Le Bourget-du-Lac, Université de Savoie Mont Blanc

28 et 29 septembre 2015

Théorie des Nombres, Systèmes de Numération, Théorie Ergodique
Un colloque inspiré par les mathématiques de Pierre Liardet

Les huit premiers travaux de Pierre Liardet

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu — Paris VI
http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/

Résumé

Le premier texte publié par Pierre Liardet l'a été en 1969 dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, il est intitulé “Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques”, avec Madeleine Ventadoux comme coauteur. Ils étendent des résultats de Gérard Rauzy.

Dans la lignée de ces premiers travaux, il s'est attaqué à une conjecture de Wladislaw Narkiewicz sur les transformations polynomiales et rationnelles. En 1976, avec Ken K. Kubota, il a finalement réfuté cette conjecture.

Il a ensuite obtenu des résultats précurseurs sur une conjecture de Serge Lang, qui sont très souvent cités. Nous donnerons un bref survol des résultats qui ont suivi cette percée significative.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

- G. Rauzy – « Transformations rationnelles pour lesquelles l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan est stable », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **268** (1969), p. A305–A307.
- — , « Ensembles de nombres algébriques et transformations rationnelles », in *Colloque de Théorie des Nombres (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1969)*, Soc. Math. France, Paris, 1971, p. 165–168. Bull. Soc. Math. France, Mém. 25.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot Vijayaraghavan, c'est-à-dire des entiers algébriques réels > 1 dont les autres conjugués ont un module inférieur à 1.

Si $\theta \in S$ et $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, alors $\pm\theta^m \in S$.

Gérard Rauzy démontre la réciproque suivante. Soit $f \in K(X)$ une fraction rationnelle à une indéterminée non constante définie sur un corps contenant $\mathbf{C}$ et soit E un sous-ensemble de S tel que $S \setminus E$ soit borné. Supposons que pour tous $\theta \in E$, on ait $f(\theta) \in S$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, tel que $f(X) = \pm X^m$.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot Vijayaraghavan, c'est-à-dire des entiers algébriques réels > 1 dont les autres conjugués ont un module inférieur à 1.

Si $\theta \in S$ et $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, alors $\pm\theta^m \in S$.

Gérard Rauzy démontre la réciproque suivante. Soit $f \in K(X)$ une fraction rationnelle à une indéterminée non constante définie sur un corps contenant $\mathbf{C}$ et soit E un sous-ensemble de S tel que $S \setminus E$ soit borné. Supposons que pour tous $\theta \in E$, on ait $f(\theta) \in S$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, tel que $f(X) = \pm X^m$.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit S l'ensemble des nombres de Pisot Vijayaraghavan, c'est-à-dire des entiers algébriques réels > 1 dont les autres conjugués ont un module inférieur à 1.

Si $\theta \in S$ et $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, alors $\pm\theta^m \in S$.

Gérard Rauzy démontre la réciproque suivante. Soit $f \in K(X)$ une fraction rationnelle à une indéterminée non constante définie sur un corps contenant $\mathbf{C}$ et soit E un sous-ensemble de S tel que $S \setminus E$ soit borné. Supposons que pour tous $\theta \in E$, on ait $f(\theta) \in S$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, tel que $f(X) = \pm X^m$.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

M. Ventadoux & P. Liardet – « Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **269** (1969), p. A181–A183.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit $n \geq 1$ et soit Θ_n l'ensemble des entiers algébriques de degré $\geq n$ ayant n conjugués de module > 1 et tous les autres de module < 1. Ainsi $\Theta_1 = S$.

Pour $\theta \in \Theta_n$ et pour $m \geq 1$, on a $\pm\theta^m \in \Theta_n$.

P. Liardet et M. Ventadoux démontrent que, réciproquement, si $f \in K[X]$ est un polynôme non constant à coefficients dans une extension de $\mathbf{C}$, si E est un sous–ensemble de Θ_n tel que $\Theta_n \setminus E$ soit borné et si $f(E) \subset \Theta_n$, alors il existe $m \geq 1$ tel que $f(X) = \pm X^m$.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit $n \geq 1$ et soit Θ_n l'ensemble des entiers algébriques de degré $\geq n$ ayant n conjugués de module > 1 et tous les autres de module < 1. Ainsi $\Theta_1 = S$.

Pour $\theta \in \Theta_n$ et pour $m \geq 1$, on a $\pm\theta^m \in \Theta_n$.

P. Liardet et M. Ventadoux démontrent que, réciproquement, si $f \in K[X]$ est un polynôme non constant à coefficients dans une extension de $\mathbf{C}$, si E est un sous–ensemble de Θ_n tel que $\Theta_n \setminus E$ soit borné et si $f(E) \subset \Theta_n$, alors il existe $m \geq 1$ tel que $f(X) = \pm X^m$.

Transformations rationnelles laissant stables certains ensembles de nombres algébriques

Soit $n \geq 1$ et soit Θ_n l'ensemble des entiers algébriques de degré $\geq n$ ayant n conjugués de module > 1 et tous les autres de module < 1. Ainsi $\Theta_1 = S$.

Pour $\theta \in \Theta_n$ et pour $m \geq 1$, on a $\pm\theta^m \in \Theta_n$.

P. Liardet et M. Ventadoux démontrent que, réciproquement, si $f \in K[X]$ est un polynôme non constant à coefficients dans une extension de $\mathbf{C}$, si E est un sous–ensemble de Θ_n tel que $\Theta_n \setminus E$ soit borné et si $f(E) \subset \Theta_n$, alors il existe $m \geq 1$ tel que $f(X) = \pm X^m$.

Stabilité rationnelle

P. Liardet – « Sur les transformations polynomiales et rationnelles », in *Séminaire de Théorie des Nombres, 1971–1972 (Univ. Bordeaux I, Talence), Exp. No. 29*, Lab. Théorie des Nombres, Centre Nat. Recherche Sci., Talence, 1972, p. 20.

