.

# Familles d'équations de Thue associées à un sous-groupe de rang 1 d'unités totalement réelles d'un corps de nombres

Claude Levesque and Michel Waldschmidt

*Dédié à* Ram Murty *à l'occasion de son* $60^e$ *anniversaire de naissance*

Abstract. Let $F$ be an irreducible binary form attached to a number field $K$ of degree $\geq 3$. Let $\epsilon \notin \{-1, 1\}$ be a totally real unit of $K$. By twisting $F$ with the powers $\epsilon^a$ of $\epsilon$, $(a \in \mathbb{Z})$, we obtain an infinite family $F_a$ of binary forms. Let $m \in \mathbb{Z}$. We give an effective bound for $\max\{|a|, \log|x|, \log|y|\}$ when $a, x, y$ are rational integers satisfying $F_a(x, y) = m$ with $xy \neq 0$.

Résumé. Soit $F$ une forme binaire irréductible attachée à un corps de nombres $K$ de degré $\geq 3$. Soit $\epsilon \notin \{-1, 1\}$ une unité totalement réelle de $K$. En tordant $F$ par les puissances $\epsilon^a$ de $\epsilon$, $(a \in \mathbb{Z})$, nous obtenons une famille infinie $F_a$ de formes binaires. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Nous donnons une borne effective pour $\max\{|a|, \log|x|, \log|y|\}$ quand $a, x, y$ sont des entiers rationnels satisfaisant $F_a(x, y) = m$ avec $xy \neq 0$.

**Mots clefs:** équations de Thue, formes binaires, équations diophantiennes, bornes effectives.

## 1. Le résultat principal

Soit $\alpha$ un nombre algébrique de degré $d \geq 3$ sur $\mathbb{Q}$. On désigne par $K$ le corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha)$, par $f \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme irréductible de $\alpha$ sur $\mathbb{Z}$ et par $\mathbb{Z}_K^\times$ le groupe des unités de $K$. à chaque unité $\varepsilon \in \mathbb{Z}_K^\times$ dont le degré $r = [\mathbb{Q}(\alpha\varepsilon) : \mathbb{Q}]$ est $\geq 3$, on attache le polynôme irréductible $\mathsf{f}_\varepsilon(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de $\alpha\varepsilon$ sur $\mathbb{Z}$ (défini de façon unique quand on impose que le coefficient directeur soit $> 0$) et par $\mathsf{F}_\varepsilon$ la forme binaire irréductible

$$\mathsf{F}_\varepsilon(X, Y) = Y^r \mathsf{f}_\varepsilon(X/Y) \in \mathbb{Z}[X, Y].$$

On désigne par h la hauteur logarithmique absolue. Rappelons la conjecture 1 de [**4**].

Conjecture 1.1. *Il existe une constante effectivement calculable $\kappa_1 > 0$, ne dépendant que de $\alpha$, telle que, pour tout $m \geq 2$, toute solution $(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_K^\times$ de l'inégalité*

$$|\mathsf{F}_\varepsilon(x, y)| \leq m, \ \text{avec} \ \ xy \neq 0 \ \ \text{et} \ \ [\mathbb{Q}(\alpha\varepsilon) : \mathbb{Q}] \geq 3,$$

*satisfait*

$$\max\{|x|, \ |y|, \ e^{\mathrm{h}(\alpha\varepsilon)}\} \leq m^{\kappa_1}.$$

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11D61 Secondary 11D25 11D41 11D59.

Au cours de cet article, nous nous proposons de prouver le cas particulier de cette conjecture où on restreint les solutions $(x, y, \varepsilon)$ à un ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times U$, où $U$ est un sous-groupe de rang 1 de $\mathbb{Z}_K^\times$ engendré par une unité totalement réelle.

Soit $\alpha$ un nombre algébrique de degré $d \geq 3$. Soit $\epsilon$ une unité d'ordre infini du corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha)$. Quand $a$ est un nombre entier tel que $\mathbb{Q}(\alpha\epsilon^a) = \mathbb{Q}(\alpha)$, on désigne par $F_a \in \mathbb{Z}[X, Y]$ la forme binaire irréductible de degré $d$ telle que $F_a(\alpha\epsilon^a, 1) = 0$ et $F_a(1, 0) > 0$. Avec les notations de la conjecture 1.1 on a $F_a = \mathsf{F}_{\epsilon^a}$. Ainsi, en désignant par $\Phi$ l'ensemble des plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$, le polynôme irréductible de $\alpha$ sur $\mathbb{Z}$ est

$$F_0(X, 1) = a_0 \prod_{\varphi \in \Phi} \bigl(X - \varphi(\alpha)\bigr)$$

avec $a_0 = F_0(0, 1)$, tandis que le polynôme irréductible de $\alpha\epsilon^a$ sur $\mathbb{Z}$ est

$$F_a(X, 1) = a_0 \prod_{\varphi \in \Phi} \bigl(X - \varphi(\alpha\epsilon^a)\bigr).$$

Le théorème que nous démontrons est le suivant.

Théorème 1.2. *Soit $\alpha$ un nombre algébrique de degré $d \geq 3$. Soit $\epsilon$ une unité totalement réelle du corps $\mathbb{Q}(\alpha)$. Il existe une constante effectivement calculable $\kappa_2 > 0$, ne dépendant que de $\alpha$ et $\epsilon$, telle que, pour tout $m \geq 2$, tout triplet $(x, y, a) \in \mathbb{Z}^3$ satisfaisant*

$$|F_a(x, y)| \leq m, \quad \textit{avec} \;\; xy \neq 0 \;\; \textit{et} \;\; \mathbb{Q}(\alpha\epsilon^a) = \mathbb{Q}(\alpha),$$

*vérifie*

$$\max\{\log|x|,\ \log|y|,\ |a|\} \leq \kappa_2 \log m.$$

L'énoncé suivant a été utilisé dans [**5**].

Corollaire 1.3. *Supposons le corps $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ cubique. Soit $\epsilon$ une unité de $K$. Il existe une constante effectivement calculable $\kappa_3 > 0$, ne dépendant que de $\alpha$ et $\epsilon$, telle que, pour tout $m \geq 2$, tout triplet $(x, y, a) \in \mathbb{Z}^3$ satisfaisant*

$$|F_a(x, y)| \leq m, \quad \textit{avec} \;\; xy \neq 0 \;\; \textit{et} \;\; \mathbb{Q}(\alpha\epsilon^a) = \mathbb{Q}(\alpha),$$

*vérifie*

$$\max\{\log|x|,\ \log|y|,\ |a|\} \leq \kappa_3 \log m.$$

Ce corollaire se déduit du théorème 1.2 dans le cas où le corps cubique $\mathbb{Q}(\alpha)$ est totalement réel. Dans le cas contraire, le rang du groupe des unités de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est 1, ce corps cubique n'admet qu'un plongement réel, et le corollaire 1.3 se déduit alors des résultats de [**3**].

La section 2 est consacrée à un lemme élémentaire qui sera utilisé plusieurs fois dans la démonstration. La démonstration du théorème 1.2 se trouve au §3. Au §4, nous donnerons des familles d'exemples.

L'outil principal de notre texte est une inégalité diophantienne énoncée au lemme 3.1, et la démonstration ressemble à celle du lemme 3 de [**4**].

Le présent texte repose sur les résultats et sur les démonstrations de [**4**]. Nous utilisons les notations de cet article, en précisant quand nous devons les modifier.

## 2. Un lemme élémentaire

On utilisera le lemme suivant avec $t = 4$, 5 ou 6.

