faciles à vérifier dans le cas de sous-groupes de rang $n + 1$. C'est pourquoi nous développerons surtout la deuxième méthode (§ 4) en supposant $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Avec cette hypothèse , nous résoudrons les problèmes (B) et (C) dans les deux cas particuliers suivants :

a/ $n = 2$

b/ le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(x_1,\ldots, x_n)$ est inférieur ou égal à 1.

§ 2. Lien avec la conjecture de Schanuel.

Nous montrons d'abord que le problème (B) est un cas particulier de la conjecture de Schanuel. Puis nous définissons un exposant de Dirichlet $\mu(\Gamma)$ pour les sous-groupes de rang quelconque de $\mathbb{C}^n$, généralisant le nombre $\mu(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ défini dans [Wa 2], § 1.3. quand Γ est de type fini. Nous montrons enfin que la conjecture de Schanuel implique $\mu(L(k^*)) = \infty$ quand $L : k^* \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ est le plongement logarithmique d'un corps de nombres.

Nous utiliserons uniquement la conséquence suivante de la conjecture de Schanuel (cf. par exemple [Wa 1], § 7.5.) : si $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_r$ sont des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, alors $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_r$ sont algébriquement indépendants.

a/ Le problème de WEIL est un cas particulier de la conjecture de Schanuel.

Nous établissons pour commencer le lemme suivant :

LEMME 2.1. - Soient $\log \alpha_{\lambda,\nu}$ des logarithmes de nombres algébriques, $1 \leq \lambda \leq n+1$, $1 \leq \nu \leq n+1$. On suppose que les nombres $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leq \lambda \leq n,\ 1 \leq \nu \leq n+1)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si le déterminant $(n+1)\times(n+1)$

$$\det(\log \alpha_{\lambda,\nu})$$

est nul, et si la conjecture de Schanuel est vraie, alors les éléments

$$(\log \alpha_{\lambda,1}, \ldots, \log \alpha_{\lambda,n+1}), \quad (1 \leq \lambda \leq n+1)$$

de $\mathbb{C}^{n+1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

Démonstration.

Soit $n^2 + n + r$ le rang sur $\mathbb{Q}$ du $\mathbb{Z}$-module engendré par les nombres $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leq \lambda \leq n+1,\ 1 \leq \nu \leq n+1)$.

a/ Montrons d'abord que $r = 0$. Après une éventuelle permutation, on écrit pour $1 \leq s \leq n+1-r$

$$\log \alpha_{n+1,r+s} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{s,\lambda,\nu} \log \alpha_{\lambda,\nu} + \sum_{t=1}^{r} b_{s,t} \log \alpha_{n+1,t}.$$

On développe le déterminant sur la dernière colonne; on obtient ainsi un polynôme en $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leq \lambda \leq n,\ 1 \leq \nu \leq n+1$, et $\lambda = n+1,\ 1 \leq \nu \leq r)$; si $r \geq 1$, le coefficient de

$$\log \alpha_{n+1,1} (\log \alpha_{2,1} \cdots \log \alpha_{n+1,n})$$

est égal à 1, ce qui contredit la conjecture de Schanuel.

Donc $r = 0$, et

$$\log \alpha_{n+1,s} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{s,\lambda,\nu} \log \alpha_{\lambda,\nu}, \quad (1 \leqslant s \leqslant n+1).$$

b/ On montre que $a_{s,\lambda,\nu} = 0$ pour $\nu \neq s$. Pour cela on développe le déterminant comme un polynôme en $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leqslant \lambda \leqslant n$, $1 \leqslant \nu \leqslant n+1)$, on considère des entiers λ_o, ν_o, s_o avec $1 \leqslant \lambda_o \leqslant n$, $1 \leqslant \nu_o \leqslant n+1$, $1 \leqslant s_o \leqslant n+1$, on choisit $n-1$ entiers $j_1, \ldots, j_{\lambda_o - 1}, j_{\lambda_o + 1}, \ldots, j_n$ tels que $\{s_o, \nu_o, j_1, \ldots, \check{j}_{\lambda_o}, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n+1\}$, et on considère le coefficient de

$$\log \alpha_{1,j_1} \ldots \log \alpha_{\lambda_o - 1, j_{\lambda_o - 1}} \; (\log \alpha_{\lambda_o,\nu_o})^2 \log \alpha_{\lambda_o + 1, j_{\lambda_o + 1}} \ldots \log \alpha_{n,j_n}.$$

Ce coefficient est $a_{s_o,\lambda_o,\nu_o} \cdot \varepsilon(\sigma_o)$ où ε est la signature et $\sigma_o \in S_{n+1}$ est défini par

$$\begin{cases} \sigma_o(i) = j_i, & 1 \leqslant i \leqslant n, \; i \neq \lambda_o \\ \sigma_o(\lambda_o) = \nu_o, & \\ \sigma_o(n+1) = s_o. & \end{cases}$$

Donc $a_{s,\lambda,\nu} = 0$ pour $s \neq \nu$, et on peut écrire

$$\log \alpha_{n+1,s} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda,s} \log \alpha_{\lambda,s}, \quad (1 \leqslant s \leqslant n+1).$$

c/ On montre que $a_{\lambda,s}$ ne dépend pas de s. Pour simplifier les notations on le montre pour $\lambda = 1$. Soient s_o, s_1 deux entiers distincts entre 1 et $n+1$; on choisit $j_2, \ldots, j_n$ tels que $\{s_o, s_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$; dans le développement du déterminant le coefficient de

$$\log \alpha_{1,s_o} \log \alpha_{1,s_1} \log \alpha_{2,j_2} \ldots \log \alpha_{n,j_n}$$

est $\varepsilon(\sigma_o) a_{1,s_o} + \varepsilon(\sigma_1) a_{1,s_1}$ où $\varepsilon(\sigma_o) = -\varepsilon(\sigma_1)$. La conjecture de Schanuel implique $a_{1,s_o} = a_{1,s_1}$. On obtient finalement des nombres rationnels $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\log \alpha_{n+1,s} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \log \alpha_{\lambda,s}, \quad (1 \leqslant s \leqslant n+1),$$

ce qui démontre le lemme 2.1.

