Advances in Mathematics, Vol. **1** *(2006), No. 2.*
Proceedings of the 11th symposium of the Tunisian Mathematical Society held in Tunis, Tunisia – March 15-18, 2004.
Hosted by the **African Diaspora Journal of Mathematics**
http://www.african-j-math.org/

TRANSCENDANCE DE PÉRIODES: ÉTAT DES CONNAISSANCES

MICHEL WALDSCHMIDT*

Key words. Périodes, nombres transcendants, irrationalité, intégrales, séries, approximation diophantienne, mesures d'irrationalité, mesures de transcendance, mesures d'indépendance linéaire, fonctions Gamma, Bêta, zêta, valeurs zêta multiples (MZV).

AMS subject classifications. 11J81 11J86 11J89

Abstract. Les nombres réels ou complexes forment un ensemble ayant la puissance du continu. Parmi eux, ceux qui sont «intéressants», qui apparaissent «naturellement», qui méritent notre attention, forment un ensemble dénombrable. Dans cet état d'esprit nous nous intéressons aux périodes au sens de Kontsevich et Zagier. Nous faisons le point sur l'état de nos connaissances concernant la nature arithmétique de ces nombres: décider si une période est un nombre rationnel, algébrique irrationnel ou au contraire transcendant est l'objet de quelques théorèmes et de beaucoup de conjectures. Nous précisons aussi ce qui est connu sur l'approximation diophantienne de tels nombres, par des nombres rationnels ou algébriques.

1. Introduction. Dans leur article [37] intitulé «Periods», M. Kontsevich et D. Zagier introduisent la notion de périodes en en donnant deux définitions dont ils disent qu'elles sont équivalentes; il proposent une conjecture, deux principes et cinq problèmes. Le premier principe est le suivant: «*chaque fois que vous rencontrez un nouveau nombre et que vous voulez savoir s'il est transcendant, commencez par essayer de savoir si c'est une période*».

*Institut de Mathématiques de Jussieu – UMR 7586 du CNRS, Université P. et M. Curie (Paris VI), 175 rue du Chevaleret, F-75013 Paris miw@math.jussieu.fr http://www.math.jussieu.fr/∼miw

Si la réponse est négative, alors le nombre est transcendant; en effet les périodes forment une sous algèbre de $\mathbf{C}$ sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques, donc tout nombre algébrique est une période.

Le but de cet exposé est d'examiner ce qui se passe si la réponse est positive: *que sait-on sur la transcendance de périodes?*

Nous considérons aussi l'aspect quantitatif de cette question, en liaison avec la question suivante de [37], § 1.2 qui précède leur conjecture 1: quand on veut vérifier une égalité entre deux nombres algébriques, il suffit de calculer ces deux nombres avec une précision suffisante, puis d'utiliser l'inégalité de Liouville qui établit que deux nombres algébriques distincts de degré et hauteur bornée ne peuvent être trop proches l'un de l'autre. Dans l'exemple qu'ils donnent, dû à D. Shanks [52]:

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}, \tag{1.1}$$

la différence γ entre les deux membres de (1.1) est un nombre algébrique de degré ≤ 16 sur $\mathbf{Q}(\sqrt{5},\sqrt{29})$, donc de degré ≤ 64 sur $\mathbf{Q}$. Pour chacun des 64 éléments $\epsilon=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_6)\in\{0,1\}^6$, posons

$$\begin{aligned}\gamma_\epsilon=\epsilon_3\sqrt{11+2\epsilon_2\sqrt{29}}&+\epsilon_4\sqrt{16-2\epsilon_2\sqrt{29}+2\epsilon_5\sqrt{55-10\epsilon_2\sqrt{29}}}\\&+\epsilon_1\sqrt{5}+\epsilon_6\sqrt{22+2\epsilon_1\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Le nombre

$$N=\prod_\epsilon \gamma_\epsilon$$

est un entier rationnel. Il suffit de le calculer avec une précision d'un chiffre après la virgule pour vérifier qu'il satisfait $-1<N<1$, donc qu'il est nul (c'est le cas le plus simple de l'inégalité de Liouville [57] § 3.5). Il s'ensuit qu'un (au moins) des 64 facteurs γ_ϵ du produit est nul, et l'égalité (1.1) s'en déduit aisément.

La question posée par Kontsevich et Zagier dans [37] § 1.2 consiste à savoir si on peut faire de même avec les périodes. Il s'agirait de définir une notion de complexité d'une période analogue à celle de hauteur pour un nombre algébrique, puis de minorer cette complexité pour une période non nulle afin de remplacer l'inégalité de Liouville. Une des suggestions qu'ils font est de compter le nombre de touches nécessaires pour taper en $\TeX$ une intégrale dont la valeur est la période en question.

Dans cet état d'esprit il serait intéressant de savoir s'il existe des nombres qui sont à la fois une période et un nombre de Liouville. Une réponse négative signifierait que *pour toute période réelle θ, il existe une constante $c(\theta) > 0$ telle que, pour tout nombre rationnel p/q distinct de θ avec $q \geq 2$, on ait*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{c(\theta)}}\cdot$$

Plus ambitieusement on peut demander si les périodes (complexes) se comportent, pour l'approximation par des nombres algébriques, comme presque tous les nombres (complexes) [16, 57]: *étant donnée une période transcendante $\theta \in \mathbf{C}$, existe-t-il une constante $\kappa(\theta)$ telle que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbf{Z}[X]$, on ait*

$$|P(\theta)| \geq H^{-\kappa(\theta)d},$$

où $H \geq 2$ est un majorant de la hauteur (usuelle) de P (maximum des valeurs absolues des coefficients) et d son degré?

2. Intégrales abéliennes. La nature arithmétique de la valeur de l'intégrale d'une fonction algébrique d'une variable entre des bornes algébriques (ou infinies) est maintenant bien connue, aussi bien sous l'aspect qualitatif que quantitatif.

2.1. Genre 0: logarithmes de nombres algébriques. L'outil principal est le théorème de Baker sur l'indépendance linéaire, sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques, de logarithmes de nombres algébriques. Nous n'utilisons ici que le cas particulier suivant:

Théorème 2.1. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des nombres algébriques non nuls,* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *des nombres algébriques, et, pour* $1 \le i \le n$, $\log \alpha_i$ *un logarithme complexe de* α_i. *Alors le nombre*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

est soit nul, soit transcendant.

On en déduit:

Corollaire 2.2. *Soient* P *et* Q *des polynômes à coefficients algébriques vérifiant* $\deg P < \deg Q$ *et soit* γ *un chemin fermé, ou bien un chemin dont les extrémités sont algébriques ou infinies. Si l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz \tag{2.3}$$

existe, alors elle est soit nulle, soit transcendante.

Un exemple célèbre [53] p. 97 est

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\cdot$$

Le corollaire 2.2 se déduit du théorème 2.1 en décomposant la fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$ en éléments simples (voir par exemple [46]). En fait le corollaire 2.2 est équivalent au théorème 2.1: il suffit d'écrire le logarithme d'un nombre algébrique comme une période; pour la détermination principale, quand α n'est pas réel négatif, on a par exemple

$$\log \alpha = \int_0^\infty \frac{(\alpha - 1)dt}{(t+1)(\alpha t + 1)}$$

tandis que

$$i\pi = 2i \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}\cdot$$

Les mesures d'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques (minorations de combinaisons linéaires, à coefficients algébriques, de logarithmes de nombres algébriques - voir par exemple [57]) contiennent le fait qu'une intégrale non nulle de la forme (2.3) a une valeur absolue minorée explicitement en termes des hauteurs de P et Q et de leurs degrés, ainsi que des hauteurs et degrés des nombres algébriques extrémités de γ.

2.2. Genre 1: intégrales elliptiques. La nature arithmétique des valeurs d'intégrales elliptiques de première ou deuxième espèce a été étudiée dès 1934 [48] puis 1937 [49] par Th. Schneider. Voici le théorème 15 version III de [51].

THÉORÈME 2.4. *Toute intégrale elliptique de première ou deuxième espèce à coefficients algébriques et calculée entre des bornes algébriques distinctes a pour valeur un nombre nul ou transcendant.*

En particulier *toute période non nulle d'une intégrale elliptique de première ou deuxième espèce à coefficients algébriques est transcendante.*

Le théorème 16 de [51] concerne *la transcendance du quotient de deux intégrales elliptiques de première espèce.*

Une conséquence que cite Schneider de son théorème 17 dans [51] s'énonce: *la valeur prise par une intégrale elliptique de première ou de deuxième espèce à coefficients algébriques entre des bornes algébriques est quotient d'une période par un facteur rationnel ou transcendant.*

Du théorème 2.4 on déduit le résultat cité dans [37] § 1.1: *si a et b sont deux nombres algébriques réels positifs, l'ellipse dont les longueurs d'axes sont a et b a un périmètre*

$$2\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{a^2x^2}{b^4-b^2x^2}}\,dx \tag{2.5}$$

qui est un nombre transcendant. Plus généralement *la longueur de tout arc dont les extrémités sont des points de coordonnées algébriques est un nombre transcendant ou nul.*

Il en est de même pour une lemniscate

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

quand a est algébrique.