LEMME 2.1. *Soient $t$ un entier $\geq 3$, $x_1, \dots, x_t$ des nombres réels, $\delta$ et $\mu$ deux nombres réels positifs satisfaisant*

$$0 < \delta \leq \frac{1}{t-2} - \frac{1}{\mu}\cdot$$

*On suppose $x_1 + \cdots + x_t = 0$ et*

$$|x_i| \leq \delta \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \textit{pour} \quad i = 3, \dots, t.$$

*Alors*

$$|x_1 + x_2| \leq \mu\delta \min\{|x_1|, |x_2|\}.$$

DÉMONSTRATION. Par symétrie, on peut supposer $|x_1| \leq |x_2|$. Si $x_1 = 0$, alors les hypothèses impliquent $x_2 = 0$ et le lemme est vrai. Supposons donc $x_1 \neq 0$. Posons

$$s = \frac{x_3 + \cdots + x_t}{x_2}\cdot$$

On a $x_1 = -x_2(1+s)$, d'où on déduit

$$\frac{x_2}{x_1} + 1 = \frac{s}{1+s}\cdot$$

Comme

$$|s| \leq (t-2)\delta < 1,$$

on peut écrire

$$\left|\frac{s}{1+s}\right| \leq \frac{|s|}{1-|s|} \leq \frac{(t-2)\delta}{1-(t-2)\delta} \leq \mu\delta.$$

□

Nous utiliserons ce lemme 2.1 avec $\mu = t$, de sorte que l'hypothèse sur $\delta$ devient

$$0 < \delta \leq \frac{2}{t(t-2)}\cdot$$

D'autres choix sont licites mais ne modifient pas le résultat, dans la mesure où nous ne cherchons pas à expliciter les constantes.

## 3. Démonstration du théorème 1.2

Dans cette section, on suppose que le corps $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ est totalement réel mais on ne se restreint pas au cas cubique. On utilise les notations et résultats de [**4**], à ceci près que, par rapport à [**4**], nous remplaçons les notations $\tau_a$ par $\tau_\alpha$, $\sigma_a$ par $\sigma_\alpha$, $T_a(\nu)$ par $T_\alpha(\nu)$, $\Sigma_a(\nu)$ par $\Sigma_\alpha(\nu)$. Il n'y aurait pas de conflit de notations à conserver les notations $\tau_b$, $\sigma_b$, $T_b(\nu)$ et $\Sigma_b(\nu)$, mais par souci de symétrie nous remplaçons les indices $b$ par des $\beta$.

Ainsi nous notons $\sigma_\alpha$ (resp. $\sigma_\beta$) un plongement de $K$ dans $\mathbb{C}$ tel que $|\sigma_\alpha(\alpha\varepsilon)|$ (resp. $|\sigma_\beta(\beta)|$) soit maximal parmi les éléments $|\varphi(\alpha\varepsilon)|$ (resp. parmi les éléments $|\varphi(\beta)|$) pour $\varphi \in \Phi$. Donc

$$|\sigma_\alpha(\alpha\varepsilon)| = \overline{|\alpha\varepsilon|} \quad \text{et} \quad |\sigma_\beta(\beta)| = \overline{|\beta|}\,.$$

Ensuite nous désignons par $\tau_\alpha$ (resp. $\tau_\beta$) un plongement de $K$ dans $\mathbb{C}$ tel que $|\tau_\alpha(\alpha\varepsilon)|$ (resp. $|\tau_\beta(\beta)|$) soit minimal parmi les éléments $|\varphi(\alpha\varepsilon)|$ (resp. parmi les éléments $|\varphi(\beta)|$) pour $\varphi\in\Phi$. Donc[1]

$$\left|\tau_\alpha\left((\alpha\varepsilon)^{-1}\right)\right| = \left\lceil\!\overline{(\alpha\varepsilon)^{-1}}\right\rceil \quad \text{et} \quad \left|\tau_\beta\left(\beta^{-1}\right)\right| = \left\lceil\!\overline{\beta^{-1}}\right\rceil.$$

Soit $\nu$ un nombre réel dans l'intervalle ouvert $]0,1[$. Nous désignons par $\Sigma_\alpha(\nu)$, $\Sigma_\beta(\nu)$, $T_\alpha(\nu)$, $T_\beta(\nu)$ les ensembles de plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$ satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} \Sigma_\alpha(\nu) &= \{\varphi\in\Phi \mid |\sigma_\alpha(\alpha\varepsilon)|^\nu \le |\varphi(\alpha\varepsilon)| \le |\sigma_\alpha(\alpha\varepsilon)|\},\\ \Sigma_\beta(\nu) &= \{\varphi\in\Phi \mid |\sigma_\beta(\beta)|^\nu \le |\varphi(\beta)| \le |\sigma_\beta(\beta)|\},\\ T_\alpha(\nu) &= \{\varphi\in\Phi \mid |\tau_\alpha(\alpha\varepsilon)| \le |\varphi(\alpha\varepsilon)| \le |\tau_\alpha(\alpha\varepsilon)|^\nu\},\\ T_\beta(\nu) &= \{\varphi\in\Phi \mid |\tau_\beta(\beta)| \le |\varphi(\beta)| \le |\tau_\beta(\beta)|^\nu\}.\end{cases}$$

On se place sous les hypothèses de la conjecture 1.1, mais en se restreignant à un sous-groupe de rang 1 du groupe des unités de $K=\mathbb{Q}(\alpha)$. On fixe donc une unité $\epsilon$ d'ordre infini de $K$ (ce qui implique $[K:\mathbb{Q}]\ge[\mathbb{Q}(\alpha\epsilon):\mathbb{Q}]\ge 3$) et l'élément $\varepsilon$ de [**4**] devient ici $\epsilon^a$. On suppose de plus que nous sommes dans une situation où l'unité $\epsilon$ est totalement réelle. Les constantes $\kappa_i$ qui suivent ne dépendent que de $\alpha$ et $\epsilon$. On utilisera le lemme 3.1 avec différentes valeurs de $\lambda$ qui pourront dépendre de $\alpha$ et $\epsilon$, mais qui seront indépendantes de $a$, $x$, $y$ et $m$.

`Première étape.` On considère un quadruplet $(x,y,a,m)$ d'entiers vérifiant

$$|F_a(x,y)|\le m \text{ avec } xy\ne 0, \quad \mathbb{Q}(\alpha\epsilon^a)=K, \qquad m\ge 2.$$

Quitte à remplacer $\alpha$ par $\alpha^{-1}$, $\epsilon$ par $\epsilon^{-1}$ et à permuter $x$ et $y$, on peut supposer

$$1\le|x|\le|y| \quad \text{et} \quad a\ge 0.$$

Comme dans [**4**], on désigne par $\epsilon_1,\dots,\epsilon_r$ des unités de $K$ dont les classes modulo $K^\times_{\text{tors}}$ forment une base du groupe abélien libre $\mathbb{Z}_K^\times/K^\times_{\text{tors}}$. Au §3 de [**4**], on a introduit deux paramètres $A$ et $B$ reliés à la hauteur logarithmique absolue de $\alpha\epsilon^a$ et de $\beta=x-\alpha\epsilon^a y$ respectivement. Pour cela on a écrit

$$\varepsilon=\zeta\epsilon_1^{a_1}\cdots\epsilon_r^{a_r}, \quad \beta=\rho\epsilon_1^{b_1}\cdots\epsilon_r^{b_r}$$

avec des entiers rationnels $a_1,\dots,a_r$, $b_1,\dots,b_r$, avec $\zeta\in K^\times_{\text{tors}}$ et avec $\rho\in\mathbb{Z}_K$ vérifiant $\mathrm{h}(\rho)\le\kappa_4\log m$. Alors

$$A=\max\{1,|a_1|,\dots,|a_r|\} \quad \text{et} \quad B=\max\bigl\{1,\ |b_1|,|b_2|,\dots,\ |b_r|\bigr\}.$$

Ici, on peut remplacer $A$ par $\kappa_5 a$. Les lemmes 4 et 5 de [**4**] donnent

$$\kappa_6 A\le B\le\kappa_7 A \quad \text{et} \quad |y|\le e^{\kappa_8 B}.$$

Nous allons voir que si $\kappa_9$ désigne une constante suffisamment grande, les minorations

$$A\ge\kappa_9\log m \quad \text{et} \quad B\ge\kappa_9\log m \tag{3.1}$$

(cf. équation (8) de [**4**]) entraînent une contradiction. Cette contradiction terminera donc la démonstration.