L'application au problème (B) se fait de la manière suivante. Sous les hypothèses du problème (B), on définit

$$\log \alpha_{n+1,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \log \alpha_{\lambda,\nu}, \; (1 \leqslant \nu \leqslant n+1).$$

Le lemme 2.1. entraîne alors (si la conjecture de Schanuel est vraie)

$$\log \alpha_{n+1,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \log \alpha_{\lambda,\nu}, \; (1 \leqslant \nu \leqslant n+1)$$

et, en admettant la conjecture de Schanuel, le déterminant de la matrice $(\log \alpha_{\lambda,\nu})$, $(1 \leqslant \lambda, \nu \leqslant n)$ est non nul. Donc $x_\lambda = a_\lambda$ pour tout $\lambda = 1, \ldots, n$.

b/ Exposant de Dirichlet généralisé pour les sous-groupes de rang infini.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{C}^n$. On définit

$$\mu(\Gamma) = \min \frac{\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} s_W(\Gamma)}{\operatorname{codim} W}$$

quand W parcourt les sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ distincts de $\mathbb{C}^n$, et s_W est la surjection canonique $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/W$. Dire que $\mu(\Gamma)$ est fini est équivalent à dire qu'il existe un sous-espace W de $\mathbb{C}^n$, de codimension 1, tel que $s_W(\Gamma)$ soit de rang fini sur $\mathbb{Z}$. Si Γ lui-même est de type fini, ce coefficient $\mu(\Gamma)$ coïncide avec le nombre $\mu(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ défini dans [Wa 2] § 1.3. Dans le cas général, $\mu(\Gamma) = \infty$ si et seulement si pour tout réel $\mu > 0$, il existe un sous-groupe Γ' de Γ de type fini tel que $\mu(\Gamma') \geqslant \mu$ (on utilise un argument de compacité).

c/ Conséquence de la conjecture de Schanuel.

Soit $L : k^* \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ le plongement logarithmique d'un corps de nombres k. Montrons que la conjecture de Schanuel implique $\mu(L(k^*)) = \infty$. D'après le lemme 1.1., il suffit d'établir le résultat suivant.

LEMME 2.2. - Soient $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leqslant \lambda \leqslant n,\ 1 \leqslant \nu \leqslant \ell)$ des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques, avec $\ell \geqslant n$. On définit

$$\gamma_\nu = (\log \alpha_{1,\nu}, \ldots, \log \alpha_{n,\nu}), \quad (1 \leqslant \nu \leqslant \ell),$$

et

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\ell \subset \mathbb{C}^n.$$

Si la conjecture de Schanuel est vraie, alors $\mu(\Gamma) = \frac{\ell}{n}$.

Démonstration.

a/ Soient $\delta_1, \ldots, \delta_r$ des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de Γ, $0 \leqslant r \leqslant \ell$. Il existe des éléments $\delta_{r+1}, \ldots, \delta_\ell$ de Γ, tels que $\delta_1, \ldots, \delta_\ell$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et tels que si on écrit

$$\delta_j = (\log \beta_{1,j}, \ldots, \log \beta_{n,j}), \quad (1 \leqslant j \leqslant \ell),$$

alors les $n\ell$ nombres $\log \beta_{\lambda,j}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

On démontre ce résultat par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant banal. Grâce à l'hypothèse de récurrence on peut supposer $\delta_j = \gamma_j$ pour $1 \leqslant j < r$. Notons

$$\delta_r = \sum_{j=1}^{\ell} h_j \gamma_j .$$

Comme $\delta_1, \ldots, \delta_r$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, il n'y a pas de restriction à supposer $h_r \neq 0$. On définit alors $\delta_j = \gamma_j$ pour $r + 1 \leqslant j \leqslant \ell$. On a ainsi pour $1 \leqslant \lambda \leqslant n$

$$\log \beta_{\lambda,j} = \log \alpha_{\lambda,j} \quad \text{pour } j \neq r,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell$$

et

$$\log \beta_{\lambda,r} = \sum_{j=1}^{\ell} h_j \log \alpha_{\lambda,j} .$$

On en déduit facilement le résultat annoncé.

b/ Soient $\delta_1, \ldots, \delta_r$ des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de Γ, avec $r \leqslant n$. Si la conjecture de Schanuel est vraie, alors $\delta_1, \ldots, \delta_r$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.

En effet le rang de la matrice $(\log \beta_{\lambda,j})_{1 \leqslant \lambda \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant r}$ est alors égal à r.

c/ Soit W un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, de dimension r, avec $0 < r < n$. Grâce à b/, la conjecture de Schanuel implique $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, \Gamma \cap W \leqslant r$, donc

$$\mu(\Gamma) = \min_{0<r<n} \frac{\ell - r}{n - r} = \frac{\ell}{n} .$$

§ 3. Conséquences d'un lemme de Schwarz conjectural.

Soient $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\ell$ et $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \ldots + \mathbb{Z}\lambda_d$ deux sous-groupes de type fini de $\mathbb{C}^n$ de rang ℓ et d respectivement. On cherche à montrer que, sous des hypothèses convenables, l'un des nombres

$$\exp\langle\lambda, \gamma\rangle \quad , \quad (\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma)$$

est transcendant. On étudie ici les conséquences de la conjecture 7.1.10 de [Wa 2] (on montre en particulier qu'elle permettrait de résoudre le problème (C).

La conjecture 7.1.10 de [Wa 2] stipule que Γ satisfait un lemme de Schwarz avec l'exposant $\mu(\Gamma) - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Nous supposons cette conjecture vraie ; nous supposons de plus que les nombres

$$\exp\langle\lambda, \gamma\rangle \quad , \quad (\lambda \in \Lambda \quad , \quad \gamma \in \Gamma)$$

sont algébriques, et nous en tirons les conséquences.

Conséquence 1. $\quad \mu(\Gamma) \leqslant \frac{\ell}{d} + 1$.