Ces énoncés sont démontrés par Schneider comme conséquences de résultats sur les fonctions elliptiques. Voici par exemple la version I du théorème 15 de [51]. Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3 algébriques:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Soient ζ la fonction zêta de Weierstrass associée à $\wp$, a et b deux nombres algébriques non tous deux nuls et u un nombre complexe non pôle de $\wp$. *Alors l'un au moins des deux nombres $\wp(u)$, $au + b\zeta(u)$ est transcendant.*

Ainsi en considérant les deux courbes elliptiques

$$y^2 = x^3 - x \qquad \text{et} \qquad y^2 = x^3 - x$$

on en déduit que *chacun des deux nombres*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2^{3/2}\pi^{1/2}} \tag{2.6}$$

et

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} = \frac{1}{3}\mathrm{B}(1/3, 1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}3^{1/2}\pi} \tag{2.7}$$

est transcendant.

Ces deux formules (comparer avec [40] p.21) sont des cas particuliers de la formule de Chowla-Selberg (cf [33] et [37] § 2.3) qui exprime les périodes de courbes elliptiques de type CM comme des produits de valeurs de la fonction Gamma d'Euler dont une des définitions est:

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}. \tag{2.8}$$

L'extension par G. Shimura aux variétés abéliennes de type CM de la formule de Chowla-Selberg donne lieu aux relations de Deligne-Koblitz-Ogus sur la fonction Gamma (voir [14]).

2.3. Genre ≥ 1: intégrales abéliennes. Dans [50], Th. Schneider étend ses résultats aux intégrales abéliennes. La démonstration est une extension en plusieurs variables de ses résultats antérieurs; dans la partie analytique de la démonstration de transcendance, l'outil essentiel, un lemme de Schwarz, est étendu en plusieurs variables grâce à une formule d'interpolation pour les produits cartésiens. Cela permet à Schneider d'obtenir des énoncés sur les fonctions abéliennes. L'exemple le plus important des résultats qu'il obtient est le suivant:

Théorème 2.9. *Soient a et b des nombres rationnels non entiers tels que $a+b$ ne soit pas non plus un entier. Alors le nombre*

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \tag{2.10}$$

est transcendant.

Les travaux sur la nature arithmétique des valeurs d'intégrales abéliennes sont nombreux: ceux de Th. Schneider en 1940 ont été poursuivis par S. Lang dans les années 1960, puis notamment par D.W. Masser grâce à la méthode de Baker dans les années 1980, pour arriver à une solution essentiellement complète de la question en 1989 par G. Wüstholz [63] qui a obtenu une extension satisfaisante du théorème 2.1 de Baker aux groupes algébriques commutatifs. On connaît donc essentiellement ce que l'on souhaite sur la transcendance et l'indépendance linéaire (sur le corps des nombres algébriques) d'intégrales abéliennes de première, seconde ou troisième espèce. Par exemple J. Wolfart et G. Wüstholz [62] ont montré que les seules relations linéaires à coefficients algébriques entre les valeurs $\mathrm{B}(a,b)$ de la fonction Bêta en des points $(a,b) \in \mathbf{Q}^2$ sont celles qui résultent des relations de Deligne-Koblitz-Ogus.

De plus on dispose également maintenant de résultats quantitatifs qui permettent de minorer la valeur d'une intégrale abélienne quand elle est non nulle – les estimations les plus récentes et les plus précises sur ce sujet, dans le cadre général des groupes algébriques, sont dues à É. Gaudron [27, 28].

Si les relations linéaires à coefficients algébriques entre les valeurs d'intégrales abéliennes sont maintenant bien connues, il n'en est pas de même des relations algébriques. Dans une note de bas de page [34], A. Grothendieck propose un énoncé conjectural sur la transcendance de périodes de variétés abéliennes définies sur le corps des nombres algébriques. La première formulation précise de cette conjecture est donnée par S. Lang dans son livre [38], où l'on trouve aussi la première formulation de la conjecture de Schanuel sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle (voir aussi [23]). Ces énoncés ont été développés par Y. André (voir notamment [7]) qui propose une généralisation commune des conjectures de Grothendieck et Schanuel. Pour des 1-motifs attachés aux produits de courbes elliptiques, C. Bertolin [9] a explicité la situation conjecturale en formulant sa conjecture elliptico-torique qui fait intervenir la fonction exponentielle, les fonctions $\wp$ et ζ de Weierstrass, les intégrales elliptiques et l'invariant modulaire j (voir aussi [59] et [58]).

3. Valeurs de la fonction Gamma d'Euler. La définition (2.10) de la fonction Bêta sous forme d'une intégrale montre que ses valeurs aux points de $\mathbf{Q}^2$ où elle est définie sont des périodes. De la relation (2.10) entre les fonctions Gamma et Bêta on déduit

$$\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n) = \Gamma(a+\cdots+a_n)\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{B}(a_1+\cdots+a_{i-1}, a_i).$$

Il en résulte que pour tout $p/q \in \mathbf{Q}$ avec $p>0$ et $q>0$, le nombre $\Gamma(p/q)^q$ est une période. Par exemple

$$\pi = \Gamma(1/2)^2 = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx.$$

De (2.6) et (2.7) on déduit aussi des expressions de $\Gamma(1/3)^3$ et $\Gamma(1/4)^4$ comme périodes.

On connaît bien mieux la nature arithmétique des valeurs de la fonction Bêta d'Euler (grâce au théorème 2.9 de Schneider) que celles de la fonction Gamma. On sait que le nombre $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ est transcendant, grâce à Lindemann. La transcendance de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$ a été établie par G.V. Čudnovs′kiĭ [21].

Théorème 3.1. *Les deux nombres*

$$\Gamma(1/4) \quad \textit{et} \quad \pi$$

sont algébriquement indépendants, et il en est de même des deux nombres

$$\Gamma(1/3) \quad \textit{et} \quad \pi.$$

Comme l'a remarqué D.W. Masser on peut aussi énoncer ces résultats en disant que les deux nombres $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/2)$ sont algébriquement indépendants et qu'il en est de même des deux nombres $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(2/3)$.

Les seules autres valeurs de la fonction Γ en des points rationnels dont on sache démontrer la transcendance sont celles que l'on déduit de la transcendance en 1/2, 1/3 et 1/4 en utilisant les relations standard satisfaites par la fonction Gamma (voir ci-dessous). Par exemple $\Gamma(1/6)$ est aussi un nombre transcendant.

La démonstration par G.V. Čudnovs′kiĭ de son théorème 3.1 repose sur le résultat suivant [21] concernant les périodes et quasi périodes de fonctions de Weierstrass, que l'on applique aux courbes elliptiques $y^2 = x^3 - x$ et $y^2 = x^3 - 1$ grâce à (2.6) et (2.7)

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3. Soit ω une période non nulle de $\wp$ et soit η la quasi-période associée de la fonction zêta de Weierstrass ζ:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \qquad \zeta' = -\wp, \quad \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta.$$

Alors deux au moins des nombres

$$g_2, \ g_3, \ \omega/\pi, \ \eta/\pi$$

sont algébriquement indépendants.

De cet énoncé on déduit aussi le fait que le nombre (2.5) est non seulement transcendant, mais même algébriquement indépendant de π (cf. [37] § 1.1).

Pour l'instant on ne sait pas obtenir la transcendance (sur $\mathbf{Q}$) de $\Gamma(1/4)$ ni de $\Gamma(1/3)$ sans établir le résultat plus fort qui est la transcendance de chacun de ces nombres sur le corps $\mathbf{Q}(\pi)$. D'un point de vue quantitatif de bonnes mesures de transcendance de ces nombres ont été établies par P. Philippon puis S. Bruiltet [15]:

THÉORÈME 3.2. *Pour un polynôme non constant $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$ de degré d et de hauteur H, on a*

$$\log|P(\pi,\Gamma(1/4)| > -10^{326}\bigl((\log H + d\log(d+1)\bigr)d^2\bigl(\log(d+1)\bigr)^2$$

et

$$\log|P(\pi,\Gamma(1/3)| > -10^{330}\bigl((\log H + d\log(d+1)\bigr)d^2\bigl(\log(d+1)\bigr)^2.$$

Ainsi $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$ ne sont pas des nombres de Liouville.