[1] Ceci corrige deux fautes de frappe à la page 128 de [**4**]

Les équations (9) de [**4**] donnent ici qu'il existe des constantes positives effectivement calculables $\kappa_{10}$ et $\kappa_{11}$, ne dépendant que de $\alpha$ et $\epsilon$, telles que

$$\left\{\begin{array}{lclcl} e^{\kappa_{11}A} & \leq & |\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)| & \leq & e^{\kappa_{10}A}, \\ e^{\kappa_{11}B} & \leq & |\sigma_\beta(\beta)| & \leq & e^{\kappa_{10}B}, \\ e^{-\kappa_{10}A} & \leq & |\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)| & \leq & e^{-\kappa_{11}A}, \\ e^{-\kappa_{10}B} & \leq & |\tau_\beta(\beta)| & \leq & e^{-\kappa_{11}B}. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Comme $\alpha$ est différent de $\pm 1$, un de ses conjugués est en valeur absolue $> 1$, un autre est en valeur absolue $< 1$; donc

$$|\tau_\alpha(\epsilon)| < 1 < |\sigma_\alpha(\epsilon)|. \tag{3.3}$$

Les inégalités dans (3.2) concernant $\tau_\alpha$ et $\sigma_\alpha$ sont équivalentes à celles de (3.3).

`Deuxième étape.` L'énoncé qui suit est une variante du lemme 3 de [**4**], dans lequel $\lambda = -1$.

LEMME 3.1. *Soit $\lambda$ un élément non nul de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Il existe une constante positive effectivement calculable $\kappa_{12}$, dépendant non seulement de $\alpha$ et $\epsilon$ mais aussi de $\lambda$, ayant la propriété suivante. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ des éléments de $\Phi$ tels que $\varphi_1(\alpha\epsilon^a)\varphi_2(\beta) \neq -\lambda\varphi_3(\alpha\epsilon^a)\varphi_4(\beta)$. Alors*

$$\left|\frac{\varphi_1(\alpha\epsilon^a)\varphi_2(\beta)}{\varphi_3(\alpha\epsilon^a)\varphi_4(\beta)} + \lambda\right| \geq \exp\left(-\kappa_{12}(\log m)\log\left(2 + \frac{A+B}{\log m}\right)\right).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration ressemble à celle du lemme 3 de [**4**]. On écrit

$$-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\varphi_1(\alpha\epsilon^a)\varphi_2(\beta)}{\varphi_3(\alpha\epsilon^a)\varphi_4(\beta)}$$

sous la forme $\gamma_1^{c_1}\cdots\gamma_s^{c_s}$ avec $s = r+2$, et

$$\gamma_j = \frac{\varphi_2(\epsilon_j)}{\varphi_4(\epsilon_j)}, \quad c_j = b_j \quad (j = 1, \ldots, r), \quad \gamma_{r+1} = \frac{\varphi_1(\epsilon)}{\varphi_3(\epsilon)},$$
$$c_{r+1} = a, \quad \gamma_s = -\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\varphi_1(\alpha\zeta)\varphi_2(\rho)}{\varphi_3(\alpha\zeta)\varphi_4(\rho)}, \quad c_s = 1.$$

On a $\mathrm{h}(\gamma_s) \leq \kappa_{13}\log m$. On utilise enfin la proposition 2 de [**4**] avec

$$H_1 = \cdots = H_{r+1} = \kappa_{14}, \quad H_s = \kappa_{14}\log m, \quad C = 2 + \frac{A+B}{\log m}\cdot$$

Le lemme 3.1 en résulte. □

`Troisième étape.` Montrons que l'on a $\tau_\alpha \neq \tau_\beta$.

Supposons $\tau_\alpha = \tau_\beta$. On désigne par $\varphi$ un élément de $\Phi$ distinct de $\sigma_\alpha$ tel que $\varphi(\epsilon) \neq \pm\tau_\alpha(\epsilon)$. L'existence de $\varphi$ est claire si $[\mathbb{Q}(\epsilon) : \mathbb{Q}] \geq 4$; elle est vraie aussi si $\mathbb{Q}(\epsilon)$ est un corps cubique: dans ce cas il suffit de prendre $\varphi \neq \sigma_\alpha$ et $\varphi \neq \tau_\alpha$ car la somme de deux conjugués d'un nombre algébrique de degré impair n'est jamais nulle[2].

---

[2]Si un nombre algébrique non nul $\gamma$ est conjugué de $-\gamma$, le polynôme irréductible $P$ de $\gamma$ sur $\mathbb{Q}$ s'annule au point $-\gamma$, donc $P(X) = \pm P(-X)$. Comme $P(0) \neq 0$, on a $P(X) = P(-X)$, par conséquent il existe un polynôme $Q$ tel que $P(X) = Q(X^2)$. En particulier, le degré de $P$ est pair.

D'après le lemme 6 de [**4**], on peut supposer $\varphi \notin T_\beta(\nu)$. D'après le corollaire 1 de [**4**], on peut supposer $\varphi \notin \Sigma_\alpha(\nu)$. On écrit maintenant l'équation (7) de [**4**]

$$u_1v_2 - u_1v_3 + u_2v_3 - u_2v_1 + u_3v_1 - u_3v_2 = 0 \tag{3.4}$$

avec

$$\begin{cases} u_1 = \varphi(\alpha\epsilon^a), \quad u_2 = \sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a), \quad u_3 = \tau_\alpha(\alpha\epsilon^a), \\ v_1 = \varphi(\beta), \qquad v_2 = \sigma_\alpha(\beta), \qquad v_3 = \tau_\alpha(\beta). \end{cases}$$

On utilise les inégalités de (3.2) et (3.3). On en déduit d'abord

$$\frac{|u_3|}{|u_2|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|}{|\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)|} \le e^{-\kappa_{15}A}.$$

Comme $\varphi(\epsilon) \neq \pm\tau_\alpha(\epsilon)$ et que l'unité $\epsilon$ est totalement réelle, on a

$$|\varphi(\epsilon)| > |\tau_\alpha(\epsilon)|,$$

d'où

$$\frac{|u_3|}{|u_1|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|}{|\varphi(\alpha\epsilon^a)|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha)|}{|\varphi(\alpha)|} \cdot \left(\frac{|\tau_\alpha(\epsilon)|}{|\varphi(\epsilon)|}\right)^a \le e^{-\kappa_{16}A}.$$

Comme $\tau_\alpha = \tau_\beta$ et que $\varphi \notin T_\beta(\nu)$ et $\sigma_\alpha \notin T_\beta(\nu)$, on a encore

$$\frac{|v_3|}{|v_1|} = \frac{|\tau_\beta(\beta)|}{|\varphi(\beta)|} \le e^{-\kappa_{17}B} \quad \text{et} \quad \frac{|v_3|}{|v_2|} = \frac{|\tau_\beta(\beta)|}{|\sigma_\alpha(\beta)|} \le e^{-\kappa_{18}B}.$$

On veut utiliser le lemme 2.1 avec $t = \mu = 6$, $\delta \le \frac{1}{12}\cdot$ On a 6 termes $\pm u_iv_j \quad (i \neq j)$ de somme nulle. On prend pour $x_1$ et $x_2$ les deux termes $u_1v_2$ et $-u_2v_1$, respectivement. Il nous faut donc nous assurer que

$$\frac{|x_i|}{\max\{|x_1|, |x_2|\}} \le \delta, \qquad (i = 3, 4, 5, 6).$$

En utilisant les majorations que nous venons d'établir pour les modules de

$$\frac{u_3v_1}{u_2v_1} = \frac{u_3}{u_2}, \quad \frac{u_3v_2}{u_1v_2} = \frac{u_3}{u_1}, \quad \frac{u_1v_3}{u_1v_2} = \frac{v_3}{v_2}, \quad \frac{u_2v_3}{u_2v_1} = \frac{v_3}{v_1},$$

le lemme 2.1 avec $t = 6$ nous donne alors une borne supérieure pour $|x_1 + x_2|$, à savoir

$$|x_1 + x_2| \le 6\delta \min\{|x_1|, |x_2|\},$$

de sorte que

$$\left|\frac{x_1}{x_2} + 1\right| \le 6\delta.$$

Grâce à l'égalité

$$\frac{u_1v_2}{u_2v_1} = \frac{\varphi(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\varphi(\beta)},$$

on déduit du lemme 2.1 que

$$\left|\frac{\varphi(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\varphi(\beta)} - 1\right| \le e^{-\kappa_{19}\min\{A,B\}}.$$

Utilisons maintenant le lemme 3.1 avec $\lambda = -1$ et avec $\varphi_1 = \varphi_4 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \sigma_\alpha$. L'hypothèse

$$\varphi(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta) \neq \sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\varphi(\beta)$$

de ce lemme 3.1 est vérifiée: c'est la remarque juste avant le lemme 3 de [**4**] avec $\sigma = \sigma_\alpha$. On obtient alors

$$\left|\frac{\varphi(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\varphi(\beta)} - 1\right| \geq \exp\left\{-\kappa_{20}(\log m)\log\left(2 + \frac{A+B}{\log m}\right)\right\}$$

et par conséquent,

$$\min\{A, B\} \leq \kappa_{21}(\log m)\log\left(2 + \frac{A+B}{\log m}\right),$$

ce qui donne une contradiction lorsque la constante $\kappa_9$ de (3.1) est suffisamment grande. Donc nous avons $\tau_\alpha \neq \tau_\beta$.