Cette inégalité résulte du théorème 8.3.1. de [Wa 2].

Conséquence 2. $\quad \mu(\Gamma)\mu(\Lambda) \leqslant \mu(\Gamma) + \mu(\Lambda)$.

Pour cela nous utiliserons le lemme suivant (mentionné dans [Wa 2] § 2.5b et § 8.2c).

LEMME 3.1. - Soit W un sous-espace de $\mathbb{C}^n$. Les fonctions $\exp\langle\gamma, z\rangle$, $(\gamma \in \Gamma)$, restreintes à W, engendrent un corps de degré de transcendance $\geqslant \mu(\Gamma) \dim_{\mathbb{C}} W$.

Démonstration du lemme 3.1.

Soit $w_1, \ldots, w_r$ une base de W sur $\mathbb{C}$; soit $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ l'application définie par

$$p(x) = (\langle x, w_1\rangle , \ldots, \langle x, w_r\rangle) .$$

Le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps engendré par les restrictions à W des fonctions $\exp\langle\gamma, z\rangle$, $(\gamma \in \Gamma)$ est égal au rang de $p(\Gamma)$, et

$$\mu(\Gamma) \leqslant \frac{\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} p(\Gamma)}{\dim_{\mathbb{C}} W} .$$

Démonstration de la conséquence 2.

D'après le lemme 1.3.1. de [Wa 2] , il existe un sous-groupe Γ' de Γ de rang ℓ' contenu dans un sous-espace W de $\mathbb{C}^n$ de dimension n' tel que

$$\mu(\Gamma', W) = \frac{\ell'}{n'} \geqslant \frac{\ell}{n} .$$

D'après le lemme 3.1., parmi les fonctions $\exp\langle\lambda, z\rangle$, $\lambda \in \Lambda$, restreintes à W, il y en a au moins $d' \geq n' \mu(\Lambda)$ algébriquement indépendantes. De la conséquence 1 on déduit

$$\frac{\ell'}{n'} < \frac{\ell'}{d'} + 1 ,$$

donc $\mu(\Lambda) \leq \frac{\ell}{\ell - n}$. Comme $\mu(\Gamma) \leq \frac{\ell}{n}$, on obtient l'inégalité annoncée.

<u>Conséquence 3.</u> $\mu(\Gamma) \leq \frac{d}{d-n}$ et $\mu(\Lambda) < \frac{\ell}{\ell - n}$.

Nous avons déjà montré la deuxième inégalité à partir de la conséquence 1 (et la première inégalité s'en déduit par symétrie) mais il est facile de les déduire toutes deux directement de la conséquence 2 par récurrence sur n en utilisant le lemme 1.3.1. de [Wa 2] .

<u>Conséquence 4. Dans le problème</u> (C) , <u>il suffit de faire varier</u> ν <u>de</u> 1 <u>à</u> $n^2 + n + 1$.

En effet, choisissons $\Lambda = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}(x_1, \ldots, x_n)$, $d = n+1$,
$\gamma_\nu = (\log \alpha_{1,\nu}, \ldots , \log \alpha_{n,\nu})$, $1 \leq \nu \leq \ell$, $\ell = n^2 + n + 1$,
$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\ell$. Par hypothèse les nombres $e^{\langle\gamma,\lambda\rangle}$ sont algébriques, donc

$$\mu(\Lambda) \leq \frac{\ell}{\ell - n} < 1 + \frac{1}{n} .$$

Donc $1, x_1, \ldots, x_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

<u>Conséquence 5. Sous les hypothèses du problème</u> (B), <u>en notant</u>

$$\gamma_\nu = (\log \alpha_{1,\nu} , \ldots , \log \alpha_{n,\nu}) \in \mathbb{C}^n , \quad (\nu \geq 1)$$

<u>et</u>

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\nu + \ldots ,$$

<u>on a</u>

$$\mu(\Gamma) = \infty.$$

En particulier on en déduirait $\mu(L(k^*)) = \infty$ pour le plongement logarithmique L d'un corps de nombres k, résultat que l'on avait aussi déduit de la conjecture de Schanuel. Il peut être intéressant de noter (pour une éventuelle récurrence ultérieure) que la démonstration de la conséquence 5 utilise un lemme de Schwarz 7.1.10. en n-1 variables. (En particulier la conséquence 5 devient un théorème pour n = 2).

<u>Démonstration.</u> Si W est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de codimension 1 tel que $s_W(\Gamma)$ soit de rang fini sur $\mathbb{Z}$, on construit une suite $(\delta_1, \ldots, \delta_\nu, \ldots)$ d'éléments de $\Gamma \cap W$ tels que

$$\delta_\nu = (\log \beta_{1,\nu}, \ldots, \log \beta_{n,\nu}) , \quad (\nu \geq 1)$$

où les nombres $\log \beta_{\lambda,\nu}$ $(1\leqslant\lambda\leqslant n\ ,\nu\geqslant 1)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. On écrit que les δ_ν appartiennent à W, et on est ramené à résoudre le problème (B) (avec n remplacé par n-1), ce qui est possible grâce à la conséquence 4 (avec n remplacé par n-1).

§ 4. Enoncés des résultats.

Considérons de nouveau deux sous-groupes de type fini de $\mathbb{C}^n$ de rang ℓ et d respectivement ,

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_\ell$$
$$\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \ldots + \mathbb{Z}\lambda_d .$$

Si on sait à priori que Γ satisfait un lemme de Schwarz avec un exposant $\theta > \frac{\ell}{d} + 1$, alors le théorème 8.3.1. de [Wa 2] donne la transcendance de l'un des nombres $\exp\langle\lambda_i , \gamma_j\rangle$, $(1\leqslant i\leqslant d\ ,\ 1\leqslant j\leqslant\ell)$. Si $\ell = n+1$, il suffit de connaître un lemme de Schwarz avec un exposant $\theta > 1$ pour obtenir la conclusion dès que d est suffisamment grand $(d > \frac{n+1}{\theta-1})$.

