C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada - Vol. XII, No. 5, October 1990 octobre 173

Sur l'équation de Pillai et la différence entre deux produits de puissances de nombres entiers

Par Michel WALDSCHMIDT

Institut Henri Poincaré, 11, rue P. et M. Curie,
75231 PARIS Cedex 05 FRANCE

Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.

Summary. We give an estimate from below for the distance between two products of powers of rational integers. As an example, we show that for positive integers x, y, m, n with $y \geq 2$, $x^m > y^n$ and $m/\log y < 1.37 \cdot 10^{12}$, we have $x^m - y^n > x^{m/2}$.

Résumé. Soient k et n deux entiers positifs avec $1 \leq k \leq n$, et soient $a_1, \ldots, a_n$, $h_1, \ldots, h_n$ des entiers positifs, avec

$$a_1^{h_1} \cdots a_k^{h_k} \neq a_{k+1}^{h_{k+1}} \cdots a_n^{h_n}.$$

On cherche à minorer la distance entre ces deux nombres. Les seules estimations effectives non triviales valables pour n quelconque utilisaient jusqu'ici la méthode de Baker. Nous proposons une nouvelle minoration provenant d'une méthode de transcendance différente, et nous en donnons une application à l'équation de Pillai $x^m - y^n = k$.

1. Enoncé du résultat.

Soient n un entier ≥ 2, $a_1, \ldots, a_n$ des nombres entiers positifs multiplicativement indépendants, et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres entiers rationnels non tous nuls ; ainsi

$$a_1^{b_1} \cdots a_n^{b_n} \neq 1.$$

Nous ordonnons les nombres $a_i^{|b_i|}$ de telle sorte que $a_n^{|b_n|}$ soit le plus grand, et nous appelons a_0 le plus petit des a_i avec $1 \le i \le n-1$:

$$\max_{1\le i\le n-1} |b_i| \log a_i \le |b_n| \log a_n, \qquad a_0 = \min_{1\le i\le n-1} a_i.$$

Nous posons également

$$M = \max\{n^{4n} e^{20n+10}\,;\, |b_n|/\log a_0\}.$$

<u>Théorème</u>. <u>Sous ces hypothèses, on a</u>

$$\left|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n} - 1\right| > \exp\{-C_0(n)\log M \log a_1 \cdots \log a_n\},$$

<u>avec</u>

$$C_0(n) < e^{3n+9} n^{4n+5}.$$

Les meilleures minorations générales et explicites connues jusqu'à maintenant étaient celles de [BGMMS]. Notre énoncé est légérement plus précis car il ne fait pas intervenir de terme parasite en $\log\log a$ avec $a = \max_{1\le i\le n} a_i$.

La condition $M \ge n^{4n}e^{20n+10}$ n'est pas vraiment restrictive : en comparant notre estimation avec la minoration triviale, nous allons montrer qu'il n'y a pas de restriction à supposer $|b_n|/\log a_0$ assez grand.

En effet, $\left|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n} - 1\right|$ étant un nombre rationnel non nul, il est minoré par l'inverse d'un dénominateur :

$$\left|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n} - 1\right| \ge \exp\{-n|b_n|\log a_n\}$$

grâce à notre condition $a_i^{|b_i|} \le a_n^{|b_n|}$. Par conséquent, pour établir la minoration du théorème il n'y a pas de restriction à supposer

$$(1) \qquad n|b_n| \ge C_0(n)\log M \log a_1 \cdots \log a_{n-1}.$$

Le membre de droite de (1) est au moins $C_0(n)\log M \log a_0$; en minorant $\log M$ par $e^3 n$, tant que notre constante $C_0(n)$ sera supérieure à $n^{4n+5}e^{3n}$, on pourra supposer sans perte de généralité

$$|b_n|/\log a_0 \geq n^{4n+5}e^{3n+3}.$$

De plus, si $n \geq 3$, le membre de droite de (1) est plus grand que $n(\log a_0)^2$, donc si on remplaçait $|b_n|/\log a_0$ par $|b_n|$ dans la définition de M on ne perdrait même pas un facteur 2 dans l'estimation finale.

2. Démonstration.

Nous montrons d'abord comment se ramener aux notations de [W2] (avec un passage aux logarithmes), puis nous indiquons comment conclure en reprenant les arguments de [W2]. Pour terminer nous explicitons le calcul de la constante $C_0(n)$.

a) Dès que $\left|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n}-1\right| \leq 1/3$, on a

$$|b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n| \leq \frac{3}{2}\left|a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n}-1\right|$$

(voir par exemple [PW] lemme 2.3). Le problème est donc ramené à la minoration d'une combinaison linéaire de logarithmes de nombres algébriques.