La prochaine étape pourrait être la transcendance du nombre $\Gamma(1/5)$ (cf. [40], p. 2 et p. 35). Du théorème 2.9 de Schneider sur la transcendance du nombres $\mathrm{B}(1/5,1/5)$ on déduit que l'un au moins des deux nombres $\Gamma(1/5)$, $\Gamma(2/5)$ est transcendant. Un résultat plus précis se déduit des travaux de P. Grinspan [32] (voir aussi [56]):

THÉORÈME 3.3. *Un au moins des deux nombres* $\Gamma(1/5)$, $\Gamma(2/5)$ *est transcendant sur le corps* $\mathbf{Q}(\pi)$.

Autrement dit, deux au moins des trois nombres $\Gamma(1/5)$, $\Gamma(2/5)$ et π sont algébriquement indépendants. La démonstration de [32] fournit de plus un résultat quantitatif.

Comme la courbe de Fermat $x^5+y^5=z^5$ d'exposant 5 est de genre 2, sa jacobienne est une surface abélienne; il faut donc remplacer dans la démonstration de Čudnovs′kiĭ les fonctions elliptiques par des fonctions abéliennes, et c'est pourquoi il est difficile de séparer les deux nombres $\Gamma(1/5)$ et $\Gamma(2/5)$ quand on veut obtenir la transcendance de chacun d'eux.

Avant de poursuivre avec le dénominateur 5, revenons aux dénominateurs 3 et 4. Le théorème 3.1 a été étendu par Yu.V. Nesterenko [41, 42], qui obtient l'indépendance algébrique de trois nombres:

THÉORÈME 3.4. *Les trois nombres*

$$\Gamma(1/4), \quad \pi \quad \textit{et} \quad e^{\pi}$$

sont algébriquement indépendants, et il en est de même de

$$\Gamma(1/3), \quad \pi \quad et \quad e^{\pi\sqrt{3}}.$$

La démonstration par Yu.V. Nesterenko de son théorème 3.4 utilise les séries d'Eisenstein E_2, E_4 et E_6 (nous utilisons les notations P, Q, R de Ramanujan):

$$\left\{\begin{aligned} P(q) &= E_2(q) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}, \\ Q(q) &= E_4(q) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3q^n}{1-q^n}, \\ R(q) &= E_6(q) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5q^n}{1-q^n}. \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

Les premiers résultats de transcendance sur les valeurs de ces fonctions sont dus à D. Bertrand dans les années 70. Une avancée remarquable a été faite en 1996 par K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert [8], qui ont résolu le problème suivant de Manin (et de Mahler dans le cas p-adique) concernant la fonction modulaire $J = Q^3/\Delta$, où $\Delta = 12^{-3}(Q^3 - R^2)$: *pour tout $q \in \mathbf{C}$ avec $0 < |q| < 1$, l'un au moins des deux nombres q, $J(q)$ est transcendant.*

C'est cette percée qui a permis à Yu.V. Nesterenko [41] de démontrer le résultat suivant, cité dans le § 2.4 de [37]:

Soit $q \in \mathbf{C}$ un nombre complexe satisfaisant $0 < |q| < 1$. Alors trois au moins des quatre nombres

$$q, \ P(q), \ Q(q), \ R(q)$$

sont algébriquement indépendants.

Le théorème 3.4 en résulte en spécialisant $q = e^{-2\pi}$ et $q = -e^{-\pi\sqrt{3}}$ car $J(e^{-2\pi}) = 1728$,

$$P(e^{-2\pi}) = \frac{3}{\pi}, \quad Q(e^{-2\pi}) = 3\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4, \quad R(e^{-2\pi}) = 0$$

avec (cf. (2.6))

$$\omega = \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{8\pi}} = 2.6220575542\ldots$$

tandis que $J(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = 0$,

$$P(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \quad Q(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = 0, \quad R(-e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{27}{2}\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^6$$

avec (cf. (2.7))

$$\omega' = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2.428650648\ldots$$

On trouve dans [37] § 2.3 des commentaires sur les liens entre les périodes et les séries d'Eisenstein (et aussi les fonctions thêta, qui interviennent également dans le travail [41] de Nesterenko — voir [42]).

Le théorème 3.4 de Nesterenko et celui 3.3 de Grinspan suggèrent le problème ouvert suivant:

Conjecture 3.6. *Trois au moins des quatre nombres*

$$\Gamma(1/5), \quad \Gamma(2/5), \quad \pi \quad \textit{et} \quad e^{\pi\sqrt{5}}$$

sont algébriquement indépendants.

Ce problème fait l'objet de travaux récents de F. Pellarin (voir en particulier [45]).

Plus ambitieusement on peut demander quelles sont toutes les relations algébriques liant les valeurs de la fonction Gamma en des points rationnels. La question des relations multiplicatives a été considérée par D. Rohrlich. On rappelle déjà ce que sont les relations standard: pour $a \in \mathbf{C}$ (en dehors des pôles de $\Gamma(x)$, $\Gamma(x+1)$, $\Gamma(1-x)$ ou $\Gamma(nx)$ pour que les formules aient un sens), on a

(Translation) $$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

(Reflexion) $$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

et, pour tout n entier positif,

$$\text{(Multiplication)} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-na+(1/2)} \Gamma(na).$$

Voici la conjecture de Rohrlich:

CONJECTURE 3.7. *Toute relation multiplicative de la forme*

$$\pi^{b/2} \prod_{a\in\mathbf{Q}} \Gamma(a)^{m_a} \in \overline{\mathbf{Q}}$$

avec b *et* m_a *dans* $\mathbf{Z}$ *se déduit des relations standard.*

Une formalisation de cette conjecture utilisant la notion de «distribution universelle» est donnée par S. Lang dans [39].

Une conjecture plus ambitieuse que 3.7 est celle de Rohrlich-Lang qui concerne non seulement les relations monomiales, mais plus généralement les relations polynomiales: elle prétend que *l'idéal sur* $\overline{\mathbf{Q}}$ *de toutes les relations algébriques entre les valeurs de* $(1/\sqrt{2\pi})\Gamma(a)$ *pour* $a \in \mathbf{Q}$ *est engendré par les relations de distributions, l'équation fonctionnelle et l'imparité.*

4. Séries de fractions rationnelles. Soient P et Q deux fractions rationnelles à coefficients rationnels avec $\deg Q \geq \deg P + 2$. *Quelle est la nature arithmétique de la somme de la série*

$$\sum_{\substack{n\geq 0\\ Q(n)\neq 0}} \frac{P(n)}{Q(n)} \ ? \tag{4.1}$$

Cette question a été étudiée notamment dans [3].

La somme de la série (4.1) peut être rationnelle: c'est le cas des séries *téléscopiques* dont voici des exemples.

LEMME 4.2. *Soient* a *et* b *deux éléments de* $\mathbf{C}^\times$ *tels que* $b/a \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ *et soit* k *un entier* ≥ 2. *Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(an+b+ja)} = \frac{1}{(k-1)a} \prod_{i=0}^{k-2} \frac{1}{ia+b}. \tag{4.3}$$

En particulier, sous les hypothèses du lemme 4.2, si a et b sont des nombres rationnels alors la série a pour valeur un nombre rationnel. Ainsi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

Un autre exemple est la somme de la série (4.1) avec $P(X)=1$ et $Q(X)=(X+1)\cdots(X+k)$ pour $k\geq 2$, à savoir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+k)!}=\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\cdot$$

Démonstration du lemme 4.2. On utilise la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\prod_{j=0}^{h}\frac{1}{X+ja}=\frac{1}{a^h}\sum_{i=0}^{h}\frac{(-1)^i}{i!(h-i)!}\cdot\frac{1}{X+ia} \tag{4.4}$$

d'abord avec $h=k-1$: la somme

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(an+b+ja)}$$

de la série du membre de gauche de (4.3) s'écrit

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i}{an+b+ia}$$

avec

$$c_i=\frac{(-1)^i}{a^{k-1}i!(k-1-i)!}\qquad (0\leq i\leq k-1).$$

Comme

$$\sum_{i=0}^{k-1}c_i=0,$$

on en déduit

$$S = \frac{1}{a^{k-1}} \sum_{m=0}^{k-2} \frac{d_m}{am+b}$$

avec

$$d_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!(k-1-i)!}.$$

On vérifie par récurrence sur m, pour $0 \le m \le k-2$,

$$d_m = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{(-1)^m}{m!(k-2-m)!}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer de nouveau (4.4), mais cette fois-ci avec $h = k-2$.