Dans [Wa 2] nous avons montré comment vérifier un lemme de Schwarz pour Γ connaissant un coefficient de densité. La définition de ce coefficient (cf. [Wa 2], § 1.3.) requiert une propriété pour tous les Γ_N, $N\geqslant 1$. Ici nous supposerons seulement que cette propriété est vraie pour une infinité de N, et nous appellerons la condition suivante <u>hypothèse faible de densité</u>. Nous l'énonçons seulement dans le cas $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$, mais une étude similaire peut être faite dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

<u>Hypothèse</u>. Il existe deux nombres réels positifs c et κ tels que pour une infinité d'entiers $N\geqslant 1$, on ait la propriété suivante : pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^n$ avec $|\zeta| \leqslant 1$, il existe $\gamma\in\Gamma_N$ tel que

$$|\zeta - \gamma| < c\,N^{1-\kappa} .$$

THÉORÈME 4.1. - <u>Si</u> $\kappa > \frac{d}{d-n}$, <u>alors l'un des nombres</u> $\exp\langle\lambda_i, \gamma_j\rangle$ <u>est transcendant</u>.

Nous allons donner plusieurs conséquences de ce résultat, nous démontrerons ensuite les corollaires en utilisant un lemme de transfert (§ 5), et nous démontrerons le théorème 4.1. au § 6.

Quand $\ell = n+1$, l'hypothèse est équivalente à la suivante : $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants , et si on écrit $\gamma_{n+1} = x_1\gamma_1 + \ldots + x_n\gamma_n$, alors il existe une infinité d'entiers H tels que

$$|h_o + h_1x_1 + \dots + h_nx_n| > c_2\, H^{1/(1-\kappa)}$$

pour tout $h_o, \dots, h_n$ entiers rationnels non tous nuls de valeurs absolues inférieures à H (cf. § 5 ci-dessous). La condition $\kappa > \frac{d}{d-n}$ revient alors à dire que le nombre $C = 1/(\kappa-1)$ vérifie $C < \frac{d}{n} - 1$.

COROLLAIRE 4.2. - Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. Soient $\log \alpha_{j,\nu}$ $(1 \leq j \leq n\ ,\ 1 \leq \nu \leq d)$ des logarithmes de nombres algébriques. On suppose que dans $\mathbb{C}^n$ les d vecteurs

$$(\log \alpha_{1,\nu}, \dots , \log \alpha_{n,\nu})\ ,\quad (1 \leq \nu \leq d)$$

sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si les d nombres

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_{j,\nu}^{x_j}\ ,\qquad (1 \leq \nu \leq d)$$

sont algébriques, alors pour tout $C > 0$ vérifiant $C < \frac{d}{n} - 1$, il existe un entier H_o tel que pour tout $H \geq H_o$ l'inégalité

$$|h_o + h_1x_1 + \dots + h_nx_n| < H^{-C}$$

ait une solution $(h_o, \dots, h_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec

$$0 < \max_{0 \leq i \leq n} |h_i| < H\ .$$

Le résultat est non trivial si on peut choisir $C > n$. D'autre part pour $n = 1$ et $d = 3$ on obtient le théorème des six exponentielles dans le cas $x_1 \in \mathbb{R}$.

Le cas $n = 2$ est spécialement intéressant.

COROLLAIRE 4.3. - Avec les hypothèses du corollaire 4.2., on suppose $n = 2$ et d infini. Alors $1, x_1, x_2$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants.

On en déduit immédiatement une solution du problème (C) dans le cas $n = 2$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. De plus le corollaire 4.3. montre que sous des hypothèses naturelles une matrice $3 \times \infty$ dont les coefficients sont des logarithmes de nombres algébriques réels a un rang égal à 3.

Nous déduirons du corollaire 4.3. les deux résultats suivants annoncés dans l'introduction.

COROLLAIRE 4.4. - Si x_1,x_2 sont deux nombres réels tels que $p_1^{x_1} p_2^{x_2}$ soit algébrique pour une infinité de couples de nombres premiers p_1,p_2, alors l'un au moins des trois nombres x_1,x_2,x_1+x_2 est rationnel.

COROLLAIRE 4.5. - Soit k un corps de nombres de degré d dont le rang du groupe des unités est ≤ 2. Soit $\{\sigma\}$ l'ensemble des plongements de k dans $\mathbb{C}$, et soit $(x_\sigma) \in \mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $\alpha \in k^*$ il existe des

<u>des déterminations</u> $\log \sigma\alpha$ <u>des logarithmes des conjugués</u> $\sigma\alpha$ <u>de</u> α <u>telles que</u> $\prod_\sigma (\sigma\alpha)^{x_\sigma} \in \bar{\mathbb{Q}}$. Alors $(x_\sigma) \in \mathbb{Q}^d$.

Nous montrerons aussi que sous les hypothèses du problème (C) dans le cas $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si on suppose que le corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ inférieur ou égal à 1, alors $1, x_1, \ldots, x_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants. De plus

COROLLAIRE 4.6. - <u>Sous les hypothèses du corollaire 4.2., on suppose</u> $x_j = x^j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$, et $d \geqslant 3n^2 + n + 1$. <u>Alors</u> x <u>est algébrique de degré</u> $\leqslant n$.

<u>Démonstrations des corollaires.</u>

1/ Pour déduire le corollaire 4.2. du théorème 4.1., on pose

$$\Gamma = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \ldots + \mathbb{Z}\lambda_d$$

où

$$\lambda_\nu = (\log \alpha_{1,\nu}, \ldots, \log \alpha_{n,\nu}), \quad (1 \leqslant \nu \leqslant d),$$

et on utilise le lemme de transfert ci-dessous (corollaire 5.2.).