Stabilité rationnelle

Soit K un corps. Suivant Wladislaw Narkiewicz, on dit que K a la propriété (P) si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un ensemble infini $E \subset K$ avec $f(E) = E$ est nécessairement linéaire.

Pierre Liardet démontre que si K et toutes ses extensions de degré $\leq n$ ont la propriété (P), alors les corps de fonctions sur K de degré $\leq n$ ont encore la propriété (P) : pour tout $r \geq 1$ et toute extension L de $K(X_1, \ldots, X_r)$ de degré $\leq n$, le corps L a la propriété (P).

Ceci étend un résultat de W. Narkiewicz pour les corps de nombres.

Stabilité rationnelle

Soit K un corps. Suivant Wladislaw Narkiewicz, on dit que K a la propriété (P) si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un ensemble infini $E \subset K$ avec $f(E) = E$ est nécessairement linéaire.

Pierre Liardet démontre que si K et toutes ses extensions de degré $\leq n$ ont la propriété (P), alors les corps de fonctions sur K de degré $\leq n$ ont encore la propriété (P) : pour tout $r \geq 1$ et toute extension L de $K(X_1, \ldots, X_r)$ de degré $\leq n$, le corps L a la propriété (P).

Ceci étend un résultat de W. Narkiewicz pour les corps de nombres.

Stabilité rationnelle

Soit K un corps. Suivant Wladislaw Narkiewicz, on dit que K a la propriété (P) si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un ensemble infini $E \subset K$ avec $f(E) = E$ est nécessairement linéaire.

Pierre Liardet démontre que si K et toutes ses extensions de degré $\leq n$ ont la propriété (P), alors les corps de fonctions sur K de degré $\leq n$ ont encore la propriété (P) : pour tout $r \geq 1$ et toute extension L de $K(X_1, \ldots, X_r)$ de degré $\leq n$, le corps L a la propriété (P).

Ceci étend un résultat de W. Narkiewicz pour les corps de nombres.

Stabilité rationnelle

Soit K un corps. Suivant Wladislaw Narkiewicz, on dit que K a la propriété (P) si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un ensemble infini $E \subset K$ avec $f(E) = E$ est nécessairement linéaire.

Pierre Liardet démontre que si K et toutes ses extensions de degré $\leq n$ ont la propriété (P), alors les corps de fonctions sur K de degré $\leq n$ ont encore la propriété (P) : pour tout $r \geq 1$ et toute extension L de $K(X_1, \ldots, X_r)$ de degré $\leq n$, le corps L a la propriété (P).

Ceci étend un résultat de W. Narkiewicz pour les corps de nombres.

Stabilité rationnelle

P. Liardet introduit la définition suivante : un corps K a la propriété (P') si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un sous–ensemble infini E de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K avec $\max_{\alpha \in E}[K(\alpha) : K] < \infty$ et $E = f(E)$ est nécessairement linéaire.

Il démontre que si K a la propriété (P'), alors toute extension finie de K aussi, et toute extension transcendance pure aussi.

Il étend ces résultats aux fractions rationnelles et aussi en plusieurs variables.

Stabilité rationnelle

P. Liardet introduit la définition suivante : un corps K a la propriété (P') si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un sous–ensemble infini E de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K avec $\max_{\alpha \in E}[K(\alpha) : K] < \infty$ et $E = f(E)$ est nécessairement linéaire.

Il démontre que si K a la propriété (P'), alors toute extension finie de K aussi, et toute extension transcendance pure aussi.

Il étend ces résultats aux fractions rationnelles et aussi en plusieurs variables.

Stabilité rationnelle

P. Liardet introduit la définition suivante : un corps K a la propriété (P') si tout polynôme $f \in K[X]$ pour lequel il existe un sous–ensemble infini E de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K avec $\max_{\alpha \in E}[K(\alpha) : K] < \infty$ et $E = f(E)$ est nécessairement linéaire.

Il démontre que si K a la propriété (P'), alors toute extension finie de K aussi, et toute extension transcendance pure aussi.

Il étend ces résultats aux fractions rationnelles et aussi en plusieurs variables.

Conjecture de Narkiewicz

P. Liardet – « Sur une conjecture de W. Narkiewicz », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **274** (1972), p. A1836–A1838.

K. K. Kubota & P. Liardet – « Réfutation d'une conjecture de W. Narkiewicz », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **282** (1976), no. 22, p. Ai, A1261–A1264.

Conjecture de Narkiewicz

W. Narkiewicz a conjecturé la caractérisation suivante des corps ayant la propriété (P) : un corps K a la propriété (P) si et seulement s'il existe une extension transcendance pure L du sous corps premier F de K et un ensemble $\mathcal{A}$ d'éléments de L de degrés bornés sur K tel que $L = K(\mathcal{A})$.

K. K. Kubota et P. Liardet construisent des corps ayant la propriété (P') (donc à plus forte raison la propriété (P)) qui ne sont pas de cette forme.

Ils montrent aussi l'existence d'un ensemble infini $\mathcal{P}$ de nombres premiers tel que le corps $\mathbf{Q}(\{\sqrt{p} \mid p \in \mathcal{P}\})$ ait la propriété (P').

Ils posent la question de savoir si ce résultat est encore vrai quand on prend pour $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. La réponse, positive, a été apportée par Dvornicich et Zannier en 2007.

Conjecture de Narkiewicz

W. Narkiewicz a conjecturé la caractérisation suivante des corps ayant la propriété (P) : un corps K a la propriété (P) si et seulement s'il existe une extension transcendance pure L du sous corps premier F de K et un ensemble $\mathcal{A}$ d'éléments de L de degrés bornés sur K tel que $L = K(\mathcal{A})$.

K. K. Kubota et P. Liardet construisent des corps ayant la propriété (P') (donc à plus forte raison la propriété (P)) qui ne sont pas de cette forme.