La somme d'une série (4.1) peut aussi être transcendante: des exemples [3] sont

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \log 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(4n+1)} = \frac{\pi}{3},$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\log 3.$$

De façon générale, quand la fraction rationnelle Q au dénominateur a uniquement des pôles simples et rationnels, la somme de la série est une combinaison linéaire de logarithmes de nombres algébriques. En effet, d'après [3] lemme 5, si k_j et r_j sont des entiers positifs avec $r_j \le k_j$ et si c_j sont des nombres complexes, si la série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{k_j n + r_j}$$

converge, alors sa somme est

$$S=\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j}{k_j}\sum_{t=1}^{k_j-1}(1-\zeta_j^{-r_jt})\log(1-\zeta_j^t),$$

ζ_j désignant une racine primitive k_j-ième de l'unité. Ainsi quand les nombres c_j sont algébriques et que ce nombre S est non nul, alors non seulement il est transcendant (d'après le théorème 2.1), mais en plus on en connaît de bonnes mesures de transcendance (voir par exemple [57] et [3]). En particulier il n'est pas un nombre de Liouville.

D'autres exemples de séries de la forme (4.1) prenant une valeur transcendante sont

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

et [17]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cdot \tag{4.5}$$

La transcendance de ce dernier nombre provient du théorème 3.4 de Nesterenko.

Ces exemples soulèvent plusieurs questions. Voici la première

Question 4.6. *Quelles sont les périodes parmi les nombres* (4.1)*?*

Il y a beaucoup de périodes parmi ces nombres (4.1) (voir par exemple le lemme 5.1 ci-dessous), mais on s'attend plutôt à ce qu'un nombre tel que (4.5) n'en soit pas une.

Sur la nature arithmétique des séries (4.1), on peut espérer l'énoncé suivant:

Conjecture 4.7. *Un nombre de la forme*

$$\sum_{\substack{n\ge 0\\ Q(n)\neq 0}}\frac{P(n)}{Q(n)}$$

est soit rationnel, soit transcendant. Ce n'est jamais un nombre de Liouville. De plus, s'il est rationnel, alors la série est «télescopique».

Par «série télescopique» nous entendons une série dont la somme est rationnelle, la démonstration de ce fait reposant sur l'argument du lemme 4.2.

Le cas particulier des fractions rationnelles de la forme

$$P(X)/Q(X) = X^{-s}$$

mérite une section spéciale.

5. Valeurs de la fonction zêta de Riemann. Commençons par un résultat élémentaire concernant les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs.

Lemme 5.1. *Pour* $s \geq 2$

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

est une période.

Démonstration: on vérifie facilement l'égalité

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}\cdot \tag{5.2}$$

Il sera commode d'utiliser la notation des intégrales itérées de Chen ([18] § 2.6) et d'écrire la relation (5.2) sous la forme

$$\zeta(s) = \int_0^1 \omega_0^{s-1}\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dt}{1-t}\cdot \tag{5.3}$$

La nature arithmétique des valeurs de la fonction zêta de Riemann en des entiers positifs *pairs* est connue depuis Euler:

$$\pi^{-2k}\zeta(2k) \in \mathbf{Q} \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

Ces nombres rationnels s'expriment en termes des nombres de Bernoulli [18], formule (38). Établir un résultat de rationalité (ou d'algébricité) de certains nombres est en général plus fécond que d'établir des énoncés d'irrationalité ou de transcendance – cependant notre propos est de faire le point sur les résultats de transcendance: ce sont eux qui assurent que toute la richesse potentielle que recèlent des relations algébriques entre les nombres considérés a bien été exploitée.

La principale question diophantienne que posent les nombres d'Euler est de savoir quelles relations algébriques existent entre les nombres

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7)\dots ?$$

On conjecture qu'il n'y en a pas ([18] et [26] Conjecture 0.1). Autrement dit

Conjecture 5.4. *Les nombres*

$$\zeta(2), \quad \zeta(3), \quad \zeta(5), \quad \zeta(7)\dots$$

sont algébriquement indépendants.

On sait très peu de choses dans cette direction: le théorème de Lindemann: affirme que le nombre π est transcendant, donc aussi $\zeta(2k)$ pour tout entier $k \geq 1$. En 1978 R. Apéry a démontré que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. La démonstration d'Apéry permet de montrer que le nombre $\zeta(3)$ n'est pas un nombre de Liouville, la meilleure mesure d'irrationalité étant celle de Rhin et Viola [47]:

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| > q^{-\mu}$$

pour q suffisamment grand, avec $\mu = 5,513\dots$

Les travaux récents de T. Rivoal, puis de K. Ball et W. Zudilin notamment, apportent les premières informations sur la nature arithmétique des valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs: par exemple l'espace vectoriel sur le corps des nombres rationnels engendré par les nombres $\zeta(2k+1)$, $k \geq 1$ a une dimension infinie (cf. [26]).

Une étape préliminaire en vue d'une démonstration de la conjecture 5.4 consiste à linéariser le problème: les méthodes diophantiennes sont en effet plus performantes pour établir des énoncés d'indépendance linéaire (comme le théorème 2.1 de Baker, ou même le théorème de Lindemann-Weiserstrass, qui peut s'énoncer de manière équivalente comme un résultat d'indépendance algébrique ([25] Th. 2.3') ou linéaire ([25] Th. 2.3) que pour établir des résultats d'indépendance algébrique.

Euler avait déjà remarqué que le produit de deux valeurs de la fonction zêta (de Riemann comme on l'appelle maintenant!) était encore la somme d'une série. En effet, de la relation

$$\sum_{n_1\ge 1} n_1^{-s_1} \sum_{n_2\ge 1} {n_2}^{-s_2} = \sum_{n_1>n_2\ge 1} n_1^{-s_1}{n_2}^{-s_2} + \sum_{n_2>n_1\ge 1} n_2^{-s_2}{n_1}^{-s_1} + \sum_{n\ge 1} n^{-s_1-s_2}$$

on déduit, pour $s_1 \ge 2$ et $s_2 \ge 2$,

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2)$$

avec

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1>n_2\ge 1} n_1^{-s_1}{n_2}^{-s_2}.$$

Pour k, $s_1, \dots, s_k$ entiers positifs avec $s_1 \ge 2$, on pose $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\ge 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}. \tag{5.5}$$

Ces nombres sont appelés «valeurs zêta multiples», ou encore «MZV»(*Multiple Zeta Values*). Pour $k = 1$ on retrouve bien entendu les nombres d'Euler $\zeta(s)$.

Remarque 5.6. *Chacun des nombres $\zeta(\underline{s})$ est une période: en effet, avec la notation* (5.3) *des intégrales itérées de Chen, on a (cf. [18] § 2.6):*

$$\zeta(\underline{s}) = \int_0^1 \omega_0^{s_1-1}\omega_1 \cdots \omega_0^{s_k-1}\omega_1. \tag{5.7}$$

Le produit de séries (5.5) est une combinaison linéaire de telles séries. Par conséquent l'espace vectoriel (sur $\mathbf{Q}$ ou sur $\overline{\mathbf{Q}}$) engendré par les $\zeta(\underline{s})$ est aussi une algèbre sur ce corps. De plus le produit de deux intégrales (5.7) est aussi une combinaison linéaire de telles intégrales. Par différence on obtient des relations linéaires non triviales à coefficients rationnels entre les MZV. On en obtient de nouvelles — comme celle d'Euler $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ — en y ajoutant les relations que l'on obtient en régularisant les séries et les intégrales divergentes [18].

Une description exhaustive des relations linéaires entre les MZV devrait théoriquement permettre de décrire du même coup toutes les relations algébriques entre ces nombres, et en particulier de résoudre le problème 5.4 de l'indépendance algébrique sur le corps $\mathbf{Q}(\pi)$ des valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. Le but est donc de décrire toutes les relations linéaires à coefficients rationnels entre les MZV. Soit $\mathfrak{Z}_p$ le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ engendré par les nombres $\zeta(\underline{s})$ pour $\underline{s}$ de «poids» $s_1+\cdots+s_k=p$, avec $\mathfrak{Z}_0=\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{Z}_1=\{0\}$.

Voici la conjecture de Zagier (conjecture (108) de [18]) sur la dimension d_p de $\mathfrak{Z}_p$.