`Quatrième étape.` Montrons[3] que nous avons $\tau_\alpha(\epsilon) \neq \pm\tau_\beta(\epsilon)$.
On écrit l'équation de Siegel (équation (7) de [**4**]) pour les trois plongements $\tau_\beta$, $\sigma_\alpha$ et $\tau_\alpha$. Autrement dit, on pose

$$\begin{cases} u_1 = \tau_\beta(\alpha\epsilon^a), \quad u_2 = \sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a), \quad u_3 = \tau_\alpha(\alpha\epsilon^a), \\ \quad v_1 = \tau_\beta(\beta), \qquad v_2 = \sigma_\alpha(\beta), \qquad v_3 = \tau_\alpha(\beta). \end{cases}$$

La relation (3.4) est encore vérifiée. On conserve ces notations pour toute la suite de la démonstration. On déduit du lemme 7 de [**4**] que $\tau_\beta \notin \Sigma_\alpha(\nu)$; donc

$$|\tau_\beta(\epsilon)| < |\sigma_\alpha(\epsilon)|$$

et par conséquent

$$\frac{|u_1|}{|u_2|} = \frac{|\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)|}{|\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)|} \leq e^{-\kappa_{22}A}.$$

Comme $\tau_\alpha \neq \tau_\beta$ (deuxième étape), le lemme 6 de [**4**] livre $\tau_\alpha \notin T_\beta(\nu) = \{\tau_\beta\}$; d'où

$$\frac{|v_1|}{|v_3|} = \frac{|\tau_\beta(\beta)|}{|\tau_\alpha(\beta)|} \leq e^{-\kappa_{23}B}.$$

On en déduit

$$\frac{|u_3v_1|}{|u_2v_3|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta)|}{|\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)|} \leq e^{-\kappa_{24}(A+B)}.$$

Supposons maintenant $\tau_\alpha(\epsilon) = s_1\tau_\beta(\epsilon)$ avec $s_1 \in \{-1, 1\}$. On a $\tau_\alpha(\alpha)u_1 = s_1^a\tau_\beta(\alpha)u_3$. Posons

$$\lambda_1 = -1 + s_1^a\frac{\tau_\beta(\alpha)}{\tau_\alpha(\alpha)},$$

de sorte que $u_1 - u_3 = \lambda_1 u_3$. Comme $\tau_\alpha \neq \tau_\beta$, on a $u_1 \neq u_3$, donc $\lambda_1 \neq 0$. L'équation (3.4) devient

$$u_2v_3 + \lambda_1u_3v_2 - u_1v_3 - u_2v_1 + u_3v_1 = 0. \tag{3.5}$$

On utilise le lemme 2.1 avec $t = 5$. Les deux premiers termes $u_2v_3$ et $\lambda_1u_3v_2$ sont $x_1$ et $x_2$. Il s'agit de majorer, pour chaque $i = 3, 4, 5$, soit $|x_i|/|x_1|$, soit $|x_i|/|x_2|$, au choix. Il s'avère que nous avons majoré précédemment les modules de

$$\frac{u_1v_3}{u_2v_3} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2v_1}{u_2v_3} = \frac{v_1}{v_3}, \quad \frac{u_3v_1}{u_2v_3}.$$

On déduit

$$|u_2v_3 + \lambda_1u_3v_2| \leq e^{-\kappa_{25}\min\{A,B\}}|u_2v_3|.$$

[3] La deuxième étape nous a permis de supposer $\tau_\alpha \neq \tau_\beta$, mais cela n'implique pas $\tau_\alpha(\epsilon) \neq \tau_\beta(\epsilon)$ car nous n'avons pas supposé que $\epsilon$ était un générateur du corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Comme $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire la majoration précédente sous la forme

$$\left|\frac{u_2v_3}{u_3v_2}+\lambda_1\right| \leq e^{-\kappa_{26}\min\{A,B\}}.$$

La conclusion du lemme 3.1 (que l'on utilise avec $\lambda=\lambda_1$) n'est pas compatible avec cette majoration; donc l'hypothèse de ce lemme selon laquelle le membre de gauche est non nul n'est pas satisfaite. Autrement dit,

$$u_2v_3+\lambda_1 u_3v_2=0.$$

Dans l'équation (3.5), une somme de deux des cinq termes du membre de gauche étant nulle, la somme des trois autres termes est également nulle:

$$u_1v_3+u_2v_1-u_3v_1=0.$$

Or on a

$$\left|\frac{u_1v_3}{u_2v_1}+1\right| = \frac{|u_3v_1|}{|u_2v_1|} = \frac{|u_3|}{|u_2|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|}{|\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)|} \leq e^{-\kappa_{27}A}$$

avec

$$\frac{u_1v_3}{u_2v_1} = \frac{\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta)}\cdot$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta)}+1\right| \leq e^{-\kappa_{28}\min\{A,B\}}.$$

Utilisant encore une fois le lemme 3.1 avec $\lambda=+1$, ainsi que la formule (3.1) avec une constante $\kappa_9$ suffisamment grande, on en déduit $u_1v_3+u_2v_1=0$, d'où $u_3v_1=0$, ce qui n'est pas possible. Nous avons donc $\tau_\alpha(\epsilon)\neq\pm\tau_\beta(\epsilon)$.

`Cinquième étape.` Montrons que l'on a

$$\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)+\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)=0. \tag{3.6}$$

La définition de $\tau_\alpha$ implique $|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|\leq|\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)|$. La quatrième étape implique $\tau_\alpha(\epsilon^a)\neq\pm\tau_\beta(\epsilon^a)$. Comme l'unité $\epsilon$ est totalement réelle et que $\tau_\alpha(\epsilon)\neq\pm\tau_\beta(\epsilon)$, on déduit

$$|\tau_\beta(\epsilon)|>|\tau_\alpha(\epsilon)|. \tag{3.7}$$

De l'inégalité (3.7) on déduit

$$\frac{|u_3|}{|u_1|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|}{|\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha)|}{|\tau_\beta(\alpha)|}\cdot\left(\frac{|\tau_\alpha(\epsilon)|}{|\tau_\beta(\epsilon)|}\right)^a \leq e^{-\kappa_{29}A}.$$

Considérons

$$\frac{u_2v_3}{u_1v_2} = \frac{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)}{\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}\cdot$$

On utilise l'égalité (3.4), les estimations du début de la quatrième étape, ainsi que le lemme 2.1 avec $t=6$ pour déduire

$$\left|\frac{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta)}{\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}+1\right| \leq e^{-\kappa_{30}\min\{A,B\}}.$$

Grâce une nouvelle fois au lemme 3.1 avec $\lambda=+1$, $\varphi_1=\varphi_4=\sigma_\alpha$, $\varphi_2=\tau_\alpha$, $\varphi_3=\tau_\beta$, en utilisant (3.1) avec une constante $\kappa_9$ suffisamment grande, on en déduit

$$u_2v_3+u_1v_2=0,$$

ce qui est (3.6).