Ils montrent aussi l'existence d'un ensemble infini $\mathcal{P}$ de nombres premiers tel que le corps $\mathbf{Q}(\{\sqrt{p} \mid p \in \mathcal{P}\})$ ait la propriété (P').

Ils posent la question de savoir si ce résultat est encore vrai quand on prend pour $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. La réponse, positive, a été apportée par Dvornicich et Zannier en 2007.

Conjecture de Narkiewicz

W. Narkiewicz a conjecturé la caractérisation suivante des corps ayant la propriété (P) : un corps K a la propriété (P) si et seulement s'il existe une extension transcendance pure L du sous corps premier F de K et un ensemble $\mathcal{A}$ d'éléments de L de degrés bornés sur K tel que $L = K(\mathcal{A})$.

K. K. Kubota et P. Liardet construisent des corps ayant la propriété (P') (donc à plus forte raison la propriété (P)) qui ne sont pas de cette forme.

Ils montrent aussi l'existence d'un ensemble infini $\mathcal{P}$ de nombres premiers tel que le corps $\mathbf{Q}(\{\sqrt{p} \mid p \in \mathcal{P}\})$ ait la propriété (P').

Ils posent la question de savoir si ce résultat est encore vrai quand on prend pour $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. La réponse, positive, a été apportée par Dvornicich et Zannier en 2007.

Conjecture de Narkiewicz

W. Narkiewicz a conjecturé la caractérisation suivante des corps ayant la propriété (P) : un corps K a la propriété (P) si et seulement s'il existe une extension transcendance pure L du sous corps premier F de K et un ensemble $\mathcal{A}$ d'éléments de L de degrés bornés sur K tel que $L = K(\mathcal{A})$.

K. K. Kubota et P. Liardet construisent des corps ayant la propriété (P') (donc à plus forte raison la propriété (P)) qui ne sont pas de cette forme.

Ils montrent aussi l'existence d'un ensemble infini $\mathcal{P}$ de nombres premiers tel que le corps $\mathbf{Q}(\{\sqrt{p} \mid p \in \mathcal{P}\})$ ait la propriété (P').

Ils posent la question de savoir si ce résultat est encore vrai quand on prend pour $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers. La réponse, positive, a été apportée par Dvornicich et Zannier en 2007.

Conjecture de Narkiewicz

La propriété (P) résulte de la propriété de Northcott (mais la réciproque n'est pas vraie).

On déduit des travaux de Bombieri et Zannier que non seulement le corps engendré par tous les nombres $\sqrt{p}$, p décrivant l'ensemble des nombres premiers, a la propriété (P), mais qu'il en est de même pour le corps engendré par toutes les racines n-ièmes des entiers rationnels, premiers ou non.

E. Bombieri & U. Zannier – « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **12** (2001), p. 5–14 (2002).

Conjecture de Narkiewicz

La propriété (P) résulte de la propriété de Northcott (mais la réciproque n'est pas vraie).

On déduit des travaux de Bombieri et Zannier que non seulement le corps engendré par tous les nombres $\sqrt{p}$, p décrivant l'ensemble des nombres premiers, a la propriété (P), mais qu'il en est de même pour le corps engendré par toutes les racines n-ièmes des entiers rationnels, premiers ou non.

E. Bombieri & U. Zannier – « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **12** (2001), p. 5–14 (2002).

Conjecture de Narkiewicz

La propriété (P) résulte de la propriété de Northcott (mais la réciproque n'est pas vraie).

On déduit des travaux de Bombieri et Zannier que non seulement le corps engendré par tous les nombres $\sqrt{p}$, p décrivant l'ensemble des nombres premiers, a la propriété (P), mais qu'il en est de même pour le corps engendré par toutes les racines n-ièmes des entiers rationnels, premiers ou non.

E. Bombieri & U. Zannier – « A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ », *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **12** (2001), p. 5–14 (2002).

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

P. Liardet – « Résultats de stabilité algébrique », in *Séminaire de Théorie des Nombres, 1975–1976 (Univ. Bordeaux I, Talence), Exp. No. 24*, Lab. Théorie des Nombres, Centre Nat. Recherche Sci., Talence, 1976, p. 6.

— , « Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année (1975/76), Théorie des nombres : Fasc. 1, Exp. No. 8*, Secrétariat Math., Paris, 1977, p. 9.

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

Soient Ω un corps, A et B deux sous–ensembles de Ω. On désigne par $\mathcal{P}(A, B)$ l'ensemble des polynômes $f \in \Omega[X, Y]$ vérifiant :
1) pour tout $a \in A$ en dehors d'un ensemble fini, il existe $b \in B$ tel que $f(a, b) = 0$.
2) Pour tout $b \in B$, le polynôme $f(X, b) \in \Omega[X]$ n'est pas le polynôme nul.

Ces ensembles ont été étudiés par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer D. J. Lewis, W. Narkiewicz, S. Lang, G. Rauzy, A. Schinzel, C. L. Siegel.

G. Rauzy a démontré que si $f \in \mathcal{P}(S, S)$ où $S = \Theta_1$ est l'ensemble des nombres de Pisot–Vijayaraghavan, alors il existe $m > 0$ tel que $f(X, X^m) = 0$ dans $\Omega[X]$.

P. Liardet obtient la même conclusion pour $f \in \mathcal{P}(T, T)$ où T est l'ensemble des nombres de Salem.

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

Soient Ω un corps, A et B deux sous–ensembles de Ω. On désigne par $\mathcal{P}(A,B)$ l'ensemble des polynômes $f \in \Omega[X,Y]$ vérifiant :
1) pour tout $a \in A$ en dehors d'un ensemble fini, il existe $b \in B$ tel que $f(a,b) = 0$.
2) Pour tout $b \in B$, le polynôme $f(X,b) \in \Omega[X]$ n'est pas le polynôme nul.

Ces ensembles ont été étudiés par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer D. J. Lewis, W. Narkiewicz, S. Lang, G. Rauzy, A. Schinzel, C. L. Siegel.