2/ Démontrons le corollaire 4.3.. On suppose donc $n = 2$, et $1, x_1, x_2$ $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. On pose

$$\log \beta = x_1 \log \alpha_{1,1} + x_2 \log \alpha_{2,1} ;$$

ainsi β est algébrique. D'après le théorème de Baker et Feldman (cf. par exemple [Wa 1], théorème 8.4.1.) il existe un nombre $C_1 > 0$ effectivement calculable ne dépendant que de $\log \alpha_{1,1}$, $\log \alpha_{2,1}$, $\log \beta$, tel que si $(b_o, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^3$ vérifient

$$|b_o \log \beta + b_1 \log \alpha_{1,1} + b_2 \log \alpha_{2,1}| < B^{-C_1}$$

avec $B = \max\{|b_o|, |b_1|, |b_2|, 2\}$, alors

$$b_o \log \beta + b_1 \log \alpha_{1,1} + b_2 \log \alpha_{2,1} = 0.$$

Soit $C > 2C_1 + 1$. D'après le corollaire 2 avec $d > 2(C+1)$, pour tout $H \geqslant H_o$ il existe trois entiers rationnels non tous nuls tels que

$$|h_o + h_1 x_1 + h_2 x_2| < H^{-C},$$

et

$$0 < \max_{j=0,1,2} |h_j| < H.$$

On supposera, ce qui ne restreint pas la généralité, que h_o, h_1, h_2 sont premiers entre eux dans leur ensemble. On écrit la relation précédente pour $H' = H + 1$:

$$|h'_o + h'_1 x_1 + h'_2 x_2| < (H+1)^{-C}$$

$$0 < \max_{j=0,1,2} |h'_j| < H + 1 \ .$$

On pose

$$b_o = h_1 h'_2 - h'_1 h_2$$
$$b_1 = h_o h'_2 - h'_o h_2$$
$$b_2 = h_1 h'_o - h'_1 h_o \ ,$$

et on remarque que

$$\max\{|b_o| \ , \ |b_1| \ , \ |b_2|\} \leqslant 2H^2$$

et

$$|b_o x_1 + b_1| < 3H^{-(C-1)}$$
$$|b_o x_2 + b_2| < 3H^{-(C-1)} \ ,$$

donc

$$|b_o \log \beta + b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2| < 3(|\log \alpha_1| + |\log \alpha_2|) \ H^{-(C-1)}.$$

Dès que H est suffisamment grand, disons $H \geqslant H_1$, (avec $H_1 \geqslant H_o$) on en déduit

$$b_o \log \beta + b_1 \log \alpha_{1,1} + b_2 \log \alpha_{2,1} = 0.$$

Montrons que $(b_o, b_1, b_2) = (0,0,0)$. Sinon $\log \beta$, $\log \alpha_{1,1}$, $\log \alpha_{2,1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants, et on distingue deux cas

a) $\log \alpha_{1,1}$, $\log \alpha_{2,1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; il existe alors un couple unique $(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tel que $\log \beta + r \log \alpha_{1,1} + s \log \alpha_{2,1} = 0$, donc $\frac{b_1}{b_o} = r$, $\frac{b_2}{b_o} = s$, ce qui est incompatible pour H suffisamment grand ($H \geqslant H_2$) avec les inégalités

$$|b_o x_j + b_j| < 3H^{-(C-1)}, \ (j = 1, 2)$$

car $(x_1, x_2) \notin \mathbb{Q}^2$.

b) $\log \alpha_{2,1} = r \log \alpha_{1,1}$, avec $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$b_o \log \beta = -(b_1 + r b_2) \log \alpha_{1,1}$$
$$= b_o(x_1 + r\, x_2) \log \alpha_{1,1} \ ,$$

ce qui contredit notre hypothèse sur l'indépendance linéaire $1, x_1, x_2$.

Ainsi, pour tout $H \geqslant H_2$, on a $b_o = b_1 = b_2 = 0$, donc $(h_o, h_1, h_2) = (h'_o, h'_1, h'_2)$. En écrivant cela pour $H = H_2, H_2 + 1, \ldots$, on en déduit $h_o + h_1 x_1 + h_2 x_2 = 0$, d'où la contradiction.

3/ Supposons que $(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$ soit tel que $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\in\overline{\mathbb{Q}}$ pour une infinité de (p_1, p_2) premiers. D'après le corollaire 4.3. il existe $(a, b, c)\in\mathbb{Z}^3$ avec $(a, b)\neq(0, 0)$ et $ax_1 + bx_2 = c$. Alors

$$(p_1^b\, p_2^{-a})^{x_1}\in\mathbb{Q}\ .$$

Si a et b sont tous deux différents de 0, on déduit alors du théorème des six exponentielles $a = b$, $x_1 + x_2\in\mathbb{Q}$, et de plus $p_1 = p_2$ pour tous les couples (p_1, p_2), sauf peut-être deux.

Si par exemple $b = 0$, alors $a\neq 0$, et $x_1\in\mathbb{Q}$; de plus les nombres p_2 prennent au plus deux valeurs distinctes, d'après le théorème des six exponentielles.

On notera que, compte-tenu des résultats explicites actuels de la méthode de BAKER, si l'une des relations du corollaire 4.4. est par exemple $2^{x_1}\,3^{x_2} = 5$, alors le nombre de couples (p_1,p_2) que l'on doit utiliser pour obtenir la conclusion (c'est-à-dire le nombre d dans le corollaire 4.2.) est de l'ordre de 2^{70}.

4/ La démonstration du corollaire 4.5. repose sur le lemme 1.1. et se fait de manière analogue à celle de l'implication (B) $\Longrightarrow$(A) au § 1.d. On remarquera que la démonstration de l'implication (A) $\Longrightarrow(A_o)$ montre que si tous les nombres

$$\prod_\sigma (\sigma\alpha)^{x_\sigma}$$

sont dans un même corps de nombres, alors $(x_\sigma)\in\mathbb{Z}^d$.