`Sixième étape.` Montrons que l'on a

$$|\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| = |\tau_\beta(\epsilon)|^2. \tag{3.8}$$

La cinquième étape montre qu'une somme de deux termes dans le membre de gauche de l'équation (3.4) est nulle, donc la somme des quatre autres termes est également nulle:

$$u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_2 - u_3v_1 = 0, \tag{3.9}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta) + \tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta) + \tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta) - \tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta) = 0.$$

On suppose $|\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| \neq |\tau_\beta(\epsilon)|^2$. On pose

$$x_1 = u_2v_1 = \sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta), \quad x_4 = -u_3v_1 = -\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta),$$

et

$$(x_2,\ x_3) = \begin{cases} (\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)),\ \tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta) & \text{si} \quad |\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| > |\tau_\beta(\epsilon)|^2, \\ (\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\beta),\ \tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)) & \text{si} \quad |\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| < |\tau_\beta(\epsilon)|^2. \end{cases}$$

On a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et

$$\frac{|x_4|}{|x_1|} = \frac{|u_3|}{|u_2|} = \frac{|\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)|}{|\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)|} \leq e^{-\kappa_{31}A}.$$

On utilise (3.6). Si $|\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| > |\tau_\beta(\epsilon)|^2$, on a

$$\frac{|x_3|}{|x_2|} = \frac{|\tau_\beta(\alpha)|^2}{|\sigma_\alpha(\alpha)\tau_\alpha(\alpha)|}\left|\frac{\tau_\beta(\epsilon)^2}{\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)}\right|^a \leq e^{-\kappa_{32}A}.$$

Si $|\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| < |\tau_\beta(\epsilon)|^2$, on a

$$\frac{|x_3|}{|x_2|} = \frac{|\sigma_\alpha(\alpha)\tau_\alpha(\alpha)|}{|\tau_\beta(\alpha)|^2}\left|\frac{\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)}{\tau_\beta(\epsilon)^2}\right|^a \leq e^{-\kappa_{33}A}.$$

Dans les deux cas on peut utiliser le lemme 2.1 avec $t = 4$ pour en déduire

$$\left|\frac{x_1}{x_2} + 1\right| \leq e^{-\kappa_{34}A}.$$

Grâce encore une fois au lemme 3.1 avec $\lambda = +1$, $\varphi_1 = \sigma_\alpha$, $\varphi_2 = \tau_\beta$,

$$\begin{cases} \varphi_3 = \tau_\alpha, \quad \varphi_4 = \sigma_\alpha & \text{si } |\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| > |\tau_\beta(\epsilon)|^2, \\ \varphi_3 = \tau_\beta, \quad \varphi_4 = \tau_\alpha & \text{si } |\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon)| < |\tau_\beta(\epsilon)|^2 \end{cases}$$

et (3.1) avec une constante $\kappa_9$ suffisamment grande, on en déduit $x_1 + x_2 = 0$. Mais alors $x_3 + x_4 = 0$. Montrons que ce n'est pas possible. D'après le lemme 6 de [**4**], on a $\sigma_\alpha \notin T_\beta(\nu)$. Utilisant (3.7), on trouve

$$\frac{|x_4|}{|x_3|} \leq \max\left\{\frac{|v_1|}{|v_2|},\ \frac{|u_3v_1|}{|u_1v_3|}\right\} \leq e^{-\kappa_{35}\min\{A,B\}} < 1.$$

Donc $x_3 + x_4 \neq 0$. Ceci démontre (3.8).

`Septième étape.` Fin de la démonstration.

Grâce à l'hypothèse que $\epsilon$ est une unité totalement réelle, l'équation (3.8) s'écrit
$$\sigma_\alpha(\epsilon)\tau_\alpha(\epsilon) = s_2\tau_\beta(\epsilon)^2$$
avec $s_2 \in \{-1, 1\}$. En combinant avec l'équation (3.6)
$$u_2v_3 = -u_1v_2,$$
on trouve
$$\frac{u_1v_3}{u_3v_2} = -\frac{u_1^2}{u_2u_3} = -\frac{\tau_\beta(\alpha\epsilon^a)^2}{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)} = -s_2^a\frac{\tau_\beta(\alpha)^2}{\sigma_\alpha(\alpha)\tau_\alpha(\alpha)},$$
d'où
$$u_1v_3 + u_3v_2 = \lambda_2u_3v_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_2 = 1 - s_2^a\frac{\tau_\beta(\alpha)^2}{\sigma_\alpha(\alpha)\tau_\alpha(\alpha)}\cdot$$
Comme $u_2 \neq u_3$, l'équation (3.9), qui s'écrit maintenant
$$\frac{u_2v_1}{u_3v_2} + \lambda_2 = \frac{v_1}{v_2},$$
entraîne $\lambda_2 \neq 0$. Comme
$$\frac{u_2v_1}{u_3v_2} = \frac{\sigma_\alpha(\alpha\epsilon^a)\tau_\beta(\beta)}{\tau_\alpha(\alpha\epsilon^a)\sigma_\alpha(\beta)}$$
et que
$$0 < \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{|\tau_\beta(\beta)|}{|\sigma_\alpha(\beta)|} \leq e^{-\kappa_{36}B},$$
on peut utiliser une dernière fois le lemme 3.1 avec
$$\lambda = \lambda_2 \neq 0, \varphi_1 = \varphi_4 = \sigma_\alpha, \varphi_2 = \tau_\beta, \varphi_3 = \tau_\alpha$$
pour obtenir la contradiction finale avec (3.1). Ceci termine la démonstration du théorème 1.2 .

## 4. Familles d'exemples

Soit $\alpha$ un nombre algébrique de degré $d \geq 3$ et soit $\epsilon$ une unité totalement réelle $\notin \{-1, 1\}$ du corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Désignons par $\mathsf{A}$ l'ensemble des entiers $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha\epsilon^a$ est de degré $d$. Le théorème 1.2 donne la majoration
$$\max\{\log|x|,\ \log|y|,\ |a|\} \leq \kappa_2 \log m$$
pour tout triplet $(a, x, y) \in \mathsf{A} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaisant
$$|F_a(x, y)| \leq m, \quad \text{avec} \quad xy \neq 0.$$
Pour $a \in \mathbb{Z}$, la forme binaire $F_a$ s'écrit
$$\begin{aligned} F_a(X, Y) &= \textstyle\prod_{i=1}^d \bigl(X - \sigma_i(\alpha\epsilon^a)Y\bigr) \\ &= X^d - U_1(a)X^{d-1}Y + \cdots + (-1)^{d-1}U_{d-1}(a)XY^{d-1} + (-1)^dU_d(a)Y^d, \end{aligned}$$
où $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ désignent les éléments de l'ensemble $\Phi$ des plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$.

Les coefficients $U_1(a), \ldots, U_d(a)$ des formes binaires $F_a$ sont donnés par
$$U_h(a) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_h \leq d} \sigma_{j_1}(\alpha\epsilon^a) \cdots \sigma_{j_h}(\alpha\epsilon^a) \qquad (h = 1, \ldots, d).$$
En particulier,
$$U_d(a) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha\epsilon^a).$$

Si $\delta \in \{-1,1\}$ désigne la norme absolue de $\epsilon$ et $\nu$ le degré de $K$ sur $\mathbb{Q}(\epsilon)$, alors on a

$$U_d(a) = \delta^\nu U_d(a-1) \quad \text{avec} \quad U_d(0) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha).$$

Pour $h = 1, \ldots, d-1$, la suite $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire faisant intervenir le polynôme irréductible de $\epsilon$. Nous allons préciser ces récurrences quand l'unité $\epsilon$ est quadratique (§4.1 et §4.2) et quand $\epsilon$ est cubique (§4.3 et §4.4).

**4.1. Extensions de corps quadratiques réels.** Nous supposons ici que le corps $K$ contient un corps quadratique réel $k$ et que $\epsilon$ est une unité de $k$. Notons $\overline{\epsilon}$ le conjugué galoisien de $\epsilon$. La norme absolue de $\epsilon$ est $\delta = \epsilon\overline{\epsilon} \in \{-1,1\}$.