G. Rauzy a démontré que si $f \in \mathcal{P}(S,S)$ où $S = \Theta_1$ est l'ensemble des nombres de Pisot–Vijayaraghavan, alors il existe $m > 0$ tel que $f(X, X^m) = 0$ dans $\Omega[X]$.

P. Liardet obtient la même conclusion pour $f \in \mathcal{P}(T,T)$ où T est l'ensemble des nombres de Salem.

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

Soient Ω un corps, A et B deux sous–ensembles de Ω. On désigne par $\mathcal{P}(A, B)$ l'ensemble des polynômes $f \in \Omega[X, Y]$ vérifiant :

1) pour tout $a \in A$ en dehors d'un ensemble fini, il existe $b \in B$ tel que $f(a, b) = 0$.

2) Pour tout $b \in B$, le polynôme $f(X, b) \in \Omega[X]$ n'est pas le polynôme nul.

Ces ensembles ont été étudiés par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer D. J. Lewis, W. Narkiewicz, S. Lang, G. Rauzy, A. Schinzel, C. L. Siegel.

G. Rauzy a démontré que si $f \in \mathcal{P}(S, S)$ où $S = \Theta_1$ est l'ensemble des nombres de Pisot–Vijayaraghavan, alors il existe $m > 0$ tel que $f(X, X^m) = 0$ dans $\Omega[X]$.

P. Liardet obtient la même conclusion pour $f \in \mathcal{P}(T, T)$ où T est l'ensemble des nombres de Salem.

Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes

Soient Ω un corps, A et B deux sous–ensembles de Ω. On désigne par $\mathcal{P}(A, B)$ l'ensemble des polynômes $f \in \Omega[X, Y]$ vérifiant :
1) pour tout $a \in A$ en dehors d'un ensemble fini, il existe $b \in B$ tel que $f(a, b) = 0$.
2) Pour tout $b \in B$, le polynôme $f(X, b) \in \Omega[X]$ n'est pas le polynôme nul.

Ces ensembles ont été étudiés par de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer D. J. Lewis, W. Narkiewicz, S. Lang, G. Rauzy, A. Schinzel, C. L. Siegel.

G. Rauzy a démontré que si $f \in \mathcal{P}(S, S)$ où $S = \Theta_1$ est l'ensemble des nombres de Pisot–Vijayaraghavan, alors il existe $m > 0$ tel que $f(X, X^m) = 0$ dans $\Omega[X]$.

P. Liardet obtient la même conclusion pour $f \in \mathcal{P}(T, T)$ où T est l'ensemble des nombres de Salem.

Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques

Dans sa thèse en 1975, P. Liardet obtient de nombreux résultats sur ces ensembles $\mathcal{P}(A, B)$. Sa méthode consiste à introduire des nouvelles topologies.

Ses résultats ont été appliqués récemment pour étudier des ensembles ayant la propriété de Northcott.

M. Widmer – « On certain infinite extensions of the rationals with Northcott property », *Monatsh. Math.* **162** (2011), no. 3, p. 341–353.

S. Checcoli & M. Widmer – « On the Northcott property and other properties related to polynomial mappings », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **155** (2013), no. 1, p. 1–12.

Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques

Dans sa thèse en 1975, P. Liardet obtient de nombreux résultats sur ces ensembles $\mathcal{P}(A, B)$. Sa méthode consiste à introduire des nouvelles topologies.
Ses résultats ont été appliqués récemment pour étudier des ensembles ayant la propriété de Northcott.

- M. Widmer – « On certain infinite extensions of the rationals with Northcott property », *Monatsh. Math.* **162** (2011), no. 3, p. 341–353.
- S. Checcoli & M. Widmer – « On the Northcott property and other properties related to polynomial mappings », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **155** (2013), no. 1, p. 1–12.

Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques

Dans sa thèse en 1975, P. Liardet obtient de nombreux résultats sur ces ensembles $\mathcal{P}(A, B)$. Sa méthode consiste à introduire des nouvelles topologies.
Ses résultats ont été appliqués récemment pour étudier des ensembles ayant la propriété de Northcott.

M. Widmer – « On certain infinite extensions of the rationals with Northcott property », *Monatsh. Math.* **162** (2011), no. 3, p. 341–353.

S. Checcoli & M. Widmer – « On the Northcott property and other properties related to polynomial mappings », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **155** (2013), no. 1, p. 1–12.

On the properties of Northcott and of Narkiewicz for fields of algebraic numbers
Hilbert irreducibility Theorem

- R. Dvornicich & U. Zannier – « Cyclotomic Diophantine problems (Hilbert irreducibility and invariant sets for polynomial maps) », *Duke Math. J.* **139** (2007), no. 3, p. 527–554.

- — , « On the properties of Northcott and of Narkiewicz for fields of algebraic numbers », *Funct. Approx. Comment. Math.* **39** (2008), no. part 1, p. 163–173.

Stabilité rationnelle et extensions finies

En 2007, Dvornicich et Zannier (*Duke Math. J.*) ont démontré que toute extension finie d'un corps ayant la propriété (P) a encore la propriété (P).

Stabilité rationnelle et extensions finies

En 2007, Dvornicich et Zannier (*Duke Math. J.*) ont démontré que toute extension finie d'un corps ayant la propriété (P) a encore la propriété (P).

R. Dvornicich et U. Zannier

Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici - abstract.

This paper surveys on some recent results concerning certain finiteness properties for subfields K of $\mathbf{Q}$ — : first, the so-called *Northcott property* of finiteness of elements in K of bounded Weil height and then the *Property* (P) of finiteness of possible subsets of K sent onto themselves by some polynomial of degree > 1. The first was established by Northcott for the union of the fields of given degree over $\mathbf{Q}$; the second one was introduced by Narkiewicz ; it is also related to preperiodic points for polynomial maps. It is known that the first implies the second, so they both hold for number fields. As to fields of infinite degree over $\mathbf{Q}$, we shall see some criteria for the first property, and hence for the second, but we shall also see that the second property does not imply the first. Some of these constructions provide answers, both in the positive and in the negative as the case may be, to questions explicitly formulated by Narkiewicz.