5/ Supposons que le corps $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_n)$ ait un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ inférieur ou égal à 1, et que $1, x_1,\ldots, x_n$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ une extension transcendante pure de $\mathbb{Q}$ telle que $\mathbb{Q}(x_1,\ldots, x_n)$ soit une extension algébrique de K. En prenant la norme sur K de $h_o + h_1x_1 + \ldots + h_nx_n$, on construit pour chaque $H\geqslant H_o$ un polynôme non nul $P_H\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $\log\,|P_H(\theta)|\leqslant -c_1\,H^{-C}$, $\deg P_H\leqslant c_2$, $H(P_H)\leqslant H^{c_3}$, où c_1, c_2, c_3 ne dépendent pas de H. Si $C>3\,c_2c_3$, le critère de transcendance de Gel'fond (cf. par exemple [Wa 1], th. 5.1.1.) montre que $P_H(\theta) = 0$ pour tout $H\geqslant H_o$, donc $h_o + h_1x_1 + \ldots + h_nx_n = 0$, d'où la contradiction .

On notera que si $x_1,\ldots, x_n$ sont tous algébriques, il suffit, grâce au théorème de Baker, de choisir $d = 1$.

D'autre part si $x_j = x^j$, $(1\leqslant j\leqslant n)$, on a $c_2 = n$, $c_3 = 1$, et dès que $d>3n^2 + n$ on peut choisir $C>3c_2c_3$.

§ 5. Un lemme de transfert.

Nous donnons ici le lemme de transfert qui a été utilisé dans la démonstration du corollaire 4.2.

Notations. Soient $\theta_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$ des nombres réels . Soit $\ell = m + n$. On considère une base $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de $\mathbb{R}^n$ (resp. $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ de $\mathbb{R}^m$) et on définit

$$\gamma_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{i,j} \ \gamma_j \ , \qquad (1 \leq i \leq m)$$

et

$$\delta_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} \theta_{i,j} \ \delta_i \ , \qquad (1 \leq j \leq n) \ .$$

Soient $\Gamma = \mathbb{Z}\ \gamma_1 + \dots + \mathbb{Z}\ \gamma_\ell \subset \mathbb{R}^n$ et $\Delta = \mathbb{Z}\ \delta_1 + \dots + \mathbb{Z}\ \delta_\ell \subset \mathbb{R}^m$.

Quand H et N sont des entiers positifs, on note

$$\Gamma_H = \{ a_1\ \gamma_1 + \dots + a_\ell\, \gamma_1 \ ;\ (a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \ ;\ \max_{1 \leq k \leq \ell} |a_k| \leq H \}$$

et

$$\Delta_N = \{ b_1\ \delta_1 + \dots + b_\ell\, \delta_\ell \ ;\ (b_1, \dots, b_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \ ;\ \max_{1 \leq k \leq \ell} |b_k| \leq N \}.$$

Le résultat principal de cette section est une version quantitative du théorème de Kronecker, due à Khintchine.

PROPOSITION 5.1. - Il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 effectivement calculables en fonction de m, n et $|\theta_{i,j}|$, $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ ayant la propriété suivante. Soient H et N des entiers positifs.

a/ Si

$$\min\{|\delta| \ ;\ \delta \in \Delta_N \ , \delta \neq 0\} \geq c_1\ H^{-1}$$

alors pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$ avec $|\zeta| \leq 1$, il existe $\gamma \in \Gamma_H$ tel que

$$|\gamma - \zeta| \leq c_2\ N^{-1} \ .$$

b/ Inversement, si pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$ avec $|\zeta| \leq 1$, il existe $\gamma \in \Gamma_H$ avec

$$|\gamma - \zeta| \leq c_3\ N^{-1} \ ,$$

alors

$$\min\{|\delta| \ ;\ \delta \in \Delta_N \ ,\ \delta \neq 0\} \geq c_4\ H^{-1} \ .$$

Démonstration.

On considère les formes linéaires

$$L_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{i,j}\ x_i \ , \quad (1 \leq j \leq n)$$

et

$$M_i(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{i,j}\, u_j, \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

a/ L'hypothèse entraîne que pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j| < c_5 N$, on a

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \|M_i(u)\| \geqslant c_6 H^{-1}$$

où la double barre est la distance à l'entier le plus proche .

On en déduit

$$\|\langle u,\zeta\rangle\| \leqslant \frac{1}{2} \leqslant (\ell!)^{-2}\, 2^{\ell-1} \quad \max\{ X \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \|M_i(u)\| \; ; \; C \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j| \}$$

avec $X = c_7 H$, $C = c_8 N^{-1}$. D'après le théorème XVII B de [Ca] , p. 99, on en déduit l'existence de $a \in \mathbb{Z}^m$ avec

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|L_j(a) - \zeta_j\| \leqslant C$$

et

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |a_i| \leqslant X .$$

L'existence de γ vérifiant $|\gamma - \zeta| \leqslant c_2 N^{-1}$ s'en déduit facilement.

b/ Supposons qu'il existe $\delta \in \Delta_N$, $\delta \neq 0$ tel que $|\delta| < c_4 H^{-1}$. On note $\delta = \sum_{k=1}^{\ell} b_k \delta_k$, $u = (b_{m+1}, \ldots, b_{m+n}) \in \mathbb{R}^n$, et on choisit $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\langle u,\zeta\rangle\| = \frac{1}{2}$.

Le théorème XVII A de [Ca] , p. 99 montre que pour tout $\gamma \in \Gamma_H$, on a

$$|\gamma - \zeta| > c_3 N^{-1}$$

La proposition 5.1. est ainsi démontrée.

Soit $\kappa > 1$. Pour que Γ ait un coefficient de densité $\geqslant \kappa$ dans $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\min\{|\delta| ; \; \delta \in \Delta_N \; ; \; \delta \neq 0\} \geqslant c_9 N^{-1/(\kappa - 1)}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Pour que Γ vérifie l'hypothèse faible de densité (cf. § 4), il faut et il suffit que cette inégalité soit satisfaite pour une infinité de N.

On remarquera que quand $\ell = n + 1$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}(x_1, \ldots, x_n)$, alors Δ est le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par $1, x_1, \ldots, x_n$, et les conditions précédentes sur Δ_N concernent les formes linéaires en $1, x_1, \ldots, x_n$.