Soit $h \in \{1, \ldots, d-1\}$. Comme $\sigma_{j_1}(\epsilon)\cdots\sigma_{j_h}(\epsilon)$ peut s'écrire $\epsilon^\ell\overline{\epsilon}^{\,h-\ell}$ avec $0 \leq \ell \leq h$, la suite $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est une combinaison linéaire des $h+1$ suites

$$\big((\epsilon^\ell\overline{\epsilon}^{\,h-\ell})^a\big)_{a\in\mathbb{Z}},\ \ell = 0, \ldots, h.$$

Donc $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $h+1$ dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{\ell=0}^{h}(T - \epsilon^\ell\overline{\epsilon}^{\,h-\ell}).$$

En écrivant

$$F_a(X,Y) = \delta^{ad/2}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)\prod_{i=1}^{d}\big(Y - \sigma_i(\alpha^{-1}\epsilon^{-a})X\big),$$

on voit que $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est aussi une suite récurrente linéaire d'ordre $d-h+1$, dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{\ell=0}^{d-h}(T - \delta^{d/2}\epsilon^{-\ell}\overline{\epsilon}^{\,-d+h+\ell}).$$

Pour $h = 1$, la suite $\big(U_1(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, son polynôme caractéristique étant le polynôme irréductible de $\epsilon$; noter que

$$U_1(a) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha\epsilon^a).$$

De même, pour $h = d-1$, la suite $\big(U_{d-1}(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, son polynôme caractéristique étant le polynôme irréductible de $\delta^{d/2}\epsilon^{-1}$; noter que

$$U_{d-1}(a) = U_d(a)\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\big(\alpha^{-1}\epsilon^{-a}\big).$$

Pour $h = 2$, le polynôme caractéristique de la récurrence linéaire d'ordre 3 vérifiée par la suite $\big(U_2(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est

$$(T-\delta)(T-\epsilon^2)(T-\overline{\epsilon}^{\,2}).$$

Les suites $\big(U_2(a+2)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$, $\big(U_2(a+1)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$, $\big(U_2(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ et $\big(\delta^a\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ sont linéairement dépendantes, donc $\big(U_2(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ vérifie aussi une relation de récurrence de la forme

$$U_2(a+2) = c_1U_2(a+1) + c_2U_2(a) + c_3\delta^a \qquad (a \in \mathbb{Z}),$$

où $c_1$ et $c_2$ sont déterminés par

$$T^2 - c_1T - c_2 = (T-\epsilon^2)(T-\overline{\epsilon}^{\,2}),$$

tandis que $c_3$ est déterminé par les conditions initiales $U_2(-1), U_2(0), U_2(1)$.

**4.2. Exemples d'extensions de corps quadratiques réels.** Nous explicitons les formules du §4.1 dans le cas particulier de corps de nombres considérés par L. Bernstein et H. Hasse (voir [**1**]), à savoir les corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ où $\omega^m = D^m \pm d$ avec $D \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, d|D$, pour lesquels ils ont exhibé les unités

$$\frac{1}{d}(\omega^t - D^t)^{m/t} \quad \text{où} \quad t|m \text{ avec } 1 \leq t < m.$$

Ici nous allons considérer la famille de corps $K$ de degré $2n$ définie par

$$K = \mathbb{Q}(\omega) \;\text{ où }\; \omega = \sqrt[2n]{D^{2n} + c} > 1 \;\text{ avec }\; D \in \mathbb{N},\; n \geq 2,\; c \in \{-1, 1\}$$

et utiliser les deux unités indépendantes de $K$ données par

$$\alpha = D + \omega \quad \text{et} \quad \epsilon = D^n + \omega^n,$$

l'unité $\alpha$ étant de degré $2n$ et l'unité $\epsilon$ quadratique.

Proposition 4.1. *Soit*

$$\begin{aligned} F_a(X,Y) \;&=\; X^{2n} - U_1(a)X^{2n-1}Y + U_2(a)X^{2n-2}Y^2 - \cdots \\ &\qquad\qquad - U_{2n-1}(a)XY^{n-1} + U_{2n}(a)Y^{2n} \end{aligned}$$

*la version homogénéisée du polynôme minimal $F_a(X,1)$ de $\alpha\epsilon^a$. Cette forme binaire s'écrit*

$$F_a(X,Y) \;=\; \big((X - \epsilon^a D)^n - \epsilon^{na}\omega^n Y^n\big)\big((X - \bar{\epsilon}^{\,a} D)^n + \bar{\epsilon}^{\,na}\omega^n Y^n\big).$$

*De plus, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *On a l'égalité $U_{2n}(a) = (-c)^{na+1}$.*

(ii) *Pour $1 \leq h \leq 2n$, la suite $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre* $\min\{h+1, 2n-h+1\}$.

(iii) *Pour $h = 1$ on a*

$$U_1(a) = nD(\epsilon^a + \bar{\epsilon}^{\,a}).$$

*On en déduit*

$$U_1(a+2) = 2D^n U_1(a+1) + cU_1(a),$$

*avec les conditions initiales*

$$U_1(0) = 2nD, \quad U_1(1) = 2nD^{n+1}.$$

(iv) *Pour $h = 2n-1$ on a*

$$U_{2n-1}(a) = (-c)^{(n-1)a} nD^{n-1}\big(D^n(\epsilon^a + \bar{\epsilon}^{\,a}) + (-1)^{n-1}\omega^n(\epsilon^a - \bar{\epsilon}^{\,a})\big).$$

*On en déduit*

$$U_{2n-1}(a+2) = 2(-c)^{n-1}D^n U_{2n-1}(a+1) + cU_{2n-1}(a)$$

*avec les conditions initiales*

$$U_{2n-1}(0) = 2nD^{2n-1}, \quad U_{2n-1}(1) = \begin{cases} 2nD^{n-1} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ 2nD^{n-1}(2D^{2n} + c) & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

(v) *Pour $h = 2$ on a*

$$U_2(a) = \begin{cases} 4D^2(-c)^a + \bar{\epsilon}\epsilon^{2a} + \epsilon\bar{\epsilon}^{\,2a} \; \textit{pour } n = 2, \\ n^2D^2(-c)^a + \dfrac{n(n-1)}{2}D^2(\epsilon^{2a} + \bar{\epsilon}^{\,2a}) \; \textit{pour } n \geq 3. \end{cases}$$

*La suite $\big(U_2(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ vérifie donc la relation de récurrence linéaire*

$$U_2(a+3) = (4D^{2n} + c)U_2(a+2) + (4cD^{2n} + 1)U_2(a+1) - cU_2(a)$$

*avec les conditions initiales*

$$U_2(0) = n(2n-1)D^2$$

$$\begin{cases} U_2(-1) = 2D^2(4D^4 + c), \quad U_2(1) = -6cD^6 & \textit{pour } n = 2, \\ U_2(-1) = U_2(1) = 2n(n-1)D^{2n+2} - cnD^2 & \textit{pour } n \geq 3. \end{cases}$$

*On en déduit la relation de récurrence linéaire non homogène*

$$U_2(a+2) = 2(2D^{2n} + c)U_2(a+1) - U_2(a) + 4cn^2D^2(D^{2n} + c)(-c)^a.$$

Démonstration. Le polynôme irréductible de $\alpha$ est

$$F_0(X,1) \;=\; (X-D)^{2n} - D^{2n} - c \;=\; \sum_{h=0}^{2n-1} (-1)^h \binom{2n}{h} D^h X^{2n-h} - c,$$

ce qui donne

$$U_h(0) = \binom{2n}{h} D^h \quad (1 \leq h \leq 2n-1).$$

En particulier,

$$U_1(0) = 2nD, \quad U_2(0) = n(2n-1)D^2, \quad U_{2n-1}(0) = 2nD^{2n-1}.$$

Le polynôme

$$(X - \epsilon^a D)^n - \epsilon^{na}\omega^n,$$

de degré $n$, est à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[\epsilon]$ et s'annule au point $\alpha\epsilon^a$. Le conjugué galoisien de $\omega^n$ est $-\omega^n$, celui de $\epsilon$ est $\overline{\epsilon} = D^n - \omega^n$. Le produit

$$\big((X - \epsilon^a D)^n - \epsilon^{na}\omega^n\big)\big((X - \overline{\epsilon}^{\;a} D)^n + \overline{\epsilon}^{\;na}\omega^n\big)$$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et s'annule au point $\alpha\epsilon^a$: c'est le polynôme $F_a(X,1)$.

Définissons les suites $\big(V_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ et $\big(W_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ pour $0 \leq h \leq 2n$ par

$$(X - \epsilon^a D)^n (X - \overline{\epsilon}^{\;a} D)^n = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h V_h(a) X^{2n-h}$$

et

$$(X - \epsilon^a D)^n \overline{\epsilon}^{\;na} - (X - \overline{\epsilon}^{\;a} D)^n \epsilon^{na} = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h W_h(a) X^{2n-h}.$$

On a

$$U_0(a) = V_0(a) = 1, \quad W_h(a) = 0 \quad (0 \leq h \leq n-1),$$

$$V_{2n}(a) = (-c)^{na} D^{2n}, \quad W_{2n}(a) = 0,$$

$$U_h(a) = V_h(a) + W_h(a)\omega^n \quad (0 \leq h \leq 2n-1),$$

$$V_h(a) = D^h \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j=h}} \binom{n}{i}\binom{n}{j} \epsilon^{ai}\overline{\epsilon}^{\;aj} \quad (1 \leq h \leq 2n)$$

et, pour $n \leq h \leq 2n-1$,

$$W_h(a) = (-1)^{n-1}(-c)^{(h-n)a} \binom{n}{2n-h} D^{h-n} \big(\epsilon^{a(2n-h)} - \overline{\epsilon}^{\;a(2n-h)}\big).$$

(i) La norme absolue de $\epsilon$ est $\delta = \epsilon\overline{\epsilon} = -c$, sa norme de $K$ sur $\mathbb{Q}$ est $\delta^n = (-c)^n \in \{-1, 1\}$. La norme de $\alpha$ est $-c$, celle de $\alpha\epsilon^a$ est donc $U_{2n}(a) = (-c)^{na+1}$.