Conjecture de Lang

P. Liardet – « Sur une conjecture de Serge Lang », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **279** (1974), p. 435–437.

— , « Sur une conjecture de Serge Lang », in *Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974)*, Soc. Math. France, Paris, 1975, p. 187–210. Astérisque, Nos. 24–25.

Géométrie diophantienne

Principe : si une équation diophantienne a une infinité de solutions, il y a une raison géométrique.

Points entiers ou rationnels sur les courbes : équation $f(x, y) = 0$.

Infinité de points rationnels : genre 0. Groupe additif, groupe multiplicatif. Équation de Brahmagupta–Pell–Fermat.

Infinité de points entiers : genre ≤ 1. Courbes elliptiques. Théorème de Siegel (1929).

Géométrie diophantienne

Principe : si une équation diophantienne a une infinité de solutions, il y a une raison géométrique.

Points entiers ou rationnels sur les courbes : équation $f(x, y) = 0$.

Infinité de points rationnels : genre 0. Groupe additif, groupe multiplicatif. Équation de Brahmagupta–Pell–Fermat.

Infinité de points entiers : genre ≤ 1. Courbes elliptiques. Théorème de Siegel (1929).

Géométrie diophantienne

Principe : si une équation diophantienne a une infinité de solutions, il y a une raison géométrique.

Points entiers ou rationnels sur les courbes : équation $f(x, y) = 0$.

Infinité de points rationnels : genre 0. Groupe additif, groupe multiplicatif. Équation de Brahmagupta–Pell–Fermat.

Infinité de points entiers : genre ≤ 1. Courbes elliptiques. Théorème de Siegel (1929).

Géométrie diophantienne

Principe : si une équation diophantienne a une infinité de solutions, il y a une raison géométrique.

Points entiers ou rationnels sur les courbes : équation $f(x, y) = 0$.

Infinité de points rationnels : genre 0. Groupe additif, groupe multiplicatif. Équation de Brahmagupta–Pell–Fermat.

Infinité de points entiers : genre ≤ 1. Courbes elliptiques. Théorème de Siegel (1929).

Équations diophantiennes exponentielles

Exemple : soit $f(X,Y) = X^5Y + 3X^3Y^4 + 2XY^7$. L'équation

$$f(x,y) = 0$$

admet comme solutions rationnelles

$$(x,y) = (5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}.$$

L'intersection de la courbe définie par cette équation avec le sous–groupe multiplicatif de $(\mathbf{Q}^\times)^2$ de $\mathbf{G}_m^2$ engendré par $(5^3, -5^2)$ est infinie.

La raison est que le polynôme $f(t^3, -t^2)$ est nul.

C'est un fait général, démontré par Pierre Liardet : au lieu de $\{(5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}\} \subset (\mathbf{Q}^\times)^2$, il considère plus généralement le groupe de division Γ d'un sous-groupe de type fini Γ_0 de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

Équations diophantiennes exponentielles

Exemple : soit $f(X,Y) = X^5Y + 3X^3Y^4 + 2XY^7$. L'équation

$$f(x,y) = 0$$

admet comme solutions rationnelles

$$(x,y) = (5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}.$$

L'intersection de la courbe définie par cette équation avec le sous–groupe multiplicatif de $(\mathbf{Q}^\times)^2$ de $\mathbf{G}_m^2$ engendré par $(5^3, -5^2)$ est infinie.

La raison est que le polynôme $f(t^3, -t^2)$ est nul.

C'est un fait général, démontré par Pierre Liardet : au lieu de $\{(5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}\} \subset (\mathbf{Q}^\times)^2$, il considère plus généralement le groupe de division Γ d'un sous-groupe de type fini Γ_0 de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

Équations diophantiennes exponentielles

Exemple : soit $f(X, Y) = X^5Y + 3X^3Y^4 + 2XY^7$. L'équation

$$f(x, y) = 0$$

admet comme solutions rationnelles

$$(x, y) = (5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}.$$

L'intersection de la courbe définie par cette équation avec le sous–groupe multiplicatif de $(\mathbf{Q}^\times)^2$ de $\mathbf{G}_m^2$ engendré par $(5^3, -5^2)$ est infinie.

La raison est que le polynôme $f(t^3, -t^2)$ est nul.

C'est un fait général, démontré par Pierre Liardet : au lieu de $\{(5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}\} \subset (\mathbf{Q}^\times)^2$, il considère plus généralement le groupe de division Γ d'un sous-groupe de type fini Γ_0 de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

Équations diophantiennes exponentielles

Exemple : soit $f(X,Y) = X^5Y + 3X^3Y^4 + 2XY^7$. L'équation

$$f(x,y) = 0$$

admet comme solutions rationnelles

$$(x,y) = (5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}.$$

L'intersection de la courbe définie par cette équation avec le sous–groupe multiplicatif de $(\mathbf{Q}^\times)^2$ de $\mathbf{G}_m^2$ engendré par $(5^3, -5^2)$ est infinie.

La raison est que le polynôme $f(t^3, -t^2)$ est nul.