b) Pour nous ramener aux notations de [W2], nous posons

$$\log A_i = e(n+1)\log a_i, \qquad E = e, \qquad D = 1,$$

$$\epsilon_1 = 0.23, \qquad \epsilon_2 = 2\cdot 10^{-5}, \qquad \epsilon_3 = 1/76,$$

$$G = (1+\epsilon_1)\log M, \qquad Z = 10 + 2\log n,$$

$$c_3 = \frac{n(2n+3)^2}{n+1}\cdot(1+\epsilon_3),$$

$$\begin{aligned} c_2 &= n(n+1)^2\left(\frac{3n+1}{2}\right)^{n-1} c_3^{n+1}\cdot(1+\epsilon_2) \\ &= \frac{2n^{n+2}(3n+1)^{n-1}(2n+3)^{2n+2}}{2^n(n+1)^{n-1}}\cdot(1+\epsilon_3)^{n+1}\cdot(1+\epsilon_2), \end{aligned}$$

$$c_1 = c_4 = \frac{3n+1}{2n} c_2.$$

On va voir que le théorème est vrai avec

$$(2) \qquad C_0(n) = (5 + \log n)e^n(n+1)^n(1+\epsilon_1)(5n+13)c_2.$$

Vérifions d'abord que l'on a

$$G \geq \max\{2(n+1)Z\,;\, 2 + \log(|b_n|/\log a_0)\}.$$

En effet, pour $n \geq 2$, on vérifie $4\log n + 10 < \epsilon_1(4n\log n + 20n + 10)$, donc $(1+\epsilon_1)\log M > 4(n+1)(5+\log n)$. D'autre part on a $\log M \geq 50 + 8\log 2 > 2/\epsilon_1$, donc $2 + \log M < (1+\epsilon_1)\log M$. La minoration annoncée de G est bien vérifiée.

La principale différence avec [W2] est l'absence d'un facteur 2 dans la définition de c_3 ; cela permet de gagner un coefficient 2^{n+1} sur ce que nous donnerait une application brutale des résultats de [W2]. Cette amélioration est due au fait que les a_i sont réels positifs (dans [W2] on travaille avec des nombres algébriques complexes). Pour justifier ce raffinement, on note d'abord que, dans le lemme 2.1 de [W1], quand les u_{ij} sont réels, on peut remplacer l'exposant 2ϱ de l'hypothèse par ϱ. Il en résulte que, dans l'hypothèse (2.8) du corollaire 2.7 de [W1], on peut omettre le facteur 2 à gauche, quand on suppose que les fonctions analytiques considérées ont un développement de Taylor à l'origine à coefficients réels. Ainsi, quand les nombres $\log\alpha_j$ de [W2] sont réels, on peut omettre le facteur 2 à gauche de (5.8) et de (6.4). La seule correction à apporter est dans la minoration (8.2) des c_i au paragraphe 8 de [W2] (II) : dans le cas $n = 2$ on a

$$c_3 > 33, \quad c_2 > 2\cdot 10^6, \quad c_1 = c_4 > 3.9\cdot 10^6.$$

Cela permet de vérifier, pour $n \geq 2$,

$$c_3 \geq 8n^2 + 1, \quad c_2 > 1.2\cdot 10^5 n^4, \quad c_1 = c_4 > 2\cdot 10^5 n^4.$$

On remplace finalement la condition (8.6) de [W2] par la majoration $C(n) \leq (5n+13)c_2/2$.

c) Il ne reste plus qu'à calculer numériquement les valeurs de C_0 données par (2) :

$n =$	2	3	4	5
$C_0(n) <$	$2.45 \cdot 10^{10}$	$4.65 \cdot 10^{15}$	$2.21 \cdot 10^{21}$	$2.22 \cdot 10^{27}$

$n =$	6	7	8	9
$C_0(n) <$	$4.22 \cdot 10^{33}$	$1.39 \cdot 10^{40}$	$7.43 \cdot 10^{46}$	$6.11 \cdot 10^{53}$

et

$$C_0(n) < e^{3n+6.6} n^{4n+5} \qquad \text{pour } n \geq 10.$$

3. Application à l'équation de Pillai.

Le cas $n = 2$ du théorème fournit l'énoncé suivant :

Corollaire. Soient x, y, m, n, k des entiers positifs satisfaisant $x^m - y^n = k$. On suppose

$$x^m \geq k^2 \qquad \text{et} \qquad y \geq 2.$$

Alors on a

$$m < C \log y \qquad \text{avec} \qquad C = 1.37 \cdot 10^{12}.$$

Remarque. L'existence d'une constante absolue C vérifiant la conclusion du corollaire résulte déjà du théorème 2.2 de [PW], mais la constante n'y est pas explicite. Toutes les autres estimations (notamment celles de [BGMMS]) font intervenir un terme logarithmique supplémentaire. D'un point de vue numérique, l'estimation que l'on déduit de la section 9b de [MW], à savoir

$$m \leq 9600(\log y)\big(8 + \log\max\{m,n\}\big)^2,$$

(9600 apparaît comme majorant de $2(\log 3/\log 2)^2 1905$) est meilleure tant que m et n ne sont pas trop grands :

$$\max\{m,n\} \leq 10^{5184}.$$

Références.

[BGMMS] Blass J., Glass A.M., Manski D.K., Meronk D.B. and Steiner R.P.— Constants for lower bounds for linear forms in the logarithms of algebraic numbers ; Acta Arith., **55** (1990), 1–22.

[MW] Mignotte M. and Waldschmidt M.— Linear forms in two logarithms and Schneider's method, III ; Ann. Fac. Sci. Toulouse, **97** (1989), 43–75.

[PW] Philippon P. and Waldschmidt M.— Lower bounds for linear forms in logarithms ; in : *New Advances in Transcendence Theory*, ed. A.Baker, Cambridge Univ. Press (1988), 280–312.

[W1] Waldschmidt M.— Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques ; J. Analyse Math., à paraître.

[W2] Waldschmidt M.— Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques, (I) et (II) ; manuscrit.

Received August 27, 1990

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
C.N.R.S."Problèmes Diophantiens"
Institut Henri Poincaré
11, rue P. et M. Curie
75231 PARIS Cedex 05