Conjecture 5.8. *Pour $p\ge 3$ on a $d_p=d_{p-2}+d_{p-3}$:*

$$(d_0,\ d_1,\ d_2,\ldots)=(1,0,1,1,1,2,2,\ldots).$$

Cette conjecture s'écrit aussi

$$\sum_{p\ge 0} d_pX^p=\frac{1}{1-X^2-X^3}.$$

Un candidat pour être une base de l'espace $\mathfrak{Z}_p$ est proposé par M. Hoffman ([35], Conjecture C):

Conjecture 5.9. *Une base de $\mathfrak{Z}_p$ sur $\mathbf{Q}$ est donnée par les nombres $\zeta(s_1,\ldots,s_k)$, $s_1+\cdots+s_k=p$, où chacun des s_i est soit 2, soit 3.*

Cette conjecture est compatible avec ce qui est connu pour $p\le 16$ (travaux de Hoang Ngoc Minh notamment). Par exemple, en notant $\{a\}_b$ la suite formée de b occurences de a, les 7 valeurs suivantes devraient être une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{Z}_{10}$:

$$\zeta\bigl(\{2\}_5\bigr),\ \zeta\bigl(\{2\}_2,\{3\}_2\bigr),\ \zeta\bigl(\{2,3\}_2\bigr),\ \zeta\bigl((2,\{3\}_2,2\bigr),$$

$$\zeta\big(3,\{2\}_2,3\big),\ \zeta\big(\{3,2\}_2\big),\ \zeta\big(\{3\}_2,\{2\}_2\big).$$

Exemple 5.10. *Voici les petites valeurs de d_p:*

- $d_0 = 1$ *car par convention* $\zeta(s_1,\ldots,s_k) = 1$ *pour* $k = 0$.
- $d_1 = 0$ *car* $\{(s_1,\ldots,s_k)\ ;\ s_1 + \cdots + s_k = 1,\ s_1 \geq 2\} = \emptyset$.
- $d_2 = 1$ *car* $\zeta(2) \neq 0$
- $d_3 = 1$ *car* $\zeta(2,1) = \zeta(3) \neq 0$
- $d_4 = 1$ *car* $\zeta(4) \neq 0$ *et*

$$\zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,2) = \frac{3}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,1,1) = \zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2.$$

La première valeur de d_p qui ne soit pas connue est d_5. La conjecture 5.8 donne $d_5 = 2$, et on sait $d_5 \in \{1,2\}$ car

$$\begin{aligned}\zeta(2,1,1,1) &= \zeta(5),\\ \zeta(3,1,1) &= \zeta(4,1) = 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3),\\ \zeta(2,1,2) &= \zeta(2,3) = \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3),\\ \zeta(2,2,1) &= \zeta(3,2) = 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{11}{2}\zeta(5).\end{aligned}$$

Donc $d_5 = 2$ si et seulement si le nombre $\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(5)$ est irrationnel.

La conjecture 5.8 prédit une valeur exacte pour la dimension d_p de $\mathfrak{Z}_p$. La question diophantienne est d'établir la minoration. La majoration a été établie récemment grâce aux travaux de A.B. Goncharov [29] et T. Terasoma [55] (voir aussi le théorème 6.4 de [35]):

Les entiers δ_p définis par la relation de récurrence de la conjecture de Zagier

$$\delta_p = \delta_{p-2} + \delta_{p-3}$$

avec les conditions initiales $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 0$ fournissent une majoration pour la dimension d_p de $\mathfrak{Z}_p$.

6. Fonctions hypergéométriques. Pour a, b, c et z nombres complexes avec $c \notin \mathbf{Z}_{\le 0}$ et $|z| < 1$, on définit la *fonction hypergéométrique de Gauss* (voir par exemple [25], Chap. 1 § 3.6, Chap. 2 § 3.2)

$$ {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c\ \middle|\ z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} $$

où

$$ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1). $$

Exemple 6.1. *Si on note $K(z)$ l'intégrale elliptique de Jacobi de première espèce*

$$ K(z) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}}, $$

P_n le n-ième polynôme de Legendre et T_n le n-ième polynôme de Chebyshev:

$$ P_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^n (1-z^2)^n, \qquad T_n(\cos z) = \cos(nz) $$

on a

$$ (6.2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} {}_2F_1\left(a,\ 1\ ;\ 1\ \middle|\ z\right) & = & \dfrac{1}{(1-z)^a}, \\ {}_2F_1\left(1,\ 1\ ;\ 2\ \middle|\ z\right) & = & \dfrac{1}{z}\log(1+z), \\ {}_2F_1\left(1/2,\ 1\ ;\ 3/2\ \middle|\ z^2\right) & = & \dfrac{1}{2z}\log\dfrac{1+z}{1-z}, \\ {}_2F_1\left(1/2,\ 1/2\ ;\ 3/2\ \middle|\ z^2\right) & = & \dfrac{1}{z}\arcsin z, \\ {}_2F_1\left(1/2,\ 1/2\ ;\ 1\ \middle|\ z^2\right) & = & \dfrac{2}{\pi}K(z), \\ {}_2F_1\left(-n,\ n+1\ ;\ 1\ \middle|\ (1+z)/2\right) & = & 2^{-n}P_n(z), \\ {}_2F_1\left(-n,\ n\ ;\ 1/2\ \middle|\ (1+z)/2\right) & = & (-1)^n T_n(z). \end{array} \right. $$

Pour $c > b > 0$ nombres rationnels, on a (Euler, 1748)

$$ {}_2F_1\bigl(a,\ b\ ;\ c \bigm| z\bigr) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt; $$

de la formule de réflexion de la fonction Gamma, jointe à la relation (2.10) liant les fonctions Bêta et Gamma, on déduit

$$ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \in \frac{1}{\pi}\mathcal{P}. $$

Il en résulte [37] § 2.2 que pour a, b, c rationnels avec $c \not\in \mathbf{Z}_{\le 0}$ et $z \in \overline{\mathbf{Q}}$ avec $|z| < 1$,

$$ {}_2F_1\bigl(a,\ b\ ;\ c \bigm| z\bigr) \in \frac{1}{\pi}\mathcal{P}. \tag{6.3} $$

Rappelons que $\mathcal{P} \subset (1/\pi)\mathcal{P}$. Il est suggéré dans [37] § 2.2 que sous les mêmes conditions, ${}_2F_1\bigl(a, b\,; c\bigm|z\bigr)$ n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

Remarque 6.4. *Pour a, b, c réels avec $c > a+b$ et $c \not\in \mathbf{Z}_{\le 0}$, on a (Gauss)*

$$ {}_2F_1\bigl(a,\ b\ ;\ c \bigm| 1\bigr) = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}\cdot $$

Remarque 6.5. *Une relation remarquable faisant intervenir l'invariant modulaire $j(z) = J(e^{2i\pi z})$ et la série d'Eisenstein $E_4 = Q$ (cf (3.5)) est la suivante* [37] § 2.3*, due à Fricke et Klein:*

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\ ;\ 1 \,\middle|\, \frac{1728}{j(z)}\right) = Q(z)^{1/4}. $$

La transcendance des valeurs ${}_2F_1\bigl(a, b; c\bigm|z\bigr)$ des fonctions hypergéométriques quand a, b, c et z sont rationnels a été étudiée dès 1929 par C.L. Siegel [53]. On doit à A.B. Shidlovskii et à son école de nombreux résultats sur la question (voir [25]).

En 1988, J. Wolfart [60] a étudié l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres algébriques ξ tels que ${}_2F_1(\xi)$ soit aussi algébrique. Quand ${}_2F_1$ est une fonction algébrique,

$\mathcal{E} = \overline{\mathbf{Q}}$ est l'ensemble de tous les nombres algébriques. Supposons maintenant que ${}_2F_1$ est une fonction transcendante. Wolfart [60] montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est en bijection avec un ensemble de variétés abéliennes de type CM – il s'agit donc d'une extension en dimension supérieure du théorème de Th. Schneider sur la transcendance de l'invariant modulaire j ([49], [51] Th. 17).

La démonstration de Wolfart utilise le fait que les nombres ${}_2F_1(a,b,c;z)$ sont reliés aux périodes de formes différentielles sur la courbe

$$y^N = x^A(1-x)^B(1-zx)^C$$

avec $A = (1-b)N$, $B = (b+1-c)N$, $C = aN$, tandis que N est le plus petit dénominateur commun de a,b,c (voir à ce sujet [36]). L'outil transcendant est le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz [63]. À l'occasion de ces recherches, F. Beukers et J. Wolfart [10] ont établi de nouvelles relations qui n'avaient pas été observées avant, comme

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}\ ;\ \frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11}$$

et

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}\ ;\ \frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{64000}{64009}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[6]{253}.$$

Quand le groupe de monodromie de l'équation différentielle hypergéométrique satisfaite par ${}_2F_1$ est un groupe triangulaire arithmétique, l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini. Wolfart [60] conjectura que réciproquement, l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini si le groupe de monodromie n'est pas arithmétique. Les travaux de P. Cohen et J. Wolfart [19], puis de P. Cohen et J. Wüstholz [20] ont établi un lien entre cette question et la conjecture d'André-Oort [6, 44], selon laquelle les sous-variétés spéciales de variétés de Shimura sont précisément les sous-variétés qui contiennent un sous-ensemble Zariski dense de points spéciaux. P. Cohen a remarqué qu'un cas particulier de la conjecture d'André-Oort en dimension 1 suffit; le résultat crucial a été établi par B. Edixhoven et A. Yafaev [24]: *dans une variété de Shimura, une courbe contient une infinité de points appartenant* *à la même orbite de Hecke d'un point spécial si et seulement si elle est de type Hodge.* Cela permet de répondre à la question initiale de C.L. Siegel; de manière précise, en regroupant les résultats de [19, 20, 24, 60], on déduit: *l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ est en bijection avec un ensemble de points dans la même orbite de Hecke d'un point spécial (CM) sur une courbe dans une variété de Shimura définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est infini si le groupe de monodromie est arithmétique, il est fini si le groupe de monodromie n'est pas arithmétique.*