(ii) La remarque au début du §4.1 montre que la suite $\bigl(U_h(a)\bigr)_{a\in\mathbb{Z}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre $h+1$ de polynôme caractéristique

$$\prod_{\ell=0}^{h}(T-\epsilon^\ell\overline{\epsilon}^{\,h-\ell})$$

ainsi que la relation de récurrence linéaire d'ordre $2n-h+1$ de polynôme caractéristique

$$\prod_{k=0}^{2n-h}\bigl(T-(-c)^{n-h}\epsilon^k\overline{\epsilon}^{\,2n-h-k}\bigr).$$

(iii) Pour $1\le h\le n-1$, on a $U_h(a)=V_h(a)$, ce qui donne

$$U_h(a)=D^h\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i+j=h}}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\epsilon^{ai}\overline{\epsilon}^{\,aj}.$$

On en déduit $U_1(a)=nD(\epsilon^a+\overline{\epsilon}^{\,a})$. La relation de récurrence linéaire pour la suite $\bigl(U_1(a)\bigr)_{a\in\mathbb{Z}}$ résulte de

$$(T-\epsilon)(T-\overline{\epsilon})=T^2-2D^nT-c.$$

(iv) On a

$$\begin{cases} V_{2n-1}(a) &=& (-c)^{(n-1)a}nD^{2n-1}(\epsilon^a+\overline{\epsilon}^{\,a}),\\ W_{2n-1}(a) &=& (-1)^{n-1}(-c)^{(n-1)a}nD^{n-1}(\epsilon^a-\overline{\epsilon}^{\,a}),\\ U_{2n-1}(a) &=& V_{2n-1}(a)+W_{2n-1}(a)\omega^n.\end{cases}$$

Pour $a=1$ on trouve

$$V_{2n-1}(1)=2(-c)^{n-1}nD^{3n-1},\quad W_{2n-1}(1)=2c^{n-1}nD^{n-1}\omega^n.$$

La relation de récurrence linéaire pour $\bigl(U_{2n-1}(a)\bigr)_{a\in\mathbb{Z}}$ résulte de

$$\bigl(T-(-c)^{n-1}\epsilon\bigr)\bigl(T-(-c)^{n-1}\overline{\epsilon}\bigr)=T^2-2(-c)^{n-1}D^nT-c.$$

(v) Comme

$$\epsilon^2=2D^{2n}+c+2D^n\omega^n,$$

la trace de $\epsilon^2$ est $2(2D^{2n}+c)$, sa norme est 1, et son polynôme irréductible est

$$T^2-2(2D^{2n}+c)T+1.$$

Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène satisfaite par la suite $\bigl(U_2(a)\bigr)_{a\in\mathbb{Z}}$ est

$$(T-\epsilon^2)(T-\overline{\epsilon}^{\,2})(T+c)=T^3-(4D^{2n}+c)T^2-(4cD^{2n}+1)T+c.$$

Lorsque $n\ge 3$,

$$U_2(a)=V_2(a)=(-c)^an^2D^2+\frac{n(n-1)}{2}D^2(\epsilon^{2a}+\overline{\epsilon}^{\,2a}).$$

Il reste à considérer le cas particulier $n=2$. L'unique sous-corps quadratique de $K$ est $\mathbb{Q}(\omega^2)$. Pour tout $a\in\mathbb{Z}$ on a $\mathbb{Q}(\alpha\epsilon^a)=K$; donc ici $\mathsf{A}=\mathbb{Z}$. Les conjugués de $\alpha\epsilon^a$ sont

$$\epsilon^a(\omega+D),\quad \overline{\epsilon}^{\,a}(i\omega+D),\quad \epsilon^a(-\omega+D),\quad \overline{\epsilon}^{\,a}(-i\omega+D);$$

donc

$$U_1(a)=2D(\epsilon^a+\overline{\epsilon}^{\,a}),\quad U_2(a)=(-c)^a4D^2+\overline{\epsilon}\epsilon^{2a}+\epsilon\overline{\epsilon}^{\,2a}.$$

Les conjugués de $\alpha^{-1}\epsilon^{-a}$ sont

$$c\epsilon^{-a+1}(\omega-D),\quad c\,\overline{\epsilon}^{\,-a+1}(i\omega-D),\quad c\epsilon^{-a+1}(-\omega-D),\quad c\,\overline{\epsilon}^{\,-a+1}(-i\omega-D);$$

donc

$$U_3(a)=-c\,\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^{-1}\epsilon^{-a})=2D(\epsilon^{-a+1}+\overline{\epsilon}^{\,-a+1}).$$

En conclusion, nous avons

$$F_a(X,Y)=X^4-U_1(a)X^3Y+U_2(a)X^2Y^2-U_3(a)XY^3-cY^4,$$

alors que

$$\begin{cases} U_1(a+2) &= 2D^2U_1(a+1)+cU_1(a)\\ & \quad\text{avec }\ U_1(0)=4D,\ U_1(1)=4D^3,\\[1ex] U_2(a+2) &= (4D^4+2c)U_2(a+1)-U_2(a)-(-c)^{a+1}16D^2(D^4+c)\\ & \quad\text{avec }\ U_2(0)=6D^2,\ U_2(1)=-6cD^2,\\[1ex] U_2(a+3) &= (4D^4+c)U_2(a+2)+(4cD^4+1)U_2(a+1)-cU_2(a)\\ & \quad\text{avec }\ U_2(0)=6D^2,\ U_2(1)=-6cD^2,\ U_2(2)=-8cD^6-2D^2,\\[1ex] U_3(a+2) &= -2cD^2U_3(a+1)+cU_3(a)\\ & \quad\text{avec }\ U_3(0)=4D^3,\ U_3(1)=4D. \end{cases}$$

□

**4.3. Extensions de corps cubiques totalement réels.** Nous étudions maintenant le cas particulier du théorème 1.2 où $\epsilon$ est une unité cubique totalement réelle.

On suppose donc que le corps de nombres $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ contient un corps cubique totalement réel $k$. Soit $\epsilon$ une unité de $K$ différente de $1,-1$; notons $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ les conjugués galoisiens de $\epsilon$ avec $\epsilon_1=\epsilon$. La norme absolue de $\epsilon$ est

$$\delta=\mathrm{N}_{k/\mathbb{Q}}(\epsilon)=\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\in\{-1,1\}.$$

Soit $h\in\{1,\dots,d-1\}$. Comme $\sigma_{j_1}(\epsilon)\cdots\sigma_{j_h}(\epsilon)$ peut s'écrire

$$\epsilon_1^{\ell_1}\epsilon_2^{\ell_2}\epsilon_3^{\ell_3}\quad\text{avec}\quad \ell_1+\ell_2+\ell_3=h,$$

la suite $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est une combinaison linéaire des $\binom{h+2}{2}$ suites

$$\big((\epsilon_1^{\ell_1}\epsilon_2^{\ell_2}\epsilon_3^{\ell_3})^a\big)_{a\in\mathbb{Z}},\quad \ell_1+\ell_2+\ell_3=h.$$

Donc $\big(U_h(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$, dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{\ell_1+\ell_2+\ell_3=h}\big(T-\epsilon_1^{\ell_1}\epsilon_2^{\ell_2}\epsilon_3^{\ell_3}\big).$$

Notons

$$T^3-rT^2+sX-\delta$$

le polynôme irréductible de $\epsilon$ sur $\mathbb{Q}$. Le fait que ce polynôme soit irréductible s'écrit $r-s\neq 1-\delta$ et $r+s\neq -1-\delta$.