COROLLAIRE 5.2. - Soient $\kappa, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels, $\kappa > 0$. On suppose qu'il existe un nombre réel $c_{10} > 0$ et une infinité d'entiers $H > 0$ tels que pour tout $(h_o, h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $0 < \max_{0 \leq j \leq n} |h_j| < H$, on ait

$$|h_o + h_1 x_1 + \ldots + h_n x_n| > c_{10} H^{1/(1-\kappa)}.$$

Alors il existe un nombre réel $c_{11} > 0$ tel que pour une infinité d'entiers $N > 0$ on ait la propriété suivante : pour tout $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\max_{1 \leq j \leq n} |\zeta_j| \leq 1$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, $-N \leq k \leq N$, tel que

$$\|\zeta_j - k x_j\| \leq c_{11} N^{1-\kappa} \text{ pour } 1 \leq j \leq n .$$

Le théorème 4.1. et la proposition 5.1. permettent de ramener la solution du problème C dans le cas où les nombres $\log \alpha_{\lambda,\nu}$, $(1 \leq \lambda \leq n, \nu \geq 1)$ sont tous réels (seul cas utile pour le problème (A)) à la condition d'approximation diophantienne suivante.

Avec les hypothèses du problème (C), on suppose (ce qui ne restreint pas la généralité) que les n points de $\mathbb{C}^n$

$$(\log \alpha_{1,j} , \ldots , \log \alpha_{n,j}) , \quad 1 \leq j \leq n$$

sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants; on peut alors définir $(\theta_{1,\nu}, \ldots, \theta_{n,\nu})$, pour $\nu \geq n+1$, comme étant les coordonnées de $(\log \alpha_{1,\nu}, \ldots, \log \alpha_{n,\nu})$ dans cette base :

$$\log \alpha_{\lambda,\nu} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{j,\nu} \log \alpha_{\lambda,j} , \qquad (1 \leq \lambda \leq n, \quad \nu \geq n+1).$$

Montrer qu'il existe η, $0 < \eta < \frac{1}{n}$, et ℓ entier positif, tels que pour une infinité de H l'inégalité

$$(5.3.) \qquad \sum_{\nu = n+1}^{\ell} \left\| \sum_{j=1}^{n} h_j \theta_{j,\nu} \right\| < H^{-\eta}$$

n'ait pas de solutions en entiers $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $0 < \max_{1 \leq j \leq n} |h_j| < H$.

Ici, même le cas $n = 1$ n'est pas trivial. Par exemple peut-on montrer l'existence d'un nombre $\eta < 1$ tel que pour une infinité de $H > 0$ on ait

$$\min_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ 0 < |h| < H}} \left\{ \left\| h \frac{\log 3}{\log 2} \right\| + \left\| h \frac{\log 5}{\log 2} \right\| \right\} > H^{-\eta} \quad ?$$

§ 6. Démonstration du théorème 4.1.

Soit $\frac{N}{2}$ un entier suffisamment grand pour lequel l'hypothèse faible de densité est vérifiée : pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n, |\zeta| \leqslant 1$, il existe $\gamma \in \Gamma_{N/2}$ vérifiant

$$|\zeta - \gamma| \leqslant c_o \, N^{1-\kappa} .$$

On suppose que les nombres $\exp \langle \lambda_i, \gamma_j \rangle$, $(1 \leqslant i \leqslant d\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell)$ sont tous algébriques, et on en déduira une contradiction.

Les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_{25}$ seront des constantes convenablement choisies indépendantes de N. On définit $X = N^{1+(n\kappa/d)}$, $L = [c_1 \, N^{n\kappa/d}]$, et on remarque que l'hypothèse $1 + (n\kappa/d) < \kappa$ entraîne que X et LN sont petits par rapports à N^κ .

Premier pas. On construit un sous-ensemble E_N de Γ_N vérifiant

$$\text{Card } E_N \leqslant c_2 \, N^{n\kappa}$$

et tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n, |\zeta| \leqslant N/2$, il existe $\sigma \in E_N$ pour lequel

$$|\zeta - \sigma| \leqslant c_3 \, N^{1-\kappa} .$$

On décompose le cube $[-c_4\, N, c_4\, N]^n$ de $\mathbb{R}^n$ en K^n cubes, avec $K = [c_5 \, N^\kappa]$ et dans chacun des petits cubes on choisit un point de Γ_N, ce qui est possible grâce à l'hypothèse faible de densité. Soit E_N l'ensemble des points ainsi choisis.

Deuxième pas. Il existe des entiers rationnels.

$p(\mu) = p(\mu_1, \ldots, \mu_d)$, $(0 \leqslant \mu_j < L,\ 1 \leqslant j \leqslant d)$ vérifiant

$$0 < \max_{(\mu)} |p(\mu)| \leqslant \exp(c_4 \, X)$$

tels que la fonction

$$F(z) = F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mu} p(\mu) \prod_{i=1}^{d} e^{\mu_i \langle \lambda_i, z \rangle}$$

satisfasse

$$F(\sigma) = 0 \quad \text{pour tout } \sigma \in E_N .$$

Grâce au lemme de Siegel (cf. par exemple [Wa 1],lemme 1.3.1) on résout le système de Card E_N équations à L^d inconnues

$$\sum_{\mu} p(\mu) \prod_{i=1}^{d} e^{\mu_i \langle \lambda_i, \sigma \rangle} = 0 , \quad (\sigma \in E_N)$$

dont les coefficients sont des éléments d'un corps de nombres, de taille logarithmique majorée par c_5 X.

<u>Troisième pas</u>. <u>Pour tout</u> $\gamma\in\Gamma_N$ <u>on a</u> $F(\gamma) = 0$.

La construction de E_N au premier pas et le lemme de Schwarz 7.3.4. de [Wa 2] montrent que pour $R > r > c_6 N$, on a

$$\log |F|_r \leqslant \log |F|_R - c_7 N^{\kappa} \log \frac{R}{c_8 r} .$$

Pour $R = c_9 N$ on a $\log |F|_R \leqslant c_{10} L R \leqslant c_{11} X$. Soit $\gamma\in\Gamma_N$; on en déduit

$$|F(\gamma)| \leqslant \exp(- c_{12} N^{\kappa}).$$

Comme la taille logarithmique de $F(\gamma)$ est majorée par $c_{13} X$, en prenant la norme on trouve $F(\gamma) = 0$.