C'est un fait général, démontré par Pierre Liardet : au lieu de $\{(5^{3a}, -5^{2a}), \quad a \in \mathbf{Z}\} \subset (\mathbf{Q}^\times)^2$, il considère plus généralement le groupe de division Γ d'un sous-groupe de type fini Γ_0 de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

Théorème de Liardet

Soit Γ_0 un sous-groupe de type fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$: Γ_0 est engendré par un sous–ensemble fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$,

$$\Gamma_0 = \{\gamma_1^{a_1} \cdots \gamma_r^{a_r} \mid (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{Z}^r\} \subset (\mathbf{C}^\times)^2.$$

Soit Γ le groupe de division Γ_0 :

$$\Gamma = \{\gamma \in (\mathbf{C}^\times)^2 \mid \text{ il existe } m \in \mathbf{Z}, m \neq 0, \text{ tel que } \gamma^m \in \Gamma_0\}.$$

Théorème. *Si $f(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ vérifie $f(\gamma) = 0$ pour une infinité de $\gamma \in \Gamma$, alors il existe $(a,b) \in \Gamma^2$ et $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $f(aT^u, bT^v) = 0$ dans $\mathbf{C}(T)$.*

Théorème de Liardet

Soit Γ_0 un sous-groupe de type fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$: Γ_0 est engendré par un sous–ensemble fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$,

$$\Gamma_0 = \{\gamma_1^{a_1} \cdots \gamma_r^{a_r} \mid (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{Z}^r\} \subset (\mathbf{C}^\times)^2.$$

Soit Γ le groupe de division Γ_0 :

$$\Gamma = \{\gamma \in (\mathbf{C}^\times)^2 \mid \text{ il existe } m \in \mathbf{Z}, m \neq 0, \text{ tel que } \gamma^m \in \Gamma_0\}.$$

Théorème. *Si $f(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ vérifie $f(\gamma) = 0$ pour une infinité de $\gamma \in \Gamma$, alors il existe $(a,b) \in \Gamma^2$ et $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $f(aT^u, bT^v) = 0$ dans $\mathbf{C}(T)$.*

Théorème de Liardet

Soit Γ_0 un sous-groupe de type fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$: Γ_0 est engendré par un sous–ensemble fini de $(\mathbf{C}^\times)^2$,

$$\Gamma_0 = \{\gamma_1^{a_1} \cdots \gamma_r^{a_r} \mid (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{Z}^r\} \subset (\mathbf{C}^\times)^2.$$

Soit Γ le groupe de division Γ_0 :

$$\Gamma = \{\gamma \in (\mathbf{C}^\times)^2 \mid \text{ il existe } m \in \mathbf{Z}, m \neq 0, \text{ tel que } \gamma^m \in \Gamma_0\}.$$

Théorème. *Si* $f(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ *vérifie* $f(\gamma) = 0$ *pour une infinité de* $\gamma \in \Gamma$, *alors il existe* $(a, b) \in \Gamma^2$ *et* $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ *tels que* $f(aT^u, bT^v) = 0$ *dans* $\mathbf{C}(T)$.

Théorème de Liardet (1975)

Plus généralement, si G est un groupe algébrique produit de plusieurs copies de $\mathbf{G}_m$ sur un corps K de caractéristique nulle, si C est une courbe algébrique irréductible dans G et s'il existe un sous-groupe de rang fini Γ de $G(K)$ tel que $\Gamma \cap C$ soit infini, alors C est le translaté d'un sous-groupe algébrique de G.

Les sous-groupes algébriques connexes de $\mathbf{G}_m^2$ sont $\{1\}$, $\mathbf{G}_m^2$, et les sous-groupes de la forme

$$H_{u,v} = \{(t^u, t^v) \mid t \in K^\times\}$$

avec $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$, $\mathrm{pgcd}(u, v) = 1$.

Théorème de Liardet (1975)

Plus généralement, si G est un groupe algébrique produit de plusieurs copies de $\mathbf{G}_m$ sur un corps K de caractéristique nulle, si C est une courbe algébrique irréductible dans G et s'il existe un sous-groupe de rang fini Γ de $G(K)$ tel que $\Gamma \cap C$ soit infini, alors C est le translaté d'un sous-groupe algébrique de G.

Les sous-groupes algébriques connexes de $\mathbf{G}_m^2$ sont $\{1\}$, $\mathbf{G}_m^2$, et les sous-groupes de la forme

$$H_{u,v} = \{(t^u, t^v) \mid t \in K^\times\}$$

avec $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$, $\mathrm{pgcd}(u, v) = 1$.

Théorèmes de Liardet et Laurent

Ce théorème de Liardet peut aussi s'énoncer :

Si une courbe algébrique C dans $G = \mathbf{G}_m^n$ ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension positive, et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $G(K)$, alors $\Gamma \cap C$ est fini.

Dire qu'un sous–ensemble de $C(K)$ est fini revient à dire qu'il n'est pas Zariski dense.

Michel Laurent a étendu cet énoncé de Pierre Liardet aux sous-variétés des tores : *Si une sous–variété V de G ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension posiive et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $G(K)$, alors $\Gamma \cap V$ n'est pas Zariski dense dans V.*

Théorèmes de Liardet et Laurent

Ce théorème de Liardet peut aussi s'énoncer :

Si une courbe algébrique C *dans* $G = \mathbf{G}_m^n$ *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension positive, et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$, *alors* $\Gamma \cap C$ *est fini.*

Dire qu'un sous–ensemble de $C(K)$ est fini revient à dire qu'il n'est pas Zariski dense.

Michel Laurent a étendu cet énoncé de Pierre Liardet aux sous-variétés des tores : *Si une sous–variété* V *de* G *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension posiive et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$, *alors* $\Gamma \cap V$ *n'est pas Zariski dense dans* V.

Théorèmes de Liardet et Laurent

Ce théorème de Liardet peut aussi s'énoncer :

Si une courbe algébrique C *dans* $G = \mathbf{G}_m^n$ *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension positive, et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$*, alors* $\Gamma \cap C$ *est fini.*

Dire qu'un sous–ensemble de $C(K)$ est fini revient à dire qu'il n'est pas Zariski dense.

Michel Laurent a étendu cet énoncé de Pierre Liardet aux sous-variétés des tores : *Si une sous–variété* V *de* G *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension posiive et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$*, alors* $\Gamma \cap V$ *n'est pas Zariski dense dans* V*.*

Théorèmes de Liardet et Laurent

Ce théorème de Liardet peut aussi s'énoncer :

Si une courbe algébrique C *dans* $G = \mathbf{G}_m^n$ *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension positive, et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$*, alors* $\Gamma \cap C$ *est fini.*

Dire qu'un sous–ensemble de $C(K)$ est fini revient à dire qu'il n'est pas Zariski dense.