À la fonction hypergéométrique de Gauss on associe la fraction continue de Gauss

$$\begin{aligned} G(z) = G(a,b,c;z) &= {}_2F_1\left(a,\ b+1\ ;\ c+1 \mid z\right) / {}_2F_1\left(a,\ b\ ;\ c \mid z\right) \\ &= 1/\Big(1 - g_1 z/\big(1 - g_2 z/(\cdots)\big)\Big) \end{aligned}$$

à coefficients

$$\begin{aligned} g_{2n-1} &= (a+n-1)(c-b+n-1)/\big((c+2n-2)(c+2n-1)\big), \\ g_{2n} &= (b+n)(c-a+n)/\big((c+2n-1)(c+2n)\big). \end{aligned}$$

J. Wolfart [61] a montré que si les paramètres a, b, c sont rationnels, $c \neq 0, -1, -2, \cdots$, et si $G(z)$ n'est pas une fonction algébrique, alors pour presque toutes les valeurs algébriques de l'argument z la valeur de $G(z)$ est transcendante. Il utilise le théorème de G. Wüstholz [63] ainsi que des résultats de G. Shimura et Y. Taniyama sur les variétés abéliennes.

Pour les nombres dont nous venons de parler, liés aux fonctions hypergéométriques, dont on sait établir la transcendance, on connaît également des mesures d'approximation par des nombres algébriques (voir [25] et [27, 28] notamment).

Les fonctions hypergéométriques de Gauss sont des cas particuliers d'une famille plus vaste, formée des *fonctions hypergéométriques généralisées* (voir par exemple [25] Chap. 2, § 6).

Pour p entier ≥ 2 et $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_{p-1}$ et z nombres complexes avec

$b_i \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $|z| < 1$, on définit

$$ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1 \;,\; \ldots \;,\; a_p \\ b_1, \ldots, b_{p-1} \end{matrix} \;\Big|\; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n} \cdot \frac{z^n}{n!}. $$

EXEMPLE 6.6. *Les fonctions*

$$ {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1/n \\ \; \end{matrix} \;\Big|\; z^n \right) = \sqrt[n]{1 - z^n} $$

et

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1/4, 1/2, 3/4 \\ 1/3, 2/3 \end{matrix} \;\Big|\; \frac{2^8 z}{3^3} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4k}{k} z^k $$

sont algébriques. La fonction de Bessel

$$ J_0(z) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} \; \\ 1 \end{matrix} \;\Big|\; \frac{-z^2}{4} \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} $$

est transcendante.

Par récurrence sur p à partir de (6.3) on démontre:

PROPOSITION 6.7. *Pour $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_{p-1}$ nombres rationnels avec $p \geq 2$, $b_i \notin \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et pour $z \in \overline{\mathbf{Q}}$ avec $|z| < 1$, on a*

$$ {}_pF_{p-1}\left(\begin{matrix} a_1 \;,\; \ldots \;,\; a_p \\ b_1, \ldots, b_{p-1} \end{matrix} \;\Big|\; z \right) \in \frac{1}{\pi^{p-1}} \mathcal{P}. $$

On peut consulter [25] pour connaître l'état de la question de la nature arithmétique des valeurs de fonctions hypergéométriques généralisées, aussi bien sous l'aspect qualitatif (irrationalité, transcendance, indépendance algébrique) que quantitatif (mesures d'approximation, de transcendance ou d'indépendance algébrique).

7. Mesure de Mahler de polynômes en plusieurs variables. Soit $P \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ un polynôme de Laurent non nul en n variables.

On définit la mesure de Mahler $\mathrm{M}(P)$ et la mesure de Mahler logarithmique $\mu(P)$ par

$$\mu(P) = \log \mathrm{M}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log \left| P(e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n}) \right| dt_1 \cdots dt_n.$$

Dans le cas le plus simple $n = 1$ on écrit

$$P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_{d-i} z^i = a_0 \prod_{i=1}^{d} (z - \alpha_i)$$

et on a

$$\mathrm{M}(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

On en déduit notamment $\mu(P) \in \mathcal{P}$.

Plus généralement, pour $P \in \overline{\mathbf{Q}}[z_1, \ldots, z_n, z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}]$ on a

$$\mu(P) \in \frac{1}{\pi^n} \mathcal{P}.$$

D. Boyd et C.J. Smyth (voir les références dans [12]) ont calculé un certain nombre d'exemples de valeurs de la fonction μ qu'ils ont exprimées en termes de valeurs spéciales de fonctions L attachées à des caractères de Dirichlet. D. Boyd et F. Rodriguez Villegas ont obtenu des résultats du même genre faisant intervenir des fonctions L attachées à des courbes elliptiques. Ensuite D. Boyd, F. Rodriguez Villegas, V. Maillot et S. Vandervelde ont exprimé certaines mesures de Mahler logarithmiques à l'aide de combinaisons de valeurs de la fonction dilogarithme. Mis à part le célèbre exemple

$$\mu(1 + z_1 + z_2 + z_3) = \frac{7}{2\pi^2} \zeta(3).$$

dû à C.J. Smyth, les résultats connus concernent principalement le cas de deux variables; cependant les travaux de C. Deninger donnent des espoirs pour le cas général.

8. Exponentielles de périodes et périodes exponentielles.

8.1. Exponentielles de périodes. Parmi les suggestions de Kontsevich et Zagier dans [37], on relève dans le § 1.2 celle qui prédit que les nombres $1/\pi$ et e ne sont pas des périodes. Parmi les candidats à ne pas être des périodes on peut ajouter e^{π} et e^{π^2}.

On connaît la transcendance de e^{π} (A.O. Gel'fond, 1929 – c'est une conséquence du théorème 2.1), mais pas celle de e^{π^2}.

CONJECTURE 8.1. *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des nombres algébriques non nuls. Pour $j = 1, 2, 3$ soit $\log \alpha_j \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ un logarithme non nul de α_j, c'est-à-dire un nombre complexe non nul tel que $\mathrm{e}^{\log \alpha_j} = \alpha_j$. Alors*

$$(\log \alpha_1) \log \alpha_2) \neq \log \alpha_3.$$

EXEMPLE 8.2. *Avec $\log \alpha_1 = \log \alpha_2 = i\pi$ on déduit la transcendance du nombre e^{π^2}. Un autre exemple est la transcendance du nombre $2^{\log 2}$.*

D'autres conjectures sont proposées dans [58], à la fois pour la fonction exponentielle (conjectures des trois, quatre, cinq exponentielles) et pour les fonctions elliptiques. Des cas très particuliers de ces conjectures sont établis. L'appendice de [58] par H. Shiga établit un lien avec des périodes de surfaces de Kummer.

Les résultats partiels que l'on connaît sur la conjecture 8.1 et les questions autour de la conjecture des quatre exponentielles [38, 57, 58] reposent sur la méthode de transcendance qui a permis à Th. Schneider de résoudre le septième problème de Hilbert en 1934. On peut noter que cette méthode fait jouer un rôle essentiel au théorème d'addition algébrique de la fonction exponentielle, à savoir $e^{x+y} = e^x e^y$, et n'utilise pas l'équation différentielle de cette fonction, contrairement à ce qui est suggéré à la fin du § 2.4 de [37]. Une autre méthode de transcendance qui ne fait pas intervenir de dérivations est celle de Mahler qui fait l'objet du livre de K. Nishioka [43]. Notons à ce propos que la conjecture 5.4 de [59] sur la transcendance de nombres dont le développement dans une base est donné par une suite «automatique», qui faisait l'objet de travaux de J.H. Loxton et A.J. van der Poorten utilisant la méthode de Mahler, vient d'être résolue par B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Lucas [2, 1], grâce à une méthode entièrement différente de celle de Mahler, basée sur le théorème du sous-espace de W.M. Schmidt.

La conjecture 8.1 est un cas très particulier de la conjecture selon laquelle *des logarithmes* **Q***-linéairement indépendants de nombres algébriques sont algébriquement indépendants.* Un des exemples les plus importants de nombres qui s'expriment comme valeur d'un polynôme en des logarithmes de nombres algébriques est celui de déterminants de matrices dont les coefficients sont de tels logarithmes. Certains régulateurs sont de cette forme, et décider s'ils sont nuls ou non peut être considéré comme un problème de transcendance. Quand ils ne sont pas nuls on conjecture que ces déterminants sont transcendants, et que ce ne sont pas de nombres de Liouville.

8.2. Périodes exponentielles. La définition suivante est donnée dans [37] § 4.3. Il est précisé dans l'introduction de [37] que la dernière partie de ce texte est l'œuvre uniquement du premier auteur.