<u>Quatrième pas</u>. <u>Pour tout entier</u> $M \geqslant N$ <u>on a</u>

$(I)_M$ $$F(\gamma) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \gamma\in\Gamma_M$$

<u>et</u>

$(II)_M$ $$\log |F|_{c_{14}M} \leqslant - c_{15} M N^{\kappa-1}.$$

On démontre ces résultats par récurrence sur M. Pour $M = N$, la propriété $(I)_N$ a été démontrée au troisième pas.

$(I)_M \Longrightarrow (II)_M$. Comme $\Gamma_{M/2} \supset \Gamma_{N/2}$, pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^n$, $|\zeta| \leqslant M/2$, il existe $\gamma\in\Gamma_M$ vérifiant

$$|\gamma - \zeta| \leqslant c_{16} \frac{M}{M N^{\kappa-1}} .$$

(C'est ici la partie la plus importante de la démonstration). Le lemme de Schwarz 7.3.4. de [Wa 2] donne pour $R > r > c_{17} M$

$$\log |F|_r \leqslant \log |F|_R - c_{18} M N^{\kappa-1} \log \frac{R}{c_{19} r} .$$

On choisit $r = c_{14} M$ (avec $c_{14} \geqslant 1 + \sum_{j=1}^{\ell} |\gamma_j|$), $R = c_{20} M$, et on majore $\log |F|_R$ par $c_{21} L M \leqslant c_{22} X M/N$.

$(II)_M \Longrightarrow (I)_{M+1}$. Pour $\gamma\in\Gamma_{M+1}$, on déduit de $(II)_M$ et du choix convenable de c_{14}

$$|F(\gamma)| \leqslant \exp(- c_{23} M N^{\kappa-1}) .$$

Comme la taille logarithmique de $F(\gamma)$ est majorée par $c_{24} L M \leqslant c_{25} X M/N$, on en déduit $F(\gamma) = 0$.

<u>Conclusion.</u> La propriété $(II)_M$ pour tout M implique $F = 0$, ce qui contredit l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de $\lambda_1,\ldots, \lambda_d$.

Remarques finales 1. - La contradiction aurait pu être obtenue sans faire tendre M vers l'infini, en utilisant une généralisation (facile) à plusieurs variables du théorème de Tijdeman sur le nombre de zéros de polynômes exponentiels (cf. [Wa 1] , chap. VI). Nous avons pu l'éviter grâce au fait que la fonction auxiliaire F est de type exponentiel $\leqslant c_{21}$ L, mais le recours à un tel lemme serait inévitable (avec cette méthode) dans la recherche d'un analogue elliptique de l'étude que nous venons de faire.

2. - On peut raffiner le théorème 4.1. des deux manière suivantes (simultanément ou indépendamment).

a/ On suppose que dans une base de $\mathbb{C}^n$, les h premières composantes de $\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell$ sont algébriques, avec $1 \leqslant h \leqslant n$. Si la base en question est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on dérive alors la fonction auxiliaire par rapport à $z_1, \ldots, z_h$,et on utilise la méthode exposée par J.-C.Moreau dans ce Séminaire pour démontrer le théorème de Baker dans le cas non-homogène. Par exemple pour $h = 1, \ell = n + 1$, on obtient ainsi des résultats de transcendance sur des nombres de la forme

$$e^{\gamma_i} \prod_{j=2}^{n} \alpha_{j,i}^{x_j} \quad , \qquad 1 \leqslant i \leqslant d \ ,$$

avec $\gamma_i, \alpha_{j,i}$ algébriques. Pour $n = 2$, il suffit de $d = 5$.

b/ On suppose que dans une base de $\mathbb{C}^n$, les k premiers coordonnées de $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont algébriques, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Si la base en question est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on fait alors intervenir $z_1, \ldots, z_k$ dans la fonction auxiliaire. On peut alors remplacer l'hypothèse $\kappa > \frac{d}{d-n}$ du théorème 4.1. par

$$\kappa > \frac{d}{k+d-n} \quad .$$

Pour $k = n$ on vérifie l'hypothèse faible de densité (et même en fait l'hypothèse forte) pour tout $\kappa > 1$ grâce au théorème de W.M.Schmidt, et on retrouve ainsi la démonstration du cas réel homogène du théorème de Baker (par la méthode de Schneider en plusieurs variables) mentionnée au début.

3. - Il est important de noter que, quand on effectue simultanément les deux raffinements précédents, la première base de $\mathbb{C}^n$ (dans laquelle les h premières coordonnées des λ_i sont algébriques) peut être différente de la seconde base (dans laquelle les k premières coordonnées des γ_j sont algébriques). Le cas $h = n$, $k = 1$ (avec $d = \ell = n$) correspond à la nouvelle démonstration du théorème de Baker par D.Bertrand et D.W.Masser . Le cas $h = 1$, $k = n$ (avec $d = 1, \ell = n$) correspond, après un changement de variables, à la démonstration de J.-C.Moreau.

RÉFÉRENCES

[Ca] CASSELS (J.W.S.). - An introduction to diophantine approximation ; Cambridge Tracts, n° 45, Cambridge Univ. Press, 1965.

[Se] SERRE (J.-P.). - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves ; Benjamin, 1968.

[Wa 1] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants ; Lecture Notes in Math., 402, Springer Verlag, 1974.

[Wa 2] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants et groupes algébriques ; Astérisque, 69-70, 1979.

[We] WEIL (A.). - On a certain type of characters of the idele-class group of an algebraic number field ; Proc. Intern. Symp. Alg. Geom., Tokyo Nikko, 1955, Tokyo (1956), 1-7.

Michel WALDSCHMIDT
Institut Henri Poincaré
11, rue P.et M. Curie
75231-PARIS CEDEX 05