Michel Laurent a étendu cet énoncé de Pierre Liardet aux sous-variétés des tores : *Si une sous–variété* V *de* G *ne contient pas de translaté d'un sous–groupe algébrique de dimension posiive et si* Γ *est un sous-groupe de rang fini de* $G(K)$*, alors* $\Gamma \cap V$ *n'est pas Zariski dense dans* V*.*

Extension aux groupes algébriques commutattifs

L'analogue du théorème de Laurent pour les variétés abéliennes a été obtenu par Gert Faltings en 1991 (après des travaux de Raynaud sur la conjecture de Manin–Mumford en 1983).

Grâce aux travaux de M. Hindry (1988), M. McQuillan (1995) et P. Vojta (1996), on connaît maintenant le résultat pour les variétés semi–abéliennes, qui sont les extensions d'une variété abélienne par un tore :

Si A est une variété semi–abélienne sur un corps K de caractéristique nulle, si V est une sous–variété algébrique de A et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(K)$, alors $\Gamma \cap V$ est une réunion finie

$$V \cap \Gamma = \bigcup_{t+H \subset V} (t+H) \cap \Gamma$$

où $t+H$ est un translaté d'un sous-groupe algébrique de A contenu dans V.

Extension aux groupes algébriques commutattifs

L'analogue du théorème de Laurent pour les variétés abéliennes a été obtenu par Gert Faltings en 1991 (après des travaux de Raynaud sur la conjecture de Manin–Mumford en 1983).

Grâce aux travaux de M. Hindry (1988), M. McQuillan (1995) et P. Vojta (1996), on connaît maintenant le résultat pour les variétés semi–abéliennes, qui sont les extensions d'une variété abélienne par un tore :

Si A est une variété semi–abélienne sur un corps K de caractéristique nulle, si V est une sous–variété algébrique de A et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(K)$, alors $\Gamma \cap V$ est une réunion finie

$$V \cap \Gamma = \bigcup_{t+H \subset V} (t+H) \cap \Gamma$$

où $t+H$ est un translaté d'un sous-groupe algébrique de A contenu dans V.

Extension aux groupes algébriques commutattifs

L'analogue du théorème de Laurent pour les variétés abéliennes a été obtenu par Gert Faltings en 1991 (après des travaux de Raynaud sur la conjecture de Manin–Mumford en 1983).

Grâce aux travaux de M. Hindry (1988), M. McQuillan (1995) et P. Vojta (1996), on connaît maintenant le résultat pour les variétés semi–abéliennes, qui sont les extensions d'une variété abélienne par un tore :

Si A est une variété semi–abélienne sur un corps K de caractéristique nulle, si V est une sous–variété algébrique de A et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(K)$, alors $\Gamma \cap V$ est une réunion finie

$$V \cap \Gamma = \bigcup_{t+H \subset V} (t+H) \cap \Gamma$$

où $t+H$ est un translaté d'un sous-groupe algébrique de A contenu dans V.

Conjectures de Lang

Serge Lang a été un précurseur dans la recherche d'énoncés généraux, sans tenir compte des méthodes disponibles, mais en essayant, avec une remarquable intuition, de décrire la situation générale de façon "fonctorielle" et cohérente. Il a suggéré l'énoncé ci–dessus dès 1962 et a démontré le cas particulier du théorème de Liardet dans le cas où $\Gamma_0 = 0$ (donc Γ est le sous-groupe de torsion de $\mathbf{G}_m(K)^2$) et aussi dans le cas où $\Gamma_0 \cap C$ est infini.

Conjectures en géométrie diophantienne

Après celles de Lang, une multitude de conjectures ont été proposées. Les plus connues sont celles de Manin–Mumford, Mordell–Lang, André–Oort, Zilber, Zhang, Pink, Bogomolov. De nombreux travaux leur ont été consacrées – un exposé au Séminaire Bourbaki en janvier 2011 par Antoine Chambert–Loir fait le point sur ces questions, mais la théorie a encore beaucoup évolué depuis.

A. Chambert-Loir – « Relations de dépendance et intersections exceptionnelles », *Astérisque* (2012), no. 348, p. Exp. No. 1032, viii, 149–188, Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.

Conjectures en géométrie diophantienne

Après celles de Lang, une multitude de conjectures ont été proposées. Les plus connues sont celles de Manin–Mumford, Mordell–Lang, André–Oort, Zilber, Zhang, Pink, Bogomolov. De nombreux travaux leur ont été consacrées – un exposé au Séminaire Bourbaki en janvier 2011 par Antoine Chambert–Loir fait le point sur ces questions, mais la théorie a encore beaucoup évolué depuis.

A. Chambert-Loir – « Relations de dépendance et intersections exceptionnelles », *Astérisque* (2012), no. 348, p. Exp. No. 1032, viii, 149–188, Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.

Conjectures en géométrie diophantienne

La conjecture de Zilber sur les *intersections exceptionnelles* trouve son origine dans ses travaux sur la conjecture de Schanuel dans le cadre des corps différentiels.

La théorie des modèles (o–minimalité) joue un rôle important dans les progrès les plus récents.

T. Scanlon – « A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic [after Pila, Wilkie and Zannier] », *Astérisque* (2012), no. 348, p. Exp. No. 1037, ix, 299–315, Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.

Conjectures en géométrie diophantienne

La conjecture de Zilber sur les *intersections exceptionnelles* trouve son origine dans ses travaux sur la conjecture de Schanuel dans le cadre des corps différentiels.

La théorie des modèles (o–minimalité) joue un rôle important dans les progrès les plus récents.

T. SCANLON – « A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic [after Pila, Wilkie and Zannier] », *Astérisque* (2012), no. 348, p. Exp. No. 1037, ix, 299–315, Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.