Définition Une *période exponentielle* est une intégrale absolument convergente du produit d'une fonction algébrique avec l'exponentielle d'une fonction algébrique, sur un ensemble semi-algébrique, où tous les polynômes intervenant dans la définition ont des coefficients algébriques.

Exemple 8.3.

Dans l'algèbre des périodes exponentielles, on trouve évidemment les périodes, mais aussi les nombres

$$e^\beta = \int_{-\infty}^{\beta} e^x dx$$

quand β algébrique, le nombre

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

les valeurs de la fonction Gamma aux points rationnels:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \cdot \frac{dt}{t},$$

ainsi que les valeurs des fonctions de Bessel aux points algébriques

$$J_n(z) = \int_{|u|=1} \exp\left(\frac{z}{2}\Big(u - \frac{1}{u}\Big)\right) \frac{du}{u^{n+1}}\cdot$$

Ces exemples sont interprétés par S. Bloch et H. Esnault [11] comme des périodes issues d'une dualité entre cycles homologiques et formes différentielles pour des connections ayant des points singuliers irréguliers sur des surfaces de Riemann.

8.3. Constante d'Euler. On ne sait pas démontrer que le nombre

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.5772157\ldots$$

est irrationnel [54], mais on attend mieux:

Conjecture 8.4. *Le nombre γ est transcendant.*

Un résultat encore plus fort est suggéré par Kontsevich et Zagier [37] § 1.1 et § 4.3:

Conjecture 8.5. *Le nombre γ n'est pas une période, ni même une période exponentielle.*

8.4. Un analogue en dimension 2 de la constante d'Euler. Pour chaque $k \geq 2$, désignons par A_k l'aire minimale d'un disque fermé de $\mathbf{R}^2$ contenant au moins k points de $\mathbf{Z}^2$. Pour $n \geq 2$, posons [31]

$$\delta_n = -\log n + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{A_k} \quad \text{et} \quad \delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n.$$

F. Gramain conjecture:

Conjecture 8.6.

$$\delta = 1 + \frac{4}{\pi}\big(\gamma L'(1) + L(1)\big),$$

où γ est la constante d'Euler et

$$L(s) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (2n+1)^{-s}.$$

est la fonction L du corps quadratique $\mathbf{Q}(i)$ (fonction Bêta de Dirichlet).

Comme $L(1) = \pi/4$ et

$$\begin{aligned} L'(1) &= \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} \cdot \frac{\log(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{4}\bigl(3\log\pi + 2\log 2 + \gamma - 4\log\Gamma(1/4)\bigr), \end{aligned}$$

la conjecture 8.6 s'écrit aussi

$$\delta = 1 + 3\log\pi + 2\log 2 + 2\gamma - 4\log\Gamma(1/4) = 1.82282524\ldots$$

Le meilleur encadrement connu pour δ est [31]

$$1.811\ldots < \delta < 1.897\ldots$$

Il semble vraisemblable que ce nombre δ n'est pas une période (et par conséquent est transcendant), mais, étant donné le peu d'information que nous avons sur lui, ce n'est probablement pas le meilleur candidat pour résoudre la question de [37] (§ 1.2 problem 3) qui consiste à exhiber un nombre qui n'est pas une période!

9. Caractéristique finie. Les questions diophantiennes concernant les nombres complexes ont des analogues dans les corps de fonctions en caractéristique finie qui ont fait l'objet de nombreux travaux [30]. Les premiers outils développés par L. Carlitz (1935) ont été utilisés par I.I. Wade (1941) qui a obtenu les premiers énoncés de transcendance. Après divers travaux, notamment de J.M. Geijsel et P. Bundschuh en 1978, la théorie a été développée de manière approfondie par Jing Yu à partir des années 1980, d'abord dans le cadre des modules elliptiques qui avaient été introduits par V.G. Drinfel'd en 1974, ensuite dans le cadre des t-motifs de G. Anderson à partir de 1986. Pendant longtemps les résultats en caractéristique finie étaient des analogues des résultats classiques relatifs aux nombres complexes, jusqu'à ce que Jing Yu obtiennent des énoncés qui vont plus loin que leurs analogues complexes [64].

L'utilisation, introduite dans ce contexte par L. Denis en 1990, de la dérivation par rapport à la variable du corps de fonctions, produit des énoncés qui n'ont pas d'équivalents dans le cas classique des nombres complexes. Une autre particularité de la caractéristique finie est la possibilité de considérer des produits tensoriels, permettant parfois de ramener des questions d'indépendance algébrique à des problèmes d'indépendance linéaire (un bel exemple est donné par S. David et L. Denis dans [22]).

Deux exposés de synthèse sur ce thème sont donnés, l'un en 1992 par Jing Yu dans [64], l'autre en 1998 par W.D. Brownawell [13].

9.1. Un analogue en caractéristique finie de la constante d'Euler. Un résultat remarquable en caractéristique finie est la transcendance de l'analogue de la constante d'Euler. Le nombre complexe γ peut être défini par

$$\gamma = \lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right)$$

quand ζ désigne la fonction zêta de Riemann:

$$\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}.$$

Dans ce produit p décrit l'ensemble de nombres premiers. En caractéristique finie le produit correspondant porte sur les polynômes irréductibles unitaires à coefficients dans un corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Dans ce cas le produit converge au point $s = 1$, et la valeur en ce point est donc un analogue de la constante d'Euler (dans un complété C d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q((1/T))$). Cet élément de C est transcendant sur $\mathbf{F}_q(T)$: cela a été démontré par G.W. Anderson et D. Thakur en 1990 [5], mais ils remarquent que les outils dont disposait I.I. Wade auraient suffit pour établir le résultat dès 1940.

9.2. La fonction Gamma de Thakur. Par analogie avec le produit infini (2.8) définissant la fonction Gamma d'Euler, D. Thakur définit (cf. [13])

$$\Gamma(z) = z^{-1}\prod_{n\in A_+}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$$

où $A = \mathbf{F}_q[T]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{F}_q$ et A_+ l'ensemble des polynômes unitaires. Cette fonction Gamma est méromorphe sur C. Elle satisfait des relations analogues aux relations standard satisfaites par la fonction Gamma d'Euler. De même, le pendant en caractéristique finie des relations de Deligne-Koblitz-Ogus a été établi par Deligne, Anderson et Thakur (voir [14]).

En 1992 G. Anderson a introduit une notion de fonction soliton, qui, selon [14], est un analogue en dimension supérieure de la fonction shtuka pour les modules de Drinfeld de rang 1. Les fonctions méromorphes que R. Coleman avait utilisées pour étudier les endomorphismes de Frobenius sur les courbes de Fermat et d'Artin-Schreier avaient été interprétées par Thakur en termes de sa fonction Gamma. C'est en développant le parallèle avec certains éléments de la théorie des équations aux dérivées partielles que G. Anderson a été amené à introduire ses solitons. Cette théorie a été utilisée en 1997 par S.K. Sinha, qui a construit des t-modules ayant des périodes dont les coordonnées sont des multiples par un nombre algébrique de valeurs de la fonction Gamma de Thakur en des points rationnels a/f, avec a et f dans A_+. Grâce aux résultats de transcendance de Jing Yu, S.K. Sinha a pu ainsi obtenir la transcendance de certaines valeurs de la fonction Gamma de Thakur en des points rationnels.

Ces travaux ont été poursuivis par W.D. Brownawell et M.A. Papanikolas qui montrent dans [14] que les relations linéaires à coefficients algébriques entre les valeurs de la fonction Gamma de Thakur sont celles qui résultent de Deligne-Anderson-Thakur. On peut considérer qu'il s'agit de l'analogue pour les corps de fonctions sur un corps fini du théorème de Wolfart et Wüstholz [62] sur l'indépendance linéaire des valeurs de la fonction Bêta. Ce qui est spécialement remarquable est qu'il est possible d'aller plus loin: dans [4], G.W. Anderson, W.D. Brownawell et M.A. Papanikolas montrent que *toutes les relations de dépendance algébrique entre les valeurs de la fonction Gamma de Thakur résultent des relations de Deligne-Anderson-Thakur.*

Pour les valeurs de la fonction Gamma la situation en caractéristique finie est donc bien plus en avance que dans le cas classique où la conjecture de Rohrlich-Lang semble hors d'atteinte.

Tout récemment M. Papanikolas a établi l'analogue pour les modules de

Drinfeld de la conjecture sur l'indépendance algébrique de logarithmes de nombres algébriques (cf. § 8.1).

Remerciements. Ce texte résume des exposés donnés en 2003 et 2004 à Sharhood (Iran), Taipei (Taiwan), Bangalore (Inde), Oulu (Finlande), Séoul (Corée), Mahdia (Tunisie) et Besançon (France). Merci en particulier à Khalifa Trimèche pour son invitation au congrès annuel de la Société Mathématique de Tunisie en mars 2004 qui donne lieu à cette rédaction.