Pour $a\in\mathbb{Z}$ on a

$$\begin{cases} U_1(a) &= \alpha_1\epsilon_1^a+\alpha_2\epsilon_2^a+\alpha_3\epsilon_3^a,\\ U_1(a+3) &= rU_1(a+2)-sU_1(a+1)+\delta U_1(a). \end{cases}$$

Notons que $\delta^{d/3} = \delta^d$. Comme $U_d(a) = \delta^{ad}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ et comme le polynôme irréductible de $\delta^d\epsilon^{-1}$ est

$$T^3 - \delta^{d+1}sT^2 + \delta rT - \delta^{d+1},$$

on a aussi, pour $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} U_{d-1}(a) &= U_d(a)\big(\alpha_1^{-1}\epsilon_1^{-a} + \alpha_2^{-1}\epsilon_2^{-a} + \alpha_3^{-1}\epsilon_3^{-a}\big), \\ U_{d-1}(a+3) &= \delta^{d+1}sU_{d-1}(a+2) - \delta rU_{d-1}(a+1) + \delta^{d+1}U_{d-1}(a). \end{cases}$$

Considérons le cas particulier où $\alpha$ est de degré 3. Noter que dans ce cas, l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \mathsf{A}$ contient au plus un élément. On a

$$F_a(X,Y) = X^3 - U_1(a)X^2Y + U_2(a)XY^2 - U_3(a)Y^3$$

avec $U_3(a) = \delta^a\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$. Écrivons les conditions initiales pour la suite récurrente linéaire $\big(U_1(a)\big)_{a\in\mathbb{Z}}$. Des relations

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = r, \quad \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 = s,$$

nous déduisons

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = r^2 - 2s$$

et

$$\epsilon_1^3 + \epsilon_2^3 + \epsilon_3^3 = r^3 - 3rs + 3\delta.$$

Écrivons

$$\alpha = A + B\epsilon + C\epsilon^2.$$

Alors

$$\begin{cases} U_1(-1) &= A\delta s + 3B + Cr, \\ U_1(0) &= 3A + Br + C(r^2 - 2s), \\ U_1(1) &= Ar + B(r^2 - 2s) + C(r^3 - 3rs + 3\delta). \end{cases}$$

Dans le cas particulier $\alpha = \epsilon$, c'est-à-dire $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, les calculs se simplifient et les conditions initiales deviennent

$$U_1(-1) = 3, \quad U_1(0) = r, \quad U_1(1) = r^2 - 2s$$

et de même

$$U_2(-1) = 3, \quad U_2(0) = s, \quad U_2(1) = s^2 - 2\delta r.$$

**4.4. Exemples de corps cycliques cubiques.** Considérons la famille des corps cubiques cycliques des plus simples de Shanks [**5**]. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Désignons par $\lambda$ (dépendant de $n$) une racine du polynôme

$$f(X) = X^3 - (n-1)X^2 - (n+2)X - 1.$$

Les racines de $f$ sont

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\lambda+1}, \quad \lambda_3 = -\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot$$

Le groupe des unités de $K$ (modulo $\{-1,1\}$) est engendré par deux unités quelconques de $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Soient $b_1, b_2, c_1, c_2$ des entiers rationnels avec $b_1c_2 \neq b_2c_1$. En prenant $\epsilon = \lambda_1^{b_1}\lambda_2^{b_2}$ et $\alpha = \lambda_1^{c_1}\lambda_2^{c_2}$, nous sommes dans la situation de la section 4.3 et nous pouvons appliquer le corollaire 1.3 au polynôme minimal de

$$\alpha\epsilon^a = \lambda_1^{ab_1+c_1}\lambda_2^{ab_2+c_2} \qquad (a \in \mathbb{Z}).$$

Pour donner un exemple explicite, prenons $b_1 = c_2 = 0$, $b_2 = c_1 = 1$. La famille infinie $F_a(X, Y)$ de formes binaires est donc obtenue en tordant la version homogénéisée $F(X, Y)$ de $f(X)$ par les puissances $\lambda_2^a$ de $\lambda_2$, $(a \in \mathbb{Z})$.

Le polynôme minimal $F_a(X, 1)$ de $\lambda_1\lambda_2^a$ fait intervenir les suites récurrentes linéaires $(s_a)_{a\geq 0}$ et $(t_a)_{a\geq 0}$ d'ordre 3 définies par

$$s_a = \lambda_1\lambda_2^a + \lambda_2\lambda_3^a + \lambda_3\lambda_1^a, \qquad t_a = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-a} + \lambda_2^{-1}\lambda_3^{-a} + \lambda_3^{-1}\lambda_1^{-a}.$$

On a

$$\begin{aligned} F_a(X, Y) &= (X - \lambda_1\lambda_2^a Y)(X - \lambda_2\lambda_3^a Y)(X - \lambda_3\lambda_1^a Y) \\ &= X^3 - s_a X^2 Y + t_a X Y^2 - Y^3 \end{aligned}$$

avec

$$s_a = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_1\lambda_2^a), \quad t_a = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-a}) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_1\lambda_3^{-a+1}).$$

En particulier,

$$s_2 = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_3\lambda_1^2) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(-(\lambda_1+1)\lambda_1) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(-\lambda_1 - \lambda_1^2) = -n^2 - n - 4$$

et

$$t_2 = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_3\lambda_2^{-1}) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}((\lambda_1+1)^2/\lambda_1) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda_1 + 2 + \lambda_1^{-1}) = 3.$$

Ainsi

$$\begin{cases} s_0 = n - 1, \\ s_1 = -n - 2, \\ s_2 = -n^2 - n - 4, \\ s_{a+3} = (n-1)s_{a+2} + (n+2)s_{a+1} + s_a, \end{cases} \quad \begin{cases} t_0 = -n - 2, \\ t_1 = n - 1, \\ t_2 = 3 \\ t_{a+3} = -(n+2)t_{a+2} - (n-1)t_{a+1} + t_a, \end{cases}$$

pour $a \in \mathbb{Z}$.

Le corollaire 1.3 affirme qu'il existe une constante effectivement calculable $\kappa_3 > 0$, ne dépendant que de $n$ (donc de $\lambda$), ayant la propriété suivante: Pour tout $m \geq 2$, tout triplet $(a, x, y) \in \mathbb{Z}^3$ satisfaisant

$$|F_a(x, y)| \leq m, \quad \text{avec} \quad xy \neq 0,$$

vérifie

$$\max\{\log|x|,\ \log|y|,\ |a|\} \leq \kappa_3 \log m.$$

**Remerciements.** Le premier auteur a bénéficié d'un soutien financier du CRSNG. Le second auteur a bénéficié d'un séjour à l'Université Roma Tre pendant lequel il a travaillé sur ce texte; il remercie Francesco Pappalardi pour son invitation, ainsi que Corrado Falcolini pour son aide avec le logiciel de calcul *Mathematica*.

## References

1. L. Bernstein et H. Hasse *Einheitenberechnung mittels des Jacobi-Perronschen Algorithmus*, J. reine angew. Math. **218** (1965), 51–69.
2. C. Levesque et M. Waldschmidt, *Families of cubic Thue equations with effective bounds for the solutions*, J.M. Borwein et al. (eds.), Number Theory and Related Fields: In Memory of Alf van der Poorten, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **43** (2013), 229–243. `arXiv:1312.7204 [math.NT]`
3. C. Levesque et M. Waldschmidt, *Solving simultaneously Thue Diophantine equations: almost totally imaginary case*, Proceedings of the International Meeting on Number Theory 2011, in honor of R. Balasubramanian, Lecture Notes Series in Ramanujan Mathematical Society, India; to appear.

4. C. Levesque et M. Waldschmidt, *Solving effectively some families of Thue Diophantine equations*, Moscow J. of Combinatorics and Number Theory, **3** 3–4 (2013), 118–144. `arXiv:1312.7205 [math.NT]`
5. C. Levesque et M. Waldschmidt, *A family of Thue equations involving powers of units of the simplest cubic fields*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, à paraître.

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec (Québec), CANADA G1V 0A6
*E-mail address*: `Claude.Levesque@mat.ulaval.ca`

UPMC Univ Paris 06, UMR 7586-IMJ, 75005 Paris, FRANCE
*E-mail address*: `michel.waldschmidt@imj-prg.fr`