Conjectures en géométrie diophantienne

La conjecture de Zilber sur les *intersections exceptionnelles* trouve son origine dans ses travaux sur la conjecture de Schanuel dans le cadre des corps différentiels.

La théorie des modèles (o–minimalité) joue un rôle important dans les progrès les plus récents.

T. Scanlon – « A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic [after Pila, Wilkie and Zannier] », *Astérisque* (2012), no. 348, p. Exp. No. 1037, ix, 299–315, Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.

EMS Newsletter September 2015 issue 97 p.52–58

https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2015-09-97.pdf

http://www.math.tugraz.at/~grabner/Publications/Liardet.pdf

Guy Barat, Peter J. Grabner & Peter Hellekalek

Pierre Liardet (1943–2014) in memoriam

[L2] P. Liardet, Transformations rationnelles et ensembles algébriques. Thèse 3e cycle, Université de Provence, Faculté des Sciences (1970).

[L6] P. Liardet, Première thèse : Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques ; Deuxième thèse : Difféomorphismes du tore : théorie classique et théorie générique. Thèse d'État : Sciences mathématiques, Université d'Aix-Marseille II, Faculté des Sciences. (1975).

EMS Newsletter September 2015 issue 97 p.52–58

https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2015-09-97.pdf
http://www.math.tugraz.at/~grabner/Publications/Liardet.pdf
Guy Barat, Peter J. Grabner & Peter Hellekalek
Pierre Liardet (1943–2014) in memoriam

[L2] P. Liardet, Transformations rationnelles et ensembles algébriques. Thèse 3e cycle, Université de Provence, Faculté des Sciences (1970).

[L6] P. Liardet, Première thèse : Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques ; Deuxième thèse : Difféomorphismes du tore : théorie classique et théorie générique. Thèse d'État : Sciences mathématiques, Université d'Aix-Marseille II, Faculté des Sciences. (1975).

EMS Newsletter September 2015 issue 97 p.52–58

https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2015-09-97.pdf

http://www.math.tugraz.at/~grabner/Publications/Liardet.pdf

Guy Barat, Peter J. Grabner & Peter Hellekalek
Pierre Liardet (1943–2014) in memoriam

[L2] P. Liardet, Transformations rationnelles et ensembles algébriques. Thèse 3e cycle, Université de Provence, Faculté des Sciences (1970).

[L6] P. Liardet, Première thèse : Sur la stabilité rationnelle ou algébrique d'ensembles de nombres algébriques ; Deuxième thèse : Difféomorphismes du tore : théorie classique et théorie générique. Thèse d'État : Sciences mathématiques, Université d'Aix-Marseille II, Faculté des Sciences. (1975).

Pierre Liardet (1943–2014) In Memoriam

Guy Barat (Université d'Aix-Marseille, France), Peter J. Grabner (Graz University of Technology, Austria) and Peter Hellekalek (University of Salzburg, Austria)

1 Introduction

Words and numbers cannot describe a man. The three authors of this paper had a special relationship with Pierre Liardet: as a former PhD student, as collaborators and friends. As such, we will try to give the reader an idea not only of the numerous contributions that Pierre made to number theory and related fields but also of the fine man behind these results.

Pierre Liardet was born in Gardanne, close to Aix-en-Provence, on 20 March 1943. After receiving his baccalauréat en mathématiques et technologie at the Lycée Saint-Éloi in Aix-en-Provence in 1961, he studied mathematics at the university in Marseille, finishing with his doctorate in 1970. Afterwards, he obtained a position as a "Maître Assistant" at the Université de Provence and submitted his Thèse d'État in 1975. Soon afterwards, he became a professor and later "Professeur de

Pierre Liardet 2012

EMS Newsletter September 2015 issue 97 p.53

Pierre with Oto Strauch at a conference in Smolence in 2012

EMS Newsletter September 2015 issue 97 p.58

Guy Barat, Peter J. Grabner & Peter Hellekalek

Obituary

After having studied in the École Normale Supérieure de Cachan, Guy Barat went to Marseille to write his PhD under the supervision of Pierre Liardet on numeration systems and associated arithmetical functions. From that point onward, his principal duty has been teaching mathematics in Classes préparatoires. As a sideline, he still pursues research in number theory at the Institut de Mathématiques de Marseille (France) and at the Graz University of Technology (Austria).

Peter Grabner is a professor at the Institute of Analysis and Number Theory of the Graz University of Technology. He obtained his PhD at Vienna University of Technology and spent the academic year 1994/95 as a postdoc of Pierre Liardet in Marseille. His research interests are in dynamical systems related to digital expansions, uniform distribution of sequences and analysis on fractals.

Peter Hellekalek is an associate professor at the Department of Mathematics of the University of Salzburg. His main research interests are in metric number theory and in applications like pseudo-random number generation.

Gazette SMF 142 octobre 2014

http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2014/142/smf_gazette_142_111-113.pdf

CARNET

Pierre Liardet

(1943-2014)

Jean-Paul Allouche, Hervé Daudé

Pierre Liardet nous a quittés. Il avait bien caché ou minimisé le fait qu'il était malade. Quelques jours avant sa disparition il tenait encore avec la passion mais aussi la modestie et la précision qu'on lui connaît, à expliquer des mathématiques, passant de questions d'équirépartition et d'anciens travaux de Jean Coquet, aux résultats récents de Green et Tao, comme si une chambre d'hôpital n'était qu'un des lieux possibles de séminaire. Il alla même jusqu'à rédiger des notes manuscrites qu'il fit scanner et envoyer par courriel.

Le Bourget-du-Lac, Université de Savoie Mont Blanc

28 et 29 septembre 2015

Théorie des Nombres, Systèmes de Numération, Théorie Ergodique

Un colloque inspiré par les mathématiques de Pierre Liardet

Les huit premiers travaux de Pierre Liardet

Michel Waldschmidt

Institut de Mathématiques de Jussieu — Paris VI

http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/