REFERENCES

[1] B. Adamczewski & Y. Bugeaud – «On the complexity of algebraic numbers», Submitted to Annals of Maths.

[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud & F. Lucas – «Sur la complexité des nombres algébriques», C. R. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 11–14.

[3] S. D. Adhikari, N. Saradha, T. N. Shorey & R. Tijdeman – «Transcendental infinite sums», *Indag. Math. (N.S.)* **12** (2001), no. 1, p. 1–14.

[4] G. W. Anderson, W. D. Brownawell & M. A. Papanikolas – «Determination of the algebraic relations among special gamma-values in positive characteristic», math.NT/0207168 — to appear in Annals of Maths. **159**, 2004.

[5] G. W. Anderson & D. S. Thakur – «Tensor powers of the Carlitz module and zeta values», *Ann. of Math. (2)* **132** (1990), no. 1, p. 159–191.

[6] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, E13, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[7] — , «Quelques conjectures de transcendance issues de la géométrie algébrique», Prépublication de l'institut de Mathématiques de Jussieu, **121**, 1997.

[8] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain & G. Philibert – «Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin», *Invent. Math.* **124** (1996), no. 1-3, p. 1–9.

[9] C. Bertolin – «Périodes de 1-motifs et transcendance», *J. Number Theory* **97** (2002), no. 2, p. 204–221.

[10] F. Beukers & J. Wolfart – «Algebraic values of hypergeometric functions», in *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)*, Cambridge Univ. Press, 1988, p. 68–81.

[11] S. Bloch & H. Esnault – «Gauss-Manin determinants for rank 1 irregular connections on curves», *Math. Ann.* **321** (2001), no. 1, p. 15–87.

[12] D. W. Boyd – «Mahler's measure and special values of L-functions—some conjectures», in *Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, de Gruyter, Berlin, 1999, p. 27–34.

[13] W. D. Brownawell – «Transcendence in positive characteristic», in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 317–332.

[14] W. D. Brownawell & M. A. Papanikolas – «Linear independence of gamma values in positive characteristic», *J. Reine Angew. Math.* **549** (2002), p. 91–148.

[15] S. Bruiltet – «D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité: le cas de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$», *Acta Arith.* **104** (2002), no. 3, p. 243–281.

[16] Y. Bugeaud – *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Math., Cambridge University Press, 2004, à paraître.

[17] P. Bundschuh – «Zwei Bemerkungen über transzendente Zahlen», *Monatsh. Math.* **88** (1979), no. 4, p. 293–304.

[18] P. Cartier – «Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents», *Astérisque* (2002), no. 282, p. Exp. No. 885, viii, 137–173, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[19] P. Cohen & J. Wolfart – «Modular embeddings for some nonarithmetic Fuchsian groups», *Acta Arith.* **56** (1990), no. 2, p. 93–110.

[20] P. B. Cohen & G. Wüstholz – «Application of the André-Oort conjecture to some questions in transcendence», in *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 89–106.

[21] G. V. Čudnovs′kiĭ – «Algebraic independence of constants connected with the exponential and the elliptic functions», *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A* (1976), no. 8, p. 698–701, 767.

[22] S. David & L. Denis – «Périodes de modules de Drinfel'd — "indépendance quadratique en rang II"», *J. Ramanujan Math. Soc.* **17** (2002), no. 1, p. 65–83.

[23] P. Deligne – «Cycles de Hodge absolus et périodes des intégrales des variétés abéliennes», *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1980/81), no. 2, p. 23–33.

[24] B. Edixhoven & A. Yafaev – «Subvarieties of Shimura varieties», *Ann. of Math. (2)* **157** (2003), no. 2, p. 621–645.

[25] N. I. Fel′dman & Y. V. Nesterenko – «Transcendental numbers», in *Number theory, IV*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 44, Springer, Berlin, 1998, p. 1–345.

[26] S. Fischler – «Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)», Séminaire Bourbaki 2002/03, exp. no. 910 ; à paraître dans Astérisque ; preprint math.NT/0303066.

[27] É. Gaudron – «Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 12, p. 1059–1064.

[28] É. Gaudron – «Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes», manuscrit non publié, 2004.

[29] A. B. Goncharov – «Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular

varieties », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 361–392.

[30] D. Goss, D. R. Hayes & M. I. Rosen (éds.) – *The arithmetic of function fields*, Ohio State University Mathematical Research Institute Publications, 2, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1992.

[31] F. Gramain & M. Weber – « Computing an arithmetic constant related to the ring of gaussian integers », *Math. Comp.* **44** (1985), no. 169, p. 241–250 and S13–S16, Corrigendum, id. 48 (1987) no. 178 p. 854.

[32] P. Grinspan – « Measures of simultaneous approximation for quasi-periods of abelian varieties », *J. Number Theory* **94** (2002), no. 1, p. 136–176.

[33] B. H. Gross – « On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg », *Invent. Math.* **45** (1978), no. 2, p. 193–211.

[34] A. Grothendieck – « On the de Rham cohomology of algebraic varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 29, p. 95–103.

[35] M. E. Hoffman – « The algebra of multiple harmonic series », *J. Algebra* **194** (1997), no. 2, p. 477–495.

[36] N. Koblitz & D. Rohrlich – « Simple factors in the Jacobian of a Fermat curve », *Canad. J. Math.* **30** (1978), no. 6, p. 1183–1205.

[37] M. Kontsevich & D. Zagier – « Periods », in *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, p. 771–808.

[38] S. Lang – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.

[39] — , « Relations de distributions et exemples classiques », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année: 1977/78, Théorie des nombres, Fasc. 2*, Secrétariat Math., Paris, 1978, p. Exp. No. 40, 6.

[40] D. Masser – « Interpolation on group varieties », in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1982)* (D. Bertrand & M. Waldschmidt, éds.), Progress in Math., no. 31, Birkhäuser, 1983, p. 151–171.

[41] Y. V. Nesterenko – « Modular functions and transcendence questions », *Mat. Sb. [Sb. Math]* **187** (1996), no. 9, p. 65–96 [1319–1348].

[42] Y. V. Nesterenko & P. Philippon (éds.) – *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math., no. 1752, Springer, 2001.

[43] K. Nishioka – *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1631, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[44] F. Oort – « Canonical liftings and dense sets of CM-points », in *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, Sympos. Math., XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 228–234.

[45] F. Pellarin – « Idéaux stables dans certains anneaux différentiels de formes quasi-modulaires de hilbert », math.NT/0407381, 2004.

[46] A. J. Van der Poorten – « On the arithmetic nature of definite integrals of rational

functions. », *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971), p. 451–456.

[47] G. Rhin & C. Viola – « The group structure for $\zeta(3)$ », *Acta Arith.* **97** (2001), no. 3, p. 269–293.

[48] T. Schneider – « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **14** (1934), p. 65–74.

[49] — , « Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale », *Math. Ann.* **113** (1937), p. 1–13.

[50] — , « Zur Theorie des Abelschen Funktionen und Integrale », *J. reine angew. Math.* **183** (1941), p. 110–128.

[51] T. Schneider – *Introduction aux nombres transcendants*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[52] D. Shanks – « Incredible identities », *Fibonacci Quart.* **12** (1974), p. 271, 280.

[53] C. L. Siegel – *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, no. 16, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

[54] J. Sondow – « Criteria for irrationality of Euler's constant », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 11, p. 3335–3344 (electronic).

[55] T. Terasoma – « Mixed Tate motives and multiple zeta values », *Invent. Math.* **149** (2002), no. 2, p. 339–369.

[56] K. G. Vasil′ev – « On the algebraic independence of the periods of Abelian integrals », *Mat. Zametki* **60** (1996), no. 5, p. 681–691, 799.

[57] M. Waldschmidt – *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[58] — , « Transcendence results related to the six exponentials theorem », Appendix by H. Shiga: Periods of a Kummer surface, Hyderabad, 2003.

[59] — , « Open diophantine problems », *Moscow Mathematical Journal* **4** (2004), p. 245–305.

[60] J. Wolfart – « Werte hypergeometrischer Funktionen », *Invent. Math.* **92** (1988), no. 1, p. 187–216.

[61] — , « Values of Gauss' continued fractions », in *Number theory, Vol. II (Budapest, 1987)*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 51, North-Holland, Amsterdam, 1990, p. 1051–1063.

[62] J. Wolfart & G. Wüstholz – « Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen », *Math. Ann.* **273** (1985), no. 1, p. 1–15.

[63] G. Wüstholz – « Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen », *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), no. 3, p. 501–517.

[64] J. Yu – « Transcendence in finite characteristic », in *The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 2, de Gruyter, Berlin, 1992, p. 253–264.